Essentiële spectra in semi-simpele Banach algebras

596900

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Memorandum 81-14

augustus 1981

Essentiële spectra in semi-simpele Banach algebras

door

H. Heijmans

Technische Hogeschool

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

Nederland

ESSENTIËLE SPECTRA IN SEMI-SIMPELE BANACH ALGEBRAS

Inleiding

In [CPY] worden voor een begrensde, lineaire operator T op een Banachruimte X een aantal begrippen besproken zoals de ascent, descent en index. Deze grootheden zullen we aanduiden met resp. $\alpha(T)$, $\delta(T)$ en ind(T). De bedoeling van dit werk is, de theorie die in [CPY] besproken wordt (en in de referenties daar gegeven) uit te breiden tot willekeurige Banach-algebras. (Bedenk dat B(X), de ruimte van begrensde lineaire operatoren op de Banachruimte X een Banach-algebra is.) Een eerste stap hiertoe is gezet door B.A. Barnes in 1967 (Zie [Ba_1] en [Ba_2]) en door L.D. Pearlman in 1974 (Zie [Pe]). Beiden beperkten zich daarbij tot semi-simpele Banach-algebras, d.w.z. met een radicaal dat alleen uit het nul-element bestaat. Ook wij zullen ons daartoe beperken. Het grootste gedeelte van deze theorie zal gaan over Riesz-Schauder-elementen, en het Browder-essentiële spectrum voor een willekeurig element.

We beginnen met in het kort de theorie uiteen te zetten zoals die in [Ba_1] en [Ba_2] besproken is. Dit betreft de definitie en eigenschappen van Fredholm-elementen uit de algebra. (Zie ook [Pe], [Sm], en [CPY], Chapter 6.)

§ 1. De gegeneraliseerde Fredholmtheorie

In het volgende is A steeds een complexe, semi-simpele Banach-algebra met éénheidselement 1. We zullen nu het begrip "socle" definiëren, dat in het verdere verloop een zeer belangrijke rol speelt.

Definitie: Als A minimale linkse idealen heeft, dan heet het kleinste linkse ideaal, dat deze alle omvat, de linkse socle van A. De rechtse socle wordt op analoge wijze gedefinieerd. Als A zowel minimale linkse als minimale rechtse idealen bezit, en de linkse socle samenvalt met de rechtste socle, dan noemen we dit de socle van A, en zeggen we dat de socle bestaat. Dit tweezijdig ideaal geven we aan met S_A.

Voor een semi-simpele Banach-algebra bestaat de socle altijd. (Zie bijv. [BD], prop. IV.10.) De elementen van de socle noemen we eindig.

De theorie die nu volgt tot aan §4, is terug te vinden in $[Ba_1]$, $[Ba_2]$ en [Pe]. We zullen hier alleen de resultaten geven, met weglating van de bewijzen.

Een element $e \in A$ heet een idempotent als $e^2 = e$. Een idempotent e heet minimaal als eAe een divisie-algebra is. Als e een minimaal idempotent is, dan is Ae een minimaal links ideaal en eA een minimaal rechts ideaal. De verzameling van alle minimale idempotenten uit A geven we aan met E_A. Als $E_A = \emptyset$, dan is $S_A = \{0\}$.

De afsluiting van de socle van $A, \bar{S}_A$ is een tweezijdig gesloten ideaal. Derhalve is de quotiënt-algebra $A/\bar{S}_A$ een Banach-algebra.

Zij $\pi : A \to A/\bar{S}_A$ het quotiënt homomorfisme.

Definitie: Een element $a \in A$ heet Fredholm als het element $\pi(a)$ inverteerbaar is in $A/\bar{S}_A$.

Met G_1 geven we de inverteerbare elementen uit A aan, en met G_4 de verzameling van Fredholm-elementen. De notaties G_2 en G_3 blijven gereserveerd voor andere verzamelingen.

Zij J_A het Jacobson-radicaal in de Banach-algebra $A/\bar{S}_A$, dan is het origineel van J_A in A, $\pi^{-1}(J_A)$ de doorsnede van alle primitieve idealen in A die S_A bevatten. Dit gesloten ideaal wordt aangegeven met I_A, en het ideaal van de inessentiële elementen genoemd. Uiteraard is $S_A \subseteq I_A$.

De verzameling G_4, bestaande uit Fredholm-elementen van A is een open semigroep. Voor $a \in G_4$ en $x \in I_A$ liggen a en a + x in dezelfde component van G_4.

Voor ieder tweezijdig ideaal M van A, zodanig dat $S_A \subseteq M \subseteq I_A$ geldt:

$$G_4 = \{a \in A \mid a + M \text{ is inverteerbaar in } A/M\} .$$

Voor iedere deelverzameling $K \subseteq A$ definiëren we:

$$L[K] = \{x \in A \mid xK = \{0\}\}$$
$$R[K] = \{x \in A \mid Kx = \{0\}\} .$$

L[K] resp. R[K] is een gesloten links resp. rechts ideaal van A. Verder is $L[A] = R[A] = \{0\}$ omdat A semi-simpel is. Dus voor alle $a \in A$ is:

$$L[aA] = \{x \in A \mid xa = 0\}$$
$$R[Aa] = \{x \in A \mid ax = 0\} .$$

Zij K een rechts (links) ideaal bevat in S_A, dan heeft iedere maximale, orthogonale verzameling van minimale idempotenten in K dezelfde cardinaliteit welke we aangeven met $\Theta(K)$. Dit heet de orde van K. Als $\Theta(K) = n < \infty$ en $\{e_1,\dots,e_n\}$

een maximale orthogonale verzameling van idempotenten in K is, dan is:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i A = K, \qquad \text{als } K \text{ een rechts ideaal is.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A e_i = K, \qquad \text{als } K \text{ een links ideaal is.}$$

Een rechts (links) ideaal K heeft eindige orde n dan en slechts dan als K het kleinst omvattende ideaal is van n minimale rechtse (linkse) idealen van A.

Als e een idempotent is in S_A, dan is $\Theta(Ae) = \Theta(eA) < \infty$. Dit integer geven we aan met $\Theta(e)$.

De volgende stelling is te vinden in [Ba_2] .

<u>Stelling 1.1.</u>: $a \in A$ is Fredholm dan en slechts dan als er idempotenten $e,f \in S_A$ bestaan zodat:

$$aA = (1 - f)A \ , \ Aa = A(1 - e)$$

$$A = Aa \oplus Ae \quad , \ A = aA \oplus fA \quad .$$

Voor $a \in G_4$ definiëren we: $K(a) := \Theta(L[aA]) - \Theta(R[Aa])$ K(a) heet de gegeneraliseerde Fredholm-index van a. $a \to K(a)$ is een continue functie op G_4, en derhalve constant op de verschillende componenten van G_4

$$K(ab) = K(a) + K(b) \qquad \text{voor} \quad a,b \in G_4$$

$$K(a + x) = K(a) \qquad \text{voor} \quad a \in G_4 \text{ en } x \in I_A \ .$$

Voorbeeld: Zij X een Banachruimte en B(X) de ruimte van begrensde lineaire operatoren op X, dan is B(X) een semi-simpele (primitieve) Banach-algebra.

De socle van B(X), $S_{B(X)}$ is gelijk aan het ideaal F(X) van eindige operatoren; $S_{B(X)} = F(X)$. Zij K(X) het tweezijdig gesloten ideaal van compacte operatoren: $\bar{S}_{B(X)} = \overline{F(X)} = K(X)$.
Verder is $K(X) \subseteq I_{B(X)}$, het ideaal van de inessentiële operatoren. (Zie ook [Kℓ].)
Barnes heeft aangetoond in [Ba_2] dat voor alle $T \in G_4$ geldt dat $K(T) = \text{ind}(T)$. Dit voorbeeld laat dus zien, dat bovenstaande theorie inderdaad een uitbreiding is van de Fredholmtheorie, welke o.a. bestudeerd wordt in [CPY]. Zij T een Fredholm-operator met $\text{ind}(T) = 0$, dan is er een $U \in F(X)$ zodat $T + U$ inverteerbaar is. (Zie [Be], Lemma 2.3.)

We kunnen ons nu afvragen of laatstgenoemde eigenschap uit te breiden is tot een willekeurige Banach-algebra. Een antwoord hierop wordt gegeven door Pearlman. (Zie [Pe], p. 305-307.)

Stelling 1.2.: Als A een primitieve Banach-algebra is, met éénheidselement en $a \in G_4$ met $K(a) = 0$, dan is er een $s \in S_A$ zodat $a + s$ inverteerbaar is.

We definiëren de verzameling G_3 als volgt:

$$G_3 = \{a \in A \mid a \in G_4 \wedge K(a) = 0\} .$$

§ 2. Polen van de resolvent

De nu volgende theorie is te vinden in [Pe], §2.

Zij $a \in A$ en $\lambda \in \rho(a)$, dan is de resolvent van a in λ gedefinieerd door:
$R_\lambda(a) := (\lambda - a)^{-1}$.
Hierin is $\rho(a)$ de resolventverzameling van a, en betekent $\lambda - a$ hetzelfde als $\lambda.1 - a$.
Zij f een complexwaardige functie, locaal analytisch in een open omgeving, Ω van $\sigma(a)$ (i.e. het spectrum van a), dan is:

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R_\lambda(a) d\lambda$$

waarin C een geschikte kromme binnen Ω om $\sigma(a)$ is.
Met $\sigma^{is}(a)$ resp. $\sigma^{acc}(a)$ geven we de geisoleerde - resp. de verdichtingspunten aan. Voor een verzameling $V \subseteq \mathbb{C}$ geven we met V^b de randpunten van V aan. Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\varepsilon > 0$ is $B_{\lambda,\varepsilon} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \mu| < \varepsilon\}$.
Zij nu $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a)$ en $r > 0$ zodat $\bar{B}_{\lambda_0,2r} \cap \sigma(a) = \{\lambda_0\}$.
Definieer

$$\text{voor } m \leq -1 : f_m(\lambda) = \begin{cases} 0 & , (\lambda - \lambda_0) > r \\ (\lambda - \lambda_0)^{-(m+1)} & , (\lambda - \lambda_0) < r \end{cases}$$

$$\text{voor } m \geq 0 : f_m(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)^{-(m+1)} & , (\lambda - \lambda_0) > r \\ 0 & , (\lambda - \lambda_0) < r \, . \end{cases}$$

Dan is voor alle $m \in \mathbb{Z}$ de functie $f_m(\lambda)$ locaal analytisch in de open omgeving $U = \{\lambda \mid (\lambda - \lambda_0) < r \text{ of } (\lambda - \lambda_0) > r\}$ van $\sigma(a)$.

Het is eenvoudig in te zien dat de volgende relaties gelden:

(a) $(a - \lambda_0)f_{m+1}(a) = f_m(a)$, $m \geq 0$

(b) $(a - \lambda_0)f_m(a) = f_{m-1}(a)$, $m \leq -1$

(c) $(a - \lambda_0)f_0(a) = 1 - f_{-1}(a)$

(d) $(a - \lambda_0)^{-(m+1)}f_{-1}(a) = f_m(a)$, $m \leq -1$

(e) $f_{-1}(a)$ is een idempotent ongelijk aan 0 .

Voor $0 < (\lambda - \lambda_0) < r$ geldt de Laurent-ontwikkeling:

$$R_\lambda(a) = -\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k f_k(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-k} f_{-k}(a) .$$

Het idempotent $f_{-1}(a)$ heet het spectrale idempotent voor a in λ_0.

Als p een positief integer is en $f_{-p-1}(a) = 0$ maar $f_{-p}(a) \neq 0$, dan heet λ_0 een pool van $R_\lambda(a)$ in de orde p. Als bovendien $f_{-1}(a)$ een eindig element is ($f_{-1}(a) \in S_A$) met $\Theta(f_{-1}(a)) = n < \infty$, dan zeggen we dat de pool λ_0 eindige rang n heeft.

Voor $a \in A$ geven we met L_a resp. R_a de linkse resp. rechtse reguliere representatie van a aan.

Deze zijn gedefinieerd door:

$$L_a x := ax \quad , \quad x \in A$$

$$R_a x := xa \quad , \quad x \in A .$$

Dus L_a en R_a zijn begrensde, lineaire operatoren op A, en voor deze grootheden kunnen we dus een ascent en descent definiëren. (Zie [CPY], § 1.4.)

Voor $a \in A$ is : $\alpha_r(a) = \alpha(R_a)$, $\alpha_\ell(a) = \alpha(L_a)$

$\delta_r(a) = \delta(R_a)$, $\delta_\ell(a) = \delta(L_a)$.

Stelling 2.1.: (i) Als $\alpha_\ell(a)$ en $\delta_\ell(a)$ beiden eindig zijn, dan zijn ze gelijk: $\alpha_\ell(a) = \delta_\ell(a) = p < \infty$. Bovendien geldt: $a^pA \cap R[Aa^p] = \{0\}$ en $R[Aa^p] \oplus a^pA = A$

(ii) Als $\alpha_r(a)$ en $\delta_r(a)$ beiden eindig zijn, dan zijn ze gelijk: $\alpha_r(a) = \delta_r(a) = q < \infty$. Bovendien geldt: $Aa^q \cap L[a^qA] = \{0\}$ en $L[a^qA] \oplus Aa^q = A$.

Als $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a)$ en λ_0 een pool is van $R_\lambda(a)$ dan geven we het spectrale idempotent van a in λ_0 aan met e_a.

Lemma 2.2.: Zij $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a)$ en λ_0 een pool van $R_\lambda(a)$ van de orde p, en zij e_a het spectrale idempotent van a in λ_0, dan is:

(a) $\alpha_\ell(a - \lambda_0) = \delta_\ell(a - \lambda_0) = \alpha_r(a - \lambda_0) = \delta_r(a - \lambda_0) = p$

(b) $(1 - e_a)A = (\lambda_0 - a)^pA$

(c) $A(1 - e_a) = A(\lambda_0 - a)^p$

(d) $e_aA = R[A(\lambda_0 - a)^p] \neq \{0\}$

(e) $Ae_a = L[\lambda_0 - a)^pA] \neq \{0\}$

(f) $(\lambda_0 - a)^pA$ en $A(\lambda_0 - a)^p$ zijn gesloten

(g) $(\lambda_0 - a)^pA \oplus R[A(\lambda_0 - a)^p] = A$

(h) $A(\lambda_0 - a)^p \oplus L[(\lambda_0 - a)^pA] = A$.

Definitie: Zij $n \in \mathbb{N}$ en $e \neq 0$ een idempotent van A. We zeggen dat een element $a \in A$ een (n,e,R)-decompositie van de algebra A voortbrengt als:

(a) $ea = ae$

(b) $R[Aa^n] = eA$

(c) $a^n A \oplus eA = A$.

We zeggen dat a een (n,e,L)-decompositie van A voortbrengt als:

(d) $ea = ae$

(e) $L[a^n A] = Ae$

(f) $Aa^n \oplus Ae = A$.

Lemma 2.3.: Zij $a \in A$ en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Zij $p \in \mathbb{N}$ en $e \neq 0$ een idempotent in A. Veronderstel dat $\lambda_0 - a$ een (p,e,R)-decompositie van A voortbrengt en dat p het kleinste positieve integer is, waarvoor dit waar is, dan is:

(a) $(\lambda_0 - a)^p A = (1 - e)A$

(b) $\alpha_\ell(\lambda_0 - a) = \delta_\ell(\lambda_0 - a) = p$

(c) λ_0 is een pool van $R_\lambda(a)$ van de orde p

(d) e is het spectrale idempotent voor a in λ_0 .

Stelling 2.4.: Zij $a \in A$. Voor $p \in \mathbb{N}$ en $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ zijn de volgende condities equivalent:

(a) λ_0 is een pool van $R_\lambda(a)$ van de orde p

(b) Er is een idempotent $e \neq 0$ in A zodat $(\lambda_0 - a)$ een (p,e,R)-decompositie van A voortbrengt, en p is 't kleinste positieve integer waarvoor dit waar is.

§ 3. Riesz punten van het spectrum

Definitie: Voor $a \in A$ wordt $\lambda_0 \in \sigma(a)$ een Riesz-punt genoemd als λ_0 een pool is van $R_\lambda(a)$ van eindige orde.

Lemma 3.1.: Als $\lambda_0 \in \sigma(a)$, dan is λ_0 een Riesz-punt van $\sigma(a)$ desda er eén $p \in \mathbb{N}$ en een idempotent $e \neq 0$ in S_A is zodat $\lambda_0 - a$ een (p,e,R)-decompositie van A voortbrengt of, wat gelijkwaardig is, een (p,e,L)-decompositie. Voor dergelijke λ_0 is $\lambda_0 - a \in G_3$.

Stelling 3.2.: Zij λ_0 een Riesz-punt van $\sigma(a)$ en zij e_a het spectrale idempotent van a in λ_0. Dan is $e_a \in S_A$ en $\lambda_0 - a - e_a \in G_1$.

We definiëren nu een drietal verzamelingen in A:

$$\Phi_R^\ell := \{a \in G_4 \mid \alpha_\ell(a) = \delta_\ell(a) < \infty\}$$

$$\Phi_R^r := \{a \in G_4 \mid \alpha_r(a) = \delta_r(a) < \infty\}$$

$$\Phi_R := \{a \in G_4 \mid \alpha_r(a) = \delta_r(a) = \alpha_\ell(a) = \delta_\ell(a) < \infty\} .$$

Stelling 3.3.: Zij $\lambda_0 - a$ element van Φ_R^ℓ of Φ_R^r, dan is $\lambda_0 - a \in G_1$ of is λ_0 een Riesz-punt van $\sigma(a)$.

Corollary 3.4.: $\Phi_R^\ell = \Phi_R^r = \Phi_R$.

Stelling 3.5.: Zij $a \in A$, $s \in I_A$ en $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Als as = sa en $\lambda_0 - a - s \in G_1$, dan is λ_0 een Riesz-punt van $\sigma(a)$.

Corollary 3.6.: λ_0 is een Riesz-punt van $\sigma(a)$ desda en een $s \in I_A$ is zodat as = sa en $\lambda_0 - a - s \in G_1$.

Corollary 3.7.: λ_0 is een Riesz-punt van $\sigma(a)$ desda $\lambda_0 - a$ een singulier element van Φ_R is.

§ 4. Riesz-Schauder-elementen

De theorie die in deze, en volgende paragrafen wordt behandeld is merendeels nieuw.

Definitie: Een element $a \in A$ heet een Riesz-Schauder-element als $k(a) = 0$ en $\alpha_\ell(a) = \alpha_r(a) = \delta_r(a) = \delta_\ell(a) < \infty$.

De verzameling Riesz-Schauder-elementen geven we aan met G_2. Uit Lemma 3.1 volgt direct dat $G_2 = \Phi_R$. Dus $a \in G_2$ als a inverteerbaar is, of als 0 een Riesz-punt van $\sigma(a)$ is.

We zullen laten zien dat G_2 open is. Daartoe hebben we het volgende lemma nodig, welk bewezen is door Zemanek. (Zie [Ze], Lemma 3.1.)

Lemma 4.1.: Zij e,f idempotenten met $r(e - f) < 1$. (Hierin stelt r de spectrale straal voor.) Dan is er een $u \in Exp(A)$ zodat $f = u^{-1} e u$.

Opmerking: $a \in Exp(A)$ als er een $x \in A$ is zodat $a = \exp(x)$. Er geldt: $Exp(A) \subseteq G_1$. (Zie [BD], § 8.)

<u>Stelling 4.2.</u>: G_2 is open.

<u>Bewijs</u>: Zij $a \in G_2$. We zullen laten zien dat er een omgeving van a in A is, welke helemaal binnen G_2 ligt. Als a inverteerbaar is, dan is het gestelde triviaal, omdat G_1 open is. We nemen daarom aan dat $0 \in \sigma(a)$. Dan is 0 dus een Riesz-punt van $\sigma(a)$ en derhalve $0 \in \sigma^{is}(a)$.

Er is een $r > 0$ zodat $\bar{B}_{0,2r} \cap \sigma(a) = \{0\}$. Zij $\mathcal{O}$ een omgeving van $\sigma(a) \setminus \{0\}$ zodat $\mathcal{O} \cap B_{0,2r} = \emptyset$.

Definieer

$$
\begin{aligned}
\psi(\lambda) &:= 1 \quad , \lambda \in B_{0,2r} \\
&:= 0 \quad , \lambda \in \mathcal{O} .
\end{aligned}
$$

Dan is $\psi(\lambda)$ locaal-holomorf binnen $\mathcal{O} \cup B_{0,2r}$.

Definieer

$$
e_a := \psi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \psi(\lambda)\, R_\lambda(a) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda(a) d\lambda .
$$

Hierin is γ de kromme $\{z \mid |z| = r\}$ in positieve richting doorlopen. e_a is het spectrale idempotent van a in 0. Volgens Stelling 3.2 is $e_a \in S_A$ en $a + e_a \in G_1$.

Definieer $\Omega := \mathcal{O} \cup B_{0,\frac{1}{2}r}$, dan is $\sigma(a) \subset \Omega$.

Omdat de afbeelding $a \to \sigma(a)$ van boven-semi-continu is (Zie [BD], § 5 - prop. 17), is er een $\varepsilon > 0$ zodat voor alle $b \in A$ met $\| a - b \| < \varepsilon$ geldt dat $\sigma(b) \subset \Omega$. Dan is $e_b := \psi(b)$ gedefinieerd. e_b is een idempotent en $be_b = e_b b$.

Er geldt:

$$
\begin{aligned}
\| e_a - e_b \| &\le \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \| R_\lambda(a) - R_\lambda(b) \| \; |d\lambda| \le \\
&\le \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \| R_\lambda(a) \| \; \| R_\lambda(b) \| \; |\lambda| \right\} \cdot \| a - b \| .
\end{aligned}
$$

Omdat $a + e_a \in G_1$ is er een $\tau > 0$ zodat voor alle $x \in A$ met $\|a + e_a - x\| < \tau$ geldt dat $x \in G_1$. (Immers: G_1 is open.)

Kies nu $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ zo klein dat voor alle b met $\|a - b\| < \varepsilon_1$ geldt:

(i) $\|(a + e_a) - (b + e_b)\| < \tau$

(ii) $\|e_a - e_b\| < 1$.

Dan is dus $r(e_a - e_b) < 1$ en vanwege Lemma 4.1 en het feit dat S_A een tweezijdig ideaal is, $e_b \in S_A$.

Verder is $b + e_b \in G_1$ en Corollary 3.6 zegt nu dat 0 een Riesz-punt van $\sigma(b)$ is, en dus is $b \in G_2$. □

Uit § 1 is bekend dat $a \in G_i$ en $x \in I_A$ inhoudt dat ook $a + x \in G_i$ voor $i = 3,4$.

Kunnen we iets dergelijks ook voor G_2 bewijzen? Alvorens we deze vraag beantwoorden, zullen we eerst het begrip Riesz-element definiëren, naar analogie van het begrip Riesz-operator. (Zie [CPY], Chapter 3.)

<u>Definitie</u>: $r \in A$ heet een Riesz-element als voor alle $\lambda \neq 0$ geldt dat $r - \lambda \in G_4$.

De verzameling van Riesz-elementen in A geven we aan met R_A. Uit [Sm], Section 5 volgt dat voor alle $r \in R_A$ en alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ geldt dat $r - \lambda \in G_2$.

Er geldt dat $I_A \subset R_A$. (Zie [Pe], p. 320.)

Lemma 4.3.: Zij $a \in G_1$ en $r \in R_A$ zodat $ar = ra$, dan is $a + r \in G_2$.

Bewijs: 1^o We zullen eerst laten zien dat $ra^{-1} \in R_A$. Zij $\pi : A \to A/I_A$ het canonisch homomorphisme.

Dan is

$$r(\pi(ra^{-1})) = \lim_{n\to\infty} (\pi^n(ra^{-1}))^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\pi(r^n a^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\pi(r^n)\pi(a^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\pi(r^n)\right\}^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left\{\pi(a^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} = 0$$

omdat $\lim_{n\to\infty} \left\{\pi(r^n)\right\}^{\frac{1}{n}} = r(\pi(r)) = 0$, want $r \in R_A$.

2^o $a + r = (1 + ra^{-1})a$, en $1 + ra^{-1} \in G_2$ en derhalve is ook $a + r \in G_2$. □

Stelling 4.4.: Zij $a \in G_2$ en $r \in R_A$ zodat $ar = ra$, dan is $a + r \in G_2$.

Bewijs: Als bovendien $a \in G_1$, dan volgt dit direct uit Lemma 4.3. Laten we daarom aannemen dat 0 een Riesz-punt van het spectrum is. Zij e_a het spectrale idempotent van a in 0; dan is $e_a = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda(a)d\lambda$, waarin γ een kromme om 0 is waarbinnen en op geen ander elementen uit $\sigma(a)$ liggen.

Dus $e_a r = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda(a)r\, d\lambda = r \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda(a)d\lambda$. Want $r(a-\lambda) = (a-\lambda)r$, dus $r \cdot R_\lambda(a) = R_\lambda(a)r$. Dus e_a commuteert met r.

$a + r = (a + e_a) + (-e_a + r)$. Nu is $-e_a + r \in R_A$ en $a + e_a \in G_1$, en beide elementen commuteren. Lemma 4.3 levert nu dat $a + r \in G_2$. □

5. Essentiële spectra

We hebben in het verloop van dit betoog een viertal deelverzamelingen van A gedefinieerd, nl. G_i, $i = 1,\dots,4$. Deze verzamelingen waren allen open, en voldoen aan het volgende inclusieschema:

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq G_4 .$$

Voor $a \in A$ definiëren we nu volgende spectra

$$\sigma_i(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \notin G_i\} .$$

Dan zijn $\sigma_i(a)$, $i = 1,\dots,4$ ee viertal compacte deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ welke aan het volgende inclusieschema voldoen:

$$\sigma_4(a) \subseteq \sigma_3(a) \subseteq \sigma_2(a) \subseteq \sigma_1(a) .$$

$\sigma_1(a) = \sigma(a)$ is het gehele spectrum van a. De overige $\sigma_i(a)$ heten essentiële spectra. Uit historisch oogpunt geven we hieraan de volgende namen:

$\sigma_2(a)$ is het Browder-spectrum

$\sigma_3(a)$ is het Weyl-spectrum

$\sigma_4(a)$ is het Fredholm-spectrum .

<u>Stelling 5.1.</u>: Als $a \subset A$ en $x \in I_A$, dan is $\sigma_i(a + x) = \sigma_i(a)$, $i = 3,4$.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt uit $k(a + x) = k(a)$ als $a \in A$ en $x \in I_A$. □

Stelling 5.2.: Als $a \in A$, dan is $\sigma_3(a) \subseteq \bigcap_{s \in S_A} \sigma(a + s)$. Als A bovendien primitief is, dan geldt de gelijkheid.

Bewijs: Dit volgt direct uit $k(a + x) = k(a)$, $a \in A$ en $x \in I_A$ en uit Stelling 1.2.

In § 4 hebben we de verzameling Riesz-elementen R_A gedefinieerd. $r \in R_A$ dan en slechts dan als voor alle $\lambda \neq 0$ geldt dat $r - \lambda \in G_4$. In geval dat de algebra A van oneindige orde is (wat we altijd zullen aannemen) dan geldt: $r \in R_A \Leftrightarrow \sigma_4(r) = \{0\}$. (Zie [Pe], p. 320.)
Een formulering die ook juist is luidt: $r \in R_A \Leftrightarrow \sigma_2(r) = \{0\}$. (Vgl. [Sm], §5.)

Stelling 5.3.: Zij $a \in A$ en $r \in R_A$ zodat $ar = ra$. Dan is $\sigma_2(a + r) = \sigma_2(a)$.

Bewijs: Dit volgt direct uit Stelling 4.4. □

Zij $\pi : A \to A/S_A$ het quotiënt-homomorphisme. We hebben in §1 gezien dat $a \in A$ Fredholm is als $\pi(a)$ inverteerbaar is in A/S_A.
Dit betekent dat voor alle $a \in A$: $\sigma_4(a) = \sigma(\pi(a))$. We zullen nu voor $\sigma_4(a)$ een spectrale afbeeldings-stellling bewijzen. (Vgl. [GL].)

Stelling 5.4.: Zij $a \in A$ en zij f een complex-waardige functie, locaal holomorf in een omgeving van $\sigma(a)$. Dan is $\sigma_4(f(a)) = f(\sigma_4(a))$.

Bewijs: Zij f locaal-holomorf op een open omgeving Ω van $\sigma(a)$, en zij γ een enkelvoudige kromme binnen Ω die $\sigma(a)$ omsluit.

Omdat $\sigma_4(a) \subseteq \sigma(a)$ kunnen we $f(\pi(a))$ d.m.v. de gewone Dunford-Taylor integraal berekenen.

$$f(\pi(a)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - \pi(a))^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)\pi((\lambda - a)^{-1} d\lambda = \pi \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - a)^{-1} d\lambda \right\} =$$

$$= \pi(f(a)) \; .$$

Dus

$$\sigma_4(f(a)) = \sigma(\pi(f(a))) = \sigma(f(\pi(a))) = f(\sigma(\pi(a))) = f(\sigma_4(a)) \; .$$

Hierbij hebben we gebruikt dat voor $\sigma(a)$ de spectrale afbeeldingsstelling geldt. □

We hebben gezien dat $\sigma_4(a) = \sigma(\pi(a))$, $a \in A$, waarin π het canonische homomorphisme $A \to A/S_A$ is. We laten zien dat iets dergelijks ook voor $\sigma_2(a)$ geldt.

<u>Stelling 5.5.</u>: Zij $a \in A$ en zij B de maximale, commutatieve sub-algebra van A, die a bevat. I_A is het tweezijdig ideaal van inessentiële elementen, en $\omega : B \to B/(B \cap I_A)$ het canonische homomorphisme. Zij $\sigma(\omega(a))$ het spectrum van $\omega(a)$ in de Banach-algebra $B \,/\, (B \cap I_A)$. Dan is $\sigma_2(a) = \sigma(\omega(a))$.

<u>Bewijs</u>: Bedenk dat voor elke functie f, die locaal holomorf is in een omgeving van $\sigma(a)$, geldt dat $f(a) \in B$. Veronderstel nu dat $\lambda_0 \notin \sigma_2(a)$. Dan is volgens Lemma 2.2.: $(\lambda_0 - a)^p A \oplus R[A(\lambda_0 - a)^p] = A$, gesteld at $R_\lambda(a)$ een pool van de orde p in $\lambda = \lambda_0$ heeft. In geval dat $\lambda_0 \in \rho(a)$, is de bewering juist voor alle $p \geq 0$. $\lambda_0 - a \in G_4$ en dus $(\lambda_0 - a)^p \in G_4$ en derhalve is $\Theta(R[A(\lambda_0 - a)^p]) < \infty$.

Indien $\lambda_0 \in \sigma(a)$, en dus $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a)$, definiëren we e_a als het spectrale idempotent van a in λ_0.

Als $\lambda_0 \in \rho(a)$ definiëren we $e_a := 0$.

Dan is, mede o.g.v. Lemma 2.2.: $e_a A = R[A(\lambda_0 - a)^p]$; $e_a \in S_A \subset I_A$ en $\Theta(e_a) < \infty$; derhalve is $e_a \in B \cap I_A$ ..

We definiëren de functie $\psi(\lambda)$ door:

$$\psi(\lambda) := \lambda_0 - \lambda \text{ in omgeving van } \sigma(a) \setminus \{\lambda_0\}$$

$$\psi(\lambda) := 1 \qquad \text{in een omgeving van } \lambda_0, \text{ als } \lambda_0 \in \sigma^{is}(a) .$$

Dan is ψ locaal holomorf in een omgeving van $\sigma(a)$ en

$$\psi(a) = (\lambda_0 - a) + (e_a - (\lambda_0 - a)e_a)$$

$$\sigma(\psi(a) = \psi(\sigma(a)) \quad \text{en} \quad 0 \notin \psi(\sigma(a)) .$$

Derhalve is $\psi(a)$ inverteerbaar, en is z'n inverse ook element van B.

Omdat $e_a - (\lambda_0 - a)e_a \in B \cap I_A$, is $\lambda_0 - \omega(a) = \omega(\lambda_0 - a)$ inverteerbaar, en dus $\lambda_0 \notin \sigma(\omega(a))$. Daarmede is bewezen dat $\sigma(\omega(a)) \subset \sigma_2(a)$.

Veronderstel nu dat $\lambda_0 \notin \sigma(\omega(a))$. Dan bestaan er elementen $b \in B$ en $s \in B \cap I_A$ zodat:

$$b(\lambda_0 - a) = (\lambda_0 - a)b = 1 + s .$$

Dit houdt in dat: $R[A(\lambda_0 - a)^k] \subset R[A(1 + s)^k]$

$L[(\lambda_0 - a)^k A] \subset L[(1 + s)^k A]$

voor $k = 1,2,\ldots$.

Omdat $s \in I_A$ is $\lambda_0 - a \in G_2$. (Zie [Pe], Theorem 4.7.)

Dus $\lambda_0 \notin \sigma_2(a)$, waarmee bewezen is dat $\sigma_2(a) \subset \sigma(\omega(a))$. $\square$

Stelling 5.6.: Zij f een complexwaardige functie, die locaal holomorf is in een omgeving van $\sigma(a)$. Dan is $f(\sigma_2(a)) = \sigma_2(f(a))$.

Het bewijs van deze stelling is nagenoeg analoog aan dat van Stelling 5.4, en zullen we daarom achterwege laten.

De volgende stelling zegt iets over de verdichtingspunten van het spectrum.

Stelling 5.7.: $\sigma^{acc}(a) \subseteq \sigma_2(a)$, $a \in A$.

Bewijs: Stel dat $\lambda_0 \notin \sigma_2(a)$. Als $\lambda_0 \notin \sigma(a)$, dan is $\lambda_0 \notin \sigma^{acc}(a)$. Als $\lambda_0 \in \sigma(a)$, dan is $\lambda_0 - a$ een singulier element van $G_2 = \Phi_R$. Volgens Corollary 3.7 is λ_0 dan een Riesz-punt van $\sigma(a)$, hetgeen betekent dat $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a)$. Dus $\lambda_0 \notin \sigma^{acc}(a)$. $\square$

Stelling 5.8.: $\sigma_3^b(a) \subseteq \sigma_4(a)$.

Bewijs: Stel dat $\lambda_0 \in \sigma_3^b(a)$ en $\lambda_0 \notin \sigma_4(a)$. Dan is $k(a - \lambda_0)$ eindig, en $a - \lambda_0 \in G_4$. Omdat G_4 open is, is er een $\varepsilon > 0$ zodat voor alle λ met $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ geldt dat $\lambda \in G_4$. Voor alle $\lambda \in B_{\lambda_0,\varepsilon}$ is $k(a - \lambda) = k(a - \lambda_0)$. Omdat $\lambda_0 \in \sigma_3^b(a)$ is er een $\lambda_1 \in B_{\lambda_0,\varepsilon}$ zodat $\lambda_1 \notin \sigma_3(a)$. Dus $k(a - \lambda_0) = k(a - \lambda_1) = 0$. Dit is in tegenspraak met $\lambda_0 \in \sigma_3^b(a)$. $\square$

Stelling 5.9.: $\sigma^{is}(a) \cap \sigma_2(a) \subseteq \sigma_4(a)$.

Bewijs: Stel dat $\lambda_0 \in \sigma^{is}(a) \cap \sigma_2(a)$ en $\lambda_0 \notin \sigma_4(a)$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $\lambda_0 = 0$.

Definieer $\psi(\lambda) = 1 + \lambda$ in omgeving van $\lambda = 0$

$\qquad\qquad = \lambda$ $\qquad$ elders.

Dan is $\psi(a) = a + e_a$, waarin e_a het spectrale idempotent van a in 0 is.
Gebruik makend van Stelling 5.4. $\sigma_4(e_a) = \{0\}$, en dus is $e_a \in R_A$.
Daarom is $0 \in \sigma_2(a) = \sigma_2(a + e_a) = \sigma_2(\psi(a)) = \psi(\sigma_2(a))$, waarin we gebruik hebben gemaakt van Stelling 5.3 en 5.6. Maar $0 \notin \psi(\sigma_2(a))$.
Dit is een tegenspraak. $\square$

<u>Open vraag</u>: Is Stelling 5.9 uit te breiden tot: $\sigma_2^b(a) \subseteq \sigma_3(a)$, $a \in A$?

Referenties

[Ba_1] B.A. Barnes, A generalized Fredholm theory for certain maps in the regular representations of an algebra.
Canad. J. Math. 20 (1968) p. 495-504.

[Ba_2] B.A. Barnes, The Fredholm elements of a ring.
Canad. J. Math. 21 (1969) p. 84-95.

[BD] F. Bonsall, J. Duncan, Complete normed algebras.
Springer-Verlag, New York 1973.

[Be] S. Berberian, The Weyl spectrum of an operator.
Ind. Univ. Math. J. 20 (1976) p. 529-544.

[CPY] S.R. Caradus, W.E. Pfaffenberger, B. Yood, Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces.
Marcel Dekker Inc. New York 1974.

[GL] B. Gramsch and D. Lay, Spectral mapping theorems for essential spectra.
Math. Ann. 192 (1971) p. 17-32.

[Kl] D. Kleinecke, Almost-finite, compact, and inessential operators.
Proc. Am. Math. Soc. 14 (1963) p. 863-868.