Markante (dwaal)wegen bij het oplossen van E&M problemen

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wijsbegeerte en Maatschappijwetenschappen
Groep Onderwijsresearch

Afdeling der Technische Natuurkunde

Rapport nr. 32

augustus 1983

Markante (dwaal) wegen bij het oplossen van E & M problemen

M.G.M. Ferguson-Hessler
T. de Jong

Markante (dwaal) wegen bij het oplossen van E & M problemen

M.G.M. Ferguson-Hessler

T. de Jong

56 p., 3 tab., 4 fig.

Rapport nr. 32

TH Eindhoven, Onderafd. WenM, Groep Onderwijsresearch
Afdeling der Technische Natuurkunde

1983

Leerprocessen

Typewerk: J. Vervoort

Omslag: M. Ruland

INHOUDSOPGAVE

		blz.
1.	INLEIDING	6
1.1.	Plaats van het onderzoek	6
1.2.	De onderzoeksvragen	7
2.	DE THEORETISCHE ACHTERGROND	8
2.1.	De kennisbasis	8
2.2.	Een mogelijke strategie	10
2.3.	De toepasbaarheid van de kennis	12
2.4.	De relatie tussen de strategie en de rest van de kennisbasis	14
3.	HET ONDERZOEK NAAR STRATEGIEGEBRUIK	15
3.1.	Opzet van het onderzoek; methode en materiaal	16
3.2.	De protocol-analyse	16
3.3.	Resultaten	19
4.	FOUTEN EN DWAALWEGEN - EN HUN MOGELIJKE ACHTERGRONDEN	24
4.1.	De analysefase	24
4.2.	Fouten bij het selecteren van kernbetrekkingen	30
4.3.	Oplossingsroutes	32
4.4.	Soorten probleemtransformaties en daarin voorkomende fouten	34
4.5.	Fouten in de uitwerkingsfase	35
4.6.	De controlefase	36
4.7.	Een voorbeeld van wegen en dwaalwegen	37
4.8.	Hoe men via een dwaalweg toch tot een goede oplossing kan komen	38
5.	CONCLUSIES	41
5.1.	Wegen en dwaalwegen	41
5.2.	Het kennisrepertoire	42
5.3.	Verder onderzoek	43
5.4.	Het onderwijs	44
	LITERATUUR	46
	Bijlage 1.	47
	Bijlage 2.	56

SAMENVATTING

In het kader van een onderzoek naar het gebruik van een strategie bij het oplossen van E & M problemen door eerstejaarsstudenten Electrotechniek werd een aantal hardop-denk protocollen verzameld. Het zo verzamelde materiaal bood naast inzicht in de gebruikte oplossingsmethodes ook informatie over fouten en vergissingen van de studenten. De resultaten van het onderzoek naar strategiegebruik zijn beschreven in een eerder verschenen intern rapport (de Jong en Ferguson-Hessler, 1983). In dit, tweede, rapport wordt ingegaan op het onderzoek naar fouten, dwaalwegen en vergissingen.

In het algemeen lijken studenten de kortste weg naar de oplossing van een probleem te zoeken. Deze strategie noemden we de 'kick and rush' methode: pak een formule, reken wat uit, en je hebt het antwoord. Probleem-analyse komt weinig voor in de oplossingen van de studenten en is vrijwel altijd onvolledig, wat er toe kan leiden, dat men een verkeerde weg inslaat, zeer vaak door het gebruik van een niet geldige formule. In probleemtransformaties treden fouten op, die duiden op gebrekkige kennis van de fysische betekenis van de gebruikte formule. In de uitwerkingsfase maken studenten vaak fouten door onzorgvuldigheid of gebrek aan kennis van elementaire meetkunde, goniometrie en integraalrekenen. Deze fouten neigen fataal te zijn omdat evaluatie en controle zeer vaak ontbreken.

Uit het boven geschetste beeld kunnen enkele indicaties over tekorten in het kennisrepertoire van de studenten gehaald worden.

De noodzakelijke declaratieve kennis is meestal aanwezig in een *reproduceerbare* vorm, maar is desondanks niet altijd *toepasbaar* in de gegeven situatie. De oorzaak hiervan zou kunnen zijn dat er niet genoeg verbanden zijn tussen verschillende elementen van kennis, zoals formules, procedures, etc. in het geheugen. Een tweede oorzaak is het *gebrek aan een fysische representatie* van de verschijnselen die een formule beschrijft. De procedurele kennis van de student is vaak onvolledig en wordt niet ondersteund door selectiekennis.

SUMMARY

Within a research project on the use of a strategy in problem solving (E & M problems) by first year students of Electrical Engineering a number of think aloud protocols were collected. This material gave insight into the methods of solution used and also information on the errors and mistakes made by the students. The results of the investigation of the methods of solution have been reported in an earlier internal report (de Jong and Ferguson-Hessler, 1983). In this second report we treat the investigation of errors, wrong methods and mistakes.

Ususally students seem to look for the shortest path to a solution, following a method we gave the name 'kick and rush': picking a formula, carrying out the calculations, and accepting the result found as the desired answer. The analysis of the problem is scanty and incomplete, and as a result many students get lost and start off on a wrong path, very often by using a formula, that is not valid in the given situation. In problem transformations errors occur, that indicate lack of knowledge of the physical meaning of the formula. In carrying out calculations the student frequently introduces errors and mistakes due to carelessness and lack of knowledge of fundamental geometry, goniometry and calculus. These mistakes tend to be fatal due to the lack of evaluation of and checking on the results.

From the picture given above some indications appear on the short-comings of the knowledge base of the students.

The necessary declarative knowledge is usually present in a *reproducable* form, but this same knowledge is not always *applicable* to the given situation. This could be caused by lack of relations between various pieces of knowledge, formulae, procedures, etc. in the memory. Another cause is the *lack of a psyhical representation* of the phenomena described by a formula. The student's knowledge of procedures is often incomplete and not supported by knowledge of selection criteria.

1. INLEIDING

1.1. *Plaats van het onderzoek*

Het oplossen van natuurkundige en technische problemen is de laatste jaren veelvuldig onderwerp geweest van onderzoek door psychologen, onderwijskundigen en natuurkundigen. De interesse richt zich daarbij zowel op het *proces van probleemoplossen* als op de *kennis en de vaardigheden*, die nodig zijn om dit proces te kunnen uitvoeren.

Het uiteindelijk doel van het onderzoek ligt in sommige gevallen op het gebied van de kunstmatige intelligentie en in andere gevallen op het gebied van onderwijsverbetering. In het eerste geval wordt de door onderzoek verworven kennis gebruikt om computerprogramma's te maken, die bepaalde typen van problemen kunnen oplossen, en in sommige gevallen zelfs van het oplossen van een aantal opgaven kunnen 'leren' om andere problemen efficiënter op te lossen (zie bijv. Larkin, 1980 en 1981). In het tweede geval is het onderzoek vooral gericht op de inhoud en de opbouw van de kennis en op de oplosvaardigheden van beginners en geoefende probleemoplossers.
Een voorbeeld van het laatste type is het onderzoek naar het gebruik van een strategie bij het oplossen van problemen in het vak Electriciteit en Magnetisme onder eerstejaarsstudenten van de afdeling Electrotechniek aan de THE. Uit dit onderzoek vloeit de in dit rapport beschreven inventarisatie van fouten en dwaalwegen voort. Twee rapporten zijn over het onderzoeksproject verschenen:

de Jong en Ferguson-Hessler	Voorwaarden voor het succesvol oplossen van problemen (1982).
de Jong en Ferguson-Hessler	Strategiegebruik bij het oplossen van natuurkundige problemen, een onderzoek (1983).

Het eerste rapport beschrijft de theoretische achtergrond van het onderzoek: de verschillende soorten kennis, die bij het oplossen van problemen van belang zijn, en de rol, die een strategie kan spelen in het oplosproces. Het tweede rapport behandelt de opzet en uitvoering van het onderzoek naar strategiegebruik en de daarin gevonden resultaten.

De methode, die bij dit onderzoek gebruikt werd, was analyse van hardopdenk protocollen. Het materiaal, dat verzameld werd, bood niet alleen informatie over het strategiegebruik maar ook de mogelijkheid om de in de protocollen voorkomende fouten te inventariseren en systematiseren. Deze inventarisatie vormt het onderwerp van dit rapport en is uit de aard der zaak veel meer op de vakinhoudelijke aspecten van het onderzoek gericht dan de twee bovengenoemde rapporten, die in hoofdzaak de onderwijspsychologische aspecten daarvan behandelden.

Dit rapport is in eerste instantie geschreven voor docenten en instructeurs van natuurkundevakken. Om aan de lezers een volledig beeld te geven van het onderzoek, en om de nodige theoretische achtergrond aan te geven voor de discussie hebben we in hoofdstuk 2 en 3 korte samenvattingen gegeven van de twee eerder verschenen rapporten. Lezers, die deze al kennen, zullen in die hoofdstukken - met uitzondering van de paragrafen 2.3 en 2.4 - geen nieuwe informatie aantreffen.

1.2. *De onderzoeksvragen*

Iedere docent kan legio voorbeelden geven van fouten, die studenten op schriftelijke tentamens maken. Als oorzaak van deze fouten noemt men algemeen twee mogelijkheden: slordigheid en gebrek aan inzicht. Wat 'fysisch inzicht' precies betekent, hoe dit verworven kan worden, en hoe het komt dat studenten hun slordigheidsfouten niet ontdekken, dat zijn vragen, die meestal niet gesteld worden.

In dit onderzoek willen we een eerste stap zetten in de richting naar een antwoord op deze vragen. Door het systematiseren en analyseren van door studenten gemaakt fouten proberen we om a.h.w. een diagnose te stellen, die indicaties aangeeft over de soorten kennis en vaardigheden, die niet in voldoende mate aanwezig zijn bij studenten die bepaalde fouten maken. We sluiten daarbij aan bij recent onderzoek op het gebied van probleemoplossen, vooral in Amerika.

Hoe verschillen in kennis ontstaan tussen studenten die wel en studenten die er niet in slagen om bepaalde soorten natuurkundige problemen op te lossen, en wat de rol is van het onderwijs bij het ontstaan van deze verschillen, dat zijn vragen waar we ons in een latere fase van het onderzoek op hopen te kunnen richten.

Als men een aantal hardop-denk protocollen van probleemoplossingen van studenten beluistert, dan valt op dat vele fouten die gemaakt worden alleen uit het gesprokene te ontdekken zijn, en niet in het schriftelijk werk te zien zijn. De verdere oplossing is dan wel als onjuist te beoordelen maar het is niet duidelijk welke foute redenering erachter zit. Dit geldt vooral voor fouten, die betrekking hebben op de analyse van het probleem en op de keuze van de toe te passen methode. Hardop-denk protocollen geven dus meer en meer genuanceerde informatie over de fouten, die studenten maken, dan men uit het schriftelijke werk alleen kan halen.

Het verkregen materiaal werd gebruikt om antwoorden te zoeken op de volgende vragen:

1. Welke typen fouten komen er in de protocollen voor?
2. Hoe zijn de verschillende soorten fouten verdeeld over de fasen van het oplosproces?
3. Geven de gevonden fouten indicaties over de gebreken en leemtes in het kennisrepertoire van de student?

2. DE THEORETISCHE ACHTERGROND

2.1. *De kennisbasis*

De voorwaarden voor het oplossen van problemen in semantisch rijke domeinen - zoals de natuurkunde - zijn uitvoerig beschreven in het gelijknamige rapport (de Jong en Ferguson-Hessler, 1982), waar ook een literatuuroverzicht te vinden is. Hieronder wordt een korte beschrijving gegeven van enkele belangrijke begrippen, die in de discussie over het onderzoek naar fouten gebruikt zullen worden.

Kenmerkend voor het probleemoplossen in dit soort domeinen is de noodzaak om een bepaalde hoeveelheid *vakkennis* te beheersen, daar de in het probleem gegeven informatie niet toereikend is om tot een oplossing te komen. Dit is in tegenstelling tot de vaak door psychologen onderzochte 'puzzelproblemen', waar al de nodige informatie in de formulering van de vraag opgenomen is. De noodzakelijke vak- en/of voorkennis noemt men de *kennisbasis* of het *kennisrepertoire*. Deze is opgebouwd uit vier verschillende soorten kennis:

KENNISREPERTOIRE:
- declaratieve kennis
- procedurele kennis
- selectiekennis
- strategie

Onder *declaratieve kennis* verstaat men de feiten, wetten, definities, formules, etc., die bij het oplossen van een probleem gebruikt moeten of kunnen worden. Deze kennis wordt meestal uitvoerig op hoorcolleges behandeld en is verder uitgebreid te vinden in leerboeken en dictaten. Voorbeelden uit het vakgebied van Electriciteit en Magnetisme:
- de wet van Gauss
- 'geïnduceerde lading = inducerende lading'
- $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Echter, om een probleem op te lossen is declaratieve kennis niet voldoende; de oplosser heeft ook *procedurele kennis* nodig. De wetten en formules moeten worden toegepast, en hiervoor moet men de spelregels kennen. Deze vorm van kennis wordt meestal minder expliciet onderwezen dan de declaratieve, maar wordt wel in voorbeelden behandeld en bij het oplossen van oefenopgaven toegepast. Voorbeelden uit het actuele vakgebied: het kiezen van een kring voor de toepassing van een kringintegraalstelling als de wet van Ampère, het gebruik van 'gaussdoosjes' om verbanden te leggen tussen velden en oppervlakteladingen.

Selectiekennis heeft, zoals de naam aanduidt, te maken met het kiezen van die elementen van de declaratieve en procedurele kennis, die voor het gegeven probleem relevant zijn. De keuze gebeurt op basis van een analyse van de gegeven situatie, o.m. het vaststellen van belangrijke fysische kenmerken daarvan. Selectiekennis wordt in veel gevallen niet expliciet onderwezen; de vraag waarom één bepaalde formule gebruikt wordt in plaats van een andere, wordt vaak niet gesteld. Zo wordt het verband niet duidelijk tussen de keuzevan formules en de analyse van de gegeven situatie: formules, wetten en procedures, die gebruikt worden voor de oplossing van een gegeven probleem moeten ten eerste geldig zijn in de gegeven situatie, ten tweede verbanden opleveren, die de oplossing naderbij brengen, en ten derde wiskundig hanteerbaar zijn. De wet van Gauss is bijvoorbeeld altijd geldig, maar alleen hanteerbaar als het systeem een bepaalde maat van symmetrie bezit.

Strategie tenslotte is een methode om verschillende problemen systematisch aan te pakken, een bepaalde, vaststaande volgorde, waarin de stappen van de oplossing worden uitgevoerd, bijv. 'eerst analyseren, dan plannen maken, dan pas rekenen'. Deze component is de minst vakinhoudelijke van alle vier onderdelen van het kennisrepertoire. Het hanteren van een strategie is niet een absolute voorwaarde voor het kunnen oplossen van problemen, zoals de drie eerstgenoemde vormen van kennis, maar is te zien als een belangrijk hulpmiddel. Daarnaast kan een algemeen gebruikte en aanvaarde strategie de communicatie tussen docenten en studenten en tussen studenten onderling vergemakkeljken en bevorderen.

De hierboven beschreven vier componenten van de kennisbasis zijn niet helemaal van elkaar af te grenzen; ze lopen in elkaar over. Ze zijn natuurlijk ook niet gescheiden opgeslagen in het geheugen, maar meer of minder met elkaar verweven, zoals we in hoofdstuk 4 zullen zien.

2.2. *Een mogelijke strategie*

Voor het onderzoek naar strategiegebruik bij probleemoplossen werd een eenvoudige, uit vijf fasen bestaande strategie ontworpen, geïnspireerd door het Gewenst Handelingsverloop van Mettes en Pilot (1980 a en b) en verder gebaseerd op literatuurstudie en eigen ervaringen. Een dergelijke strategie werd ook onderwezen door Reif, Larkin en Brackett (1976).

In de hier gebruikte strategie speelt het begrip *kernbetrekking* een belangrijke rol. Het heeft de betekenis van een fundamentele wet of formule, die als het ware de kern vormt van een stuk kennis (declaratieve *en* procedurele). Dit begrip is uitvoeriger beschreven in paragraaf 2.2.3. van het rapport over strategiegebruik.

De vijf fasen uit de strategie, analyse, selecteren van kernbetrekkingen, vaststellen van een oplossingsroute, uitwerking en controle, worden hieronder kort toegelicht. Veel van de elementen, die hier genoemd worden als onderdelen van de verschillende oplossingsfasen, komen zeer algemeen voor in probleemoplossingen - onafhankelijk van de strategie die de oplosser volgt. Ze worden vaak impliciet uitgevoerd, vooral door de geoefende oplosser, en ze krijgen daarom niet altijd aandacht in het onderwijs.

De hieronder beschreven strategie werd in het onderzoek in een extra instructie onderwezen en geoefend.

a. *Analyse*

In de analysefase moet een helder beeld opgebouwd worden van de gegeven situatie, wat er gebeurt en wat er gevraagd wordt. De volgende elementen zijn hierbij belangrijk:

- de tekst helemaal goed lezen
- de gegeven informatie zoeel mogelijk in een schets verwerken (cilinders, platen, ladingen, veldllijnen, aardverbindingen, etc.)
- belangrijke eigenschappen van het systeem vaststellen, zoals symmetrie, tijd(on)afhankelijkheid, geleideroppervlakten
- een coördinatenstelsel invoeren
- het gevraagde vaststellen
- conclusies trekken uit de gegevens, bijvoorbeeld 'er wordt een lading geïnduceerd', 'die stroom gaat dan afnemen, en op den duur wordt die nul'
- het antwoord voorspellen voor zover dat mogelijk is, bijvoorbeeld het teken, richting, toename of afname van de gevraagde grootheid.

b. *Opstellen van kernbetrekkingen*

Na het uitvoeren van de analyse moeten voor de oplossing van het probleem belangrijke formules opgeschreven worden. Deze formules worden *kernbetrekkingen* genoemd. De formules moeten een verband aangeven tussen de gegevens en het gevraagde. Tevens moet in deze fase nagegaan worden of de gekozen kernbetrekkingen wel geldig zijn in de gegeven situatie.

c. *Oplossingsroute*

Veelvuldig blijkt uit onderzoek dat experts in een vakgebied een plan, een oplossingsroute opstellen, voordat zij tot een verdere uitwerking van het probleem overgaan. Beginners daarentegen gaan snel over tot rekenwerk zonder zich rekenschap te geven waar zij zullen uitkomen (zie bijvoorbeeld Larkin, 1976). Dit kan leiden tot de berekening van niet gevraagde grootheden en verstrikking in het probleem. Dit geldt vooral voor die problemen waar de oplossing niet te vinden is door simpelweg gegevens in te vullen in de kernbetrekkingen, maar waar het probleem eerst in deelproblemen moet worden opgesplitst. Het is daarom zeer nuttig dat studenten expliciet een plan opstellen bij het oplossen van een probleem.

d. *Uitwerking*

Als de oplossingsroute vastligt, is de uitwerking nu een kwestie van uitvoeren van vaststaande plannen. Belangrijke punten hierbij zijn:
- zorgvuldigheid in rekenwerk
- aandacht voor eventuele verschillen in notaties in het gegeven probleem en die in de gekozen kernbetrekkingen
- keuze van teken bij kring- en oppervlakte -integralen
- het uitstellen van numeriek rekenwerk tot het laatst; dit om het overzicht van de berekeningen niet te verliezen
- aandacht voor de dimensies, speciaal in gevallen waar gevraagd wordt naar grootheden per m of m^2.

e. *Controle*

De laatste fase van het oplosproces betreft een controle. De eerste vraag die de oplosser zich daarbij moet stellen is: 'Is er uitgerekend wat er gevraagd wordt?' Daarnaast kan er een controle plaatsvinden door:
- vergelijken met wat er in de analysefase van het antwoord gezegd werd
- dimensiecontrole
- herhalen van de berekening met een andere methode
- nalopen van het numerieke rekenwerk

Bovenstaande strategie is bewust in niet vakinhoudelijke termen geformuleerd, waardoor die ook toegepast kan worden bij het oplossen van problemen in andere vakgebieden dan Electriciteit en Magnetisme. Op deze mogelijkheid zullen we in dit rapport niet verder ingaan.

2.3. *De toepasbaarheid van de kennis*

Onafhankelijk van de methode of strategie, die men volgt bij het oplossen van een natuurkundig probleem, houdt zo'n oplosproces in dat men meer of minder expliciet een aantal denkstappen uitvoert van het type 'vaststellen van belangrijke eigenschappen van het systeem', 'trekken van conclusies uit de gegevens' en 'vaststellen van de geldigheid en de bruikbaarheid van een kernbetrekking in de gegeven situatie'.

Het is duidelijk dat dit alleen mogelijk is, als de kennis van de oplosser aan bepaalde voorwaarden voldoet: de kennis dient niet alleen in reproduceerbare en/of abstracte vorm aanwezig te zijn, maar ook *toepasbaar* te zijn.

Een belangrijk aspect van de toepasbaarheid van de kennis is het bestaan van *verbanden* tussen verschillende onderdelen hiervan, bijv. tussen wetten en formules aan de ene kant en hun toepassingsgebieden en de procedures waarin ze gebruikt worden aan de andere kant. Voor toepasbaarheid van de kennis is het m.a.w. vereist dat deze *gestructureerd* is, opgebouwd om een aantal fundamentele wetten en formules heen. Kernbetrekkingen hebben juist de rol van zulke 'kernen', waar relevante kennis, zowel declaratieve en procedurele als selectiekennis, omheen gegroepeerd is. Bij toepassingen heeft dan de kernbetrekking een soort 'drukknopfunctie', d.w.z. als men de kernbetrekking uit het geheugen haalt, dan volgen ook geldigheidsvoorwaarden, procedures, voorbeelden, etc., die 'erbij horen'.

Een tweede, belangrijk aspect van de toepasbaarheid van de kennis is de *modelvorming*, het beschikbaar hebben van een *fysische representatie* van formules en wetten. Wie een visuele voorstelling heeft van bijv. de magnetische industrie, het $\vec{B}$-veld, zal de wet van Ampère, $\oint \vec{B}.\vec{ds} = I_{omsl}$ op een doelmatige manier kunnen toepassen, en zal in zijn voorstelling zowel de integratiekring als de omsloten stroom kunnen 'zien'. Wie daarentegen deze wet als een algebraïsche vergelijking behandelt, waar gegeven grootheden ingevuld worden, loopt grote risico's om fouten te maken. Voorwaarde voor het opbouwen van een fysische representatie is dat de oplosser een bepaald *ruimtelijk inzicht* bezit. Dit is nodig om de verbale beschrijving van de probleemsituatie te vertalen in een figuur, en ook om in een gegeven schetsmatige figuur de driedimensionale werkelijkheid te zien.
De structuur van de kennisbasis heeft al vrij lang de belangstelling van onderzoekers op het gebied van probleemoplossen. In Amerika zijn er een aantal onderzoeken verricht naar de manier waarop beginners en 'experts', d.w.z. ervaren docenten, hun kennis van het vakgebied in het geheugen hebben opgeslagen. Larkin (1979 en 1980) en Chi et al. (1981, 1982) komen langs verschillende wegen tot de conclusie dat bij ervaren probleemoplossers de vakkennis duidelijk gestructureerd is en anders opgebouwd dan bij beginners.

Larkin (1979) constateert bijv., dat experts in hun oplossingen niet losse formules en principes uit het geheugen halen, maar hele groepen van bij elkaar horende formules, voorwaarden en procedures. Ze trekt daaruit de conclusie dat deze verschillende onderdelen van de kennis in het geheugen van de expert onderling verbonden zijn, dat ze één structuur vormen, die ze 'chunk' noemt.

Chi et al. (1981) onderzochten de structuur van het kennisrepertoire op een meer directe manier. Enkele beginners en experts werden gevraagd om in drie minuten alles te vertellen, wat ze wisten van problemen waar een aantal belangrijke begrippen uit de mechanica een rol speelden, en over de mogelijke oplossingen van deze problemen. Een voorbeeld: problemen met een hellend vlak. Hierbij bleek ten eerste dat experts meer fundamentele wetten erbij betrekken, terwijl de beginners meer op de uiterlijke eigenschappen van het systeem afgaan. Ten tweede werden er door de experts verbanden gelegd tussen de wetten en de situatie waarin ze werden toegepast. Er lijken dus bij de experts een soort 'schema's' of kernen van kennis te bestaan die alle elementen, zowel van declaratieve als van procedurele en selectiekennis bevatten, die nodig waren voor de keuze van de juiste principes en voor een snelle en efficiënte toepassing hiervan. Bij de beginners was deze structuur afwezig, terwijl het aantal elementen van kennis nauwelijks kleiner was dan bij de experts.

De hierboven genoemde onderzoekers trokken hieruit de conclusie, dat juist de structurering van de kennis een wezenlijk onderdeel is van het expert zijn, en dat deze ook verantwoordelijk is voor een belangrijk gedeelte van wat algemeen 'fysische intuïtie' genoemd wordt.
De 'chunks' van Larkin en de 'schema's' van Chi et al., die uit experimenteel onderzoek aangetoond zijn, hebben veel gemeen met de gestructureerde 'kernen' van kennis, die hierboven genoemd zijn als een belangrijk aspect van de toepasbaarheid van de vakkennis van de oplosser.

2.4. *De relatie tussen de strategie en de rest van de kennisbasis*

Uit de vorige paragrafen blijkt, dat er géén duidelijke correspondentie bestaat tussen de verschillende vormen van kennis en de fasen van de strategie. In alle fasen zijn meerdere vormen van kennis nodig.

In de analysefase, die vaak beslissend is voor het succes van de oplossing, zijn zowel declaratieve en procedurele kennis nodig, als ook, impliciet, selectiekennis. Het herkennen van relevante grootheden en het trekken van conclusies uit de gegevens vereist kennis van wetten en formules en ook van hun toepassingsgebieden. De selectiekennis speelt in zoverre een rol, dat de oplosser attent moet zijn op die gegevens en systeemeigenschappen, die later zijn keuze van kernbetrekkingen en oplossingsroute zullen bepalen.
Ook voor het selecteren van kernbetrekkingen en het vaststellen van de oplossingsroute zijn de drie verschillende vormen van kennis allemaal nodig. Hetzelfde geldt voor de controle van het gevonden resultaat.

In de uitwerkingsfase wordt de procedurele kennis gebruikt, maar hier spelen ook vaardigheden als algebraïsch rekenen en integreren een grote rol. Deze vormen van voorkennis, d.w.z. kennis die wel verondersteld wordt, maar niet tot de vakkennis gerekend wordt (en dus ook niet onderwezen wordt), zijn ook te classificeren als - hoofdzakelijk - procedurele kennis. Voor onderwijsdoeleinden lijkt het nuttig om onderscheid te maken tussen kennis van het vakgebied en voorkennis, alhoewel ze beide tot het kennisrepertoire horen.

3. HET ONDERZOEK NAAR STRATEGIEGEBRUIK

Het onderzoek naar strategiegebruik werd opgezet om een antwoord te vinden op de volgende vraag:

> als je studenten een expliciete aanpak van problemen, een strategie, aanbiedt, naast het reguliere onderwijs, en ze deze laat oefenen, gaan ze dan deze strategie toepassen en halen ze daardoor betere resultaten?

Een uitvoerige beschrijving van de opzet en uitvoering van dit onderzoek is te vinden in het in par. 1.1. genoemde rapport hierover. Aangezien het materiaal dat voor dit onderzoek verzameld werd, ook de basis vormt voor de inventarisatie van fouten, wordt in dit hoofdstuk een samenvatting gegeven van het rapport over strategiegebruik.

3.1. *Opzet van het onderzoek; methode en materiaal*

Deelnemers aan het onderzoek waren eerstejaars studenten Electrotechniek. Zij volgden de ISS cursus (geïndividualiseerde cursus) Electriciteit en Magnetisme I.

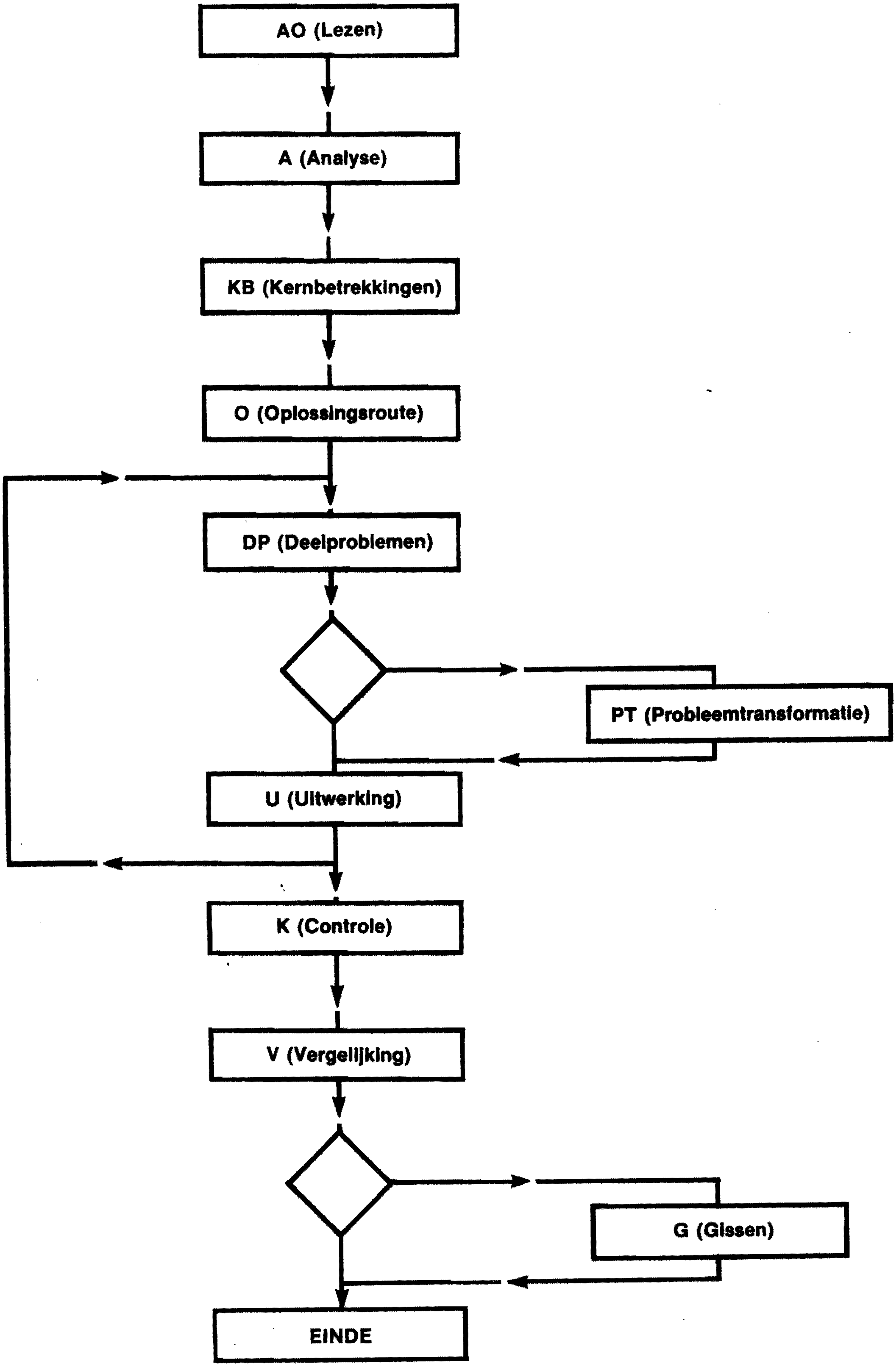
Er werden twee groepen studenten gevormd. Een van de groepen kreeg een extra instructie, waarin de voor het onderzoek ontworpen strategie onderwezen en geoefend werd. Deze instructie van 6 x 1 uur was gericht op het leren om natuurkundige problemen op een systematische manier aan te pakken en op te lossen. In de eerste instructie-uren werden de in par. 2.2. beschreven strategie en het begrip kernbetrekking uiteengezet. De resterende tijd werd gebruikt om het opstellen van een lijst van kernbetrekkingen behorende bij de stof te oefenen en om de strategie toe te passen op een aantal speciaal geselecteerde problemen.

In het kader van de reguliere cursus legden de studenten 9 toetsen af over de verschillende blokken waarin de leerstof verdeeld was. Aan het onderzoek deden 16 studenten mee, verdeeld over een experimentele en een controlegroep. Data werden verkregen door alle studenten uit het onderzoek twee toetsen uit de cursus (een vóór en een ná de extra instructie voor de experimentele groep) hardop denkend te laten afleggen. Deze methode houdt in dat bijv. probleemoplossers hun activiteiten hardop denkend uitvoeren, terwijl hun uitspraken d.m.v. een audiorecorder geregistreerd worden voor latere analyse. Deze manier van data verzamelen geeft directe informatie over de manier van denken van de proefpersoon, maar heeft ook een aantal nadelen. Een hiervan is de tijdrovende analyse; een andere is de mogelijkheid dat het hardop denken het gedrag van de proefpersonen beïnvloedt. Ondanks deze nadelen lijkt deze methode de meest geschikte voor onderzoek naar probleemoplossen. Verdere discussie en literatuurverwijzingen m.b.t. de methode zijn te vinden in De Jong en Ferguson-Hessler (1983).

Van alle studenten uit het onderzoek werden dus van twee toetsen uit de cursus hardop denk protocollen van oplossingen verkregen. Deze protocollen moesten vervolgens geanalyseerd worden.

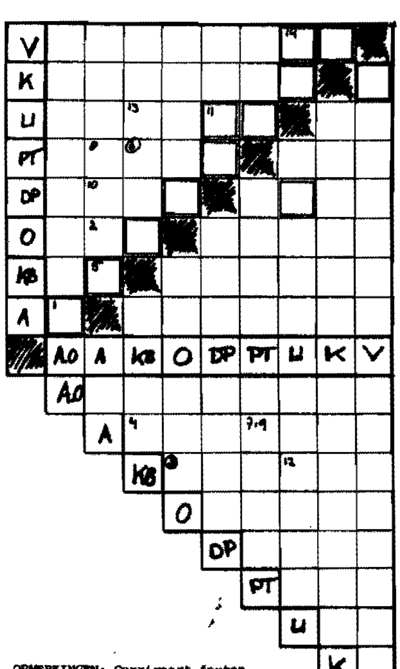
3.2. *De protocolanalyse*

Van de strategie uit par. 2.2. werd een 'ideale oplossingsweg' afgeleid. Deze wordt weergegeven in figuur 1. Elke fase uit deze ideale oplossingsweg werd vervolgens gedetailleerd. Uiteindelijk werden binnen de 10 fasen 29 meer specifieke handelingen onderscheiden. Deze werden ondergebracht



Figuur 1: De 'ideale' oplossingsweg. Voor beschrijving van de stappen zie bijlage 1.

in een 'meetschema'. Dit meetschema is in zijn geheel opgenomen als bijlage 1 in dit rapport. Dat meetschema was een belangrijk hulpmiddel bij de analyse van de protocollen.
De analyse van de protocollen bestond hieruit dat elke uitspraak van een student benoemd werd d.m.v. een specifieke handeling uit het meetschema. Op deze manier werd elke uitspraak dus ook binnen een fase uit de ideale oplossingsweg geplaatst (zie voor de volledige procedure De Jong en Ferguson-Hessler, 1983). Voor een geanalyseerd protocol zie bijl. 2.
Als resultaat van de protocolanalyse kon elke oplossing van een student als een opeenvolging van fasen beschreven worden. Het oplossen van een probleem volgens de onderwezen strategie betekent het volgen van een sequentie van fasen zoals aangegeven in de ideale oplossingsweg. Om een antwoord te krijgen op de vraag in welke mate studenten de onderwezen strategie volgden moest de in de protocollen gevonden sequentie vergeleken worden met de 'ideale' sequentie. Om dit te kunnen doen werd een zogenaamde overgangstabel ontworpen.
In figuur 2 staat zo'n overgangstabel. Op de assen van de tabel zijn de fasen van de ideale oplossingsweg uitgezet, zoals in figuur 1 te vinden. De fase 'gissen' is hierbij niet opgenomen, daar de analyse van de protocollen niet verder plaats vond dan tot het eerste antwoord van de studenten. Op dat moment is namelijk al duidelijk welke strategie zij volgen.



Figuur 2: Een overgangstabel

De cellen van de tabel geven overgangen tussen de oplossingsfasen aan, waarbij de horizontale as steeds het uitgangspunt is en de verticale as de fasen aangeeft waar men naar toe gaat. De cel met nummer 1 in de figuur betekent dus een overgang van lezen naar analyse, cel nummer 5 een overgang van analyse naar selecteren van kernbetrekkingen.
Als men de strategie volgt, worden alle fasen in de aangegeven volgorde uitgevoerd, eventueel met uitzondering van PT, die niet in alle problemen nodig is. In de tabel wordt de strategie aangegeven door de dubbel omlijnde cellen. Het overslaan van PT en de lus, die ontstaat bij het oplossen van meerdere deelproblemen, zijn hierin verwerkt. Verder wordt het niet als een afwijking van de strategie gezien, als men eerst vergelijkt en pas daarna de controle uitvoert.

Boven de dubbel omlijnde cellen in de tabel ligt het gebied van overgangen, waarbij een of meerdere fasen overgeslagen zijn. *Onder de horizontale as* zijn die overgangen geplaatst, die aangeven dat men terugkeert naar een eerdere fase, omdat deze niet of niet volledig uitgevoerd werd. Deze teruggangen zijn niet conform de strategie. Het resterende gebied, dus tussen de dubbel omlijnde cellen en de horizontale as, is gereserveerd voor teruggangen, die niet als afwijking van de strategie gezien kunnen worden. Een voorbeeld hiervan zijn de tussentijdse controles en terugkeer omdat men onderweg een fout ontdekt heeft.

De geanalyseerde protocollen werden per opgave overgebracht in een overgangstabel, zoals in figuur 2, die het geanalyseerde protocol van bijlage 2 weergeeft. De cijfers geven de *volgorde* van de stappen aan. Voor de vergelijking van de oplossingen van de beide groepen in het experiment werden de overgangstabellen per blok en per groep gesommeerd. In de cellen komen dan getallen te staan, die *frequenties* aangeven i.p.v. volgorde.

3.3. *Resultaten*

De vier overgangstabellen, waarin het oplosgedrag van de beide groepen in de twee toetsen weergegeven is, zijn te vinden in overzicht 1.
Terwille van de vergelijking zijn de frequenties hier omgerekend in percentages van het totale aantal stappen in alle protocollen per overgangstabel. Dit werd gedaan omdat het aantal opgaven en het aantal studenten verschillend zijn

OVERZICHT 1. Overgangen tussen fasen, percentages van het totaal.

A. Controlegroep, Blok 2.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V		0,4					9,0	1,3	
K			0,4				2,1		2,1
U		3,0	10,3	0,4	2,1	5,6		1,3	
PT		1,3	4,7	0,9	1,3		0,4		
DP		2,6	2,1	1,3			2,1		
O	0,4	2,1	0,4						
KB		9,0					0,4		
A	11,5				0,4		0,4		
AO		0,9	0,4						
A			1,3	0,9	1,7	0,9	2,1		
KB				0,4	3,4	2,1	3,9	0,4	
O							0,9		
DP						0,4	0,4		
PT							0,4		
U									

B. Controlegroep, Blok 9.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V		0,8					4,3	1,2	
K		0,4					3,1		0,8
U		3,1	11,2		4,7	4,3			
PT		1,2	3,5		1,2		0,8		
DP		3,5	1,2	2,7			4,7	0,4	
O	0,4	2,3	1,6					0,4	
KB	1,6	7,4					0,4		
A	9,3							0,4	
AO		1,6	0,4						
A			1,6	1,9	1,9	0,8	4,3		
KB				0,8	4,7	1,6	3,1		
O						0,4	0,4		
DP									
PT							0,4		
U									

C. Experimentele groep, Blok 2.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V		0,3					8,7	0,8	
K							2,1		3,8
U	0,3	2,7	9,5	0,3	3,5	4,9		1,1	
PT		2,1	4,6		1,1				
DP		3,0	1,4	1,6			1,9		
O	0,3	2,5	1,1						
KB	0,5	7,6							
A	10,6						0,5		
AO		1,1							0,3
A			2,1	1,6	0,5	1,4	2,5	0,3	
KB				1,1	3,5	1,4	4,4	0,3	
O							1,1		
DP						0,8			
PT							0,5		
U									

D. Experimentele groep, Blok 9.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V							6,9	1,0	
K							2,8		2,1
U		4,4	13,6	1,0	3,3	1,3		0,3	0,5
PT		0,8	1,8	0,5	0,3				
DP	0,5	2,1	2,1	2,8		0,3	3,3	0,3	
O	0,3	2,6	2,1						
KB	0,8	9,0					0,3		
A	9,2				0,8		0,5		
AO		0,3	0,3						
A			2,3	1,3	0,5	0,3	3,9		0,3
KB				0,8	6,4	0,8	3,6	0,5	
O						0,8	1,0		
DP									
PT									
U									

in de vier situaties. Een samenvatting van de overgangstabellen is te vinden in de tabellen 1 en 2. 'Strategie' staat hier voor overgangen, die volgens de strategie gebeuren én voor de toegestane teruggangen.

Tabel 1: Blok 2

	Strategie	N.-strategie
Contr.	119 (51%)	115 (49%)
Exp.	182 (50%)	185 (50%)

Tabel 2: Blok 9

	Strategie	N.-strategie
Contr.	122 (47%)	136 (53%)
Exp.	183 (47%)	207 (53%)

Noch uit het overzicht noch uit de tabellen is er significant verschil te zien tussen de beide groepen. Dit geldt zowel voor blok 2 als voor blok 9. Beide groepen werken in blok 9 iets minder volgens de strategie dan in blok 2. Deze verschillen zijn echter klein, en conclusies kunnen hieruit niet getrokken worden.

Het eerste gedeelte van de vraagstelling werd dus ontkennend beantwoord: studenten, die een extra instructie probleemaanpak kregen, gingen er niet naar over om de onderwezen strategie systematisch toe te passen. Het tweede gedeelte van de onderzoeksvraag, het eventueel door gebruik van de strategie bereiken van betere resultaten, kon dus niet worden getoetst.
Speciale aandacht werd besteed aan het gebruik van de oplossingsroutes, aangezien deze een wezenlijk onderdeel van de strategie vormen, maar door studenten niet vaak spontaan gebruikt worden. Uit de overgangstabellen zijn geen duidelijke verschillen af te leiden in de frequentie van de fase 0 tussen de beide groepen. Als fase 0 onderverdeeld wordt in de beide verschillende denkstappen *zoeken naar* en *vaststellen van* een oplossingsroute, 0.1 resp. 0.2, in bijl. 1, dan blijkt dat de instructie probleemaanpak hierop wel invloed gehad heeft. De studenten uit de experimentele groep stellen in blok 9 twee keer zo vaak een oplossingsroute vast als de studenten uit de controlegroep. Het betreft hier echter te kleine aantallen studenten om harde uitspraken te doen

Dat de instructie probleemaanpak verder geen aantoonbare invloed had op de manier waarop studenten problemen oplossen, duidt erop dat ze diep gewortelde gewoontes hebben, wat het aanpakken van problemen betreft. De extra instructie van 6 uur is niet indringend genoeg geweest om deze gewoontes te veranderen. Uit de overgangstabellen in overzicht 1 is af te lezen hoe de door de studenten gebruikte wegen naar een oplossing in grote trekken eruit zien.

Na het lezen gaat men analyseren, maar voert de analyse in eerste instantie niet volledig uit en moet daarom later terugkeren naar de analysefase. Vanuit een gedeeltelijke analyse gaat men naar het kiezen van kernbetrekkingen en van daaruit direct aan het rekenen. (De cel Kb → U heeft een ongeveer even hoge frequentie als de initiële stap A0 → A!) De vrij vaak voorkomende stap A → 0 is in de meeste gevallen van 'spijtoptanten' die teruggekeerd zijn naar de analysefase, aangezien geen oplossingsroute vastgesteld kan worden zonder kernbetrekkingen. Als de eerste poging niet lukt, probeert men alsnog om een oplossingsroute op te stellen. Het kiezen van een deelprobleem, DP, komt ook regelmatig voor direct na de analyse. Deze stap wordt dan ook regelmatig gevolgd door Kb (zie de hoge frequenties in de cel DP → Kb). Dit patroon, dat we met de term 'kick and rush' beschreven, dat in elke overgangstabel terug te vinden is, wijst eerder in de richting van vaste, soms slechte, gewoontes dan in de richting van een bewuste strategie.

Wat is nu de waarde van een strategie vergeleken met de andere onderdelen van het kennisrepertoire? Bestaat er een relatie tussen het succesvol oplossen van problemen en het gebruiken van de hier onderwezen strategie? Gezien het feit dat de strategie-instructie geen direct effect had, werd een antwoord gezocht op deze vragen d.m.v. de overgangstabellen in overzicht 2, waar goede en foute oplossingen in beide blokken gesommeerd zijn. Frappant is hier de grote overeenstemming tussen deze tabellen onderling en met tabellen van overzicht 1. Bij goede oplossingen wordt er dus *niet* meer volgens de strategie gewerkt dan in foute oplossingen, en er blijkt telkens weer dat men ongeveer dezelfde oplossingsmethode gebruikt: 'kick and rush'. *Verschillen tussen goede en foute oplossingen zijn in het algemeen slechts te herleiden tot het al dan niet optreden van vakinhoudelijke fouten en omissies in de oplossingen.* In het volgend hoofdstuk worden deze fouten en omissies in detail behandeld.

OVERZICHT 2. Overgangen tussen fasen gesommeerd voor goede en foute oplossingen, percentages van het totaal.

A. Goede oplossingen, Blok 2.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V							12,0	0,5	
K							3,1		3,7
U		2,1	10,4		3,7	5,2		2,1	
PT		3,1	4,7				0,5		
DP		2,6	1,6	0,5			1,0		
O	0,5	1,6	0,5						
KB	1,0	7,8							
A	11,5								

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
AO		1,0							
A			2,1	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	
KB				1,0	2,6	1,6	4,7	0,5	
O									
DP						1,0	0,5		
PT							0,5		
U									

Aantal opgaven: 23

B. Goede oplossingen, Blok 9.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V							4,9	1,9	
K		0,4					4,5		1,5
U		3,4	12,7	0,8	5,2	1,5			0,8
PT		0,4	2,2	0,4	0,4				
DP	0,4	2,2	2,2	3,0			4,5	0,8	
O		3,4	1,1						
KB	0,8	7,5					0,4		
A	9,3				0,4		0,4	0,4	

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
AO		0,8	0,8						
A			1,1	0,8	1,1	1,1	3,4		
KB				1,5	6,0	0,4	3,4	0,4	
O						0,8	1,1		
DP									
PT							0,4		
U									

Aantal opgaven: 24

C. Foute oplossingen, Blok 2.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V		0,5					7,3	1,2	
K			0,2				1,7		2,9
U	0,2	3,2	9,5	0,5	2,7	5,1		0,7	
PT		1,2	4,7	0,5	1,7				
DP		2,9	1,7	2,0			2,4		
O	0,2	2,7	1,0						
KB		8,3					0,2		
A	10,7				0,2		0,7		

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
AO		1,0	0,2						0,2
A			1,7	1,5	1,0	1,2	2,9		
KB				0,7	3,9	1,7	3,9	0,2	
O							1,5		
DP						0,5			
PT							0,5		
U									

Aantal opgaven: 40

D. Foute oplossingen, Blok 9.

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
V		0,5					6,6	0,5	
K							1,8		1,6
U		4,2	12,6	0,5	2,9	3,2		0,3	
PT		1,3	2,6	0,3	0,8		0,5		
DP	0,3	2,9	1,3	2,6		0,3	3,4		
O	0,5	1,8	2,4					0,3	
KB	1,3	9,0					0,3		
A	9,2				0,5		0,3		

	AO	A	KB	O	DP	PT	U	K	V
AO		0,8							
A			2,6	2,1	1,1		4,5		0,3
KB				0,3	5,5	1,6	3,4	0,3	
O						0,5	0,5		
DP									
PT									
U									

Aantal opgaven: 40

4. FOUTEN EN DWAALWEGEN - EN HUN MOGELIJKE ACHTERGRONDEN

Als er geen verschil bestaat tussen de strategieën, die door wel en niet succesvolle oplossers gebruikt worden, dan is te verwachten dat de oorzaken van mislukkingen te vinden zijn in de andere componenten van het kennisrepertoire. In dit hoofdstuk wordt een aantal representatieve fouten behandeld, die door de studenten gemaakt werden in de verschillende oplossingsfasen. De aard van deze fouten geeft enige indicaties over tekortkomingen in het kennisrepertoire van studenten, die er niet in slagen om de toetsopgaven foutloos op te lossen.

4.1. *De analysefase*

Lezen

Het eerste wat bij het oplossen van problemen moet gebeuren, is het *lezen* van de gegeven tekst en het opnemen van de daarin gegeven informatie. Hiervoor is kennis nodig van de taal, die in de natuurkunde gebruikt wordt, en van de understatements die vaak voorkomen. 'Een lange cilinder' betekent bijv. dat die cilinder als oneindig lang behandeld mag worden, en dat de vraagsteller niet geïnteresseerd is in de situatie rond de uiteinden van de cilinder. Met dit aspect van de analyse schijnen de studenten **weinig** moeite te hebben. Een ander aspect is dat onzorgvuldigheid bij het lezen hen soms parten speelt, zodat de verdere analyse op een dwaalspoor komt. Waarom sommige studenten van deze ongelukkige gewoonte niet kunnen afkomen - in veel gevallen ondanks het feit dat ze zich terdege ervan bewust zijn - is niet duidelijk. Vormen ze té snel een eigen beeld van de situatie, zodat op een bepaald punt de gegeven informatie niet meer of niet correct opgenomen wordt? Of is deze gewoonte maar één aspect van een algemene neiging tot onzorgvuldigheid? Antwoorden op deze vragen moeten - lijkt het ons - eerder gezocht worden in termen van individuele kenmerken van studenten dan in termen van het kennisrepertoire.

Het maken van een tekening

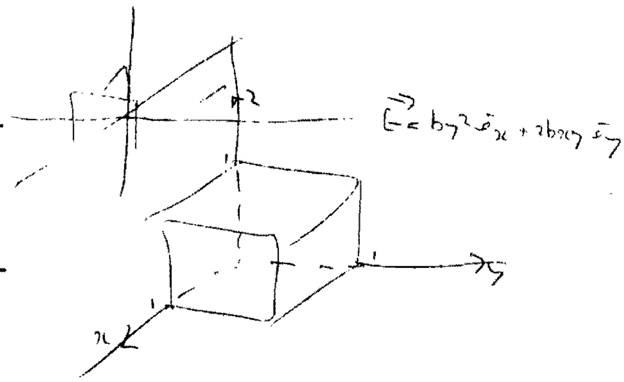
Het vertalen van de verbale beschrijving van het gegeven systeem in een *fysisch model* levert wel moeilijkheden op in een aantal gevallen, net als het vaststellen van belangrijke kenmerken van het systeem. Algemene achtergrondkennis en ruimtelijk inzicht zijn nodig om een fysische representatie op te bouwen van het systeem en van hetgeen in het systeem

gebeurt. Het *maken van een tekening* kan daarin een belangrijke rol spelen. Sommige studenten hebben hier geen moeite mee; velen beperken zich tot het overtekenen van de gegeven figuur, als die er is, en weer anderen schijnen maar wat coördinatenassen en vectoren neer te zetten zonder veel begrip. Als voorbeelden verzamelden we een aantal tekeningen die horen bij de opgaven, waar de totale flux door het oppervlak van een kubus in een gegeven $\vec{E}$-veld berekend moet worden (zie figuur 3).
Bij dit soort opgaven is het belangrijk om niet alleen de kubus goed weer te geven maar ook de veldlijnen, zodat uit de figuur blijkt waar de veldlijnen door het oppervlak gaan en in welke richting dit gebeurt. Uit figuur 3 blijkt dat de studenten A en B zich beperken tot het tekenen van een kubus. B geeft ook aan hoe de x-component van het veld van y afhangt. Geen van tweeën maakt een poging om de flux te visualiseren als 'het aantal veldlijnen dat door een oppervlak steekt'. Bij de uitwerking blijkt dat A helemaal geen begrip heeft van de betekenis van de oppervlakte-integraal $\varepsilon_0\int\vec{E}.d\vec{A}$; hij maakt er maar een volume-integraal van. B lukt het - per toeval? - om de eerste oppervlakte-integraal te evalueren, maar bij de tweede gaat het mis: de bijdrage van de y-component moet over x en z worden geïntegreerd, niet over x en y. Verder ziet hij helemaal niet dat er 4 oppervlakten zijn, die aan de flux bijdragen. Met een goede tekening hadden deze fouten allemaal vermeden kunnen worden. Student C aan de andere kant tekent een duidelijke kubus en geeft ook aan hoe de componenten van het veld gericht zijn bij het oppervlak. Weliswaar zijn de coördiatenassen niet aangegeven in zijn figuur, maar hij slaagt erin om alle oppervlakte-integralen correct op te stellen.

Wat zou nou de oorzaak kunnen zijn van deze verschillen? Is het zo dat A en B niet een duidelijk visueel model hebben van flux als 'aantal veldlijnen die door een oppervlak steekt', maar alleen de algebraïsche definitie $\psi = \varepsilon_0\int\vec{E}.d\vec{A}$ (en dat niet altijd correct!) gebruiken? Of hebben ze juist zo'n duidelijk beeld van het veld en de kubus dat ze geen behoefte hebben aan een gedetailleerde tekening? Hun manier van werken spreekt de laatste veronderstelling wel duidelijk tegen.

Uit deze voorbeelden blijkt, dat een goede schets of tekening van doorslaggevende betekenis kan zijn voor de analyse van de gegeven situatie, en daarmee voor het succes van de hele oplossing. Al in deze fase van de oplossing speelt de toepasbaarheid (zie 2.3.) van de kennis een rol bij het herkennen en correct weergeven van de relevante gegevens in de tekst.

A



$\psi = \epsilon_0 \iint \vec{E}\cdot A$

$= \epsilon_0 \int_0^1\int_0^1 (by^2+2bxy)\,dx\,dy\,dz$

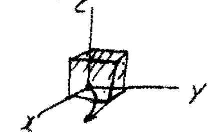
$= \epsilon_0 \int_0^1\int_0^1 (by^2dx+2byx\,dx)\,dy\,dz$

$= \epsilon_0 \int_0^1 by^2x + byx^2 \Big|_0^1 \,dy\,dz$

$= \epsilon_0 \int_0^1 (by^2+by)\,dy\,dz = \epsilon_0 \int_0^1 (by^2dy + by\,dy)\,dz$

B

$\vec{E} = by^2\vec{e}_x + 2bxy\,\vec{e}_y$



~~$\psi = \epsilon_0\iint E_x\,dA = \epsilon_0\iint by^2\,dx$~~

$\psi = \epsilon_0 \iint_0^1 by^2\,dy = \epsilon_0 b\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}b = \frac{2}{3}\epsilon_0 b$

$\psi = \epsilon_0 \iint_{00}^{11} 2bxy\,dx\,dy = \epsilon_0 \int_0^1 \left[abx^2\right]_0^1 =$

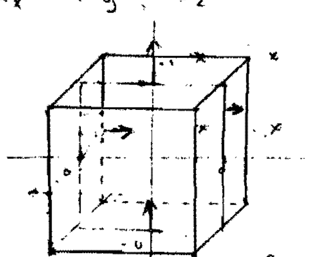
$\epsilon_0 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \left[bx^2\right]_0^1 =$

$\epsilon_0 \frac{1}{2}\cdot b = \frac{1}{2}\epsilon_0 b$

$\epsilon_0 b$ $\boxed{\frac{5}{3}\epsilon_0 b}$

C

$E = 2y\vec{e}_x + 2x\vec{e}_y + 2b\vec{e}_z$



1.) $\Psi_{x=-a} = \epsilon_0 \iint 2y\,dA = \epsilon_0 \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} 2y\,dy\,dz = \epsilon_0 \int$

$\left(\epsilon_0 [y^2]_{-a}^a (z)\right)$ $\epsilon_0 \int_{-a}^{a} [y^2]_{-a}^a dz = \epsilon_0 [y^2][z]_{-a}^a = \epsilon_0(a^2-a^2)(a-a) = 0$

$\Psi_{x=a}: \epsilon_0 \iint 2y\,dA = \epsilon_0 \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} 2y\,dy\,dz = 0.$

$\Psi_{y=-a}: \epsilon_0 \iint_{-a\,-a}^{a\,a} 2x\,dA = \epsilon_0 \int_{-a}^{a}\int 2x\,dx\,dz =$

$\epsilon_0 \int [x^2]_{-a}^a dz = \epsilon_0\, a^2 - a^2 = 0$

$y=a$

$z=-a: \Psi = \epsilon_0 \iint_{-a\,-a}^{a\,a} 2b\,dx\,dy =$

$\epsilon_0 \int_{-a}^{a} [2bx]_{-a}^a dy = \epsilon_0 \int_{-a}^{a} 4ab\,dy =$

$\epsilon_0 [4aby]_{-a}^a = \epsilon_0 4a^2b - (-4a^2b) = 8a^2b\,\epsilon_0$

Figuur 3: Voorbeelden van tekeningen

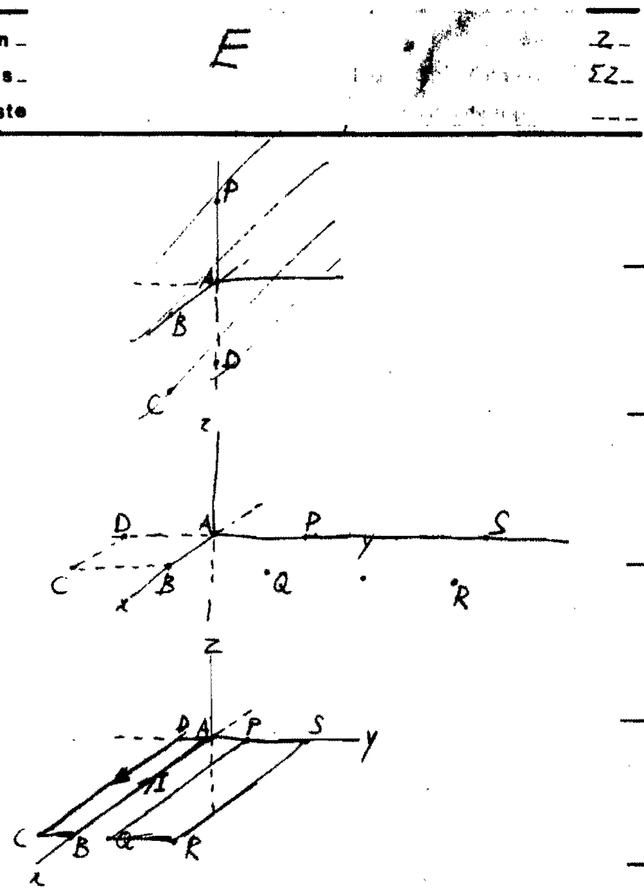
Een tekening is een vorm van ordening van de gegevens en kan een belangrijk hulpmiddel zijn om te ontdekken wat er gebeurt en welke wetten en formules van toepassing zouden kunnen zijn.
Dit blijkt ook uit die gevallen, waar de student helemaal geen tekening maakt van het gegeven systeem - en waarschijnlijk ook geen eigen fysische representatie daarvan opbouwt - waardoor de verdere oplossing een zuiver notatiespelletje wordt zonder fysische betekenis. Een enkele keer rolt er desondanks een goed antwoord uit! Een voorbeeld hiervan: een student past de wet van Gauss toe op een cilinderschil, maar maakt er geen tekenig bij. Hij vult automatisch $\Psi = \varepsilon_0 EA$ in voor het binnenste vlak zonder erop te letten dat het om *ingaande* veldlijnen gaat, waardoor er een minteken behoort op te treden. Gelukkig voor deze oplosser had de opsteller van de toetsopgave deze fout niet voorzien, maar alle antwoorden negatief gemaakt, waardoor de student zijn tekenfout (nog steeds zonder figuur) corrigeerde.

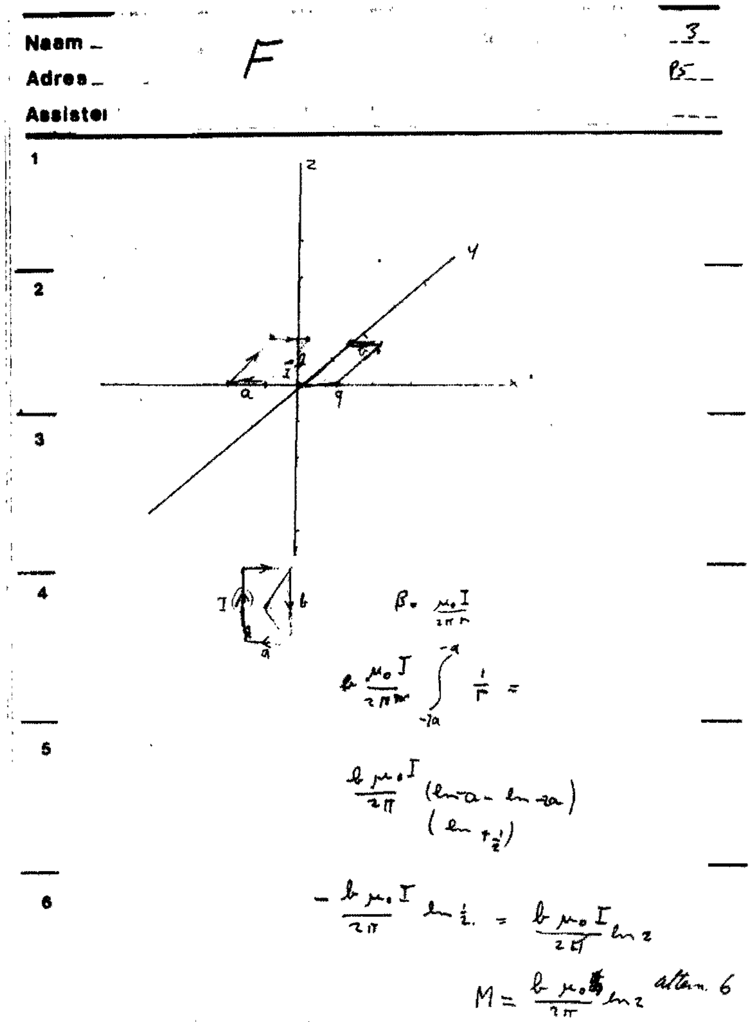
Het herkennen van relevante kenmerken

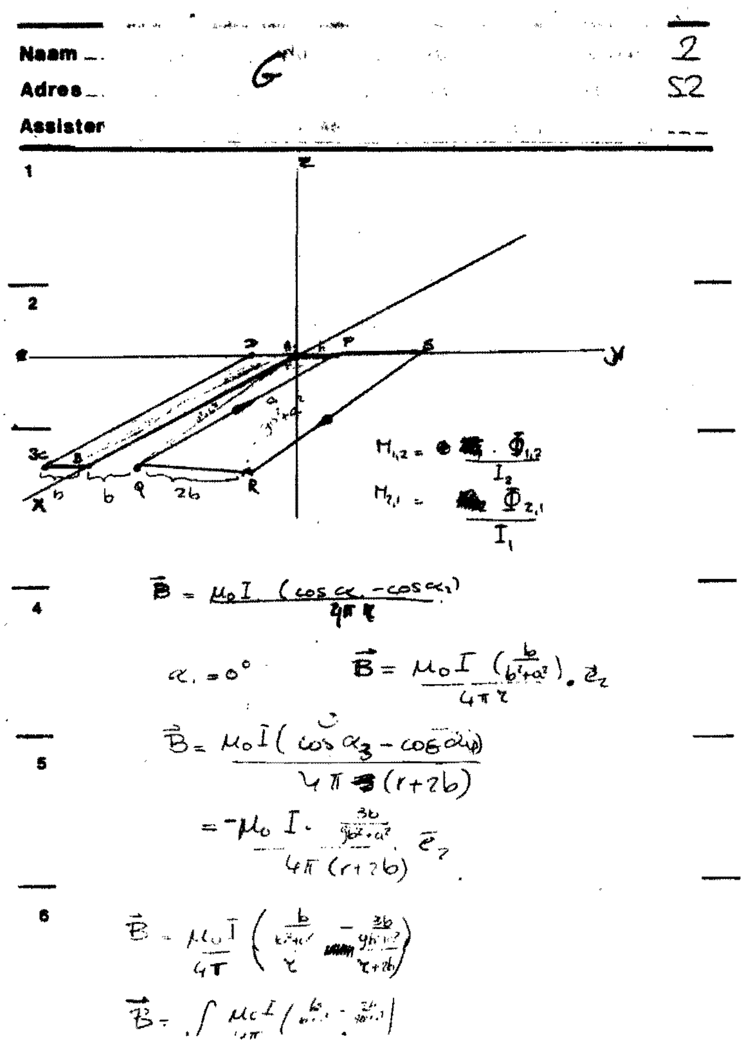
Een belangrijk aspect van selectiekennis is het herkennen van relevante kenmerken van de probleemsituatie en het verwerken hiervan. Dit blijkt uit de voorbeelden in figuur 4, enkele tekeningen, die gemaakt zijn bij een opgave van het volgende type:

In het xy-vlak liggen twee lange, zeer smalle windingen ABCD en PQRS. De coördinaten van de punten worden weergegeven door A(0,0,0); B(a,0,0); C(a,-b,0); D(0,b,0); P(0,b,0); Q(a,b,0); R(a,3b,0); S(0,3b,0). $a \ll b$. Voor de coëfficiënt van wederkerige inductie M vinden we, met verwaarlozing van de rand-effecten:

Alleen de ligging van de twee kringen relatief het coördinatenstelsel is verschillend in deze opgaven en in een variant is $a \ll b$. Twee van de studenten hebben duidelijk het gegeven $a \gg b$ ingebracht in hun figuren. Student G heeft desondanks moeite om de goede benadering te vinden. F, die een opgave had met $a \ll b$, beperkt zich tot het manipuleren van formules zonder inzicht. Voor een goede oplossing van het probleem is het van wezenlijk belang dat men later in de analyse twee conclusies trekt: het veld BC en DA mag verwaarloosd worden, en voor AB en CD mag de formule voor het veld een lange, rechte draad gebruikt worden. Een tekening als die van student F zal geen hulp zijn om hier de goede weg te vinden.







Figuur 4: Voorbeelden van tekeningen

Trekken van conclusies

Volgende belangrijke stap in de analyse is het *trekken van conclusies uit de gegevens*, iets dat in bijna alle problemen nodig is. Als er in het systeem een geleider aanwezig is, kan het bijvoorbeeld voor de oplossing essentieel zijn om daaruit expliciet te concluderen dat het oppervlak van de geleider een equipotentiaalvlak is, en dat $\vec{E} = 0$ binnenin de geleider. Toepassingen van de declaratieve kennis staan in deze stap op de voorgrond.

Twee soorten fouten komen hierbij voor: men trekt *verkeerde conclusies*, of men *verzuimt* om gevolgtrekkingen te maken, die voor de oplossing essentieel zijn.

Verkeerde gevolgtrekkingen zijn waarschijnlijk merendeels het gevolg van verkeerde declaratieve kennis. Enkele voorbeelden tonen dit aan:

- 'E_z is constant, dus $\vec{E}$ ligt in het xy-vlak'
- 'Die geleider is geaard, dus zijn lading is nul'
- 'Als de schakelaar gesloten wordt, neemt I_{spoel} af' (Wat niet het geval was)
- 'Buiten de buitenste cilinder is $\vec{E} = 0$; dus is de lading op deze cilinder nul'

Het *verzuimen* van het trekken van conclusies uit de gegevens heeft waarschijnlijk een andere oorzaak dan foutieve declaratieve kennis. Dat men bepaalde gevolgen van de gegevens niet ziet, kan erop duiden dat de kennis van wetten en formules abstract is en daardoor niet toepasbaar in een concrete situatie:

- men maakt geen gebruik van $\vec{E} = 0$ binnenin een geleider - alhoewel men op een directe vraag naar $\vec{E}$ het antwoord waarschijnlijk best weet.
- men realiseert zich niet, dat er een inductiestroom gaat lopen in een bepaalde kring - alhoewel men desgevraagd waarschijnlijk wel de wet van Faraday kan opschrijven.

Een opvallend voorbeeld vonden we in een poging om het volgende probleem op te lossen: een koperen staf, onderdeel van een stroomkring, rolt in een magnetisch veld omlaag langs een hellend vlak, en wordt geremd door de Lorentzkracht. Een student loste dit probleem als een zuiver mechanisch probleem op, en constateerde dan ook dat de staf helemaal niet afgeremd werd.

Doelanalyse

De *doelanalyse* is in de protocollen meestal zeer onvolledig. Als men er überhaupt iets aan doet, dan is dat beperkt tot het vaststellen van de gevraagde grootheid. Pogingen om al in de analysefase een beeld te krijgen van de gevraagde grootheid, bijv., zijn teken of richting, zijn er nauwelijks te vinden. Enkele studenten voeren deze denkstap uit in de controlefase. Ze keren dan terug naar de doelanalyse om te kijken of het gevonden antwoord wel redelijk is. Voor een uitgebreide discussie hierover zie paragraaf 4.3.2. van het rapport over strategiegebruik.

Ondanks deze lijst van fouten blijft de belangrijkste indruk van de manier waarop studenten problemen analyseren, die van *onvolledigheid*, vooral in de beginfase van de oplossing. Kleine stukken analyse zijn verspreid door de hele oplossing, waardoor soms belangrijke aanknopingspunten voor de oplossing gemist worden. Deze *onvolledigheid van de analyse* valt vooral op in blok 9, waar in meer dan de helft van de opgaven de analyse zonder meer onvoldoende is. Voor blok 2 is dit het geval in ongeveer 20% van de opgaven.

In de volgende paragrafen wordt het belang van de analysefase voor het succes van een oplossing duidelijk. Als men bijv. een niet geldige kernbetrekking toepast of fouten maakt bij het invullen van de gegevens in de gekozen kernbetrekking, dan zijn deze fouten vaak terug te voeren op onvolledigheden in de analyse.

4.2. *Fouten bij het selecteren van kernbetrekkingen*

De fase vaststellen van kernbetrekkingen (Kb's) bestaat uit twee stappen:

- het vaststellen van de geldigheid van de eventueel te gebruiken Kb's in de gegeven situatie,
- het kiezen van de te gebruiken Kb's.

Opvallend is dat studenten zich vaak helemaal niet om de geldigheid van de gekozen kernbetrekkingen bekommeren, en als die wel expliciet vastgesteld wordt, gebeurt dat na de keuze, als bevestiging. In enkele gevallen leidt dit tot het verwerpen van de gekozen formule en het kiezen van een andere, die wel geldig is. Toch is de bij verre belangrijkste bron van fouten in deze fase *het gebruiken van niet geldige kernbetrekkingen*. Een andere, ook vrij vaak voorkomende fout, is het *gebruiken van een verkeerde vorm van de formule*. Hier is men dus niet dus niet in staat om de kernbetrekking correct te reproduceren. In andere gevallen wordt een van de *symbolen in de Kb verkeerd geïnterpreteerd*. In deze gevallen is men dus wel in

staat om de formule te reproduceren, maar doorziet men niet de betekenis ervan. Het *helemaal niet kennen van de te gebruiken Kb* komt maar in een enkel geval voor. De drie eerstgenoemde foutenbronnen zullen we hieronder successievelijk behandelen:
De absolute topper onder de *gebruikte, maar niet geldige* kernbetrekkingen is de formule $Q = \rho.V$, toegepast in situaties, waar de ladingsdichtheid niet homogeen is. Dezelfde fout wordt gemaakt met $\Psi = B.A$ en $U_{ind} = \vec{B}.\vec{v}.l$, waar $\vec{B}$ niet homogeen is. Andere voorbeelden van niet geldige kernbetrekkingen zijn:

- toepassing van de wet van Gauss op een niet gesloten oppervlak,
- $B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$ voor een cirkelvormige stroomkring of voor het veld van een niet oneindig lange rechte geleider,
- $B = \mu_o NI\frac{1}{l}$ voor een korte spoel.

Ook hier speelt waarschijnlijk gebrek aan selectiekennis een belangrijke rol. Bij de bespreking van de analysefase werd geconstateerd dat studenten vaak verzuimen om voor de oplossing relevante kenmerken van de situatie vast te stellen, bijv. dat de ladingsverdeling niet homogeen is, maar van r afhangt. Dat kan leiden tot het kiezen van een kernbetrekking die in de gegeven situatie niet geldig is.

Nu blijkt uit de protocollen, dat als een kernbetrekking eenmaal geselecteerd is, men ook niet de omgekeerde weg bewandelt, d.w.z. de geldigheidsvoorwaarden vergelijkt met de kenmerken van de situatie.

Dit gebrek aan selectiekennis zou men als volgt kunnen omschrijven: er bestaan geen duidelijke verbindingen tussen kenmerken van probleemsituaties en kennis van formules en hun geldigheidsvoorwaarden en toepassingsgebieden, d.w.z. de declaratieve en procedurele kennis is abstract en niet gerelateerd aan de concrete situaties waarin die toegepast wordt.

Het niet correct weergeven van kernbetrekkingen kan diverse verschillende oorzaken hebben:

- iemand, die de flux wil berekenen uit de formule $\Psi = \int E\ dx\ dy\ dz$ heeft het begrip flux waarschijnlijk niet verwerkt.
- de kennis van wiskunde houdt niet altijd gelijke tred met de eisen van de natuurkunde. Dit geldt vooral voor het integreren, zoals te

zien is uit de volgende bloemlezing van formules, die alle betrekking hebben op het berekenen van lading:

$Q = \rho dV$ $\qquad Q = \int \rho$

$Q = \rho . 2\pi r dr$ $\qquad dQ = \rho V$

$Q = \int \rho dA$ $\qquad Q_{omsl} = q + \rho$

$Q = \int \rho(r) dr$

- Dit soort fouten komt in blok 9 veel minder voor; blijkbaar heeft men dan de nodige wiskunde geleerd.
- het vergeten van een ε_0 in een formule als $\rho = \varepsilon_0 (\frac{dE_r}{dr} + \frac{2E_r}{r})$ is waarschijnlijk slordigheid; deze fout werd ook later hersteld.
- het vergeten van de factor 2 in dezelfde formule komt neer op het door elkaar halen van cilinder- en bolsymmetrie, en kan zowel slordigheid als gebrek aan declaratieve kennis als achtergrond hebben.

Verkeerde interpretatie van de symbolen, die in de gebruikte formules voorkomen, leidt bijv. tot tekenfouten of verkeerde grenzen bij fluxberekeningen. In andere gevallen wordt een wet of formule op een niet correcte manier toegepast, zoals in volgend voorbeeld. De wet van Gauss wordt toegepast op een cilinderoppervlak met straal a en hoogte h, dat een homogene ladingsverdeling ρ_0 omsluit. Het invullen gebeurt als volgt:

$$\Psi_{g.o.} = \varepsilon_0 \int EdA = \varepsilon_0 \rho_0 . 2\pi h dr$$

Samenvattend: studenten neigen ertoe om nogal oncritisch om te gaan met formules, en om weinig aandacht te besteden aan hun geldigheid en exacte vorm. Ze beschikken soms niet over inzicht in de exacte betekenis van de gebruikte symbolen.

4.3. *Oplossingsroutes*

Deze fase wordt zeer vaak overgeslagen. Wat dus in veel protocollen opvalt, is de *afwezigheid van iedere vorm van planning*. Dit geldt zowel voor goede oplossingen, waar de student soms recht op het doel afgaat, maar soms ook pas na omwegen het doel bereikt, als voor foute of onafgemaakte oplossingen, waar de student de weg helemaal niet ziet.

Een oorzaak van dit gebrek aan planning is waarschijnlijk het feit dat studenten van de middelbare school gewend zijn aan weinig gecompliceerde opgaven, waar de oplossing te vinden is door meer of minder directe substitutie van gegevens in een formule. Ook in de SPS-cursus komt, speciaal in blok 2, dit type opgaven voor, dat men met een recht-toe-invullen-rekenen methode op kan lossen. Toch zijn er genoeg opgaven in het toetsmateriaal, die wel tot een of andere vorm van planning uitnodigen, om enkele uitspraken over het gebruik van oplossingsroutes mogelijk te maken. Zie hiervoor paragraaf 3.4. en paragraaf 4.3.3. van het rapport over strategiegebruik. Daar werd al genoemd, dat het *vaststellen* van oplossingsroutes ongeveer twee keer zo vaak voorkomt bij studenten die de extra instructie hebben gehad als bij de andere studenten. Bij een vergelijking tussen het gebruik van oplossingsroutes in goede en foute oplossingen bleek, dat het *zoeken* naar een oplossingsroute iets vaker voorkomt in de foute oplossingen (alhoewel het effect niet erg duidelijk is), en dat het *vaststellen* van oplossingsroutes wat vaker in goede oplossingen voorkomt.

Er blijkt uit het materiaal geen enkele correlatie tussen het aantal keren dat een student een oplossingsroute zoekt of vaststelt en het aantal goede oplossingen dat hij presteert.

Het vaststellen van foutieve oplossingsroutes komt nauwelijks voor. Wat wel in deze fase mis kan gaan is dat het *zoeken* naar een oplossingsroute *geen resultaat oplevert.* De oorzaken hiervan zou men kunnen zoeken in gebrek aan selectiekennis: niet weten welke kenmerken van de situatie van belang zijn, en daarom ook niet welke kernbetrekkingen mogelijkerwijze gebruikt zouden kunnen worden. Een andere oorzaak van het niet kunnen vinden van een oplossingsroute is de afwezigheid van een fysisch model: men kan niet 'zien wat er gebeurt'.

Enkele voorbeelden van het *zoeken* naar een oplossingsroute:
- 'ik bekijk het speciale geval $r = a$.'
- 'ik moet de ladingsverdeling met behulp van de wet van Gauss zien te bepalen.'
- 'ik moet zoeken naar een methode om de flux door een driehoek te bepalen.'
- 'welke flux wordt veroorzaakt door welke stroom?'

Voorbeelden van het *vaststellen* van oplossingsroutes:
- 'als ik Ψ_{tot} bereken, dan kan ik E berekenen.'
- 'ik pas de wet van Gauss toe, en laat dan het gaussoppervlak variëren.'

- 'uit $\rho(x)$ kan ik Q berekenen, en dan de flux.'
- 'nu de veldsterkte van Q_{ruimte}, daarna met de superpositieprincipe optellen.'
- 'als je B_p weet, dan weet je de flux, dan weet je M.'
- 'niet door de grote cirkel, maar door kleine cirkel, en dan M.'

4.4. *Soorten probleemtransformaties en daarin voorkomende fouten*

Het uitvoeren van probleemtransformaties stelt hoge eisen aan de beheersing van de gebruikte kernbetrekkingen en de daarbij horende procedures. Dit is duidelijk te zien in de fouten, die in deze fase van het oplosproces worden gemaakt.

De in blok 2 voorkomende probleemtransformatie 'kiezen van een gaussoppervlak en toepassen van de wet van Gauss hierop' levert verschillende voorbeelden van fouten:

- er zijn gevallen, waar het oppervlak verkeerd gekozen wordt. De situatieanalyse is dan niet voldoende geweest, zodat men geen beeld gevormd heeft van het systeem.
- soms wordt er een oppervlak gekozen zonder dat er op de symmetrie gelet wordt, zodat de oppervlakte-integraal niet uit te rekenen is. Hier is de oorzaak weer te vinden in onvoldoende situatieanalyse, nl. het niet vaststellen van de symmetrie-eigenschappen. Onvoldoende ervaring in het gebruik van de wet, d.w.z. gebrek aan procedurele kennis speelt waarschijnlijk ook een rol bij dit soort fouten.
- soms vergeet men een stuk van het gekozen oppervlak bij het opstellen van de oppervlakte-integraal.
- ook gebeurt het dat het gaussoppervlak wel goed gekozen is, maar dat de grenzen van de integraal waarmee $Q_{omsloten}$ berekend wordt, niet passen op dit vlak.

De beide laatste soorten fouten kunnen hun oorzaak hebben in onzorgvuldigheid. Vooral in het laatste geval ook gebrek aan een duidelijk beeld van het systeem, en daarmee samenhangend, een slechte tekening van belang zijn.

Het tweede type probleemtransformatie uit het meetschema (zie bijlage 1), het interpreteren van de gegeven situatie in termen van de gekozen kernbetrekking, levert ook een aantal fouten op. De betekenis van $Q_{omsloten}$ is bijv. niet altijd duidelijk: soms vergeet men een onderdeel ervan, soms telt men ten onrechte ladingen erbij. Hier zou weer de oorzaak kunnen zijn dat de oplosser niet in staat is om het gaussoppervlak duidelijk te zien in zijn figuur.

De andere vormen van probleemtransformatie komen niet vaak voor in de protocollen en leveren geen belangrijke voorbeelden van fouten op. Een leuk voorbeeld van een zelfbedachte probleemtransformatie is het volgende: En student maakt handig gebruik van de symmetrie t.o.v. de xz- en yz-vlakken van het gegeven systeem: 'Vanwege de symmetrie hoef ik alleen de flux in het eerste kwadrant uit te rekenen; de andere drie geven dezelfde bijdrage' (P.T.4 in het meetschema.)

Samenvattend kan gezegd worden, dat gebrek aan kennis van de fysische betekenis van de gebruikte formules en hun toepassingen en gebrek aan een modelmatige voorstelling hiervan belangrijke foutenbronnen zijn bij het uitvoeren van probleemtransformaties.

4.5. *Fouten in de uitwerkingsfase*

De meeste fouten in de uitwerkingsfase hebben twee bronnen: onzorgvuldigheid en gebrek aan voorkennis. Ongeveer de helft van de 120 gevonden fouten in deze fase zijn terug te voeren op slordigheid: rekenfouten, tekenfouten (die niet door gebrek aan inzicht ontstaan), notatiefouten, en het niet verwerken van eerder gevonden deelresultaten. Uit onderzoek blijkt dat dit type fouten ook veelvuldig voorkomt bij geoefende probleemoplossers. 'Docenten maken net zoveel fouten als studenten - het enige verschil is dat de docenten hun fouten ontdekken!' (A. Pilot,mond. com.).

De andere helft van de fouten hangt samen met gebrek aan voorkennis. In blok 2 geldt dit vooral voor meetkunde en voor integreren; in blok 9 domineren de integratiefouten. Meetkundige formules van de middelbare school voor het volume van cilinders en bollen worden vaak niet beheerst - om maar niet te spreken van bolschillen. Enkele voorbeelden:

- oppervlak van een bol: $2\pi r^2$
- volume van een cilinder: $2\pi rh$
- volume van een cilinderschil: $4\pi r^2.dr$

Ook worden er fouten gemaakt met de meest eenvoudige goniometrie, bijv. het door elkaar halen van sinus en cosinus. Het gebruik van goniometrische begrippen in de vektorrekening levert ook problemen op. Een student was niet in staat om de cosinus uit te rekenen van de hoek tussen een gegeven $\vec{E}$ en de normaalvektor van een plat vlak en kon daardoor ook niet het inproduct $\vec{E}.\vec{n}$ berekenen. Anderen maakten fouten bij deze berekening.

De integratiefouten zijn gedeeltelijk zuiver wiskundig, d.w.z. het niet kunnen uitrekenen van een integraal. Ze houden dan verband met onvoldoende kennis over integralen, zoals duidelijk bleek uit de lijst van integralen voor de berekening van lading in paragraaf 4.2. Een andere variant is het ten onrechte buiten het integraalteken halen van een niet constante factor: bij cilindersymmetrie met $\rho(r) = \frac{b}{r}$ werd bijv. de lading berekend uit

$$Q = \int_0^a \frac{b}{r}\, 2\pi rh.dr = \frac{b}{r}\, \pi[r^2h]_0^a$$

Een eveneens veelvuldig voorkomend type fout is het verkeerd invullen van de grenzen van de integraal, die uitgerekend moet worden. In sommige gevallen zal dit gewoon berusten op onvoldoende ervaring met integralen, d.w.z. op gebrek aan procedurele kennis, maar in andere gevallen speelt hier waarschijnlijk een onvoldoende analyse door. Men kan niet het verband leggen tussen de gegeven situatie en de wiskundige uitwerking waar men mee bezig is. Een regelmatig voorkomend voorbeeld is de volgende situatie: bolsymmetrie, $\rho = 0$ voor $0 \le r < a$, en $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}$ voor $a \le r \le b$. Bereken de lading die omsloten wordt door een bol met straal R waar $a < R < b$. Oplossing:

$$Q_{\text{omsloten}} = \int_0^R \rho\ (r)\ .4\pi r^2.dr = \rho_0 \int_0^R \frac{r}{a}\ 4\pi r^2.dr$$

Technisch gezien is deze fout dezelfde als een van de onder probleemtransformaties genoemde fouten, maar de achtergrond ligt waarschijnlijk eerder in de wiskundige kennis dan in de natuurkundige. Als men namelijk niet een model heeft van de integraal als een som van de bijdragen van een groot aantal kleine termen - in dit geval bolschillen - dan wordt de berekening van Q_{omsloten} een stuk zuivere integraalrekening. Uit gewoonte vult men dan de ondergrens nul in.

4.6. *De controlefase*

Net als de fase oplossingsroute wordt de controlefase in veel gevallen overgeslagen. Vaak accepteren studenten zonder meer de uitkomst van hun berekeningen, tenminste als het antwoord klopt met een van de aangeboden alternatieven. Aangezien deze in de SPS-cursus echte afleiders zijn, d.w.z. dat allerlei voorzienbare fouten ingebouwd zijn, leidt dit gedrag tot veel foute antwoorden, die met een eenvoudige controle ontdekt hadden kunnen worden.

Sommige studenten hebben wel behoefte aan een of andere vorm van controle, maar deze is in de meeste gevallen beperkt tot het herhalen van de uitwerking om rekenfouten op te sporen. Een enkele keer wordt er een conceptuele controle uitgevoerd, d.w.z. men gaat na welke principes gevolgd zijn en welke procedures gebruikt zijn en stelt de geldigheid en toepasbaarheid hiervan vast. Controle door toepassing van een nieuwe kernbetrekking is ook een uitzondering, net als dimensiecontrole, d.w.z. het nagaan dat de dimensie van het gevonden antwoord correct is. Deze laatste vorm van controle is snel en eenvoudig uit te voeren en geeft weliswaar geen garantie voor een goed antwoord, maar wel een duidelijke aanwijzing als de dimensie fout is. Voorbeeld: een student heeft bij het berekenen van de lading per m op een cilinder $\int\rho(r).dr$ i.p.v. $\int\rho(r).dV$ ingevuld. Hij constanteert dat de dimensie van het antwoord niet klopt en gaat terug om de hele oplossing te controleren. Jammer genoeg vindt hij de fout niet en eindigt in verwarring.

De doelanalyse, die in de analysefase in het algemeen niet werd uitgevoerd, komt wel eens in deze fase tot zijn recht, als men wil nagaan of bijv. teken of richting klopt.

De enkele fouten, die in deze fase voorkomen, hebben of betrekking op onzorgvuldigheid (tekenfout niet gezien) of op het gebruiken van een niet geldige kernbetrekking voor de controle ($Q = 0$ op een geaarde geleider).

Helemaal eerlijk is het hier geschetste beeld niet, want sommige studenten hebben de gewoonte om nadat alle opgaven doorgewerkt zijn nog alles door te kijken en te controleren. Deze 'nacontroles' zijn niet opgenomen in de protocollen.

4.7. *Een voorbeeld van wegen en dwaalwegen*

Gesommerd over de experimentele en de controle groep was er weliswaar geen verschil te zien tussen de oplossingen van de beide groepen en tussen de toetsen voor en na de extra instructie, maar er zijn wel duidelijke verschillen tussen individuele oplossingen van hetzelfde probleem. Ter illustratie zijn in overzicht 3 de overgangstabellen weergegeven van drie verschillende oplossingen van hetzelfde probleem uit blok 9, twee uit de experimentele groep en een uit de controlegroep.

Student H voert een in termen van de onderwezen strategie exemplarische oplossing uit, inclusief controle van het antwoord. De oplossing van student I lijkt er in eerste instantie veel op, maar leidt tot een foutief antwoord. Hiervoor zijn twee oorzaken te vinden: de analyse wordt helemaal overgeslagen en er wordt direct naar een formule gegrepen die niet zonder meer toe te passen is in de gegeven situatie. De uitwerking gaat daarom fout, en er wordt geen controle uitgevoerd. Met een enigszins volledige analyse en een bewuste controle van de geldigheid van de kernbetrekking die gebruikt werd, had de oplosser deze dwaalweg kunnen vermijden.

De oplossing van student J tenslotte is een typisch voorbeeld van het heen en weer springen in de overgangstabel, dat zovele oplossingen karakteriseert. In het begin wordt er geen aandacht besteed aan het analyseren van het probleem, en later keert de oplosser niet minder dan 5 keer terug naar verschillende aspecten hiervan. De oorzaak is gebrek aan voorkennis: de student heeft veel moeite met het uitrekenen van de snelheid van het uiteinde van de slinger, waarvan de positie als functie van de tijd gegeven is. Hij realiseert zich ondanks alle analysepogingen niet dat de snelheid van andere punten van de slinger lager is dan de zo gevonden snelheid. Hierdoor leidt de uitwerking tot het verkeerde antwoord, ondanks het feit dat de oplosser een redelijk begrip voor de natuurkunde vertoont.

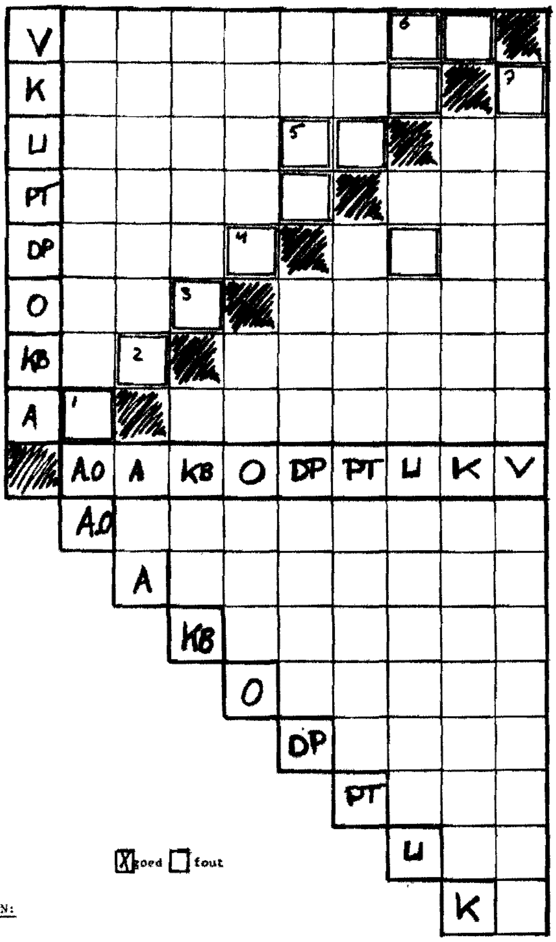
4.8. *Hoe men via een dwaalweg toch tot een goede oplossing kan komen*

Dwaalwegen zijn niet altijd fataal. De goede oplossingen in het onderzoek bevatten natuurlijk aanzienlijk minder fouten dan de niet succesvolle, maar helemaal foutloos zijn ze niet allemaal. Welke typen fouten zijn het dan, die studenten zelf ontdekken en corrigeren? Dit is te zien in tabel 3, waar een overzicht gegeven wordt van de verdeling van fouten over de verschillende fasen van de oplossing, zoals deze te zien is in goede en foute oplossingen. De getallen geven de percentages aan

OVERZICHT 3. Verschillende oplossingen van hetzelfde probleem.

Exp. groep.

Student nr. H .... Blok nr. 9.... Opgave nr. 948.....Blad nr. 3...

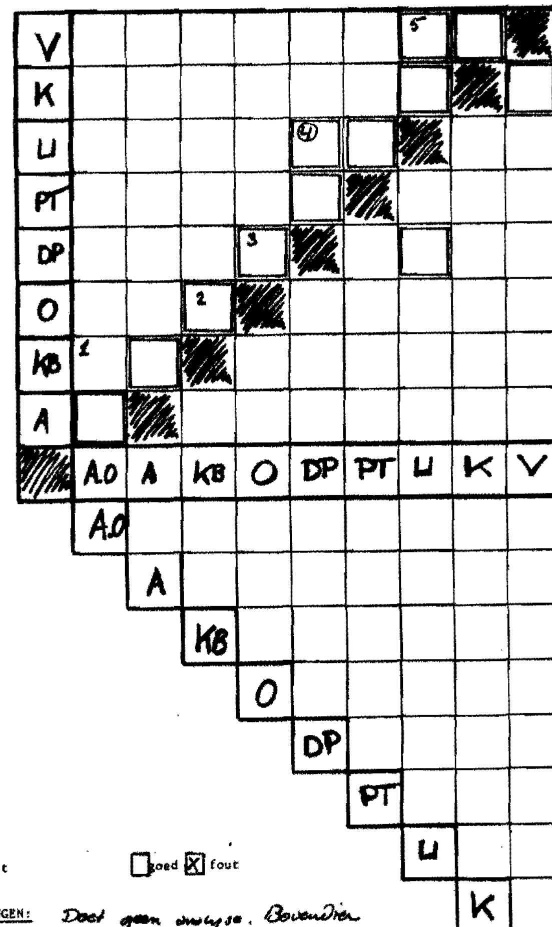


Resultaat ☒ goed ☐ fout

OPMERKINGEN:

Exp. groep.

Student nr. I .... Blok nr. 9.... Opgave nr. 948.....Blad nr. 3....

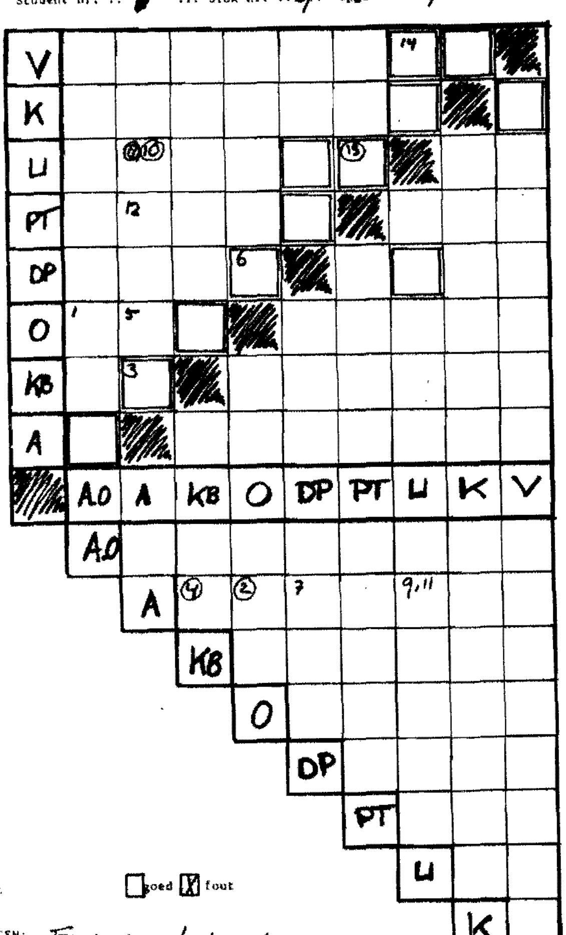


Resultaat ☐ goed ☒ fout

OPMERKINGEN: Doet geen analyse. Bovendien niet geldige KB.

Contr. groep.

Student nr. J ... Blok nr. 9. Opgave nr. 948....Blad nr. 3...



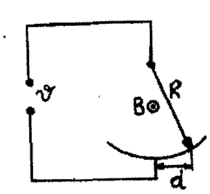
Resultaat ☐ goed ☒ fout

OPMERKINGEN: Fout door foute analyse

④ betekent dat de op overgang 4 volgende denkstap foutief is.

948

Een staafslinger met lengte R beweegt in een vertikaal vlak (zie figuur). De punt van de staafslinger beweegt horizontaal volgens de vergelijking $x = d\cos(\omega t)$ ($d \ll R$, daardoor is de vertikale beweging van de punt te verwaarlozen). Loodrecht op het vlak van de staafslinger staat een homogeen magneetveld B. De grootte van de in de slinger opgewekte e.m.k. van induktie bedraagt:



1) $\frac{1}{2}BRd\sin(\omega t)$;

2) $\frac{1}{2}BRd\cos(\omega t)$;

3) $BRd\sin(\omega t)$;

4) $BRd\cos(\omega t)$;

5) $\frac{1}{2}\omega BRd\sin(\omega t)$;

6) $\frac{1}{2}\omega BRd\cos(\omega t)$;

7) $\omega BRd\sin(\omega t)$;

8) $\omega BRd\cos(\omega t)$;

9) geen van de genoemde alternatieven is juist.

van alle denkstappen in de aangegeven fase, die incorrect uitgevoerd zijn; tussen haakjes staat het aantal foute stappen in de protocollen aangegeven.

Tabel 3: De verdeling van fouten over goede en foute oplossingen

Fase	Goede opl. (N=47) bl.2 (N=23)	 bl.9 (N=24)	Foute opl. (N=80) bl.2 (N=40)	 bl.9 (N=40)
A	5% (1)	2% (1)	7% (5)	20% (16)
Kb	6% (2)	6% (3)	17% (13)	21% (17)
O	- -	- -	5% (1)	13% (3)
PT	6% (1)	- -	29% (10)	24% (5)
U	7% (3)	5% (3)	26% (23)	25% (21)
K	- -	- -	- -	7% (1)

Opvallend is dat fouten in probleemtransformaties, op een uitzondering na, niet voorkomen in de goede oplossingen, terwijl ze een belangrijke oorzaak zijn van het mislukken van een oplossing, zoals uit tabel 3 blijkt: meer dan een kwart van de PT's, die in foute oplossingen uitgevoerd worden, zijn incorrect. Deze constatering bevestigt de uitspraak aan het einde van paragraaf 4.4. over de mogelijke oorzaken van fouten in probleemtransformaties. Wie de fysische betekenis van de formules goed kent, heeft ook een goede kans om een opgave correct op te lossen. Fouten in PT's worden niet zo gauw 'per ongeluk' gemaakt als bijv. rekenfouten, die wel in de goede oplossingen voorkomen. In de tabel vormen ze samen met de ongeldige kernbetrekkingen de hoofdmoot van alle fouten die in goede oplossingen voorkomen. Gezien de kleine aantallen waar het hier om gaat, zijn algemene conclusies echter niet te trekken.

Dat een aantal studenten zelf hun fouten herstellen en zo tot een goed antwoord komen, heeft gedeeltelijk te maken met het grotere aantal expliciete controles in de goede oplossingen; in 62% van de opgaven wordt daar een controle uitgevoerd tegenover 43% van de foute oplossingen.

Maar fouten worden ook ontdekt op andere manieren: men loopt vast in de berekening of ontdekt bij de toepassing van een formule, dat er iets niet klopt. In een geval besloot de student na de eerste analysestappen om een betere tekening te maken en ontdekte toen dat hij een fout gemaakt had bij het kiezen van een Gauss-oppervlak. (Dit is de ene, foute PT in de goede oplossingen.)

Bij de meerkeuzevragen gebeurt het ook dat men bij de vergelijking met de gegeven antwoordalternatieven ontdekt dat er iets vergeten is, bijv. een factor N (= aantal windingen) of dat de dimensie niet goed kan zijn. Nu zijn in de afleiders een aantal voorspelbare fouten verwerkt, inclusief dimensiefouten, en het zijn vooral triviale fouten, zoals schrijf- en rekenfouten, die op deze manier ontdekt en gecorrigeerd worden.

Deze resultaten, die waarschijnlijk door iedere ervaren natuurkundedocent voorspeld hadden kunnen worden, brengt de vraag weer terug naar het uitgangspunt: wat houdt 'begrip van de fysische betekenis van een formule' precies in? Daar zullen we in het volgend hoofdstuk op ingaan en in het licht van de fouteninventarisatie proberen om tot enkele concrete uitspraken te komen.

5. CONCLUSIES

5.1. *Wegen en dwaalwegen*

Als men probeert om een overzichtelijk beeld op te bouwen van de wegen en dwaalwegen, die in dit onderzoek gevonden werden, dan vallen een aantal punten op. Hieronder worden een aantal van deze punten beschreven, waarbij omwille van de duidelijkheid voor een vrij ongenuanceerde vorm gekozen is. Voor meer gedetailleerde beschrijvingen verwijzen we terug naar de hoofdstukken 3 (paragraaf 4) en 4.

1. De student kiest snel een weg naar de oplossing en meent de kortste weg te vinden door zo spoedig mogelijk een formule te kiezen en te gaan rekenen.
2. Als het rekenen een antwoord oplevert, is de student geneigd om dit als het goede antwoord te accepteren zonder verdere evaluatie of controle.
3. In ongecompliceerde problemen is het niet altijd nodig om de te volgen weg van tevoren expliciet te plannen. Vaak herkent de oplosser dan het probleemtype en heeft hij een standaardprocedure voor de oplossing bij de hand. De complexiteit van het probleem wordt vaak echter niet

direct herkend door de student, waardoor hij/zij de noodzaak van plannen maken pas inziet als hij eerst vastgelopen is met de 'invullen - rekenen' methode.

4. Verdwalen doet de student in alle fasen van het oplossen van een probleem, maar vooral in het begin, in de analysefase. Om de goede weg te vinden moet hij/zij daar conclusies trekken en probleemkenmerken vaststellen. Maar al te vaak slaat hij/zij voordat dit proces afgerond is een dwaalweg in, om in het beste geval terug te keren om opnieuw te analyseren. In veel gevallen echter verdwaalt men definitief en eindigt met een fout antwoord of in totale verwarring.
5. Een van de drukst bewandelde dwaalwegen bij het oplossen van natuurkundige problemen is die van niet geldige kernbetrekkingen: een formule wordt opgeschreven, de gegevens ingevuld, en een antwoord uitgerekend, terwijl de vraag naar de geldigheid van de formule helemaal niet gesteld wordt.
6. Als een probleemtransformatie nodig is, treden nieuwe mogelijkheden voor dwaalwegen op. Als men de exacte betekenis van de te gebruiken formule niet goed kent, is de kans om de goede weg te vinden klein.
7. In de uitwerkingsfase zijn de mogelijkheden om te verdwalen legio. Soms worden vergissingen snel ontdekt en keert men terug naar de goede weg, maar in andere situaties is de student niet in staat om aan te voelen dat hij/zij verkeerd zit.
8. De controlefase, waarin de student zich ervan zou moeten overtuigen dat hij de goede weg gevolgd heeft, wordt vaak overgeslagen en zelden doelmatig uitgevoerd.

5.2. *Het kennisrepertoire*

Uithet in het vorig hoofdstuk gegeven overzicht van fouten en onvolkomenheden in de oplossingen van de studenten, samengevat in de hierboven beschreven dwaalwegen, volgen enkele indicaties over het kennisrepertoire van studenten, die er niet in slagen om goede oplossingen te produceren.

1. Declaratieve kennis van de vakinhoud in *reproduceerbare vorm* is in het algemeen wel aanwezig. Men schrijft zonder aarzelen een aantal kernbetrekkingen op, in de meeste gevallen in de correcte vorm.

2. Dezelfde declaratieve kennis is daarentegen in vele gevallen *niet toepasbaar*. Een oorzaak hiervan kan zijn dat wetten en formules in het geheugen *los* staan van de definities van grootheden en symbolen en van de geldigheidsvoorwaarden. Belangrijk is ook het *gebrek aan een model*, of fysische representatie van het verschijnsel dat een formule beschrijft. Een student kan bijv. de wet van Faraday, $\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$, in woorden en formulevorm beheersen, maar als hij niet een fysisch model heeft van flux en fluxverandering, dan zal hij in een concrete situatie misschien over het hoofd zien dat er een inductiestroom optreedt (bijv. in een stroomkring, die in een niet homogeen B-veld beweegt).
3. Naast de afwezigheid van verbanden en relaties in het geheugen spelen *foutieve verbanden* een belangrijke rol bij het mislukken van probleemoplossingen. Een opvallend voorbeeld hiervan is 'op een geaarde geleider is $Q = 0$'.
4. De procedurele kennis is vaak onvolledig. Dit blijkt zowel bij probleemtransformaties, waar voornamelijk procedures gebruikt worden, als in de analysefase, waar de voorwaarden voor verschillende procedures onderkend moeten worden (bijv. symmetrie-eigenschappen).
5. Selectiekennis wordt weinig geëxpliciteerd, als die aanwezig is. De afwezigheid valt op in het niet herkennen van belangrijke probleemkenmerken, waardoor soms verkeerde kernbetrekkingen worden geselecteerd. Ook het feit dat studenten zelden de geldigheidsvoorwaarden van een kernbetrekking expliciteren duidt erop dat hun selectiekennis - waar deze voorwaarden immers een belangrijke rol spelen - gebrekkig is.
6. Niet alleen gebrek aan organisatie binnen een component van kennis, zoals in punt 2 boven genoemd werd, maar ook *gebrek aan duidelijke verbanden tussen de verschillende vormen van kennis* lijkt een rol te spelen, bijv. in probleemoplossingen, waar de student totaal geen begrip heeft van de gegeven situatie.
7. De strategie die in het algemeen gebruikt wordt, is die van 'kick and rush': formule pakken - rekenen - klaar! Pas als men hiermee vastgelopen is bestaat de bereidheid om een analyse uit te voeren en om plannen te maken voor de oplossing.

5.3. *Verder onderzoek*

De resultaten van het onderzoek naar strategiegebruik en de foutenanalyse tonen aan, dat het belang van een strategie relatief is: als de andere componenten uit het kennisrepertoire niet aanwezig zijn, dan is de oplosser niet in staat om de denkstappen van de strategie uit te voeren.

Daarom zal de aandacht in het verdere onderzoek gericht worden op deze drie componenten. In tegenstelling tot de strategie, die algemeen is, zijn declaratieve, procedurele en selectiekennis meer aan het vakgebied gebonden. De eerste vraag, die nu van belang lijkt, is die naar de inhoud en de vorm van de kennis:

- zijn er hiaten in de declaratieve en de procedurele kennis?
- is selectiekennis aanwezig?
- zijn er verbanden tussen feiten, formules en procedures?
- heeft de student een fysisch model van actuele begrippen en verschijnselen?
- is het mogelijk om verbanden te leggen tussen vorm en inhoud van het kennisrepertoire aan de ene kant en de resultaten bij probleemoplossen aan de andere kant?

Als het mogelijk is om verschillen in kennis tussen studenten in kaart te brengen, dan volgt de tweede vraag: hoe ontstaan deze verschillen in kennis?

- hoe bouwt men een stuk kennis van een nieuw vakgebied op?
- zijn er verschillen in de manier van omgaan met schriftelijk studiemateriaal?
- in het gebruiken van oefenopgaven?
- probeert men om binnen de nieuwe leerstof verbanden te leggen?
- welke rol speelt de voorkennis?
- worden procedures bewust bestudeerd?
- probeert men bewust selectiekennis op te bouwen?

Het uiteindelijke doel van dit onderzoek is om aanknopingspunten te vinden om het onderwijs zo in te richten dat studenten leren om hun kennisrepertoire op een optimale manier op te bouwen.

5.4. *Het onderwijs*

Alhoewel het hier beschreven onderzoek maar een eerste stap vormt van een project, dat bedoeld is om meer informatie te verzamelen over inhoud en opbouw van de kennis van de natuurkunde en over het leren van eerstejaarsstudenten, zijn er wel enkele aanwijzingen uit te halen, die van belang zouden kunnen zijn voor het onderwijs.

1. Een strategie is geen recept, dat een goede oplossing garandeert, maar kan wel een belangrijke rol spelen in het onderwijs. Een strategie maakt de verschillende fasen van de oplossing bespreekbaar en vergemakkelijkt daardoor de communicatie tussen docent en student en tussen studenten onderling. De beschrijving van de strategie maakt ook duidelijk wat er in ieder van de fasen gebeurt. Hiervoor kan het meetschema in bijlage 1 als leidraad dienen.
2. Door in het onderwijs consequent gebruik te maken van een strategie en de fasen daarvan ook *expliciet* uit te voeren, kunnen docenten het *zoeken naar oplossingen* onderwijzen en niet alleen probleemoplossingen aanbieden. Dit gebeurt niet vanzelf, aangezien docenten meestal niet hoeven te zoeken naar de oplossingen van de oefenproblemen maar deze routinematig oplossen. In de gevallen waar ze wel moeten zoeken, zullen ze dit vaak zorgvuldig voor de studenten verbergen.
3. Het aanbrengen van een *structuur* in de groeiende hoeveelheid kennis die de studenten verzamelen, is een belangrijke vaardigheid, die in het onderwijs gestimuleerd en geoefend zou kunnen worden. Mogelijke middelen hiervoor zijn:
   - het expliciet leggen van verbanden tussen feiten, formules en procedures,
   - gebruik maken van het begrip kernbetrekking,
   - expliciet een of meerdere 'chunks' opbouwen, ieder om een kernbetrekking heen.

   Op deze manier kan duidelijk gemaakt worden, hoe de verschillende aspecten van kennis, die voor het oplossen van een bepaald type problemen nodig is, onderling met elkaar samenhangen.
4. Expliciet gebruik van een fysische representatie, bijv. een visueel model van het begrip 'veld' is belangrijk in het onderwijs. Oefening in het maken van goede figuren, die deze representatie kunnen overbrengen, is hier een onderdeel van, speciaal voor die studenten, die anders een zuiver algebraïsche representatie van natuurkundige begrippen opbouwen, en daardoor niet in staat zijn om bijv. een goede probleemanalyse uit te voeren.
5. Voor sommige studenten lijkt het systematisch oefenen van *ruimtelijk inzicht* noodzakelijk te zijn om een fysische representatie te kunnen opbouwen.

LITERATUUR

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. — Categorization and Representation of Physics Problems by Experts and Novices. Cognitive Science 1981, 5, 121-152.

Chi, M.T.H., Glaser, R. & Rees, E. — Expertise in Problem Solving. In R.J. Sternberg (ed.) Advances in the Psychology of Human Intelligence, Vol. I, Hillsdale New Jersey: Laurence Erlbaum Ass., 1982.

de Jong, T. en Ferguson-Hessler, M.G.M. — Voorwaarden voor het succesvol oplossen van problemen, 1982. Rapport nr. 30, afd. WenM, THE.

de Jong, T. en Ferguson-Hessler, M.G.M. — Strategiegebruik bij het oplossen van natuurkundige problemen, een onderzoek, 1983. Rapport nr. 31, afd. WenM, THE.

Larkin, J.H. — Human Problem Solving in Physics I: Global features of an information processing model, working paper 3, Group in Science and Mathematics Education, University of Berkeley, California, 1976.

Larkin, J.H. — Processing Information for Effective Problem Solving. Engineering Education 1979, 70 (3), 285-288.

Larkin, J.H., McDermott, J., Simon, D.P. & Simon, H.A. — Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems. Science 1980, 208, 1335-1342.

Larkin, J.H. — Cognition of Learning Physics. American Journal of Physics 1981, 49 (6), 534-541.

Mettes, C.T.C.W. & Pilot, A. — Over het leren oplossen van natuurwetenschappelijke problemen. (diss.) 1980a. Onderwijskundig Centrum CDO/THT.

Mettes, C.T.C.W. & Pilot, A. — Onderwijs in het oplossen van vraagstukken. 1980b. Onderwijskundig Centrum CDO/THT.

Reif, F., Larkin J.H. & Brackett, G.C. — Teaching general learning and problem-solving skills. American Journal of Physics 1976 44 (3), 212-217.

BIJLAGE 1. HET MEETSCHEMA

Beschrijving van de cognitieve eenheden van het meetschema

A. *Analyse*

A.0. Lezen van de tekst; bekijken van eventuele figuren.

A.1. *Situatieanalyse*

A.1.1. Maken van een schets of tekening; invoeren van een coördinatenstelsel.

A.1.2. Aangeven van relevante gegeven grootheden in de figuur of op andere manier. Het gaat hier om ladingen, stromen, velden, aardverbindingen, etc.
Voorbeeld: - de stroom neemt af .....

A.3.1. Het vaststellen van relevante kenmerken van de situatie, die niet expliciet gegeven zijn. Hieronder valt o.a. het vaststellen van symmetrie-eigenschappen, het maken van gevolgtrekkingen uit de gegevens, het aangeven van een typering van de situatie.
Voorbeelden:
- dat betekent dat hier een spanning over staat.
- die spoel, dan stuurt hij door zichzelf gewoon Li, en door de andere stuurt hij pLi.
- als je zo'n stroom hebt, dan gaat het B-veld in de $\vec{e}_\varphi$ - richting staan.
- dan is hier (in een geleidende) plaat $E = 0$.
- er is een constante snelheid; F_L in het vlak is dan gelijk aan F_z in het vlak.
- het veld staat in de $\vec{e}_z$-richting, dus over EF en DG staat géén inductiespanning.
- q is positief, dus het veld loopt van binnen naar buiten.
- buiten de beide platen is de veldsterkte nul vanwege de negatieve lading die op de geaarde plaat geïnduceerd wordt.
- I_2 = constant, dus die wekt géén inductiespanning op in spoel 1.
- er ontstaat dan een geïnduceerde emk., ... en dan gaat er hier een stroompje lopen; je krijgt dus een inductiestroom.

A.1.4. Verder analyse na gedeeltelijke oplossing of oplossingspoging.
Deze denkstap wordt uitgevoerd omdat gedurende de uitwerking van het probleem behoefte ontstaat om de gegeven situatie nader te analyseren, bijvoorbeeld om na te gaan of een gegeven grootheid aan bepaalde voorwaarden voldoet. Wanneer aangenomen kan worden dat deze behoefte in de eerste analysefase voorzien had kunnen worden, moet deze denkstap niet als A.1.4. maar als A.1.2. of A.1.3. gescored worden.

Voorbeelden:
- is de flux overal constant? Bepaald niet, dat is de magnetische inductie, en die is niet overal constant.
- even kijken naar de richting van de spoel.
- het oppervlak staat loodrecht op $\vec{E}$, dus het inproduct is gewoon EA.

A.2. *Doelanalyse*

A.2.1. Het gevraagde aangeven in figuur en/of vaststellen van de kenmerken (in E&M termen) van het gevraagde.

Voorbeelden:
- er wordt dus gevraagd naar de spanning tussen D en E.
- de coëfficiënt van wederkerige inductie moest ik hebben.
- de energie, die zit hem in de stroom hier en in een of andere magnetisatie in de buis.

A.2.2. Het formuleren van schattingen en/of verwachtingen t.a.v. het gevraagde, zoals het vergelijken hiervan met gegeven grootheden, of het aangeven van teken of richting.

Voorbeelden:
- $\vec{H}$ moet een y-component hebben, $\vec{B}$ dus ook in het ferriet.
- de oppervlaktelading is negatief, en numeriek is die groter dan σ_1. (Uit de voorbeeldoplossing).
- op grond van deze symmetrie zullen de σ's van de twee vlakken (het gevraagde) gelijk zijn.
- buiten de platen is het veld nul.
- de veldlijnen lopen naar buiten; die moeten opgevangen worden, dus er moet een negatieve lading zijn.

A.2.3. Het (voorlopig) elimineren van niet acceptabele alternatieven. Deze eliminatie is gebaseerd op een vergelijking van de gegeven antwoordalternatieven met elkaar en met de gegevens of met resultaten uit de analysefase.

Voorbeelden:
- binnen een geleidende bol is het veld nul, dus antwoord 2 valt af.
- de flux is in ieder geval niet gelijk aan nul, want die staat overal naar buiten.
- binnen in een geleider is het veld nul, dus alleen alternatieven 1 en 2 komen in aanmerking.
- buiten de platen is het veld nul, dus ik heb nu de vier antwoorden gereduceerd tot alternatief 3 en alternatief 4.
- buiten r = 3a is Q_{omsl} = const.., dus Ψ = const.; dat sluit antwoord 3 en 6 uit.

A.2.4. Zoeken in de antwoorden naar een richtlijn voor de oplossing, terwijl een resultaat of schatting nog ontbreekt.

Voorbeelden:
- even kijken naar de antwoorden .....een integraal zal er wel inzitten ..... ja dat kan natuurlijk.
- ze hebben allen $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ t.g.v. de binnenste bol plus iets t.g.v. de ruimtelading.

Kb *Kernbetrekkingen*

Kb.1. Opstellen van (te gebruiken) kernbetrekkingen. De oplosser introduceert in zijn oplosproces een kernbetrekking. Dit kan ook impliciet gebeuren. Wanneer de introductie expliciet plaats vindt, kan de kernbetrekking in woorden of in de vorm van een formule gepresenteerd worden.

Zeer eenvoudige bijvoorbeeld wiskundige formules zoals het oppervlak van een bol, worden niet tot de Kb's gerekend.

Voorbeelden:
- dat kun je berekenen met de wet van Gauss.
- de loodrechte component van het B-veld is continu.

Kb.2. Vaststellen van de geldigheid van (voorlopig) gekozen kernbetrekkingen in de gegeven situatie. Vaak zal Kb.2. opgenomen zijn in Kb.1., daar men een kernbetrekking kiest op grond van de situatie. Kb.2. is gereserveerd voor het expliciet nagaan of de juiste condities aanwezig zijn.

Voorbeeld:
- er is geen vrije lading op dat oppervlak, dus D_n is continu.
- a >> b, dat wil dus zeggen dat ik het veld van een lange draad mag gebruiken.
- maar je hebt geen oneindige draden ....
- maar B is niet constant, dus die wet is niet van toepassing (over Φ = BA).

O. *Oplossingsroute*

O.1. Maken van algemene plannen, aangeven van mogelijke oplossingsmethoden, zoeken naar deelproblemen, bekijken van een speciaal geval. Hierbij kan gebruik gemaakt worden van de in Kb.1. geselecteerde kernbetrekkingen.

Voorbeelden:
- dat kun je berekenen met een spiegelbeeldlading.
- ik zal het veld in twee symmetrische punten bekijken.
- ik stel dat die op cirkeltje I ligt dan heb ik .....
- als ik de totale lading in één punt mag denken, dan hoef ik alleen $Q_{omsloten}$ te berekenen - maar ρ is niet homogeen - dus ik zal moeten oppassen.
- ik kan veronderstellen, dat er een stroom loopt met als gevolg een flux - maar laat dat maar niet doen.

O.2. Vaststellen van deelproblemen en oplossingsroute, d.w.z. de volgorde, waarin de deelproblemen zullen worden opgelost om tot het eindresultaat te komen.

Voorbeelden:
- er werkt een Lorenzkracht, en die is $\vec{F}_L = l(\vec{I} \times \vec{B})$, en I is de inductiestroom; die is ε_{ind}/R, en ε_{ind} dàt was die vBsinα.l- kijken of ik er zo uit kom.
- als je met Laplace het veld van die winding uitrekent in P, dan weet je $M = \Phi_{tot}/I_2$.

DP Kiezen van een (deel-)probleem, dat direct wordt aangepakt. Dit hoeft niet expliciet te gebeuren. Als in O.2. al de oplossingsroute is vastgesteld, zal deze denkstap vaak impliciet gebeuren.

Voorbeelden: - nu kunnen we het B-veld in koper bepalen.
- nu moet ik ze gaan vergelijken buiten.
- $\vec{H}$-ontmagnetiseerd, eens kijken.
- dan kan ik nu uitrekenen de veldsterkte.

PT *Probleemtransformaties*

Het begrip probleemtransformatie is een samenvatting van alle denkstappen tussen aan de ene kant het afbakenen van het (deel-)probleem en het kiezen van de toe te passen kernbetrekking(en), en aan de andere kant het uitvoeren van standaardbewerkingen. Het opsplitsen van het oorspronkelijke probleem in deelproblemen valt onder O en is dus géén probleemtransformatie.

Een probleemtransformatie kan verschillende vormen hebben:

PT.1. Het specificeren van een algemene kernbetrekking naar het probleem. Bijvoorbeeld het kiezen van een kring resp. oppervlak bij het toepassen van een integraalstelling. Ook het vervangen van algemene grootheden uit de Kb door grootheden, die van toepassing zijn op het probleem valt hieronder voor zover deze vervanging niet een zuivere invulling is.

Voorbeelden: - .... pakken we een kring, waarbij de oppervlaktestroom gepakt zal worden.
- kringintegraal $B_s ds$; dan ga ik dus kijken met een cirkel met straal r, die ook weer concentrisch is. Daarop is B constant.
- .... dan kies ik een gaussoppervlak met straal r hier ergens tussen.
- Q_{omsl} is dan de lading op de bol plus de ruimtelading.

PT.2. Het interpreteren van de situatie in termen van de gekozen kernbetrekking.

Voorbeelden: - zeg dat de stroom die kant op loopt, dan heffen die stukjes elkaar op, en die kleine stukjes zijn te verwaarlozen.
(Kb: $M = \Phi_2/I_1$).

PT.3. Het vervangen van het oorspronkelijke probleem of een deelprobleem door een ander, fysisch gelijkwaardig, probleem of problemen.

Voorbeeld:
- dat stel platen, dat gedeeltelijk in water is gedompeld, kun je beschouwen als twee parallel geschakelde condensatoren.
- ik plaats de hele lading, Q_{bol} en Q_{ruimte}, in het middelpunt, dan hoef ik alleen maar $Q_{omsl.}$ uit te rekenen.
- de flux door dit vlak is tegengesteld aan de som van de fluxen door deze twee vlakken (samen vormen ze in een 2-dim.probleem een gesloten oppervlak), want er is geen lading aanwezig, want $\vec{E}$ hangt niet van x en y af.
- als we de ene helft (van een draadraam) omklappen, dan zou je zoiets krijgen (schets). Dan zouden ze (de fluxen) van elkaar kunnen aftrekken en dat is dan nul.

PT.4. Het (technisch) opdelen van een (deel-)probleem in subproblemen, waarop een standaardbewerking direct kan worden toegepast. De uitwerking van de subproblemen is voor elk subprobleem in principe gelijk, en de samenvoeging van de deelresultaten is een eenvoudige rekenkundige bewerking. Deze opsplitsing onderscheidt zich duidelijk van de onder O.2. ingevoerde denkstap "formuleren van een fysisch deelprobleem".

Voorbeelden:
- ik moet de energiedichtheid integreren van 0 naar 13,5; dan ga ik weer splitsen in een integraal van 0 tot 5 met $\mu_r = 1$ plus een integraal van 5 tot 13,5 met $\mu_r \neq 1$.
- ik moet de flux hebben door de kubus. Dan bekijk ik de zijvlakken één voor één.

U *Uitwerking*

U.1. Het uitvoeren van standaardbewerkingen, zoals algebraïsch en arithmetisch rekenwerk, integreren, differentiëren, eenvoudig invullen van gegevens in de kernbetrekking, het maken van een tekening t.b.v. de uitwerking van een formule (bijvoorbeeld om hoeken te bekijken).

Voorbeelden:
- dus ik integreer vanaf r. Dat is .....
- H loodrecht is gelijk aan B gedeeld door μ_0. Dat is dus 1000 A/m.

U.2. Vaststellen van het resultaat van U.1. en integratie in de totale oplossingsroute. Hieronder valt ook een eerste evaluatie van het resultaat van U.1.

Voorbeelden:
- dat is dan .... (formule). Ja, dat is goed, dat is de ene, de andere ....
- dan zou dit het antwoord moeten zijn. Het ziet er zo simpel uit.
  Ik vertrouw dit niet helemaal.
- ik zie dat ik weer uitkom op ..... (formule).
- ik zie toch niets anders, dus rekenen we maar uit $\frac{1}{32}$.
- zo kom ik er niet. Ik moet iets anders proberen.
- dat kan nooit; r komt er niet in voor, en ik moet E(r) hebben.

U.3. Het (voorlopige) elimineren van antwoordalternatieven op grond van tussenresultaten.

Voorbeelden:
- in dat gebied neemt de flux dus kwadratisch toe, dan vallen een aantal alternatieven af.
- het is de vraag of je (die spanningen) moet optellen of aftrekken. Maar je kunt zowiezo nooit een factor 1/2 of 3/2 in het antwoord krijgen.
- $B = \mu_0 I/L$, en $\Phi = BA$, en $A = 2\pi r$ dus er zal een 2π in het antwoord moeten of $\frac{1}{2}\pi$, π in ieder geval.

V. *Vergelijken van het resultaat met gegeven antwoordalternatieven*

V. Hier wordt het eindresultaat vergeleken met de aangeboden antwoordalternatieven.

Voorbeelden:
- nou, het staat erbij. Dus antwoord 4.
- en die staat nergens bij de antwoorden; dan heb ik een fout gemaakt.
- ja maar dan geven ze je een logaritme, dus waarschijnlijk moet je terugwerken naar een logaritme.
- maar die E ben ik kwijt.
- het staat er niet bij, maar dat zat er dik in, want ik heb die weerstand niet meegerekend.
- het staat er wel bij - maar of het goed is?

K. *Controle*

K.S. Vergelijken van het gevonden antwoord met de onder A.2.2. gemaakte schattingen van het antwoord , of met daar geformuleerde verwachtingen t.a.v. het antwoord.

Voorbeelden:
- dat betekent dus, dat op het moment dat die schakelaar gesloten wordt, dan loopt er een stroom van 1 A, en op den duur loopt die spoel leeg, en dan loopt er inderdaad geen stroom meer. Dat klopt uitstekend.
- maar er is een vraagteken bij: dat kan niet negatief zijn.
- eens kijken, is dat een beetje logisch? ...... dus hij heeft wel een negatieve y-component.
- (na V) r_1 kan niet wegvallen, want Q_{ruimte} hangt van r_1 af.
  Ik heb een fout gemaakt bij de berekening van Q_{ruimte}.

K.D. Controle op de dimensie van het antwoord.

K.O. Controle op de gevolgde oplossingsroute.
Dit is een conceptuele controle achteraf op de logica van de oplossingsroute, de juiste toepassing en eventueel de geldigheid van de kernbetrekkingen.

Voorbeelden:
- ik wil controleren of het klopt dat je de ruimtelading in het middenpunt mag plaatsen.
- even kijken waar ik een redeneerfout gemaakt kan hebben om die beide antwoorden eruit te krijgen. Dat is in de keuze van de gaussdoosjes, maar ik denk dat dat goed is.
- B is afhankelijk van x; dus dat (de integratie) zal wel kloppen; dan is I = 0.

K.U. Controle op de onder U.1. uitgevoerde bewerkingen door meer of minder directe herhaling van dezelfde bewerkingen.

K.M. Controle van het antwoord en/of de methode door toepassing van een nieuwe kernbetrekking.

Voorbeelden:
- hier buiten is E = 0; dan kies ik een boloppervlak, en de totale lading die hij omsluit moet nul zijn ...... Dat klopt.

- het veld buiten (bedoeld: de ladingen buiten) heeft geen invloed op het veld hierbinnen, terwijl de lading binnen wel het veld beïnvloedt.
- ik zit nu op antwoord 4. Kijk maar naar de situatie met die andere plaat. Ik pak weer een gaussdoosje ....$E_2 = 2E_1$ .. dus weer antwoord 4.
- $I = 0$, was dat te verwachten? Voor een gesloten kring kun je ook de fluxverandering berekenen (om I_{ind} te vinden) en daar komt mooi nul uit. Dus $I = 0$.

K.K. Controle op consistentie van het antwoord.

Voorbeelden:
- $I(t = \ln 2) = 4A$. Is dat mogelijk? Ja, het is wel redelijk, want bij $t = 0$ is $I = 0$ en voor $t = \infty$ is $I = 8A$ hebben we gezien. I moet groeien, dus dat ziet er goed uit.
- dus $M = L$, klopt dat? Ja, want ze zijn maximaal gekoppeld, dus hij veroorzaakt even veel flux door de andere als door zichzelf.

G. *Gissen*

Het op grond van niet fysische argumenten elimineren van niet acceptabele antwoorden, en het gokken op een van de overgebleven antwoorden. In tegenstelling tot A.2.3. en U.3. is dit een denkstap, die op onmacht berust, en gebruikt wordt bij gebrek aan beter.

Men neemt vaak zijn toevlucht tot gissen, als de vergelijking in vorige denkstap een negatief resultaat oplevert.

Voorbeelden:
- bij de positieve antwoorden komt er een N^2 voor en een ε_0, en dat is allemaal fout. Dus moet het negatief zijn.
- ... we iets moeten zoeken met ... (formule). Ja, dat zie ik staan. Ik kan het niet helemaal verklaren, maar volgens mij is dat het antwoord.
- gokkie ...
- ik zal moeten gokken. Ik zat aardig in de goede richting, alleen die factor 1/x... nu, het zal dan wel 2 zijn.

BIJLAGE 2. EEN GEANALYSEERD PROTOCOL

Student nr ...12..... Blok nr ....2.... Opgave nr ..293... Versie...1. Blad nr ..5..

POS. cassette	COGN.EENH.	NAT. FOUT	REKENFOUT	OPM.
90	A.O.			
	A.1.1.			
	A.1.2.			
	O.1			Als je dit vlak pakt.
	Kb.1	Foutief. $E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$		$E = \sigma / 2\varepsilon_0$
	A.1.1			Tekening van een vlak.
	A.1.1.			Nieuwe, betere tekening.
	Rb.1			Wet van Gauss impliciet.
	PT.1	Kiest onbereikbare doosje.		Kies Gaussdoosje ⊥ E.
	A.2.1.			lading op de platen
	PT.1			
	A.1.1.			Kiest nu bereikbare doosje.
	A.1.3.			Bekijkt de consequenties
	DP			voor de veldsterkte en flux
	U.1			x-vlak Berekent Q omsl
				dus door 2 zijden.
	U.2			$Q_{omsl.} = A \varepsilon_0 \sqrt{2} E$
	Kb.1			$Q = \sigma \cdot A$
	U.1			combineert beide.
	U.2			$\sigma = \sqrt{2}\, \varepsilon_0 E$ voor x-vlak
	V			Staat erbij
	O.3			voor y-vlak
	U.1			$Q_{omsl} =$
	U.2			$\sigma = \sqrt{2}\, \varepsilon_0 E$ voor y-vlak
	V			staat erbij
	$\boxed{\text{Einde}}$			Alternatief 5.
		Juist antwoord.		