

Verdeling van een enkelvoudig samenhangend gebied in 3- of 4-hoekige elementen t.b.v. 2D-meshgenerator

Citation for published version (APA):

Wismans, J. S. H. M. (1974). *Verdeling van een enkelvoudig samenhangend gebied in 3- of 4-hoekige elementen t.b.v. 2D-meshgenerator*. (DCT rapporten; Vol. 1974.006). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1974

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Verdeling van een enkelvoudig
samenhangend gebied in 3-of 4-
hoekige elementen t.b.v. 2D-mesh-
generator.

WE-74-6

Jac Wismans

Inhoud

	pagina
Voorwoord	1
Literatuur	2
<u>I</u> Inleiding	4
<u>II</u> Overzicht van enkele bestaande methoden om elementverdelingen te genereren.	7
<u>III</u> Grofheidsbepaling.	18
<u>IV</u> Het verdelen van een willekeurig gebied in elementen: procedure divgebied	24
<u>V</u> Het verdelen van een bijna-convex gebied in 4-hoekige elementen: procedure divbijnaconvex vierhoek	42
<u>VI</u> Het verdelen van een bijna-convex gebied in 3-hoekige elementen: procedure divbijnaconvex driehoek	47

Voorwoord

Dit verslag geeft een overzicht v.d. werkzaamheden die ik verricht heb in het kader van mijn afstudeerwerk aan de Technische Hogeschool te Eindhoven afd. Werktuigbouwkunde in de vakgroep Technische Mechanica.

Het afstudeerwerk lag op het terrein van het automatisch genereren van de invoergegevens voor elementen methode programma's: een automatische 2-dimensionale meshgenerator.

Gedurende ± één jaar heb ik daartoe samengewerkt met de werkgroep I/O van Progel die aan de ontwikkeling van een dergelijk computerprogramma werkt.

Progel is een samenwerking van een aantal nederlandse industrieën en de drie Technische Hogescholen op het gebied van de elementenmethode.

In de werkgroep I/O van Progel hebben zitting:

Karel Lof (N.R.L.), Marcel Brekelmans, Bert Schoofs en Frans Veldpaus (T.H.E.)

Voor de ontwikkeling v.d. automatische 2-D- meshgenerator, moet dit verslag als een tussenrapport worden gezien. Een aantal procedures moeten nog worden geschreven. Ongetwijfeld zullen op de voorstellen zoals die in dit rapport worden beschreven, bij het programmeren en na experimenten met dit programma, een aantal wijzigingen worden aangebracht.

Iedereen die geholpen heeft bij het tot stand komen van dit afstudeerwerk, i.h.b. de leden v.d. werkgroep I/O, wil ik daarvoor hartelijk danken.

Jac. Wismans

april 1974

Literatuur

- [1] J. Alan George Computer implementation of the finite element method. Stanford University Stan-CS-71-208
- [2] David Vernon Phillips Techniques in triangular mesh generation for flat and curved surfaces. University of Wales, Swansea, 1969.
- [3] A. Schoofs Experimentele 2-dimensionale meshgenerator voor elementverdelingen van 3-hoekige elementen met 3 knooppunten, bestaande uit een of meer subnetten. TH Eindhoven WE.71-1
- [4] Genereren van een driehoekig elementensysteem voor de eindige elementen methode. Handleiding voor het programma Genesys door J.C. Maurits Kon. Shell Rijswijk.
- [5] Hussein A. Kamel en Howard K Eisenstein Automatic mesh-generation in 2 and 3 dimensional inter-connected domains. University of Arizona.
- [6] F.A. Atkuz en E. Heer Stress analysis of solid propellant rocket motors. TR 32-1253 Jet Propulsion Laboratory, Pasadena California (1968)
- [7] C. Frederick, C. Wong en F. Edge 2-dimensional automatic mesh generation for structural analysis. Int. j. num. methods in engineering vol 2. 133-144 (1970)
- [8] W.R. Buell en B.R. Bush Meshgeneration - A survey. Ford motor company Dearborn. Mich.
- [9] Reid en Turner Fortran subroutines for the solution of Laplace's equation over a general region in two dimensions TP 422 Atomic Energy Research Establishment, Harwell England (1970)

[10] W.D. Barfield. Numerical method for generating orthogonal curvilinear Meshes. Los Alamos New Mexico 87544
J. of Comp. Physics 5 (1970)

[11] Zienkiewicz en D.V. Phillips. An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by "isoparametric" coordinates. University of Wales, Swansea. Int. J. for Num. methods in Engineering - vol 3. (1971).

[12] Ergatoudus Quadrilateral elements in plane analysis. University of Wales, Swansea, (1966).

[13] A. Akyuz Natural coordinate systems. An automatic input data generation scheme for a finite-element method. Nuclear Engineering and design " (1970)

[14] M. Winslow "Equipotential" zoning of two-dimensional meshes. UCRL 7312. University of California

[15] Y.K. Cheung en J.O. Pedro Automatic preparation of data cards for the finite element method. University College of Swansea England (1966)

[16] Wismans Verdeling van een convex gebied in vierhoekige elementen t.b.v. 2-D- meshgenerator (feb. 1974)
TH. Eindhoven WE. 74-4.

[17] F. Veldpaus

I Inleiding

I.1 Algemeen

Wanneer we een constructie wensen te berekenen m.b.v. een elementenmethode-programma, moet deze constructie eerst in elementen verdeeld worden. De fijnheid v.d. elementverdeling in relatie tot de spanningsgradiënt ter plaatse, bepaalt de nauwkeurigheid van de berekening. Een grote fijnheid betekent veel elementen, waardoor de rekentijd v.h. elementenmethode programma groot is. Men tracht daarom alleen op die plaatsen waar de spanningsgradiënt groot is en/of waar een grote nauwkeurigheid vereist is een fijne verdeling aan te brengen. Op de andere plaatsen kan met grovere elementen worden volstaan.

Het aanbrengen van een verdeling met plaatselijk verfijningen is een tijdrovende bezigheid, zeker indien het aantal elementen groot is.

De kans op foutieve invoer (vooral coördinaten) is groot.

Voor het aanbrengen van een geschikte verdeling is tevens enige deskundigheid noodzakelijk.

Het is geen uitzondering dat het samenstellen v.d. invoer enkele weken tijd vergt.

Een meshgenerator nu is een computerprogramma dat met een geringe invoer de invoer voor het elementmethode programma genereert.

De voordelen van een meshgenerator zijn:

- a) arbeidsbesparend : saai eentonig werk wordt door de computer overgenomen.
- b) minder kans op fouten in de invoer.
- c) minder deskundigheid vereist.
- d) een regelmatigere verdeling kan verkregen worden.

I.2 Opzet v.d. automatische 3D-meshgenerator :

In [17] worden in de t.b.v. Progel te ontwikkelen Meshgenerator de volgende blokken onderscheiden :

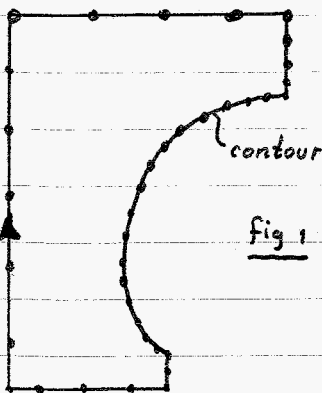
- 0 : inlezen en controleren v.d. invoer
- 1 : verdelen in subgebieden - genereren van knooppunten op de subcontour. De subgebieden zijn enkelvoudig samenhangend.
- 2 : subgebieden in elementen verdelen

- 3: repositioneren v.d. knooppunten per subgebied
- 4: evt. genereren van knooppunten op middens van elementribben.
- 5: hernoemen van knooppunten per substructure en hernoemen van elementen per elementgroep.
- 6: uitvoer.

Als afstudeerwerk heb ik blok 2: subgebieden in elementen verdelen nader uitgewerkt.

I.3 Probleemstelling van blok 2.

Gegeven: een enkelvoudig samenhangend gebied met een rand (ook wel contour genoemd). De contour bestaat uit knooppunten, die



verbonden zijnde door rechte lijnen. (fig 1)

De belangrijkste invoer voor blok 2 bestaat uit:

- 1 de coördinaten v.d. knooppunten op de contour.
- 2 de knooppuntsnummers van deze knooppunten.

Op de contour worden, althans in dit blok, verder geen knooppunten gegenereerd, dus alle elementen die aan de contour komen te grenzen bevatten een of meerdere van deze knooppunten.

In het gebied moet nu een elementverdeling worden aangebracht, waaraan we de volgende eisen stellen:

- 1 De elementverdeling moet zo regelmatig mogelijk zijn, uit experimenten blijkt dat dit een gunstige invloed heeft op de resultaten van de berekening [6].
- 2 Daar waar verfijningen in de elementverdeling gewenst zijn, zijn in blok 1 de knooppunten op de contour dichter bij elkaar gelegd. De elementverdeling moet deze verdeling op de contour volgen.
- 3 De gegenereerde elementen moeten een redelijke vorm hebben.
- 4 De benodigde rekestijd moet zo klein mogelijk zijn.
- 5 In het gebied moet óf een verdeling in driehoekige elementen, óf een verdeling in vierhoekige elementen worden gegenereerd.

I.4 Uitvoering

In Hoofdstuk II wordt een overzicht gegeven v.d. belangrijkste methoden die bestaan om een elementverdeling te genereren.

Geen v.d. methoden voldeed aan de in I.3 gestelde eisen, zodat een nieuwe methode ontwikkeld is.

Het belangrijkste principe waarop deze methode steunt: Het bepalen v.d. lengte van een elementribbe binnen het gebied, uit de lengten van de elementribben op de contour, wordt in Hoofdstuk III behandeld.

Het blijkt het eenvoudigste te zijn, wanneer we een concaaf gebied hebben. Dit gebied eerst in een aantal convexe of bijna-convexe gebieden te verdelen. In hoofdstuk IV wordt globaal behandeld hoe dit kan gebeuren.

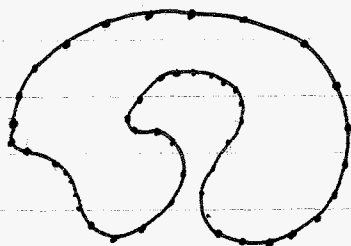


fig 2

Het moeilijkste probleem is het verdelen van een bijna-convex gebied in vierhoekige elementen. Voor wat betreft de verdeling van een convex gebied is dit in de vorm van een programma uitgewerkt. Voor beschrijving van dit programma zie [16].

In hoofdstuk V wordt een korte samenvatting hiervan gegeven.

Verder komt in hoofdstuk V het verdelen van een bijna-convex gebied in vierhoekige elementen aan de orde.

Hoofdstuk VI tenslotte zal ingaan op de verdeling van een bijna-convex gebied in driehoekige elementen.

II Overzicht van enkele bestaande methoden om elementverdelingen te genereren.

II.1 Een methode die gedeeltelijk grafisch is en gedeeltelijk gebruikt maak v.d. computer.

De methode is ontwikkeld door Frederik Wong en Edge [2] [7].

Op een speciale tekenmachine tekent men de rand van het te verdelen gebied. De rand kan elke willekeurige vorm hebben.

Het gebied mag meervoudig samenhangend zijn.

Op de rand en in het gebied tekent men alle knooppunten, rekening houdende met plaatselijke verfijningen.

Met een electro-magnetische pen worden de knooppunten afgetast en worden de coördinaten v.d. knooppunten automatisch in ponskaarten geponst. Dit pak ponskaarten dient als input voor een computer-programma, dat de knooppunten verbindt tot een driehoekige elementverdeling. Het programma doet dit zodanig dat de driehoeken zoveel mogelijk gelijkzijdig zijn en elkaar niet overlappen.

Opmerkingen:

- Het is vaak moeilijk om zonder driehoeken te tekenen, aan te geven waar een volgende knooppunt moet komen te liggen.

Wanneer we tevens de driehoeken tekenen en de knooppuntsnummers per element registreren, hebben we het computer-programma niet meer nodig.

- Door het met de hand nummeren v.d. knooppunten, zal de bandbreedte vaak verre van ideaal zijn.

- Deze methode zal reeds een grote tijdsbesparing opleveren bij het maken v.d. invoer, terwijl de kans op fouten gering is.

In [8] worden methodes besproken die ongeveer op de zelfde wijze te werk gaan.

De programma tekst (Fortran) is aanwezig in de Bibliotheek

THE-Werktuigbouw [2 blz II - 47 e.v.].

II.2 Methodes die een regelmatige elementverdeling afbeelden op het te verdelen gebied

II.2.1. Reid en Turner [9].

Men gaat uit van een enkelvoudig samenhangend gebied met een uit polynomen bestaande rand. In dit gebied wil met een verdeling aanbrengeen zonder plaatselijke verfijningen. Men legt nu over het te verdelen gebied een regelmatige verdeling, bestaande uit driehoeken, zodanig dat het gehele gebied overdekt is. (zie fig 1)

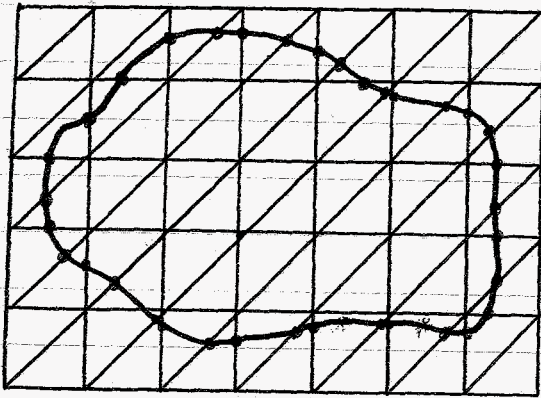


fig 1

De punten waar de driehoeksverdeling de rand v.h. gebied snijdt, noemen we grenspunten. Punten van de regelmatige verdeling, die dichter als een bepaalde waarde h bij de rand liggen, worden naar de grenspunten verschoven. Alle punten die buiten de rand blijven, laten we weg vallen. Op deze manier krijgen we een regelmatige verdeling in ons gebied.

behalve natuurlijk langs de rand waar de elementen vaak zeer vreemde vormen kunnen krijgen.

Wanneer de rand een of meerdere scherpe hoeken bevat, moet men ervoor zorgen dat knooppunten v.d. driehoeksverdeling met de knooppunten v.d. scherpe hoeken samen vallen.

Samengevat dus een methode die alleen geschikt is voor een elementverdeling met overal de zelfde fijnheid en die langs de rand elementen met een slechte vorm oplevert.

II.2.2. Barfield [10].

Deze methode is zowel voor driehoekige als voor vierhoekige elementen geschikt.

De contour van het te verdelen gebied G wordt afgebeeld op de contour van een rechthoekige veelhoek (met hoeken van 90° - of 270°).

In eerste instantie moeten we een functie vinden, die de rand van G afbeeldt op de rand van de veelhoek. (zie fig 2)

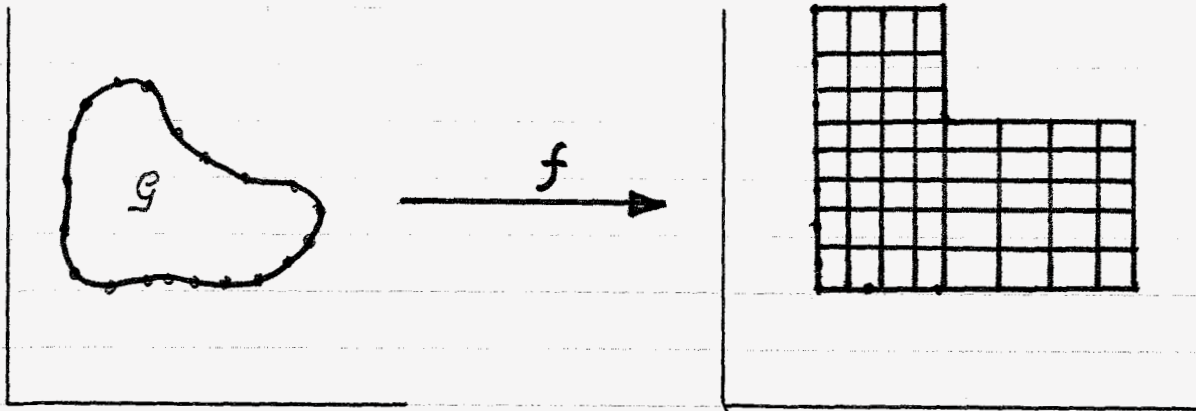


fig 2

In de rechthoekige veelhoek is een vierhoekige (of driehoekige) verdeling aangebracht. De functie die de rand van G op de rand v.d. veelhoek afbeeldt noemen we f , m.b.v. de inverse van f kunnen we de knooppunten van de rechthoekige verdeling afbeelden op G .

Barfield heeft de methode alleen toegepast op eenvoudige gebieden.

De volgende methode lijkt wel iets op de bovenstaande, ze is echter geschikt voor meer ingewikkelde gebieden:

II.2.3 Zienkiewicz - D.V. Phillips [2][11].

De methode is ontwikkeld aan de University van Wales (Swansea).

Het te verdelen gebied G wordt in blokken verdeeld. Elk blok wordt bepaald door 8 knooppunten. (zie fig 3).

De verbindingen tussen de 8 punten kunnen zowel rechten als parabolen zijn.

In elk blok wordt een kromlijnig coördinatenstelsel $[u, v]$ ingevoerd, zodanig dat: $-1 < u < 1$ en $-1 < v < 1$.

Het verband tussen dit kromlijnig en het cartesisch $[x, y]$ coördinatenstelsel kan geschreven worden m.b.v. de z.g. vormfunctie: N_i .

We krijgen dan de volgende relaties:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (\text{voor gekromde vlakken}).$$

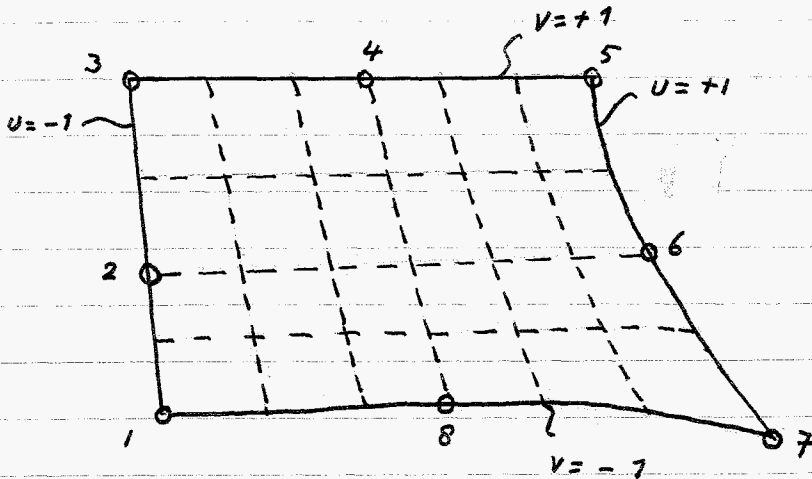


fig. 3

x_i is de x -coördinaat
v/h i^e knooppunt etc...
 N_i hangt af van u en v .
 N_i moet zodanig zijn dat de
randen van 2 naast elkaar
liggende blokken aansluiten.
Door Ergatoudus [12] zijn
deze 8 vormfuncties N_i
afgeleid:

$$N_1 = \frac{1}{4} (-1 + u \cdot v + u^2 + v^2 - u^2 v - u v^2)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 - u - v^2 + u v^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (-1 - u v + v^2 + u^2 + u^2 v - u v^2)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} (1 + v - u^2 - u^2 v)$$

$$N_5 = \frac{1}{4} (-1 + u v + v^2 + u^2 + u^2 v + u v^2)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + u - v^2 - u v^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{4} (-1 - u v + u^2 + v^2 - u^2 v + u v^2)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - v - u^2 - u^2 v)$$

Wanneer we van een punt de coördinaten $[u, v]$ kennen, kunnen we met behulp van bovenstaande formules de coördinaten $[x, y]$ van dat punt bepalen.

Het te verdelen gebied wordt dus in een aantal blokken verdeeld. Van elk blok moeten we opgeven in hoeveel elementen we het willen verdelen (dus het aantal rijen en kolommen per blok).

Belangrijk is, dat als we van één blok bepaald hebben, in hoeveel elementen dit verdeeld moet worden, dit invloed heeft op de verdeling van de andere blokken.

Het voordeel hiervan is dat de invoer beperkt kan blijven.

Het nadeel is dat plaatselijke verfijningen moeilijker of niet te verwezelijken zijn.

Wanneer we in fig 4 het aantal rijen en kolommen van blok 1 hebben bepaald, ligt het aantal rijen van blok 2 en het aantal kolommen van blok 3 vast. Na bepaling van het aantal kolommen van blok 2 en het aantal rijen van blok 3, ligt de verdeling van blok 4 helemaal vast.

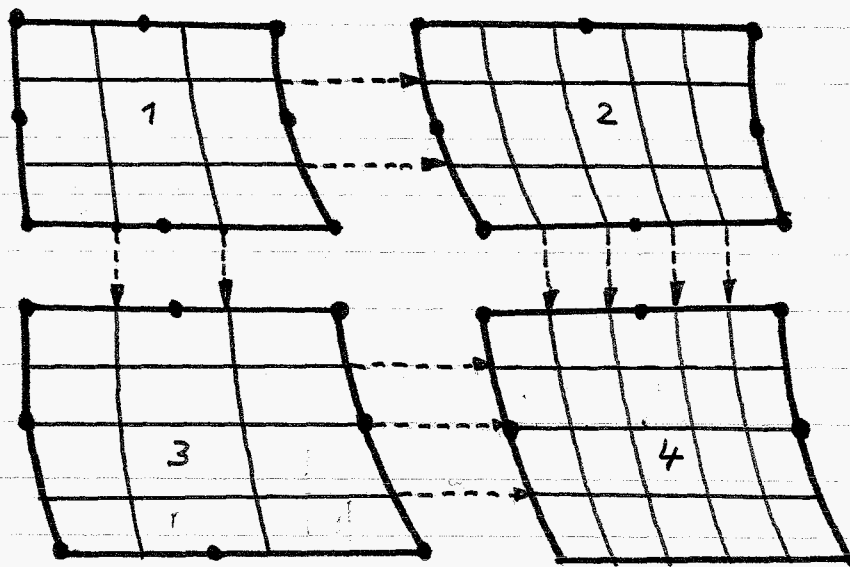


fig 4

Opmerkingen:

- Voor ingewikkelde gebieden moet het gebied in een groot aantal blokken verdeeld worden. Per blok moeten de knooppuntscoördinaten en de gewenste verdeling worden opgegeven, voor zover deze niet uit de gegevens van voorgaande blokken volgen. De vereiste invoer zal dus nogal vrij groot zijn.
- Voor het juist verdelen in blokken is een redelijke deskundigheid vereist.
- Wanneer de rand v.h. gebied moeilijk door een rechte of parabool te beschrijven is, wordt om de rand toch goed te kunnen benaderen, het aantal blokken groot.
- De verkregen elementvorm is goed.
- Door het trekken van diagonalen in de vierhoeken, kan een

driehoekige verdeling verkregen worden.

- De methode is ook geschikt voor gekromde vlakken.
- De tekst van het programma (Fortran) is aanwezig in bibliotheek THE [2 blz II. 3].

II.2.4 Akyuz [13].

De methode lijkt ook weer op bovenstaande twee.

Een vereiste is dat het gebied convex of bijna convex is.

Door de omtrek v/h gebied in 4 delen te delen is het mogelijk een nieuw coördinatenstelsel aan te brengen. Akyuz noemt dit een natuurlijk coördinatenstelsel. Met behulp van transformatie formules is het dan mogelijk het gebied in elementen te verdelen.

De methode is geschikt voor vierhoekige elementen.

II.2.5 Helftautomatische meshgenerator George G. Alan [1].

Bij deze methode wordt het te verdelen gebied eerst met de hand in een aantal grote driehoeken verdeeld.

Elke driehoek wordt m.b.v. een computer in kleine driehoeken verdeeld, zodanig dat een factor k aangeeft in hoeveel stukken een zijde v.e. driehoek verdeeld moet worden. De kleine driehoeken zijn gelijkvormig met de grote driehoek. Met de grootte v.d. grote driehoeken kan men de grofheid in de hand houden.

Wanneer de rand v.h. gebied niet uit rechte lijnen bestaat zijn zeer veel driehoeken noodzakelijk om de rand voldoende goed te volgen. Het zal duidelijk zijn dat deze methode meestal veel invoergegevens vraagt.

De methode is alleen geschikt voor de berekening van de oppervlakte van een gebied.

II.3 Methode die gebruikt maakt v.d. potentiaaltheorie: Winslow [14]

De lijnen v.d. elementverdeling zijn twee elkaar snijdende sets equipotentialen. De lijnen voldoen aan de Laplace vergelijking.

De snijpunten v.d. lijnen worden iteratief bepaald.

De verkregen verdeling is zeer regelmatig, er mag echter geen groot grofheidsverloop zijn in de knooppuntsafstand op de omtrek.

Aan de rand ontstaan meestal minder mooie elementen, terwijl er ook punten buiten de rand gegenereerd kunnen worden.

II.4 Cheung Pedro - Genesis - Schoofs [15] [4] [3]

De 3 methodes werken allen volgens hetzelfde principe.

De werking v.d. 2D-meshgenerator van Schoofs is als volgt:

- de gebruiker kiest op de rand van het te verdelen gebied 2 overstaande delen en legt op beiden een gelijk aantal knooppunten (fig 5).

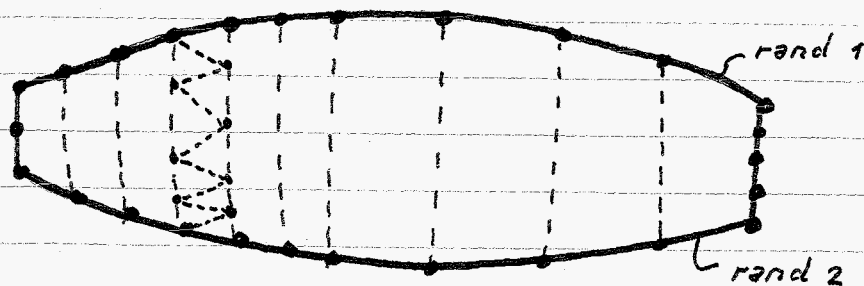


fig 5

- tussen 2 tegenover elkaar liggende punten, worden rechte lijnen of stukken cirkelboog getrokken.
- de lijnen worden in een aantal stukken verdeeld, deze stukken hoeven niet de zelfde lengte te hebben
- de punten worden met elkaar verbonden tot driehoekige elementen.

Opmerkingen:

- het nummeren v.d. knooppunten geschiedt zodanig dat een smalle bandbreedte ontstaat.
- grofheidsverfijning kan worden bereikt door op de lijnen meer punten te leggen. Het aantal punten op 2 naast elkaar liggende

lijnen mag echter slechts één verschillen. Ook kan grofheidsverfijning bereikt worden, door in de intervallen waarin een lijnstuk verdeeld wordt, een bepaald grofheidsverloop aan te brengen.

- gebieden met een ingewikkelde vorm moeten eerst in een aantal subgebieden verdeeld worden. Het aantal invoergegevens neemt hierdoor sterk toe.
- voor vierhoekige elementen is het principe minder geschikt.
- meervoudig samenhangende gebieden moeten in enkelvoudig samenhangende subgebieden verdeeld worden.
- voor opstellen v.d. invoergegevens is een redelijke deskundigheid en vaardigheid vereist.
- in het programma is een repositioneringsprocedure voor de knooppunten ingebouwd (husselen). De verdeling wordt hierdoor regelmatig.
- koppeling van meerdere subgebieden is mogelijk.

II.5 Automatische meshgenerator van J. Alan George [1]

De meshgenerator verdeelt een enkelvoudig samenhangend gebied in driehoekige elementen. De gebruiker moet de geometrie v.d. contour opgeven, samen met een regel hoe deze contour in elementribben verdeeld moet worden.

We hebben dan een begingrens bestaande uit een serie knooppunten (fig. 6).

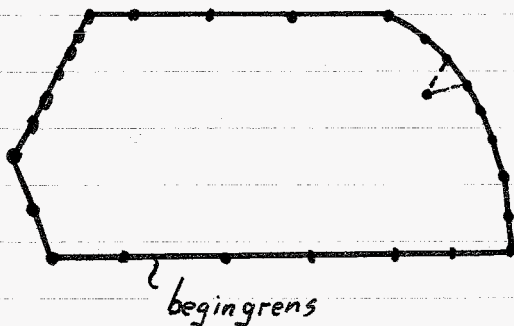


fig 6

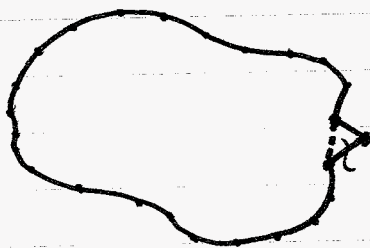
We gaan het gebied systematisch verkleinen door aan de grens v.l.h. gebied een driehoek te creëren en deze v.l.h. gebied af te halen.

We houden dan een kleiner gebied over met een "nieuwe" grens (verder lopende grens genoemd)

Op dit nieuwe gebied herhalen we dit proces. We gaan door, totdat het gehele gebied verdeeld is.

Er zijn 2 manieren om een driehoek aan de rand te creëren nl.:

1] trimming (fig 7)



dit element wordt "getrimd" fig. 7

2] notching

Op de bisectrice van een v.d. hoeken ^{van de omtrek} wordt een punt P gelegd, zodanig dat de volgende functie geminimaliseerd wordt:

$$(1) \quad f(P) = \underbrace{|c-b_2| + |c-b_3|}_A + \underbrace{\gamma \{|a_1-b_1| + |a_2-b_4|\}}_B + \underbrace{\frac{1}{1+\gamma} \{|a_1-\bar{l}| + |a_2-\bar{l}|\}}_C$$

Voor betekenis v.d. verschillende symbolen zie fig. 8

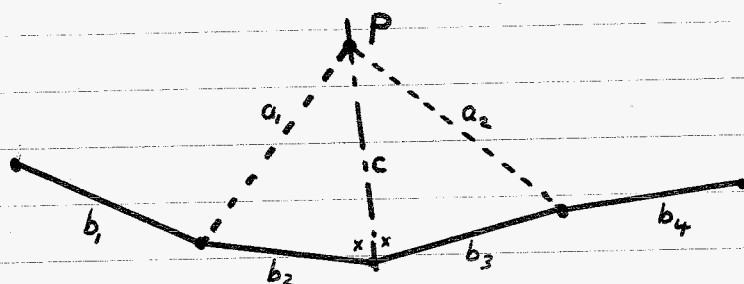


fig. 8.

Punt P kan dan met b_2 of b_3 een element vormen.

Deel A v.d. formule zorgt ervoor dat het element zoveel mogelijk gelijkzijdig wordt.

Deel B v.d. formule zorgt ervoor dat de zijden v.d. "nieuwe" grens (lopende grens) zoveel mogelijk aan elkaar gelijk worden.

Deel C zorgt ervoor dat de zijden zoveel mogelijk gelijk zijn aan de gemiddelde zijde lengte: \bar{l} v.d. begingrens.

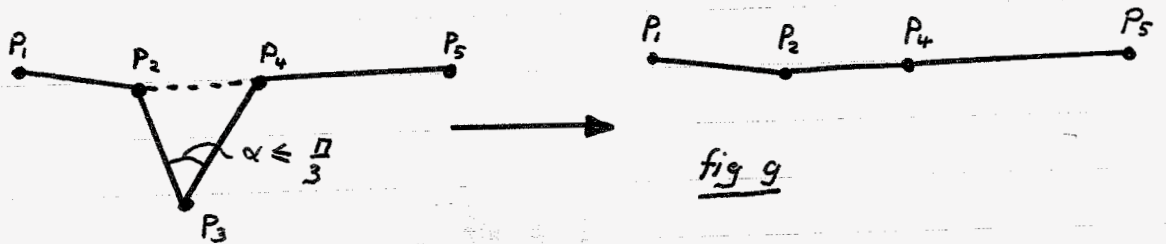
$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^4 |b_i - \bar{l}|}{4\bar{l}}$$

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^4 b_i}{4}$$

Door γ wordt bereikt dat indien de zijden b_1, \dots, b_4 sterk in lengte verschillen (dan is γ dus groot) deel B een grotere en deel C een minder grote rol in de formule speelt.

Het programma is in de volgende stappen onderverdeeld:

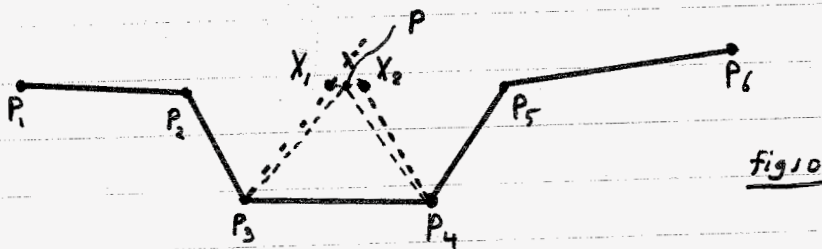
stap 1 trimming: Indien een binnenhoek v.d. contour $\leq \frac{\pi}{3}$ is, wordt een element gevormd en van het gebied verwijderd. (fig. 9)



Wanneer alle hoeken $\leq \frac{\pi}{3}$ verdwenen zijn dan:

stap 2 Zoek 2 naast elkaar liggende ^{binnen} hoeken op de contour die elk zowenig mogelijk van 120° afwijken (de hoeken moeten echter zeker kleiner dan 150° zijn). Vinden we een combinatie niet dan gaan we verder met stap 3.

Genereer m.b.v. formule 1 op de bisectrice van beide hoeken een punt X_i . Neem het zwaartepunt van deze 2 punten: P (fig. 10)



We "notchen" element $P P_4 P_3$.

Indien P_3 of P_4 vrij scherp zijn kan het beter zijn $P_2-P_3-P_4$ of $P_3-P_4-P_5$ te "trimmen". George heeft hiervoor criteria ingebouwd. Ga terug naar stap 1.

stap 3 Zoek de binnenhoeken op de contour die kleiner zijn dan $\frac{\pi}{2}$. m.b.v. formule 1 genereren we op de bisectrice van P_3 een punt P . (fig. 11).

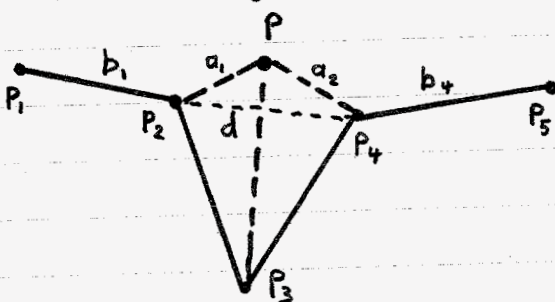


fig 11

Als de zijden b_1, d, b_4 minder van elkaar verschillen dan de zijden b_1, a_1, a_2, b_4 "trimmen" we: $P_2-P_4-P_3$, en gaan terug naar stap 1. Kan er geen element "getrimd" worden, ga dan naar stap 4.

stap 4 a) Bepaal: $\gamma = N_1 + \frac{N_1}{N_2} (N_2 - N_1)$ $N_1 =$ kleinste zijde v.d. stroomgrens
 $N_2 =$ grootste zijde v.d. stroomgrens

b) Zoek de zijden op de contour waarvan de lengte kleiner is dan γ .
 Neem de zijde die de kleinste binnenhoek heeft.

c) Genereer op de bisectrice van deze hoek m.b.v. form 1 een punt P
 en "notch" P_2P_3 of PP_3P_4 (b.v.: we nemen het element dat het
 meest gelijkzijdig is). (fig 12) en ga daarna weer naar stap 1.

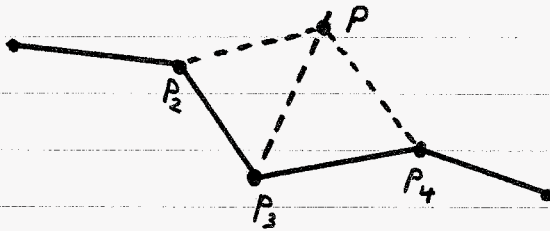


fig 12

Indien geen zijde kleiner dan γ
 kan worden gevonden, vergroten we γ :

$$\gamma := \gamma + \frac{N_1}{N_2} (N_2 - N_1)$$

Ga daarna terug naar stap 4 b.

Indien $\gamma = N_2$ is er iets
 misgegaan.

Opmerkingen:

- γ bij stap 4 wordt gehanteerd, om eerst het deel v.d. contour met de fijnste verdeling aan te pakken.
- door de stappen 1, 2 en 3 bereikt George dat eerst uitstulpingen van de contour verwijderd worden, dus dat het gebied minder concaaf wordt.
- wanneer de eis dat P op de bisectrice moet liggen achterwegen blijft, kunnen we een betere elementvorm verkrijgen, de procedure zal dan echter gecompliceerder en de rekentijd groter worden.
- steeds wanneer een punt P gegenereerd is moet gecontroleerd worden, of dit punt binnen de stroomgrens valt. Dit controleren is echter een tijdrovende bezigheid.
- George beschrijft niet, hoe een gebied tenslotte vol komt. We laatst gegenereerde elementen zullen een minder ideale vorm hebben.
- de gebieden waarop George het programma test hebben een eenvoudige vorm en de knooppunten op de omtrek liggen overal ongeveer evenver uit elkaar.
- een groot voordeel van de methode van George is, dat de invoer beperkt is.
- de bandbreedte is „slecht“, zodat hernummering noodzakelijk is

III Grofheidsbepaling.

III.1 Inleiding.

Met als enige gegeven: de knooppunten op de contour komt v.d. in §1 beschreven methodes eigenlijk alleen de methode van Alan George in aanmerking. De methode is echter alleen van toepassing op driehoekige elementen. Zouden we hetzelfde principe op vierhoeken willen toepassen, dan krijgen we grote moeilijkheden zolang er sprake is van een grofheidsverloop op de omtrek. Er bestaat dan namelijk een grote kans, dat wanneer het gebied voor een groot deel gevuld is, we 2 randen tegenover elkaar krijgen, waarop het aantal knooppunten sterk verschillend is. Een goede aansluiting krijgen tussen deze 2 randen is dan niet mogelijk. Ook gezien de andere bezwaren die aan de methode van Alan George kleven (controles e.d.) is hier helemaal vanaf gestapt en is een nieuwe methode ontwikkeld.

Het belangrijkste waar deze methode gebruik van maakt is: het bepalen v.d. lengte v.e. elementribbe in het gebied uit de lengte v.d. elementribben op de contour. We noemen dit verder grofheidsbepaling.

III.2 Probleemstelling

We hebben een gebied G met een contour. De elementverdeling op deze contour levert ons een niet-continue functie g op de contour. De contour kan een willekeurig grillige vorm hebben.

We moeten nu in het gebied G een functie g bepalen die aan de volgende eisen voldoet:

- a) continu (behalve op en dichtbij de rand)
- b) functiewaarde in het gebied niet groter of kleiner dan de grootste resp. kleinste g op de rand.
- c) in de "buurt" v.d. rand moet de functie g de waarde van g op rand benaderen.
- d) geen lokale maxima of minima in het gebied.

Uit de Wiskunde zijn oplossingen van soortgelijke problemen bekend n.l.:

III.3. Dirichlet probleem.

Gegeven een enkelvoudig samenhangend gebied met op de rand een harmonische functie: g .

Vaak is het nu mogelijk om in het gebied een harmonische functie te berekenen die op de rand met de gegeven functie samenvalt.

In een punt P v.e. 3-dimensionaal gebied is deze functiewaarde:

$$g[P] = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma$$

S is het opp. v.d. 3-dim. figuur.

r is de afstand van P tot de rand.

n is de normaal op het opp. S .

Bovenstaande formule trachten toe te passen op ons probleem levert allerlei moeilijkheden op:

- de functie g op de rand is niet harmonisch

- bepaling van $\frac{\partial g}{\partial n}$ en $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ kost in een grillig gebied zeer

veel rekentijd

- de verkregen functie in het gebied is harmonisch, deze eis is voor ons niet noodzakelijk, vaak zal zo'n functie echter ook helemaal niet gevonden kunnen worden.

We zullen van deze formule daarom verder afstappen.

III.4. De integraalformule van Cauchy uit de complexe functie-theorie.

In het complexe vlak hebben we een enkelvoudig samenhangend gebied met op de rand een continue functie g . Deze functie g kan complex zijn. In het gebied kunnen we een functie $g[P]$ bepalen:

$$g[P] = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(\frac{g}{z-p} dz \right) \quad \textcircled{1}$$

$z-p$ is de afstand van p tot de rand.

De gevonden functie g is holomorfe (d.w.z. oneindig vaak differentieerbaar

in het gehele gebied). De functie is complex.
 Wanneer we bovenstaande formule trachten toe te passen op ons probleem constateren we:

- onze functie op de rand is reëel en niet continu.
- de functie g in het gebied wordt holomorf, dit is voor de functie die wij wensen te vinden niet noodzakelijk.
- we wensen als oplossing een reële functie.
- zou g op de rand continu zijn dan is exacte oplossing v.d. formule veel te moeilijk, de rand v.h. gebied is n.l. veel te grillig.

Bovenstaande doet ons concluderen dat een oplossing m.b.v. bovenstaande formule niet mogelijk is. Wel duidt bovenstaande formule ons een methode aan die wel tot een redelijke oplossing zou kunnen leiden. Dit wordt in het volgende plausibel gemaakt:

III.5 Een praktische oplossing:

Waarschuwing: Hetgeen nu volgt zal wiskundig niet helemaal correct zijn.

Ons doel is een functie te vinden die aan de in III.2 gestelde eisen voldoet. Met behulp v.d. volgende benadering wordt een dergelijke functie gevonden.

De formule van Cauchy iets anders geschreven levert:

$$g[p] = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g}{z-p} d(z-p)$$

Stel $(z-p) = r(\alpha) e^{i\alpha}$ ($r(\alpha)$ is reëel). dan is:

$$d(z-p) = r(\alpha) \cdot i \cdot e^{i\alpha} d\alpha + e^{i\alpha} r'(\alpha) d\alpha.$$

Substitutie hiervan levert:

$$g[p] = \frac{1}{2\pi i} \oint g \left(i d\alpha + \frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)} d\alpha \right) \quad \text{of:}$$

$$g[p] = \frac{1}{2\pi} \oint g d\alpha + \frac{1}{2\pi i} \oint g \frac{dr}{r} \quad (2)$$

De functie heeft een reëel en een complex deel. Voor ons kan interessant zijn het reële gedeelte of de modulus.

De modulus is:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{(\oint g d\alpha)^2 + (\oint g \frac{dr}{r})^2}$$

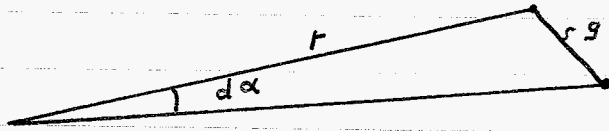


fig 1

Een benadering voor deze formule is:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \alpha[i] g[i]\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{r[i]}^{r[i+1]} \frac{dr}{r}\right) g[i]\right)^2} \quad \text{of:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \alpha[i] g[i]\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \left(\log \frac{r[i+1]}{r[i]}\right) g[i]\right)^2} \quad (3)$$

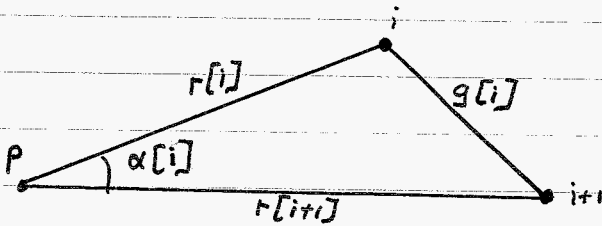


fig 2

$\alpha[i]$ is de hoek gevormd door de lijnen uit P naar 2 opeenvolgende knooppunten: i en i+1.

$g[i]$ is de afstand tussen i en i+1, gedeeld door een bepaalde standaardlengte.

n is het totaal aantal knooppunten op de contour.

In verschillende punten van een aantal gebieden zijn met behulp van bovenstaande formule een aantal g 's (groftheden) bepaald.

De geronden waarden voldeden redelijk aan de in III. 2 gestelde eisen, alleen aan de rand voldeed de functie niet.

Wanneer we naar het reële gedeelte van 2 kijken, vinden we als benadering:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha[i] g[i] \quad (4)$$

Op de zelfde plaatsen waar we de groftheid met form. 3 bepaald hebben, hebben we dit ook met formule 4 gedaan. De geronden groftheden weken niet veel

van elkaar af. Omdat formule 3 veel meer rekentijd vergt (i.v.m. logaritmische berekening) gaan we alleen verder met formule 4. Voor formule 4 kunnen we schrijven:

$$g[P] = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha[i] g[i]}{\sum_{i=1}^n \alpha[i]}$$

Om de gevonden $g[P]$ ook in de buurt van de rand goed te laten voldoen wordt het volgende voorgesteld: Laat de $g[i]$'s van lijnstukken waar P "dicht" bij ligt extra meetellen.

We bereiken dit met de volgende formule:

$$g[P] = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha[i] g[i]}{\rho[i]}}{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha[i]}{\rho[i]}} \quad (5)$$

$\rho[i]$ is de kortste afstand van P tot randstuk i .

De resultaten v.d. grofheidsbepaling met formule 5 zijn zodanig dat aan de in III.2 gestelde eisen voldaan wordt, echter met een voorbehoud: het gebied moet convex zijn.

III 6. Niet convexe gebieden.

Wanneer we formule 5 toepassen op fig. 3, voldoet de grofheid in P niet meer aan de gestelde eisen, immers P ligt vrij dicht bij

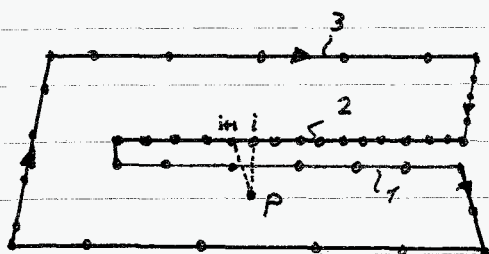


fig 3

rand 2. De grofheid van randstuk 2 heeft dus een grote invloed op de grofheid in P , terwijl we dit juist niet wensen.

Beter is het alleen te kijken naar die randstukken die we vanuit P "zien" kunnen.

Aantonen dat we rand 2 niet "zien"

kunnen is eenvoudig: Bereken m.b.v. de determinant regel het oppervlak van driehoek: $P - i - i+1$. Is het teken van dit opp. positief dan "zien" we het randstuk niet. (mits de contour met de klok mee wordt doorlopen)

Controle of we rand 3 "zien" is echter veel gecompliceerder en zal veel reken tijd kosten. Voorgesteld wordt indien we de graftheid bepalen in een concaaf gebied, de zijden, waarvan we m.b.v. de determinant-regel constateren dat we ze vanuit P niet zien kunnen, niet te laten meedoen voor de graftheidsbepaling. Zijden horende bij b.v. rand 3 doen wel mee, normaal gesproken zullen deze echter tamelijk ver weg liggen van P , zodat hun invloed niet al te groot is.

Wanneer we een concaaf gebied in elementen moet verdelen, is het het beste als we dit gebied eerst in een aantal convexe gebieden verdelen en elk convex gebied dan verder in elementen verdelen.

De graftheidsbepaling geschiedt dan voornamelijk in convexe gebieden.

In [16] wordt de procedure Bpg, welke de graftheidsbepaling m.b.v. formule 5 uitvoert, beschreven.

IV Het verdelen van een willekeurig enkelvoudig samenhangend gebied in elementen: Procedure Divgebied

IV.1 Inleiding.

De opzet v.d. procedure is zodanig dat het te verdelen gebied indien het concaaf is of veel knooppunten op de omtrek heeft, eerst in een aantal kleinere convexe of bijna-convexe gebieden verdeeld wordt. We doen dit om de volgende redenen:

- besparing rekentijd: wanneer we de grofheid bepalen in een klein gebied met weinig knooppunten op de rand is de rekentijd beperkt.
- de methode die we gebruiken om een gebied in elementen te verdelen, is zodanig opgebouwd, dat, als het gebied concaaf is, een groot aantal controles moet worden uitgevoerd (betekent ook weer veel rekentijd).
- zoals we in III gezien hebben werkt de grofheidsbepaling alleen voldoende nauwkeurig op convexe gebieden.

Onder een bijna-convex gebied (zie fig 1) wordt verstaan: een gebied met hoeken niet groter dan α (b.v.: 200°). Verder eisen we, dat wanneer γ_i de hoeken voorstelt $> 180^\circ$ en $< \alpha$ dat:

$$\sum_{i=1}^k (\gamma_i - 180^\circ) < B$$

k is aantal hoeken $> 180^\circ$ op de contour.

B zou b.v. 45° kunnen zijn.

Een bovenstaande definitie van een bijna-convex gebied is ingevoerd om te voorkomen, dat een concaaf gebied in teveel kleinere gebieden moet worden onder-

verdeeld. Indien we een bijna-convex gebied in elementen verdelen, is omdat er niet al te veel hoeken groter dan 180° in het gebied zitten, de hoeveelheid controles beperkt.

De procedure die een bijna-convex gebied in elementen verdeeld, noemen we divbijaconvexvierhoek en divbijaconvexdriehoek. Deze procedures zullen in V resp VI besproken worden. De procedure Divgebied verdeelt een gebied in kleinere convexe- of bijnaconvexe gebieden, waarna die gebieden in elementen verdeeld worden door de procedures Divbijaconvexdriehoek of divbijaconvexvierhoek.



fig 1

IV.2 Gebruiksaanwijzing

Divgebied (co, ct, kct, td, ae, ak, vrk)

IV.2.1 Globale parameters.

<u>procedure</u>	divconvex bijna vierhoek	Zie <u>V</u>
<u>procedure</u>	divconvex bijna driehoek	Zie <u>VI</u>
<u>procedure</u>	div F	Zie <u>IV.5</u> blz 30.

IV.2.2 Formele parameters.

<u>array</u>	co	bevat coördinaten van alle knooppunten	} zie ook: [16, blz 3]
<u>array</u>	ct	bevat de knooppuntsnummers van de contour	
<u>array</u>	td	wordt gevuld met top. beschrijving v.d. elementen	
<u>integer</u>	kct	aantal knooppunten op de contour	
<u>integer</u>	ae	aantal elementen	
<u>integer</u>	ak	aantal knooppunten	
<u>boolean</u>	vrk	is <u>true</u> wanneer vierhoekige elementen moeten worden gemaakt, <u>false</u> indien driehoekige.	

IV.3 Beschrijving

Om de convexe of bijna-convexe gebieden, die ontstaan, te beschrijven worden de volgende parameters gebruikt:

<u>array</u>	hct	bevat de knooppuntsnummers v.d. verschillende contouren.	} zie ook: [16, blz 13]
<u>array</u>	haf, hhh	bevat afstanden en cosinus van hoeken v.d. verschillende contouren	
<u>array</u>	khct	bevat aantal knooppunten v.d. verschillende contouren.	
<u>array</u>	hgh.	array met de grenzen [1:l, 1:l]. Bevat de knooppunten per contour, die een hoek groter dan α (b.v. 200°) hebben.	

ℓ is het aantal hoeken groter dan α .

array hmg h

Array met de grenzen $[1:\ell]$. Bevat het aantal hoeken groter dan α per contour.

array h k h

Zelfde als hmg. Bevat echter hoeken groter dan 180° en kleiner dan α . (grens van dit array is groter)

array h m k h

Zelfde als hmg, echter voor de hoeken groter dan 180° en kleiner dan α .

Als toelichting op de bovenstaande parameters het volgende voorbeeld:

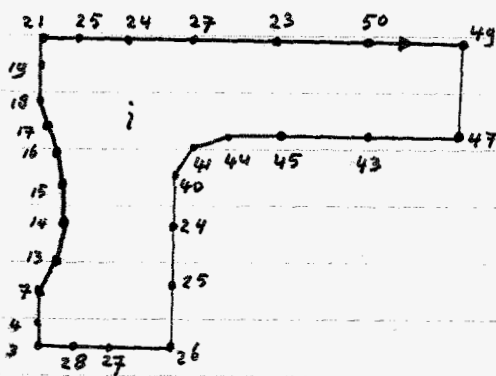


fig 2

Stel dat fig 2 het i -e gebied voorstelt dat ontstaan is.

De contour wordt met de klok mee doorlopen. Stel we beginnen de nummering bij knooppunt 7.

Voor dit gebied vinden we dan:

$$HCT[i,1] = 7 \quad HCT[i,2] = 13 \quad \dots \text{etc.}$$

$$HCT[i,28] = 4$$

$$HHK[i,1] = \cos. \text{ van hoek } 7 \dots \text{etc.}$$

$$HAF[i,1] = \text{afstand tussen } 7 \text{ en } 13 \dots \text{etc.}$$

$$khct[i] = 28$$

$$hmg h[i] = 2$$

$$hmk h[i] = 6$$

$$hgh[i,1] = 20 \quad hgh[i,2] = 21 \quad (\text{hoeken } 41 \text{ en } 40 \text{ zijn } \geq \alpha)$$

$$hkh[i,1] = 2 \quad hkh[i,2] = 3 \quad hkh[i,3] = 4 \quad hkh[i,4] = 5$$

$$hkh[i,5] = 6 \quad hkh[i,7] = 19 \quad (\text{hoeken } 13, 14, 15, 16, 17, 44 \text{ liggen tussen } 180^\circ \text{ en } \alpha)$$

De werking van de procedure kan men het beste nagaan m.b.v. het blokschema (IV.4 blz 29)

Toelichting op dit blokschema:

Blok 1 $hct[1,*] := ct[*]$.

Doorloop de contour v.h. gebied en bepaal bij elk knooppunt(i):

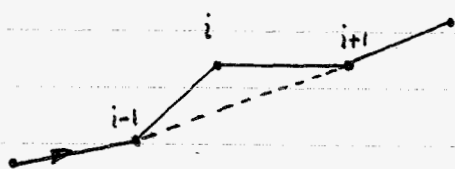


fig 3

afstand: $i - i+1$ ($haf[1,i]$), de cosinus

van hoek i b.v. met de cosinusregel ($hkh[i,i]$),

en het opp $\Delta(i - i+1 - i-1)$ met b.v. de determinantregel.

Indien dit opp. positief is, is hoek i groter dan 180° .

Afhankelijk v.d. grootte v.d. cosinus van hoek i krijgt dan $hgh[i, v]$ of $hkh[i, w]$ de waarde i .
 v resp. w zijn tellers ^{die aangeven} de hoeveelste hoek groter dan α , resp. tussen 100° en α gelegen, gevonden wordt.

Indien de contour doorlopen is krijgt $hmgk[i]$ de waarde v en $hmkh[i]$ de waarde w .

Blok 2, 3, 4

Indien er bepaalde uitstolpingen op de contour zitten b.v. (fig 4),

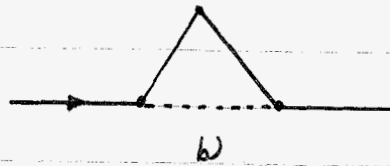
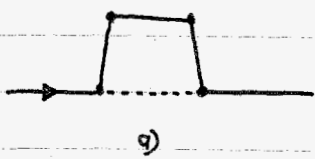


fig 4

dan kunnen deze verwijderd worden door er een element van te maken, en dit element van het gebied te verwijderen (naar analogie van Alan George).

De procedures Trimvierhoek o.g. Trimdriehoek zoeken op de contour combinaties van hoeken die een goed element kunnen vormen (pas op! voor hoeken $> 100^\circ$), maken de topologische beschrijving van dit element in orde en zorgen dat de parameters die de contour beschrijven in orde worden gebracht.

Blok 6

Indien op de contour, minstens één hoek zit die groter is dan α , dan wordt het gebied m.b.v. procedure $div F$ in 2 delen gesplitst, zodanig dat elk gebied minimaal één hoek, groter dan α , minder heeft.

Er ontstaan dus 2 gebieden: i is met een opgehoogd.

De procedure $div F$ is een uitbreiding v.d. procedure $div F$ uit [16].

De gewijzigde procedure $div F$, wordt in IV 5, blz 30, besproken.

d is een actuele parameter voor $div F$.

Blok 9

Indien het gebied alleen nog hoeken kleiner dan 200° bezit, moeten we, zoals we gezien hebben in IV 1 controleren of $\sum_{i=1}^n (\gamma_i - 180^\circ) < B$.

Aangezien we alleen de cosinus v.d. hoeken kennen, kunnen we dit het

beste als volgt doen: $\cos(180^\circ) = -1$

$$\cos(200^\circ) = -0,94$$

Een maat voor de concaafheid v.h. gebied is nu:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{hmkh[i]} (1 + hkh[i, hkh[i, j]]) \quad \text{ofwel:}$$

$$\alpha = hmkh[i] + \sum_{j=1}^{hmkh[i]} hkh[i, hkh[i, j]]$$

Blok 10

Indien α kleiner dan β is, zeggen we dat het gebied bijna-convex is.

Een suggestie voor β is 0,15. (Op de contour kunnen dan nog 2 hoeken van 200° en één van 190° liggen).

Blok 11

Is het gebied niet bijna-convex, dan wordt met $div F$ het gebied weer in 2 delen gesplitst, zodanig dat elk gebied minder concaaf wordt.

Blok 12, 13

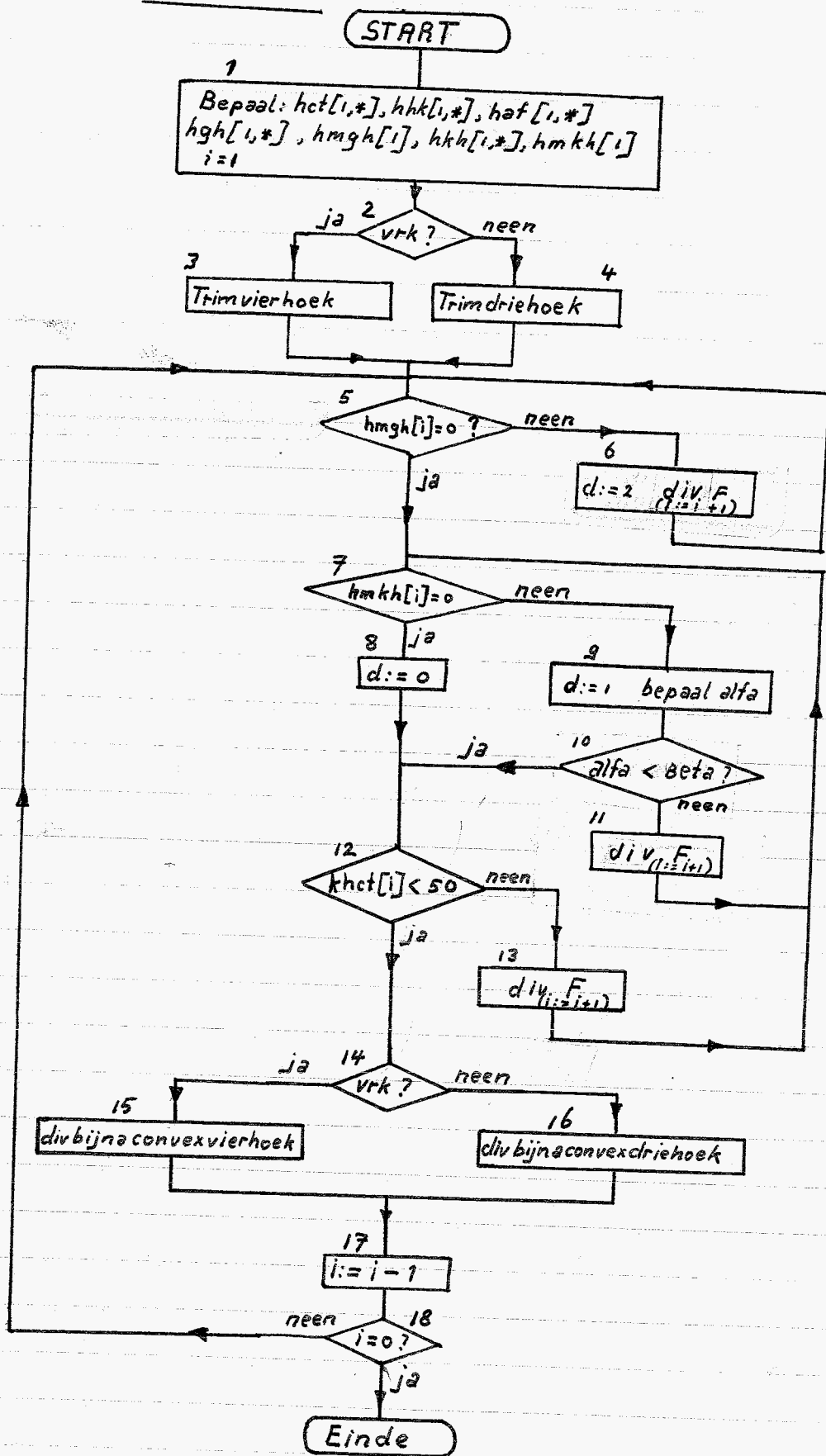
Indien het gebied convex of bijna-convex is, maar wel b.v. meer dan 50 knooppunten op de contour heeft, dan wordt om teveel rekentijd bij de grofheidsbepaling te voorkomen, het gebied met $div F$ in 2 delen gesplitst, zodanig dat elk gebied evenveel knooppunten overhoudt.

Blok 14, 15, 16

Het bijna convexe gebied kan nu in driehoekige of vierhoekige elementen verdeeld worden.

Bespreking van de procedures div bijnaconvex driehoek en div bijnaconvex vierhoek vindt plaats in V en VI.

Blok 17, 18



IV.5.1 Inleiding

In [16] wordt de procedure div F beschreven. De procedure is echter alleen geschikt voor convexe gebieden, omdat de kans groot is dat, als we een concaaf gebied in 2 delen splitsen, de lijn die het gebied splitst, op meer dan 3 plaatsen de contour snijdt (fig 5).

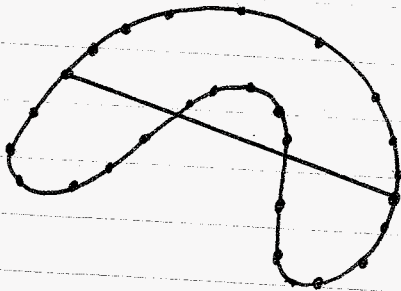


fig 5

div F moet uitgebreid worden met een controle, die dergelijke doorsnijdingen voorkomt.

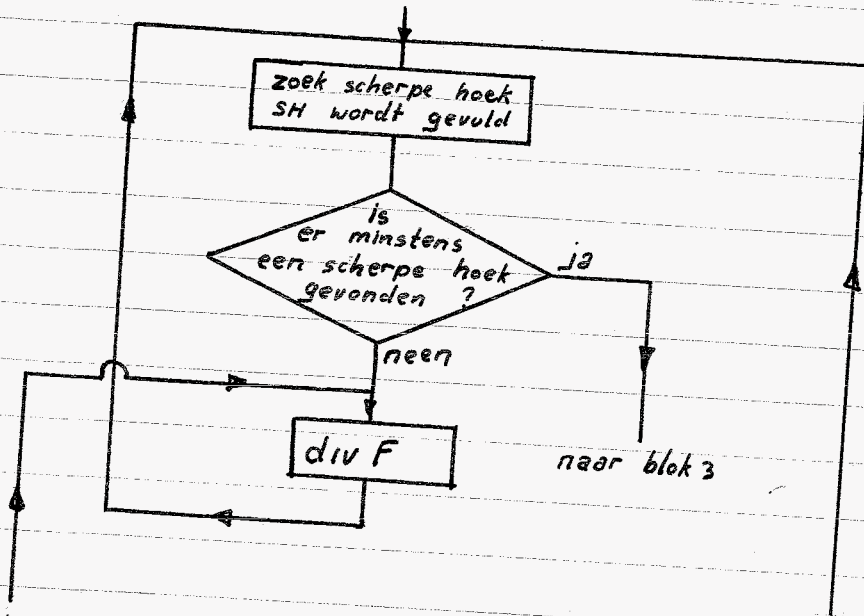
De procedure div F bestaat uit 2 delen:

- een gedeelte dat scherpe hoeken zoekt
- een gedeelte dat het gebied in 2 delen splitst.

Voorgesteld wordt om van het eerste gedeelte een aparte procedure te maken: zoek scherpe hoek.

Het 2^e gedeelte blijven we div F noemen.

Door deze verandering, veranderd Blok 2 van blokschema [16, blok] als volgt:

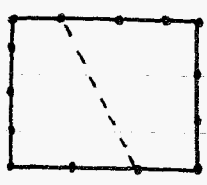


afkomstig van blok 12
(blok 14 vervalt)

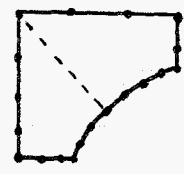
afkomstig van blok 10 en 29

Procedure div F krijgt nu tot taak een concaaf, bijna-convex of convex gebied in 2 stukken te verdelen. De procedure die een geschikte lijn zoekt om het gebied te verdelen is Makeline.

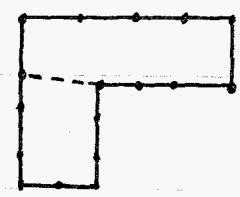
Afhankelijk v.d. vorm v.h. gebied kunnen we 3 procedures Makeline onderscheiden (fig 6):



$d=0$ convex gebied
Makeline A



$d=1$ alle hoeken $< \alpha(200^\circ)$
Makeline B



$d=2$
Makeline C

fig 6

De nieuwe procedure div F ziet er als volg uit:

IV. 5.2 Gebruiksaanwijzing

div F (co, khct, hct, ahc, af, ak, s, ct, kct, haf, hkk, hgh, hmgh, hkh, hmkh, d, vrk)

IV. 5.2.1 Globale parameters

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| <u>procedure</u> Makeline A | } zie <u>IV. 6</u> blz 33 e.v. |
| <u>procedure</u> Makeline B | |
| <u>procedure</u> Makeline C | |
| <u>procedure</u> Divline A | } zie [16] |
| <u>real procedure</u> Hkcos | |

IV. 5.2.2 Formele parameters

co, khct, hct, ahc, ak, s, haf, hkk, hgh, hmgh, hkh, hmkh } zelfde als DivF [16, blz 31]

array af Bevat de knooppunts afstanden v.d. contour ten opzichte waarvan we de grofheid willen bepalen.

array ct Bevat de knooppuntsnummers v.d. contour ten opzichte waarvan we de grofheid willen bepalen.

integer kct aantal knooppunten van ct.

array hgh, hmgh, hkh, hmkh Zie IV 3 blz 25

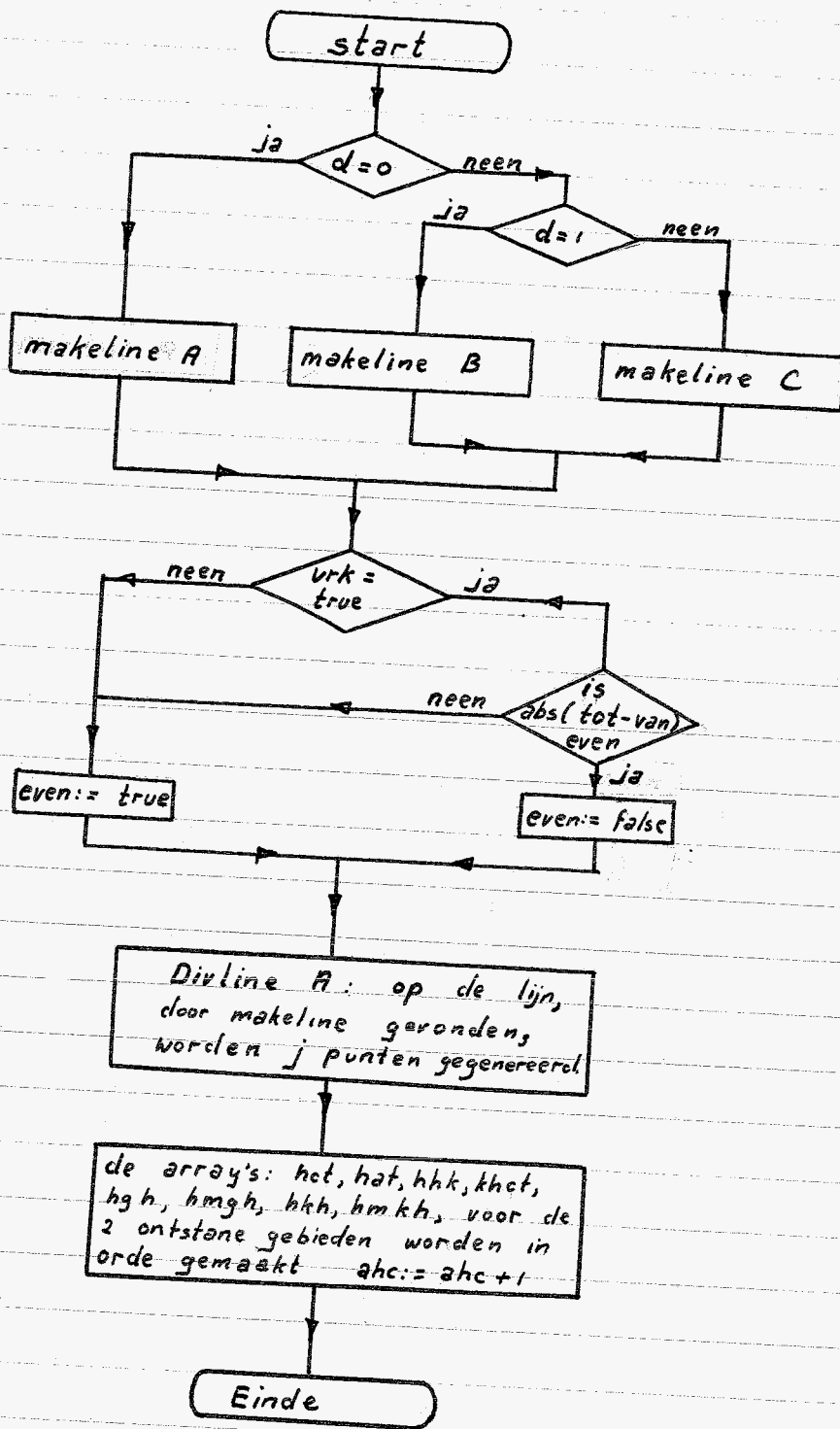
integer d geeft het type gebied aan (fig 6).

boolean vrk is true als we een verdeling in vierhoekige elementen wensen.

De werking van de procedure $divF$ kan men het beste nagaan m.b.v. het volgende blokschema:

IV 5.3

Blokschema van $divF$



IV.6 Procedures Makeline

IV.6.1 Makeline A

Deze procedure wordt gebruikt in $\text{div} F$ als $d=0$, dus als het gebied convex is.

Voor beschrijving zie: [16 blz 48]

IV.6.2 Makeline B

IV.6.2.1 Inleiding

Deze procedure wordt gebruikt in $\text{div} F$ als $d=1$, dus als het gebied slechts hoeken bevat die kleiner zijn dan α .

Van de lijn die we in het te verdelen gebied gaan trekken, eisen we:

- 1 dat de hoeken v.d lijn met de contour niet te scherp zijn.
- 2 dat de 2 gebieden die ontstaan elk zoveel mogelijk convex zijn. Zouden we namelijk het gebied zodanig verdelen, dat één gebied, met alle hoeken $> 180^\circ$, blijft zitten, dan zal dit gebied veel moeilijker verder te verdelen zijn.
- 3 dat de contourknooppunten niet te dichtbij de lijn komen te liggen, of dat de lijn de contour snijdt. (fig 7: A ligt te dicht bij de lijn die het gebied verdeelt)



fig 7

Aan eis 1 kunnen we voldoen door de hoeken die een mogelijke lijn met de contour maakt te controleren en indien deze hoeken te klein zijn de lijn niet te accepteren. (procedure controleline)

Aan eis 2 kunnen we globaal op de volgende manier voldoen:

- als het 1^e knooppunt v.d contour een hoek heeft, groter dan 180° dan henummeren we de contour (met procedure renumct) zodanig dat het 1^e knooppunt een hoek bevat die kleiner is dan 180° . (uitvoering v.h. hierna volgende, is dan eenvoudiger)
- meestal zal het zo zijn dat de hoeken groter dan 180°

naast elkaar op de contour voorkomen. (fig 8).

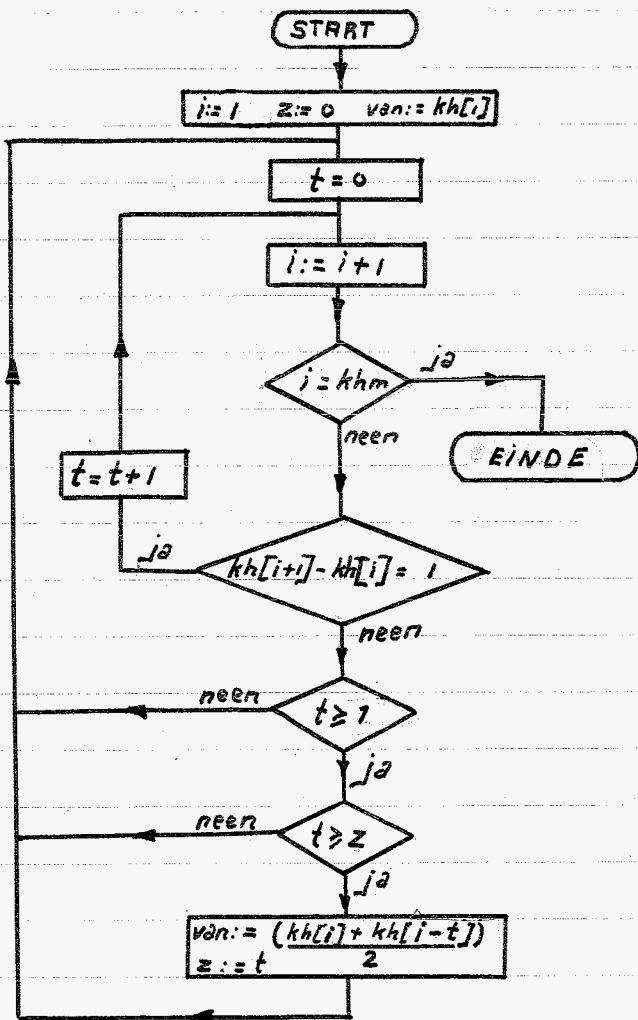


fig 8

Er zijn dus een of meerdere series knooppunten die hoeken hebben groter dan 180° . Een redelijke splitsing in 2 gebieden kan nu verwacht worden, als we vanuit het middelste punt v.d. grootste serie het gebied gaan verdelen.

Een serie bestaat uit minimaal 2 knooppunten.

In het volgende blokschema staat weergegeven, hoe we het middelste punt v.d. grootste serie kunnen bepalen. Dit punt noemen we: van.



De gebruikte parameters stellen het volgende voor :

i : geeft aan met welk knooppunt op de contour, met een hoek groter dan 180° , we bezig zijn

t : maat voor de grootte v.e. serie

z : grootste gevonden serie

van : geeft knooppunt aan van waaruit we het gebied gaan verdelen.

khm : aantal knooppunten op de contour met een hoek groter dan 180° (en kleiner dan α).

kh : array, bevat de knooppunten op de contour $> 180^\circ$ (en kleiner dan α).

Aan eis 3 tenslotte kan worden voldaan door de ligging v.d. knooppunten met een hoek groter dan 180° te controleren (procedure contreline 2, zie IV.7.)

De procedure Makeline B kan er nu als volgt uitzien:

IV 6.2.2. Gebruikaanwijzing

Makeline B (kct, ct, co, van, tot, af, kh, khm)

Globale parameters

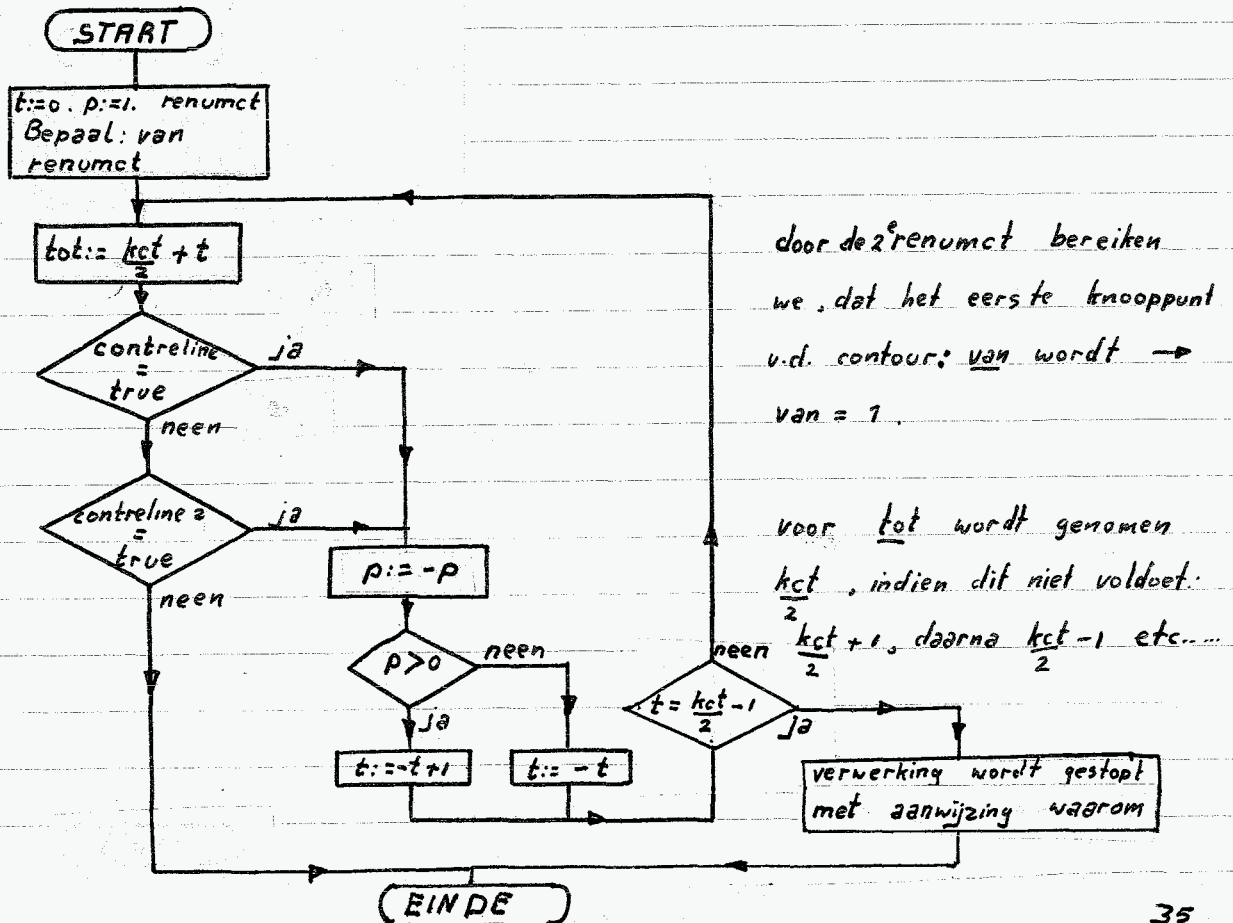
<u>boolean procedure</u>	contreline	zie [16 blz 46]
<u>boolean procedure</u>	contreline 2	zie IV.7 blz 37
<u>procedure</u>	renumct	zie IV.8 blz 41

Formele parameters

kct, ct, co, van, tot, af → zie Makeline A [16]

array kh } zie vorige blz.
integer khm }

IV 6.2.3. Blokschema



De procedure kan de zelfde opzet hebben als Makeline B. Het henummeren zoals beschreven bij eis 2 kan achterwegen blijven.

Als formele parameters moeten worden toegevoegd:

array gh Bevat de knooppunten v.d. contour met hoeken groter dan α .

integer ghm Bevat het aantal knooppunten van gh.

Voor van nemen we gh[1].

Met procedure renumct kunnen we het gebied zodanig henummeren dat van het 1^e knooppunt v.d. contour wordt.

Met de procedure controleline 2 worden nu zowel de knooppunten uit gh als uit kh gecontroleerd.

Suggestie

Zowel bij Makeline B als bij Makeline C wordt voor tot begonnen met ket. Om veel controles te voorkomen is het misschien beter om voor tot te nemen het knooppunt dat "tegenover" van ligt (zie fig 9).

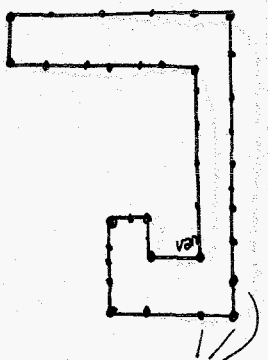


fig 9

b.v.: tot

Tot kan bepaald worden door een nieuw assenkruis te kiezen met van als oorsprong en met de bisectrice van van als x -as.

Door coördinaattransformatie bepalen we voor elk knooppunt de coördinaten tov. het nieuwe assenkruis. Voor tot nemen we nu één v.d. knooppunten van het paar dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

- 1) de x -coördinaat van beide punten > 0 .
- 2) één y -coördinaat ≥ 0 één y -coördinaat ≤ 0 .
- 3) zijn er meerdere paren dan nemen we het paar met de kleinste x -coördinaten.

Contrelines 1 en 2 kunnen nu op de lijn van-tot worden toegepast.

IV.7Procedure Contreline 2IV.7.1Inleiding

Zowel bij het verdelen van een gebied in 2 kleinere gebieden, als bij het aanbrengen van een elementverdeling in een bijna-convex gebied bestaat de kans, dat er plaatselijk een zeer smal stuk (fig 9) ontstaat, of dat we een gebied waar de contour zichzelf snijdt overhouden. (fig 10)



fig 9

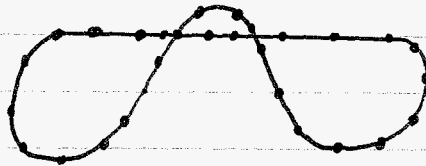


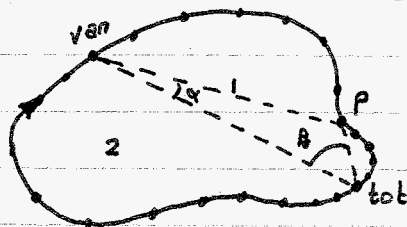
fig 10

We kunnen dit voorkomen door de ligging van knooppunten, met hoeken die groter zijn dan 180° , steeds te controleren.

We kunnen de volgende 3 gevallen onderscheiden:

1a Wanneer we een gebied splitsen ontstaan 2 nieuwe gebieden: 1 en 2 (fig 11). 1 is het gebied dat als eerste knooppunt van heeft.

We controleren nu of knooppunten van gebied 1 met hoeken groter dan 180° , te dicht bij of in gebied 2 liggen

fig 11

P is een knooppunt met een hoek groter dan 180° .

1b De zeltale controle voeren we uit voor een knooppunt van gebied 2 dat te dicht bij of in gebied 1 ligt.

2 Bij het aanbrengen van een elementverdeling in een bijna-convex gebied (fig 12), controleren we of knooppunten, met een hoek groter dan 180° , die behoren tot het nog niet verdeelde gebied, niet te

dichtbij of in het verdeelde gebied komen te liggen.

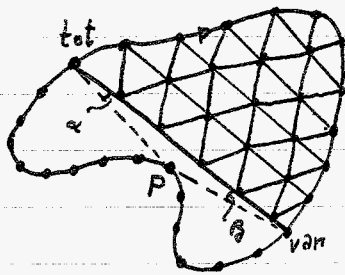


fig 12

We kunnen de controle als volgt uitvoeren (zie ook blokschema blz 39)

- Bereken hoek α en β . Indien α of β stomp is, is punt P acceptabel. Indien α en β scherp:
- Bepaal het opp $\triangle P$ -tot-van m.b.v. de determinant regel. Indien dit opp positief is (bij 1a en 2) of negatief (bij 1b), ligt P in het andere of verdeelde gebied, dus dan snijdt de contour zichzelf. Indien de contour zichzelf niet snijdt:
- Bepaal de afstand van P tot de lijn: van-tot :

$$\frac{2 \times \text{abs}(\text{opp } \triangle P\text{-tot-van})}{\text{afstand: van-tot}}$$

Indien deze afstand b.v. kleiner is dan de gemiddelde lengte v.d. 2 elementribben die bij P horen, ligt P te dicht bij het andere, c.g. bij het reeds verdeelde gebied.

De procedure kan er nu als volgt uit zien.

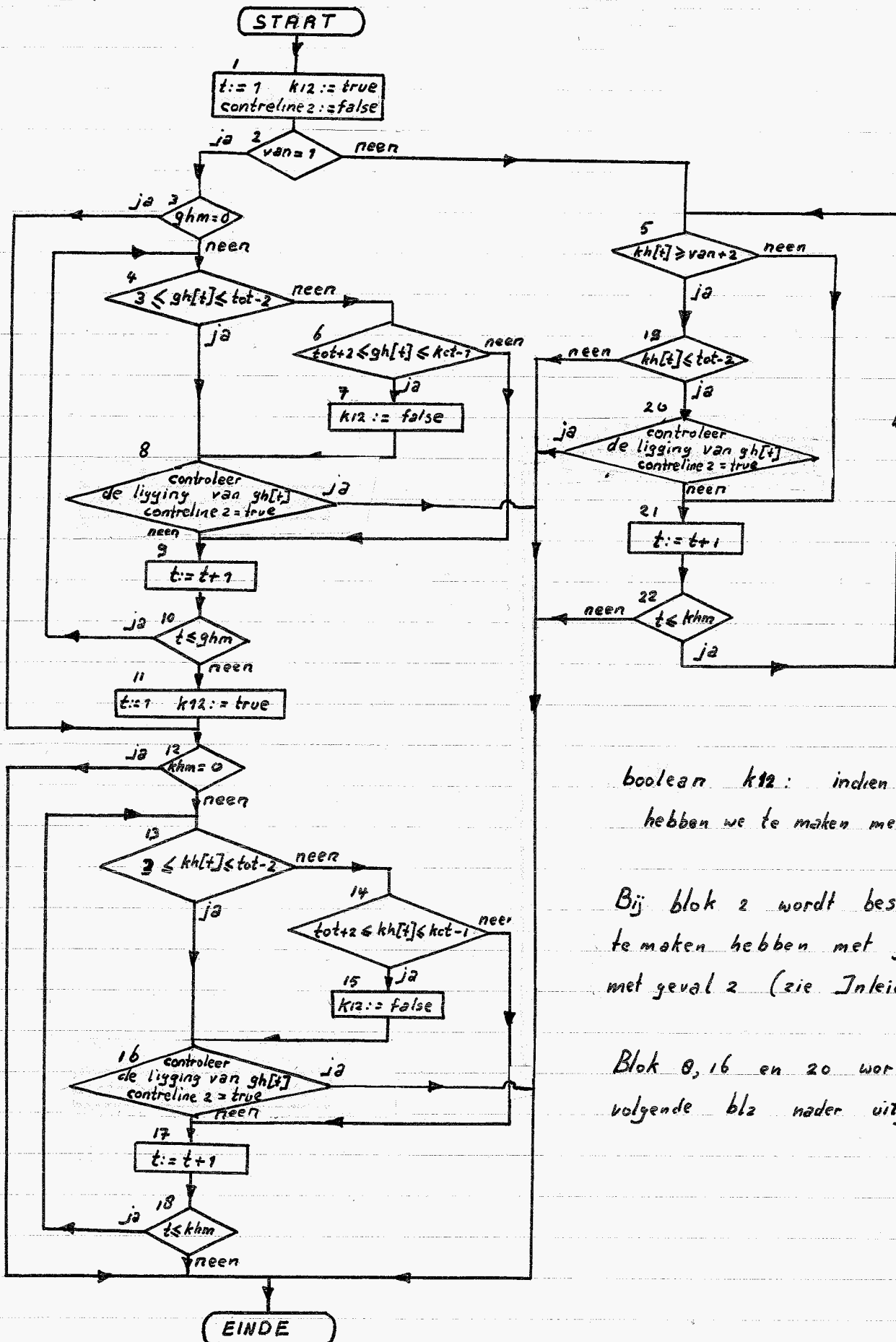
IV.7.2. Gebruiksaanwijzing

boolean procedure controleline 2(ct, kct, co, gh, ghm, kh, khm, van, tot)

IV.7.2.1 Formele parameters

ct, kct, co, gh, ghm, kh, khm, van, tot : zelfde als bij Makeline B en Makeline C.

IV. 7.3 Blokschema van controleline 2



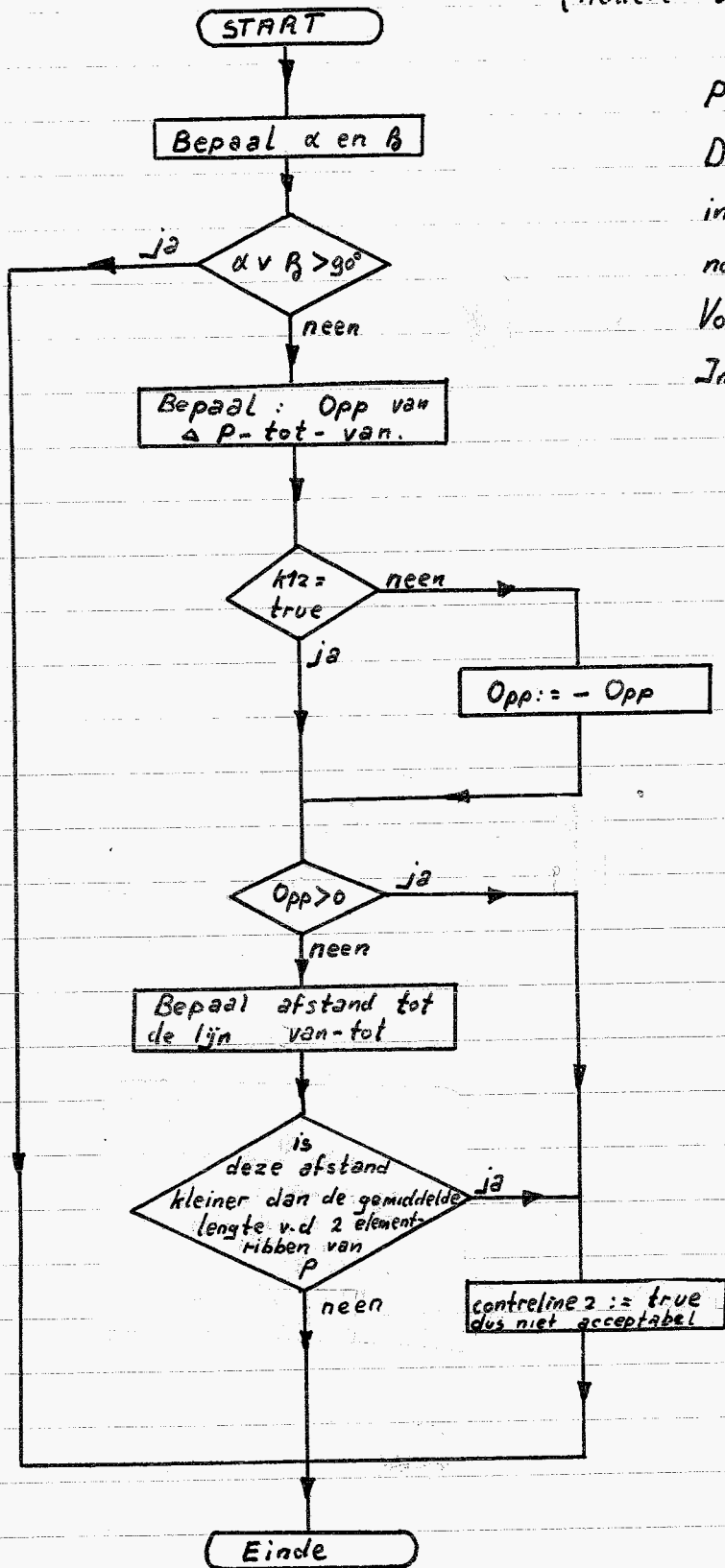
boolean $k12$: indien $k12 = true$, hebben we te maken met geval 1a

Bij blok 2 wordt beslist of we te maken hebben met geval 1 of met geval 2 (zie Inleiding).

Blok 8, 16 en 20 worden op de volgende blz nader uitgewerkt.

Blokschema: Controle v.d. ligging van een punt P

(nadere uitwerking van blok 8, 16 en 20)



P is het punt $gh[t]$ c.g. $kh[t]$.
Deze controle zou als aparte procedure in controline 2 kunnen worden opgenomen.

Voor eventuele toelichting zie de Inleiding (blz 38)

IV 8 Procedure renumct

De procedure renumct zie [16], moet zodanig gewijzigd en uitgebreid worden dat de parameters die concave en bijna-convexe gebieden aanduiden (kh en gh) ook henummerd worden.

De procedure renumct uit [16] henummert met het doel: als eerste knooppunt op de contour een scherpe hoek te krijgen.

De procedure moet zodanig veranderd worden dat, zoals het geval is bij b.v. Makeline B, ook een ander knooppunt het eerste knooppunt v.d. contour gemaakt kan worden. Eventueel kan men hier een aparte procedure renumct 2 voor schrijven (de formele parameters: SH, ASH, T zijn dan niet nodig)

V Het verdelen van een bijna-convex gebied in 4-hoekige elementen: De procedure divbijnaconvexvierhoek.

V.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk is beschreven hoe een concaaf gebied in bijna-convexe (of convexe) gebieden verdeeld kan worden.

In een dergelijk bijna-convex gebied moeten we nu nog een elementverdeling aanbrengen.

Hoe een convexe gebied in 4-hoekige elementen verdeeld kan worden, staat beschreven in [16]. Voor een dergelijk gebied is een procedure ontwikkeld: de procedure divconvexvierhoek. Een aantal gebieden die met deze procedure zijn verdeeld, zijn in [16] opgenomen.

Het principe volgens welk de procedure divconvexvierhoek werkt wordt in V.2 beschreven.

Dit zelfde principe wensen we toe te passen op bijna-convexe gebieden.

De procedure divconvexvierhoek kan hier geschikt voor worden gemaakt, door een aantal controles in te bouwen. We krijgen dan de procedure divbijnaconvexvierhoek. Een beschrijving hiervan volgt in V.3.

V.2 Het verdelen van een convex-gebied in 4-hoekige elementen. De procedure divconvexvierhoek (korte samenvatting van [16]).

We hebben een gebied met contour (fig 1). De contour bestaat uit een aantal knooppunten, verbonden door rechte lijnen.

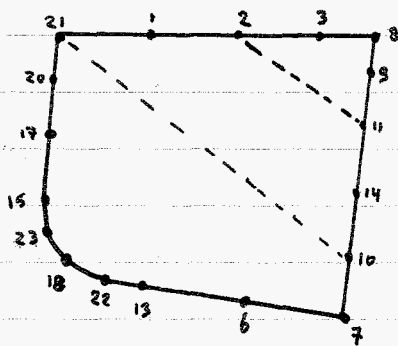


Fig 1

step 1 Zoek op de contour het knooppunt met de scherpste binnenhoek (in fig 1: knp.8)

De hoek moet wel kleiner zijn dan een bepaalde waarde γ . Vinden we zo'n hoek niet dan gaan we verder met step 2

Van dit gebied gaan we nu een strook afkappen door knooppunt 2 met 11 te verbinden.

Op de lijn 2-11 leggen we een of drie knooppunten s gebruikmakend van de

grofheidsbepaling zoals beschreven in III.

Het gebied 2-3-8-9-11, wordt nu in 3 (fig 2) of 6 (fig 3) elementen verdeeld.

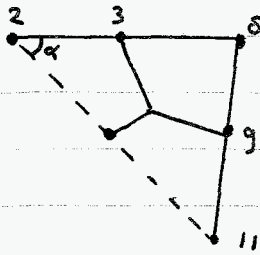


fig 2

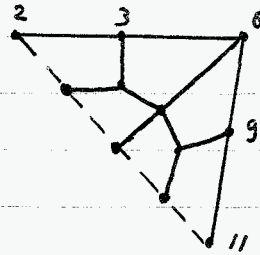


fig 3

Als de lijn 2-11 met de contour te kleine hoeken maakt (b.v. α te klein), of er zouden op de lijn 2-11 meer dan 3 knooppunten gelegen zijn, dan wordt er geen strook afgekapt en proberen we hetzelfde te herhalen vanuit een andere scherpe hoek.

Vinden we geen andere scherpe hoek kleiner dan γ (b.v. 90°) dan gaan we verder met: stap 2.

Wanneer de lijn 2-11 wel acceptabel is, trekken we daarna de lijn 21-10 en leggen op deze lijn, weer gebruikmakend v.d. grofheidsbepaling een aantal knooppunten.

De strook 2-11-10-21 kan m.b.v. v.e. aantal standaard procedures in elementen verdeeld worden. b.v.: (fig 4)

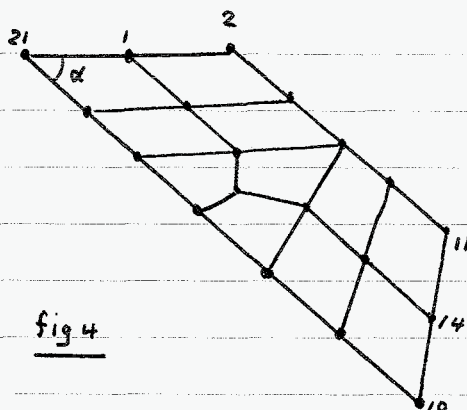


fig 4

De lijn 21-10 is niet acceptabel als een vd hoeken (b.v. α) met de contour te klein is. Ook als het aantal op de lijn 10-21 gegenereerde knooppunten, meer dan 4 afwijkt v.b. op de vorige lijn gegenereerde aantal, accepteren we de lijn niet.

We trekken lijn 6-17. Is deze lijn acceptabel dan kunnen we weer een

strook afkappen etc.... Wanneer de lijn niet acceptabel is wordt het nog niet verdeelde gebied als een nieuw gebied beschouwd en beginnen we weer van voor af aan met stap 1 op het nieuwe gebied.

Stap 1 komt ten einde als we nog een gebiedje met 6 knooppunten overhouden. Voor een dergelijk gebied is een aparte procedure geschreven, die afhankelijk v.d. vorm v.d. contour het gebied in 2, 3, 4 of 6 elementen verdeeld.

stap 2

Wanneer er geen voldoende scherpe hoek kan worden gevonden, wordt het gebied in 2 delen gesplitst, waarin waarschijnlijk wel een dergelijke hoek wordt gevonden.

Op elk gebied passen we dan weer stap 1 toe.

V.3 Veranderingen aan de procedure *divconvexvierhoek* om hem geschikt te maken voor bijna-convexe gebieden.

- De formele parameters moeten uitgebreid worden met:

array kh bevat de knooppunten met hoeken groter dan 180°

integer khn bevat het aantal knooppunten van kh .

integer d geeft aan of het gebied convex ($d=0$) of bijna-convex ($d=1$) is.

- In de procedure *divconvexvierhoek* kan het gebied weer verder onderverdeeld worden, b.v. als er geen scherpe hoeken worden gevonden. Omdat de ontstane gebieden nog bijna-convex kunnen zijn, zijn er extra lokale parameters nodig om die gebieden te beschrijven:

array hkh array met de grenzen $[1:l, 1:l]$, bevat de knooppunten v.d. verschillende contouren met een hoek groter dan 180° .

l is een schatting voor het aantal gebieden, waarin het bijna-convexe gebied wordt onderverdeeld.

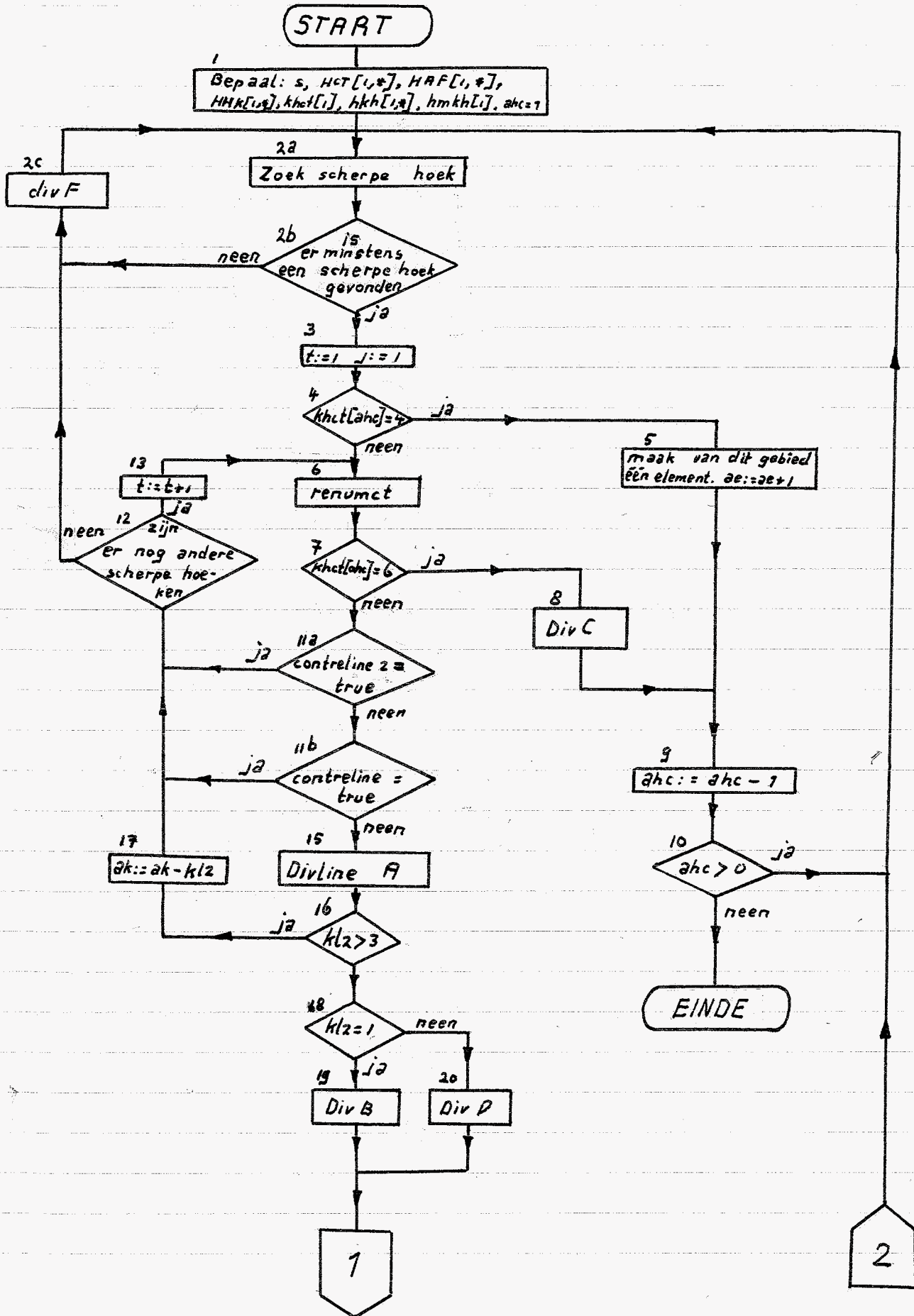
array $hmkh$ array met de grenzen $[1:l]$, bevat het aantal knooppunten van hkh .

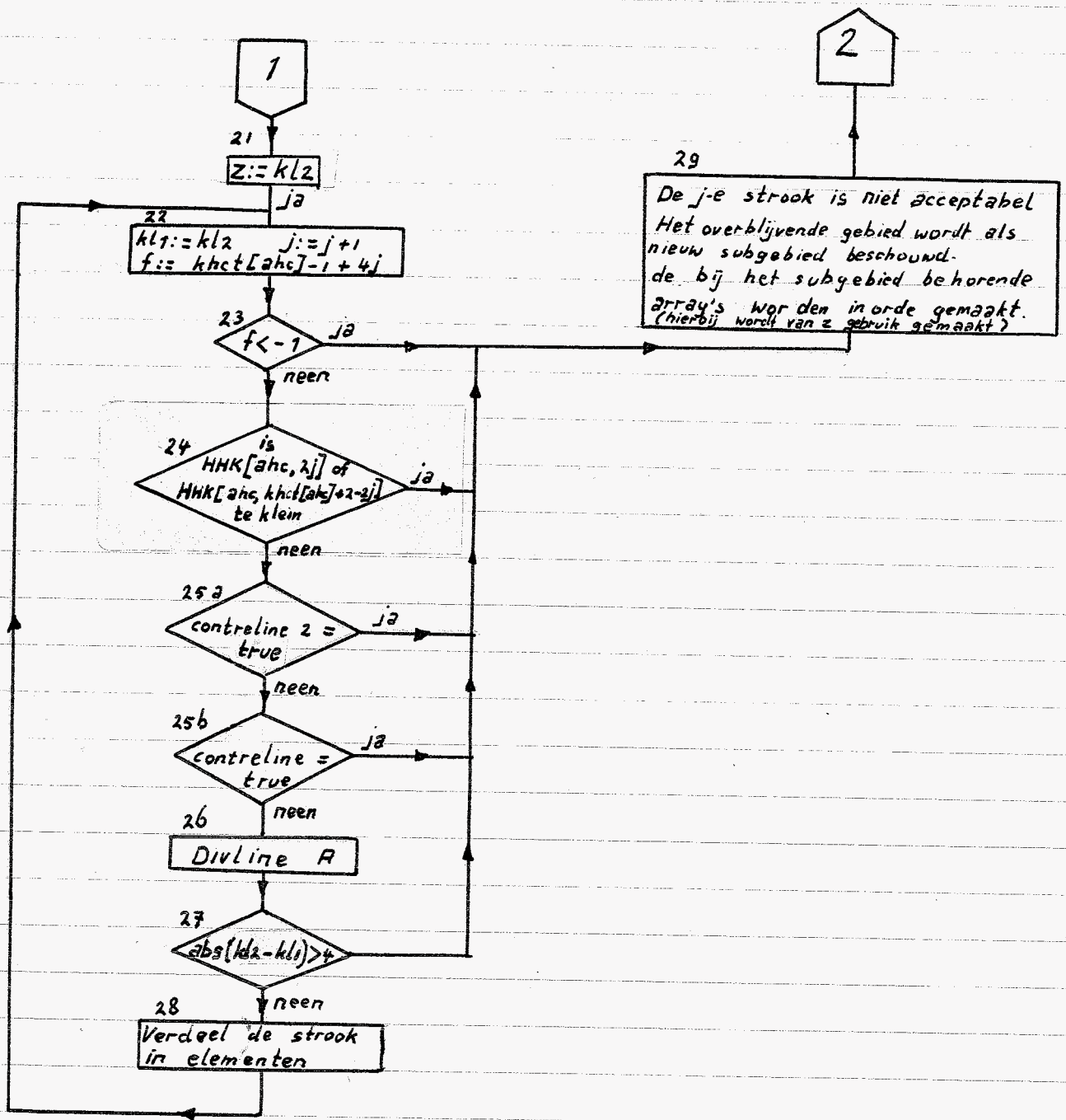
- Zoals we gezien hebben in IV is de procedure *div F* veranderd dit heeft consequenties voor blok 2 van *divconvexvierhoek*.

- De procedure *renumct* (blok 6) moet ook array hkh hernoemen.

- De lijnen die getrokken worden met het doel stroken af te kappen moeten met procedure *contreline 2* gecontroleerd worden. (Dit kan gebeuren tussen blok 7 en 11 en tussen blok 25 en 26)

Het blokschema van divbijnconvexvierhoek kan er nu als volgt uitzien:





De nummers bij de blokken komen overeen met de nummers van
blokschema Divconvex vierhoek [16, blz 10]

VI Het verdelen van een bijna-convex gebied in driehoekige elementen: procedure div bijna-convex driehoek.

VI.1 Inleiding

Het principe George [1] zou voor het verdelen van een gebied in driehoekige elementen gebruikt kunnen worden.

Gezien de nadelen die hier echter aan kleven: veel controles en waarschijnlijk elementen die slecht van vorm zijn (de elementen die op het laatst gevormd zijn), wordt van dit principe geen gebruik gemaakt. De methode gebruikt voor vierhoekige elementen is in principe ook toepasbaar op driehoekige elementen.

Het voordeel hiervan is tevens, dat de omvang v.h. programma beperkt kan blijven, namelijk een groot gedeelte v.d. procedures gebruikt in div bijnaconvexvierhoek zijn ook voor driehoeken te gebruiken. De procedure div bijnaconvexdriehoek kan ongeveer het volgende verloop hebben:

VI.2 Werking stap 1

Zoek op de contour een scherpe hoek (b.v. kleiner dan 70°).

Vinden we zo'n hoek niet dan gaan we verder met stap 2.

Aan de hand van fig 1 zullen we het verdere verloop volgen.

Verbindt de 2 knooppunten die aan het knooppunt met de scherpe hoek grenzen, met elkaar. (knooppunt 5 en 9)

(Bij div bijnaconvexvierhoek sloegen we steeds een knooppunt over).

Pas op lijn 5-9 controlelijn 2 toe.

Genereer indien de lijn acceptabel is geen of één knooppunt op de lijn.

Zouden meer knooppunten worden genereerd, dan wordt de lijn niet geaccepteerd.

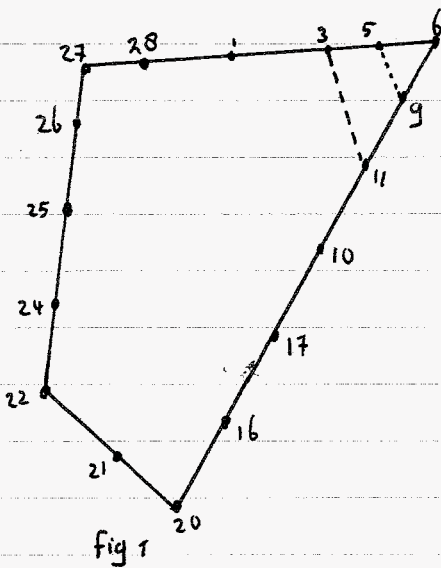


fig 1

Indien de lijn niet acceptabel is, proberen we vanuit een andere scherpe hoek een lijn te trekken en indien er geen andere scherpe hoek is gaan we verder met stap 2.

Het gebiedje 5-6-g kan als volgt worden verdeeld:

bij geen knooppunt op de lijn 5-g:

één element (fig 2)

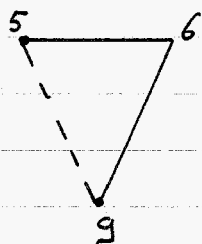


fig 2

bij één knooppunt:

twee elementen (fig 3)

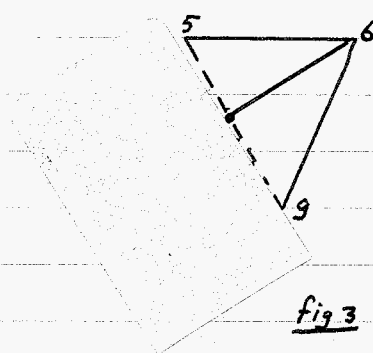


fig 3

De strook 5-6-g wordt van het gebied afgekapt.

Verbind nu 3 met 11, pas op deze lijn de controles: contreline en contreline 2 toe en breng indien de lijn acceptabel is m.b.v

Divline A een aantal knooppunten op de lijn aan.

Voorgesteld wordt dat dit aantal niet meer dan 2 afwijkt van het aantal knooppunten op de vorige lijn gegenereerd. We voorkomen hiermee dat het programma te uitgebreid wordt. De verwachting is dat met deze beperking toch een voldoende groot grofheidsverloop kan worden bereikt. Verschilt dit aantal knooppunten meer dan 2 dan wordt de lijn niet geaccepteerd.

Hoe de strook 3-5-g-11 verder in elementen verdeeld moet worden zal in 2.3 aan de orde komen.

We trekken nu de lijn 1-10 en controleren deze lijn weer.

Is de lijn niet acceptabel, dan beschouwen we het gebied dat nog niet verdeeld is als een nieuw gebied. Op dit nieuw gebied passen we weer stap 1 toe.

Wanneer we een gebiedje met 4 knooppunten overhouden, verdelen we zo'n gebied door het trekken van een diagonaal in 2 driehoeken.

stap 2 Met Div F wordt het gebied in 2 delen gesplitst. Op elk gebied passen we weer stap 1 toe.

VI.6

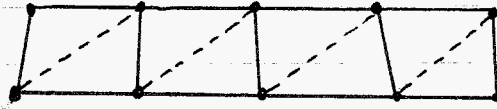
Het verdelen van een strook in elementen

We kunnen de volgende mogelijkheden onderscheiden:

① op de lijnen v.d. strook liggen evenveel knooppunten

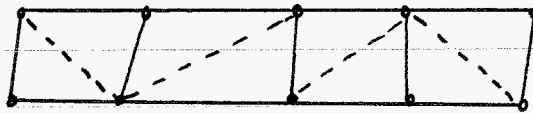
De volgende verdelingen zijn dan mogelijk:

①



alle diagonalen lopen in de zelfde richting.

②



de diagonalen lopen willekeurig.

Geval a1 vergt weinig rekentijd en levert een regelmatige verdeling. De elementen kunnen echter een minder mooie vorm hebben.

Geval a2 levert in eerste instantie een minder regelmatige verdeling. De vorm v.d. verkregen elementen zal echter beter zijn.

Criteria die bij a2 gehanteerd kunnen worden zijn:

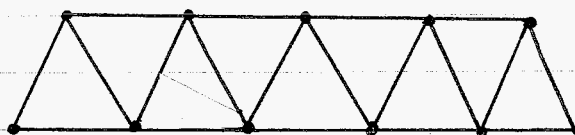
a) zorg dat de ontstane elementen zoveel mogelijk gelijkzijdig zijn

b) zorg dat in elk knooppunten (behalve de randknooppunten), zoveel mogelijk 6 elementribben samen komen. We bereiken hiermee dat bij repositioneren zoveel mogelijk gelijkzijdige driehoeken kunnen ontstaan.

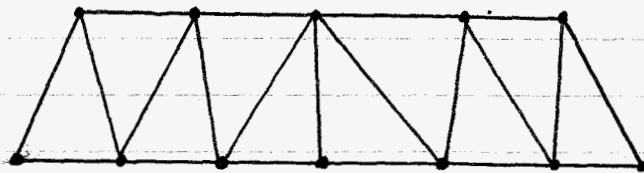
Wanneer we een of beide criteria toepassen zal de benodigde rekentijd toenemen.

b) Het aantal knooppunten op de lijnen v.d. strook verschilt: één.

De meest voor de hand liggende verdeling is dan:

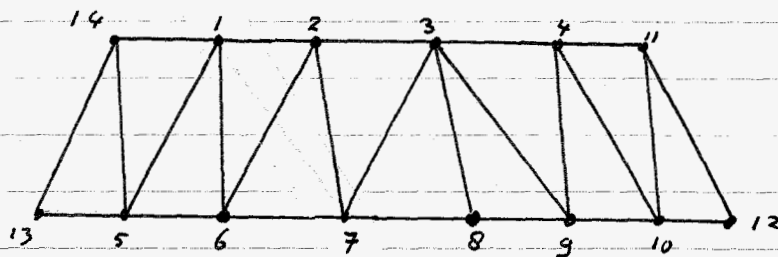


- c) Het aantal knooppunten op de lijnen v.d. strook verschilt: twee. Wanneer het aantal knooppunten op de lijnen oneven is, is de meest voor de hand liggende verdeling:



de 2 middelste knooppunten worden met elkaar verbonden, op de 2 ontstane gebieden wordt verdeling b toegepast.

Wanneer het aantal knooppunten op de lijnen even is, kan met het volgende doen:



verbindt 2 met 7 en 3 met 8. Op de gebieden 14-2-7-13 en 3-11-12-8 kan men verdeling b toepassen. Gebied 2-3-8-7 kan eventueel rekenig-houdende met de factoren uit 2.2 in 2 elementen verdeeld worden.

Andere methoden zullen ongetwijfeld mogelijk zijn. Waarschijnlijk zal in de praktijk de meest geschikte methode moeten blijken.