

Elastisch, echter geometrisch niet-lineair, gedrag bij de axiaal belaste staaf

Citation for published version (APA):

Brekelmans, W. A. M. (1981). *Elastisch, echter geometrisch niet-lineair, gedrag bij de axiaal belaste staaf*. (DCT rapporten; Vol. 1981.007). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1981

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Elastisch, echter geometrisch
niet-lineair, gedrag bij
de axiaal belaste staaf

Eindhoven

juni 1981

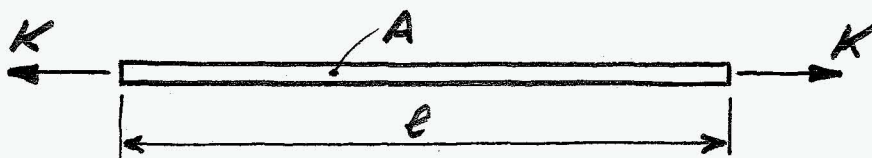
W.A.M. Brekelmans

vakgroep Technische Mechanica
afdeling der Werktuigbouwkunde
Technische Hogeschool
WE 81.07

1. Inleiding

Onder andere door de homogene rek- en spanningstoestand leent de axiaal belaste staaf zich uitstekend om inzicht te verkrijgen in de vaak gecompliceerde relaties, die in de niet-lineaire mechanica een rol spelen. In het algemeen is voor zo'n staaf bij allerlei fenomenen een eenvoudige doorzichtige analytische oplossing te construeren.

Beschouwd zal worden een staaf met zuiver elastisch (tijds- en geschiedenis-onafhankelijk) materiaalgedrag. Daarmee wordt bedoeld dat voor een specifieke staaf bij een bepaalde huidige momentane lengte l de axiale kracht K eenduidig vastligt: er bestaat derhalve een functieverband $K = K(l)$.



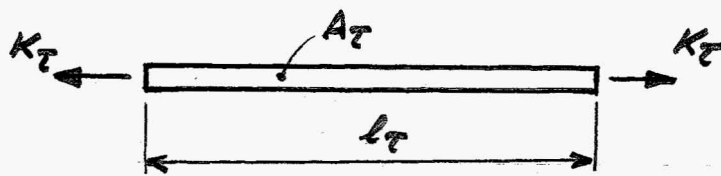
huidige configuratie

In de hierboven geschetste momentane situatie wordt het oppervlak van de dwarsdoorsnede aangegeven met A , waarbij geldt: $A = A(l)$.

Wanneer het verband $K = K(l)$, via een

bepaalde modelvorming, resultaat is van een theoretische beschouwing, zal in die beschouwing het veronderstelde constitutieve gedrag van essentieel belang zijn. In de continuümmechanica wordt het constitutieve gedrag in het algemeen beschreven met een relatie tussen rekken en spanningen, twee begrippen die een nadere toelichting behoeven.

Bij het definiëren van de rekken in een staaf wordt de huidige geometrie vergeleken met een bepaalde, specifiek gekozen, referentie-geometrie, bijvoorbeeld zoals geschetst in onderstaande figuur.



$$K_T = K(l_T)$$

$$A_T = A(l_T)$$

referentie- configuratie

Voor de axiale rek en de dwarsrek worden de volgende (gangbare) definities genoemd.

	axiale rek	dwarsrek
klassiek (Biot)	$\frac{l}{l_T} - 1$	$\sqrt{\frac{A}{A_T}} - 1$
logaritmisch	$\ln\left(\frac{l}{l_T}\right)$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{A}{A_T}\right)$
Green (-Lagrange)	$\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{l_T^2} - 1 \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_T} - 1 \right)$
Almansi (-Euler)	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{l_T^2}{l^2} \right)$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_T}{A} \right)$

Opgemerkt kan worden dat voor alle rek-definities de keuze van de referentie-toestand van belang is.

Met betrekking tot de axiale spanning worden de volgende definities gememoreerd.

	axiale spanning
Cauchy (werkelijk)	$\frac{K}{A}$
Kirchhoff	$\frac{l}{l_T} \cdot \frac{K}{A_T}$
eerste Piola-Kirchhoff (klassiek)	$\frac{K}{A_T}$
tweede Piola-Kirchhoff	$\frac{l_T}{l} \cdot \frac{K}{A_T}$

Alleen de Cauchy-spanning is onafhankelijk van de gekozen referentie-toestand; de andere spanningsgrootheden worden mede bepaald door de gekozen referentie-toestand.

In de drie-dimensionale theorie voor elastische, geometrisch niet-lineaire problemen lijkt het voordelen te bieden om een (constitutieve) relatie te leggen tussen de Green-rek en de tweede Piola-Kirchhoff-spanning. Dat daarbij de keuze van de referentie-configuratie een relevante rol speelt zal in het volgende worden toefelicht.

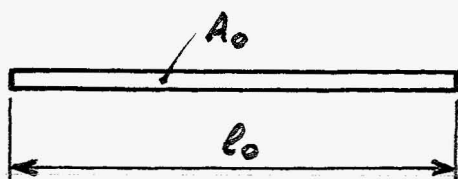
Bij de theoretische bepaling van het verband tussen axiale kracht en lengte van een

staaf zullen we ons hier beperken tot lineair elastisch materiaalgedrag: er is een lineaire relatie tussen de Green-tek en de tweede Piola-Kirchhoff-spanning. Deze beperking is niet van invloed op de doelstelling van het onderhavige: het voor een eenvoudig geval aangeven van het beloop van de (gekozen) referentie-toestand en van de wijze waarop daarmee bij concrete berekeningen (proprammatuur) rekening gehouden behoort te worden.

Na een analyse van de trekstaaf met twee verschillende configuraties als referentie zullen de transformatie-regels voor de relevante materiaalconstanten aan de orde komen. Ter afsluiting wordt de (onjuiste) concretisering in het MARC-programma becommentarieerd.

2. De onbelaste configuratie als referentie

Als referentie-configuratie wordt gekozen een configuratie van de staaf (al dan niet eenduidig) waarbij de axiale kracht gelijk is aan nul.



$$K(l_0) = 0$$

$$A(l_0) = A_0$$

referentie-configuratie

Voor de axiale rek in de huidige configuratie met betrekking tot de referentie-configuratie geldt:

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1 \right) \quad (2.1)$$

Voor de tweede Piola-Kirchhoff-spanning geldt:

$$S_0 = \frac{l_0}{l} \cdot \frac{K}{A_0} \quad (2.2)$$

Als constitutieve relatie tussen deze beide grootheden wordt geponeerd:

$$E_0 = \frac{1}{M_0} S_0 \quad (2.3)$$

De materiaalconstante M_0 kan hierbij worden opgevat als de uit de klassieke theorie bekende elasticiteitsmodulus. In formule

(2.3) is reeds in rekening gebracht dat voor $S_0 = 0$ moet gelden $E_0 = 0$.

Door substitutie van (2.1) en (2.2) in (2.3) kan een relatie worden afgeleid waarin K expliciet is uitgedrukt in l :

$$K = \frac{1}{2} M_0 A_0 \frac{l}{l_0} \left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1 \right) \quad (2.4)$$

In hoofdstuk 5 is een grafische weergave van deze relatie opgenomen. Opgemerkt kan worden dat het functieverband volgens (2.4) als verre van realistisch gekwalificeerd moet worden.

Voor de dwarsrek wordt gevraagd:

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \quad (2.5)$$

De dwarsrek kan worden uitgedrukt in S_0 via:

$$\bar{E}_0 = -\nu_0 E_0 = -\frac{\nu_0}{M_0} S_0 \quad (2.6)$$

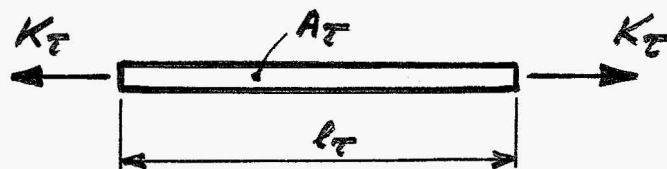
De materiaalconstante ν_0 geeft de dwarscontractiecoëfficiënt weer.

Door gebruik van (2.1), (2.5) en (2.6) kan worden afgeleid op welke wijze A afhangt van de momentane lengte l :

$$A = A_0 \left(1 + \nu_0 - \nu_0 \frac{l^2}{l_0^2} \right) \quad (2.7)$$

3. Een willekeurige configuratie als referentie

Als referentie wordt een willekeurige toestand gekozen, zoals ook reeds in de inleiding ter sprake is geweest.



$$K(l_T) = K_T$$

$$A(l_T) = A_T$$

referentie-configuratie

Voor de axiale rek in de huidige configuratie, met de willekeurige bovenstaande configuratie als referentie geldt:

$$E_T = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{l_T^2} - 1 \right) \quad (3.1)$$

Voor de tweede Piola-Kirchhoff-spanning geldt:

$$S_T = \frac{l_T}{l} \cdot \frac{K}{A_T} \quad (3.2)$$

Als constitutieve relatie tussen deze beide grootheden noteren we:

$$E_T = \frac{1}{M_T} \left(S_T - \frac{K_T}{A_T} \right) \quad (3.3)$$

In deze vergelijking is op correcte wijze verdisconteerd dat in de rekloze toestand ($E_T = 0$) de axiale spanning ongelijk nul is. Opgemerkt kan worden dat uit algemene be-

schouwingen blijkt dat lineair elastisch materiaalgedrag met betrekking tot de ene referentie-configuratie, na een overgang op een andere referentie-configuratie, lineair elastisch blijft. De grootte M_T kan derhalve als materiaalconstante worden opgevat. In hoofdstuk 4 zal dit nader aan de orde komen.

Door substitutie van (3.1) en (3.2) in (3.3) kan worden afgeleid:

$$K = K_T \frac{l}{l_T} + \frac{1}{2} M_T A_T \frac{l}{l_T} \left(\frac{l^2}{l_T^2} - 1 \right) \quad (3.4)$$

Voor de dwarsrek geldt:

$$\bar{E}_T = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_T} - 1 \right) \quad (3.5)$$

Het verband tussen dwarsrek en axiale rek luidt:

$$\bar{E}_T = -\nu_T E_T \quad (3.6)$$

Uit (3.1), (3.5) en (3.6) volgt:

$$A = A_T \left(1 + \nu_T - \nu_T \frac{l^2}{l_T^2} \right) \quad (3.7)$$

4. Transformatie-regels voor materiaalconstanten

In het voorgaande zijn met de formules (2.4) en (3.4) relaties afgeleid voor het functieverband $K = K(l)$. Het zal duidelijk zijn dat dit verband niet afhankelijk mag zijn van de toevallig gekozen referentie-configuratie. De eis dat (2.4) en (3.4) identieke resultaten leveren voor elke waarde van l leidt tot de noodzakelijke voorwaarden:

$$\frac{1}{2} M_0 A_0 \frac{1}{l_0^3} = \frac{1}{2} M_T A_T \frac{1}{l_T^3} \quad (4.1)$$

$$-\frac{1}{2} M_0 A_0 \frac{1}{l_0} = K_T \frac{1}{l_T} - \frac{1}{2} M_T A_T \frac{1}{l_T} \quad (4.2)$$

Uit (4.1) volgt direct:

$$M_T A_T = M_0 A_0 \frac{l_T^3}{l_0^3} \quad (4.3)$$

Substitutie hiervan in (4.2) levert:

$$K_T = \frac{1}{2} M_0 A_0 \frac{l_T}{l_0} \left(\frac{l_T^2}{l_0^2} - 1 \right) \quad (4.4)$$

Dit resultaat is volledig in overeenstemming met hetgeen op basis van formule (2.4) verwacht kan worden.

Ook de relaties (2.7) en (3.7) voor het functieverband $A = A(l)$ moeten identieke resultaten leveren voor elke waarde van l . Als noodzakelijke voorwaarden volgen:

$$A_0 (1 + \nu_0) = A_T (1 + \nu_T) \quad (4.5)$$

$$A_0 \nu_0 \frac{1}{\rho_0^2} = A_T \nu_T \frac{1}{\rho_T^2} \quad (4.6)$$

Uit deze vergelijkingen volgt na eliminatie van ν_T :

$$A_T = A_0 \left(1 + \nu_0 - \nu_0 \frac{\rho_T^2}{\rho_0^2} \right) \quad (4.7)$$

Dit resultaat is volledig in overeenstemming met de eerder afgeleide relatie (2.7).

Gebruik van (4.7) in (4.1) en (4.5) leidt tot de gewenste transformatie-regels voor de materiaalconstanten:

$$M_T = M_0 \left[\frac{\rho_T^3}{\rho_0^3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \nu_0 - \nu_0 \frac{\rho_T^2}{\rho_0^2} \right)} \right] \quad (4.8)$$

$$\nu_T = \nu_0 \left[\frac{\rho_T^2}{\rho_0^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \nu_0 - \nu_0 \frac{\rho_T^2}{\rho_0^2} \right)} \right] \quad (4.9)$$

5. Confrontatie met het MARC-programma

Voor de analyse van niet-lineaire problemen is het gebruikelijk en soms noodzakelijk om de uitwendige belasting stapsgewijs aan te brengen (belastingsincrementen). Voor elk belastingsincrement is het in het algemeen nodig om via een iteratieve procedure (Newton-Raphson) de gewenste relatie tussen de uitwendige belasting en de verplaatsingen te realiseren.

Globaal kan gesteld worden dat twee verschillende werkwijzen gevolgd kunnen worden:

1. „Total Lagrange” methodiek

Gedurende de gehele berekeningsprocedure wordt dezelfde referentie-configuratie gehanteerd en wel de initiële configuratie (onbelaste toestand).

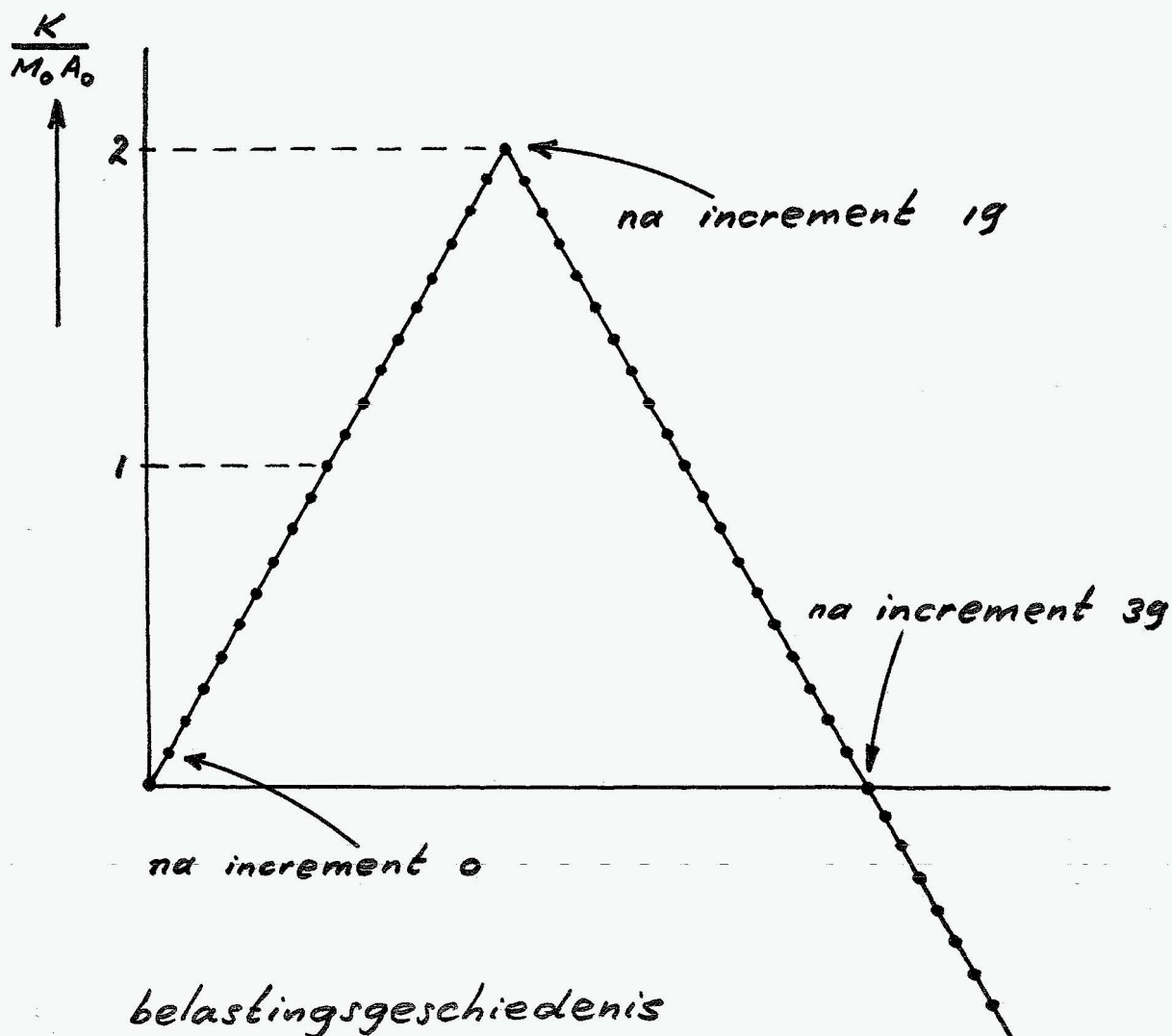
2. „Updated Lagrange” methodiek

Voor elk belastingsincrement wordt als referentie-configuratie gekozen voor de configuratie die als eindtoestand is bereikt na het voorgaande belastingsincrement.

Via beide werkwijzen is een berekening met het MARC-programma uitgevoerd en de resultaten daarvan, weergegeven in de grafiek op blz. 16, zullen in het volgende worden besproken.

De voorgescreven belastingsgeschiedenis is

in onderstaande figuur weergegeven. De grootte van de belastingsstappen bedroeg $\frac{1}{10} M_0 A_0$.



Met de „Total Lagrange” methodiek worden voor de (momentane) lengte van de staaf resultaten verkregen die volledig overeenstemmen met de exakte oplossing volgens formule (2.4). Ook de berekende normaalspanning voldoet aan relatie (2.2). Een uitzondering hierop vormt het resultaat voor increment 0. Voor deze eerste belastingsstap wordt een „lineaire” berekening uitgevoerd. Als relatie tussen de

normaalkracht en de staaflengte wordt gehanteerd: $K = M_0 A_0 (l - l_0) / l_0$. Hoewel dit niet correct is, heeft dit geen verdere consequenties. Voor increment 0 wordt de normaalspanning overigens berekend met de „niet-lineaire“ relaties (2.1) en (2.3).

De afwijking voor increment 0 kan worden voorkomen door het increment 0 uit te voeren „als dummy“ met een belastingsstap ter grootte 0 en daarna de in het voorgaande geschetste belastingsgeschiedenis te volgen.

Bij belastingsincrement 41 (de totale normaalkracht bedraagt dan $-\frac{2}{10} M_0 A_0$) wordt geen convergentie meer bereikt. Dit is geheel volgens de verwachting daar de uitwendige belastingskracht dan kleiner is dan de minimale waarde die behoort bij de exacte oplossing (minimum in de kracht: $-\frac{1}{3}\sqrt{3} M_0 A_0$). Résumerend zijn de resultaten zeer beurendigend te noemen.

Geheel anders was de ervaring bij gebruik van de „Updated Lagrange“ methodiek. Vanuit een theoretisch standpunt bezien, is het noodzakelijk, de konstitutieve verpellingen en de geometrische karakteristieken na een verandering van referentietoestand aan te passen (zie hoofdstuk 3 en 4). De gevolgen, van het niet op adequate wijze

uitvoeren van deze aanpassing, zijn aan de gevonden resultaten overduidelijk merkbaar. De resultaten wijzen erop dat aan de procedure in het MARC-programma de volgende, overigens theoretisch gezien volstrekt onjuiste, formules ten grondslag liggen.

Met uitzondering van de gang van zaken voor increment 0 wordt voor de tweede Piola-Kirchhoff-spanning de volgende relatie gehanteerd:

$$S_T = \frac{l_T}{l} \cdot \frac{K}{A_0} \quad (5.1)$$

Geconstateerd kan worden dat de verandering van het oppervlak van de dwarsdoorsnede niet in rekening is gebracht, zie relatie (3.2). Als constitutieve vergelijking wordt gebruikt:

$$E_T = \frac{1}{M_0} (S_T - S_x) \quad (5.2)$$

Uit de vergelijking met (3.3) zien we dat de „elasticiteitsmodulus“ niet is aangepast. Voor de spanning S_x geldt niet de relatie: $S_x = S_T (K = K_T)$, ten onrechte!

Wel geldt dat S_x de spanning is aan het begin van het increment, echter met gebruik van de referentie-configuratie die is gehanteerd tijdens het voorgaande belastingsincrement. Noemen we de bijbehorende referentie-lengte l_x dan is blijkbaar,

increment 1 uitgezonderd, gebruik gemaakt van de formule:

$$S_{\alpha} = \frac{l_{\alpha}}{l_{\tau}} \cdot \frac{K_{\tau}}{A_0} \quad (5.3)$$

Met gebruik van de definitie voor E_{τ} volgens (3.1) kan uit bovenstaande onjuiste relaties worden afgeleid:

$$K = K_{\tau} \frac{l_{\alpha} l}{l_{\tau}^2} + \frac{1}{2} M_0 A_0 \frac{l}{l_{\tau}} \left(\frac{l^2}{l_{\tau}^2} - 1 \right) \quad (5.4)$$

Het correcte verband wordt door vergelijking (3.4) gegeven.

Resumerend kan worden gesteld dat zeker in het geval dat per belastingsincrement behoorlijke lengteveranderingen optreden, de huidige geprogrammeerde werkwijze zeker niet voldoet. In hoeverre de afwijkingen beperkt blijven bij kleine (re) belastingsincrementen wordt niet nader onderzocht.

Voor de volledigheid wordt nog vermeld dat de niet geheel correcte gang van zaken bij increment 0 nauwelijks van invloed is op het volledig onjuiste eindresultaat.

