

Analyse van dynamische problemen via diskretisatie van de Hamilton functionaal

Citation for published version (APA):

Kraker, de, A. (1976). *Analyse van dynamische problemen via diskretisatie van de Hamilton functionaal*. (DCT rapporten; Vol. 1976.005). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1976

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Analyse van dynamische problemen via
diskretisatie van de Hamilton functionaal.

A. de Kraker
WE 76-05

 1976.

Analyse van dynamische problemen via diskretisatie van de Hamilton-functionaal.

			pag
Inhoud:	Hoofdstuk I:	Principe van Hamilton.	1
	"	II: Diskretisatie methode	10
	"	III: Enige voorbeelden numeriek uitgewerkt.	14
	"	IV: Slot opmerkingen, voortzetting v/h onderzoek.	21
		Lit	24.

A de Kraker
Febr. 1976.

I.] Principe van Hamilton.

Bij analyse van dynamische problemen via de elementenmethode kan men globaal gesproken uitgaan van twee methoden, beide leidend tot een stelsel 2^e orde (in het algemeen gekoppelde) differentiaalvergelijkingen in de onderscheiden diskrete grootheden.

I.] Uitgaan van de stelling van Lagrange:

We benaderen hierbij het continue verplaatsingsveld door een stuksgewijs continu differentieerbare, door een aantal diskrete grootheden (bijv. verplaatsingen) beschreven functie en kunnen dan voor de kyn. energie U_k schrijven:

$$U_k = \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} \quad (1)$$

waarbij: M = massamatrix

u = vektor met de diskrete verplaatsingen.

Voor de elastische energie kunnen we op analoge wijze schrijven:

$$U_e = \frac{1}{2} u^T Q u \quad (2)$$

waarbij: Q = stijfheidsmatrix.

Via virtuele arbeid kunnen we voor de gegeneraliseerde krachtvektor vinden:

$$\int_V \hat{f} \cdot \delta \hat{u} \, dv \rightarrow \hat{F} \quad (\hat{f}, \hat{u} \text{ continue grootheden}) \quad (3)$$

Passen we nu Lagrange toe, volgens welke geldt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \dot{u}_{[i]}} \right) + \frac{\partial U_e}{\partial u_{[i]}} = f_{[i]} \quad (4)$$

dan vinden wij als stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$M \ddot{u} + Q u = \hat{F}. \quad (5)$$

Gegeven de begincondities voor het systeem kunnen wij nu het dynamisch gedrag van het systeem analyseren.

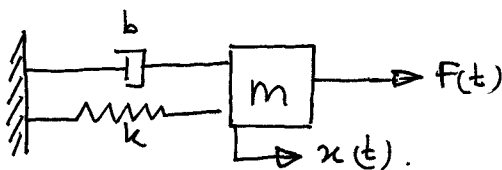
II De tweede methode bestaat uit het toevoegen van een extra term (traagheidskracht van d'Alembert) aan de formulering van de potentiële energie.

Ook nu weer kunnen we overgaan op een discrete formulering door het echte veld te benaderen door een stuksgewijs-differentieerbare, continue functie en deze in de functionaal te stoppen.

Het eisen van een stationaire (nu niet minimale) potentiële energie voor alle toelaatbare variaties van de gekozen discrete grootheden levert ons weer het stelsel (5).

We moeten hierbij wel in het oog houden dat de traagheidsterm niet meegevarieerd mag worden.

We zullen het probleem nu op een iets andere manier benaderen, leidende tot het principe van Hamilton, en gaan daarbij uit van een gedempt massa-veersysteem, belast door een excitatiekracht $F(t)$.



De differentiaalvergelijking welke dit probleem beschrijft kunnen we noteren als:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= F(t) - kv - kb & (6) \\ \text{waarbij } kv &= \text{veerkracht} = k \cdot x & (7) \\ kb &= \text{dempingskracht} = b \cdot \dot{x} & (8) \end{aligned}$$

We beschouwen een willekeurig tijdsinterval $[t_b, t_e]$, terwijl voor elke t uit dit interval de relatie (6) moet gelden.

Als bij zondere excitatiebelastingen laten we ook stoten S toe dus die belastingen waarvoor:

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_p}^{t_p + \Delta t} F(t) dt \quad (9)$$

Beschouwen we in dat geval relatie (6) dan zien we dat bij een stoot S' in $t=t_p$ op de massa m uitgeoefend enkel de impuls p diskontinu kan veranderen en we vinden dat we in $t=t_p$ voor relatie (6) kunnen schrijven:

$$(P)_{t_p^+} - (P)_{t_p^-} = S' \quad (t=t_p) \quad (10)$$

Uitgaande van de vergelijkingen (6) en (10) en de tijdstippen waarop zij gelden kunnen we nu schrijven:

$$\int_{t_b}^{t_p^-} (\dot{p} - F(t) + k_v + k_b) \delta y \, dt + \int_{t_p^+}^{t_e} (\dot{p} - F(t) + k_v + k_b) \delta z \, dt + \{ (P)_{t_p^+} - P_{t_p^-} - S' \} \delta w_{t_p} = 0 \quad (11)$$

voor willekeurige δy , δz en δw .

Uit de grondstellingen voor de variatierekening volgt dat formulering (11) identiek is met differentiaalvergelijking (6) en "dynamische rand-konditie" (10).

Eisen we continuïteit in de variaties δy , δz en δw , en beschouwen we als variaties enkel variaties van het werkelijke verplaatsingsveld δx , dan kunnen we bij eindige \dot{p} schrijven:

$$\int_{t_b}^{t_p^-} \dot{p} \delta x \, dt = (p \delta x) \Big|_{t_b}^{t_p^-} - \int_{t_b}^{t_p^-} p \delta \dot{x} \, dt \quad (12)$$

$$\int_{t_p^+}^{t_e} \dot{p} \delta x \, dt = (p \delta x) \Big|_{t_p^+}^{t_e} - \int_{t_p^+}^{t_e} p \delta \dot{x} \, dt \quad (13)$$

Onder de genoemde eisen:

- $\delta x \in C^0$.
- \dot{p} eindig.

Hiermee wordt (11):

$$\int_{t_b}^{t_p^-} \{-p\delta\dot{x} - (F(t) - k_v - k_b)\delta x\} dt + (p\delta x)|_{t_b}^{t_p^-} + \int_{t_p^+}^{t_e} \{-p\delta\dot{x} - (F(t) - k_v - k_b)\delta x\} dt + (p\delta x)|_{t_p^+}^{t_e} + \{(p)_{t_p^+} - (p)_{t_p^-} - S'\} \delta x_{t_p} = 0. \quad (14)$$

continuïteit van de verplaatsing houdt in:

$$x|_{t_p^-} = x|_{t_p^+} = x|_{t_p} \quad (15)$$

Dan kunnen we (14) omvormen tot:

$$\int_{t_b}^{t_p^-} \{-p\delta\dot{x} - (F(t) - k_v - k_b)\delta x\} dt + \int_{t_p^+}^{t_e} \{-p\delta\dot{x} - (F(t) - k_v - k_b)\delta x\} dt - (p\delta x)_{t_b} + (p\delta x)_{t_e} - (S'\delta x)_{t_p} = 0 \quad (16)$$

Definitie: $p = \frac{\partial T(\dot{x})}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $T =$ kinetische energie; $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_b < t < t_p^- \\ t_p^+ < t < t_e \end{array} \quad (17)$

$k_v = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = kx$; $V =$ elastische potentiaal; $\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_b < t < t_p^- \\ t_p^+ < t < t_e \end{array} \quad (18)$

dan wordt (16):

$$\int_{t_b}^{t_p^-} \{\delta T - \delta V + (F(t) - k_b)\delta x\} dt + \int_{t_p^+}^{t_e} \{\delta T - \delta V + (F(t) - k_b)\delta x\} dt = -(p\delta x)_{t_b} + (p\delta x)_{t_e} - (S'\delta x)_{t_p}. \quad (19)$$

Uitgaande van:

- eindige kinetische energie T
 - eindige elastische energie V
 - eindige dempingskracht k_b
 - eindige excitatiekracht $F(t)$
- } voor $t_b \leq t \leq t_e$
- (Stoten hebben we hier al uitgehaald!)

levert:

$$\int_{t_b}^{t_e} \{\delta T(\dot{x}) - \delta V(x) + (F(t) - k_b)\delta x\} dt + (p\delta x)_{t_b} - (p\delta x)_{t_e} + S'(\delta x)_{t_p} = 0 \quad (20)$$

Def: $\Omega_F = F(t) \cdot x(t)$ = potentiaal der uitw. belasting. (21)

$\Omega_b = k_b(t) x(t)$ = potentiaal der dempingskracht. (22)

$\Omega_p = (p x) / t_e - (p x) / t_b + S \cdot x / t_p$ = potentiaal der impuls. (23)

$$I = \int_{t_b}^{t_e} (T - V + \Omega_F - \Omega_b) dt + \Omega_p. \quad (24)$$

dan kunnen we (20) ook schrijven als:

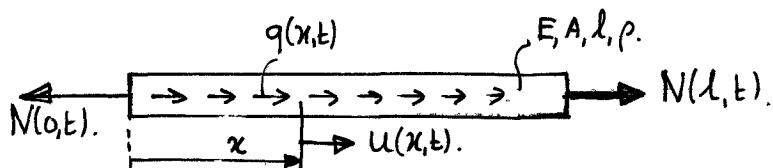
$$\delta I = 0 \quad (25)$$

voor alle continue δx met als niet te variëren grootheden:
 $k_b, F(t), p / t_e, p / t_b$ en S .

(25) beschrijft het principe van Hamilton met uitzondering van het feit dat nu geen bijzondere afspraken zijn gemaakt voor de variaties op de "randen" $t = t_b$ en $t = t_e$.

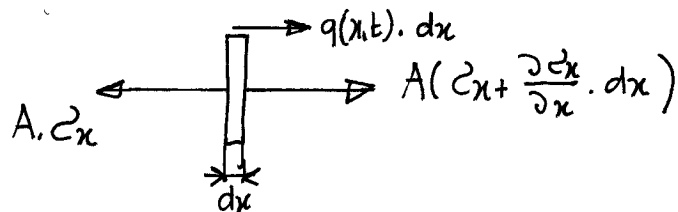
We hebben hiermee de mogelijkheid geopend een combinatie van "kynematische" en "dynamische" randvoorwaarden (n.l. voorgeschreven begin- of eindverplaatsingen $(x)_{t_b}$ of $(x)_{t_e}$ respectievelijk voorgeschreven begin- of eindimpuls $(p)_{t_b}$ of $(p)_{t_e}$) in ons variatieprincipe op te nemen en zodoende een totale oplossing te beschrijven.

Om een beter inzicht in het principe te krijgen zullen we de "aangepaste" Hamilton functionaal ook afleiden voor de longitudinaal trillende balk met konstante doorsnede.



q : verdeelde belasting,
 ρ : dichtheid,
 p : impuls/volumeeenheid.
 \bar{p} : impuls/lengte-eenheid.

We zetten de balk stil op tijdstip t :



$$u(x,t) \quad p = p(x,t). \quad (26)$$

(27)

ziden voor:

beschouwen ook voor

$$dt = 0 \quad (28)$$

beschouwde domein.

$$\int_{t=0}^T \left(\int_{x=0}^l \rho \cdot \delta u \right) dt$$

$$= 0. \quad (29)$$

$$p_T(x) / A$$

$$p_0(x) / A$$

$$(\text{idem } p_0)$$

$$(\text{idem } p_0)$$

$$\int_0^T \left\{ (N \cdot \delta u)_{x=l} - (N \cdot \delta u)_{x=0} \right\} dt$$

$$\int dx = 0. \quad (30)$$

met: kyn. energie: $T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho v^2 A. dx.$ (31)

elastische energie: $U = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon x^2. dx$ (32)

pot. v/d verdeelde belasting: $-\Omega q = \int_0^l q. u. dx$ (33)

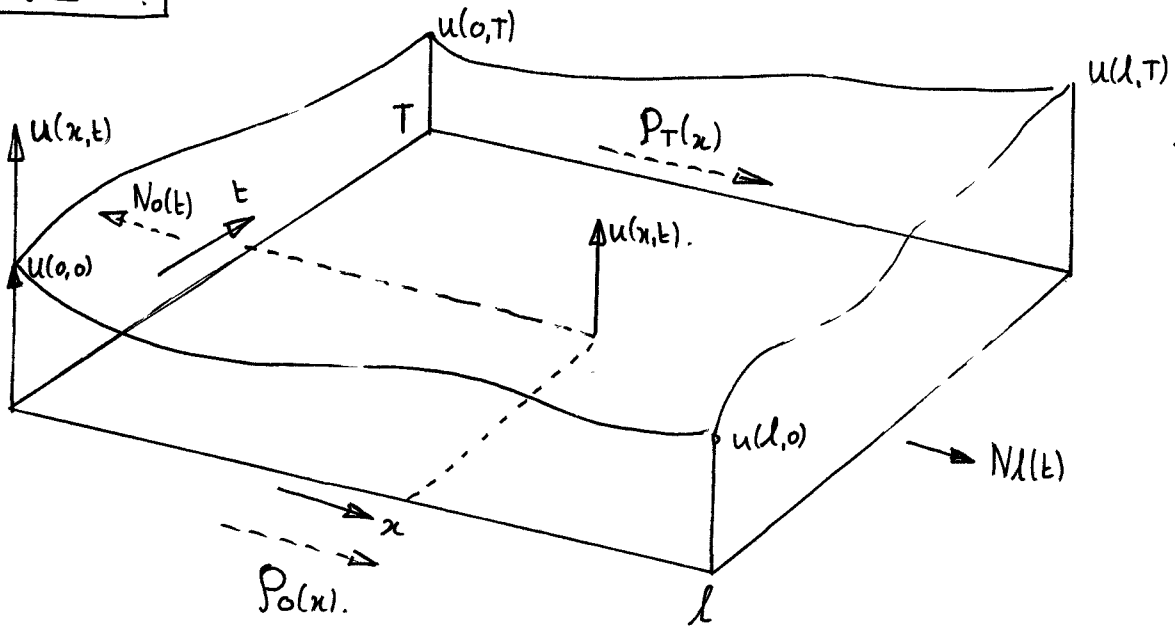
pot. v/d uitwendige bel: $-\Omega_N = (N. u)_{x=l} - (N. u)_{x=0}$ (34)

pot v/d impuls : $-\Omega_p = (P. u)_{t=T} - (P. u)_{t=0}$ (35)

$I = \int_{t=0}^T \{ -T - \Omega q + U \} dt - \int_{t=0}^T -\Omega_N dt + \int_{x=0}^l -\Omega_p. dx$ (36)

wordt (30):

$\delta I = 0.$



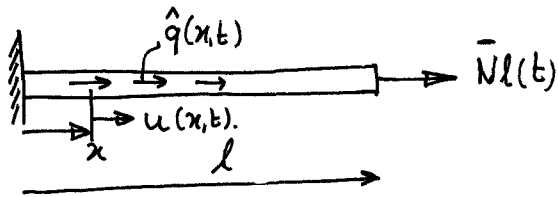
Onder de gewenste randkondities b.v.

- kinematische r.v.w (voorgeschreven verplaatsingen $\bar{u}(0,t), \bar{u}(l,t), \bar{u}(x,0), \bar{u}(x,T)$).
- dynamische r.v.w (voorgeschreven randbelastingen $\bar{N}(0,t), \bar{N}(l,t),$ voorgeschreven randimpulsen $\bar{P}(x,0), \bar{P}(x,T)$),

kan nu het gewenste probleem opgelost worden.

Wat hebben we nu bereikt?

Om dit beter te kunnen door-zien zullen we een speciaal geval van de longitudinaal trillende balk beschouwen n.l.



voorgeschreven begincondities:

$$u(x,0) = \hat{u}_0$$

$$p(x,T) = \bar{p}_T(x)$$

dus beginverplaatsing en eindimpuls voorgeschreven.

Bepalen we ons tot „kynematisch toelaatbare variaties” d.w.z. variaties welke voldoen aan:

$$\delta u(0,t) = 0$$

(inklemming)

(37)

$$\delta u(x,0) = 0$$

(voorgeschreven \hat{u}_0)

dan is de bewering:

|| Een stationaire waarde van de functional (36) voor „kynematisch toelaatbare variaties is identiek met:

$$* \text{ „evenwicht” : } \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q(x,t)}{A} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

* „dynamische randcondities”

$$\bar{N}(l,t) = \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l}$$

$$\bar{p}_T(x) = \left(A \cdot p \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=T}$$

Bewijs :

$$\delta I = \int_{t=0}^T \left\{ -\delta(T) - \delta(\Omega_q) + \delta u \right\} dt - \int_{t=0}^T \left\{ (\bar{N} \delta u)_{x=l} - (N \delta u)_{x=0} \right\} dt + \int_{x=0}^l \left\{ (\bar{p} \delta u)_{t=T} - (p \delta u)_{t=0} \right\} dx$$

(38)

gebruik makend van de eis: kyn toelvatbare variaties en de relaties (31), (32) en (33) levert:

$$\delta I = \int_{t=0}^T \int_{x=0}^l \{ -\rho v \cdot \delta v \cdot A - q \delta u + EA \epsilon x \delta \epsilon x \} dx dt - \int_{t=0}^T (\bar{N}_l \cdot \delta u)_{x=l} dt + \int_{x=0}^l (\bar{P}_T \delta u)_{t=T} dx \quad (39)$$

met: $v = \frac{\partial u}{\partial t}$; $\epsilon x = \frac{\partial u}{\partial x}$ wordt dit na partiële integratie:

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t=0}^T \int_{x=0}^l \left\{ A \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u - q \delta u - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \right\} dx dt - \int_{x=0}^l \left(A \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \delta u \right)_{t=0} dx \\ & + \int_{t=0}^T \left(EA \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta u \right)_{x=0} dx - \int_0^T (\bar{N}_l \cdot \delta u)_{x=l} dt + \int_{x=0}^l (\bar{P}_T \cdot \delta u)_{t=T} dx. \quad (40) \end{aligned}$$

via $\sigma x = E \frac{\partial u}{\partial x}$; $p = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$ en kyn randkondities vinden we bij toepassing van de principes van de variatierekening inderdaad de relaties voor „evenwicht” en „dynamische randkondities”

Opm: In de klassieke theorie wordt bij de afleiding van de Hamilton-functie a priori de veronderstelling gemaakt dat de variaties in de eindpunten van het beschouwde interval gelijk aan nul zyn. (voor het massa-veersysteem betekent dit $\delta x|_{t=t_b}$ en $\delta x|_{t=t_e}$ zyn nul.).

Beschouwen we enkel het massa-veersysteem zonder demping en uitwendige belasting dan leidt dit tot het principe:

$$\delta \int_{t=t_b}^{t=t_e} \{ T - V \} dt = 0 \quad \text{voor alle variaties waarvoor} \\ \delta x|_{t=t_b} \text{ en } \delta x|_{t=t_e} \text{ nul zyn.}$$

Het principe in deze vorm wordt dan ook meestal gebruikt voor het op eenvoudige wijze afleiden van de differentiaalvergelijkingen voor een bepaald probleem.

II. Diskretisatie van de Hamilton Functionaal.

In hoofdstuk I hebben we gezien hoe de Hamilton functionaal voor een bepaald probleem kan worden opgesteld en hoe een stationaire waarde van deze functionaal onder kynematisch toelaatbare variaties een alternatief vormt voor evenwichtsrelaties en dynamische randcondities, en als zodoende het volledige dynamische gedrag van het onderhavige systeem beschrijft. De vraag is nu echter: hoe konstrueren wij op basis van deze functionaal een dynamische oplossing voor ons probleem. Hiervoor bestaan een aantal mogelijkheden:

A). Gebruik de functionaal voor het afleiden van de differentiaalvergelijking voor het probleem. Oplossen van deze d.v onder de gegeven randcondities leidt dan tot de gevraagde oplossing. (i.h.a. partiële d.v.).

B). Een oplossing van deze differentiaalvergelijking is slechts voor relatief eenvoudige problemen in het algemeen mogelijk. Indien de verplaatsingen, snelheden enz als functie van de tijdcoördinaat relatief eenvoudig, als functie van de plaatscoördinaat daarentegen erg complex (denk bijv aan geometrisch ingewikkelde konstrukties) zijn, zou men evenals in de elementenmethode gebeurt, de plaatsafhankelijkheid kunnen diskretiseren, waardoor enkel de integratie over de tijdcoördinaat overblijft.

We hebben zodoende de orde van ons probleem verlaagd.

Door ook nu weer een stationaire waarde te eisen voor de functionaal krijgen we een gewone differentiaalvergelijkingen in de bij de diskretisatie gekozen „vrijheidsgraden“.

Deze d.v is vaak eenvoudiger op te lossen.

Dit is ongeveer de weg welke bij analyse van dynamische problemen via de elementenmethode tot nu toe werd toegepast. (bijv Aska).

Cj. Zijn niet alleen de verplaatsingen als functie van de plaatscoördinaten moeilijk te beschrijven, maar ook als functie van de tijdcoördinaat erg complex dan kan men ook de verplaatsingen zowel in de plaatscoördinaat t(en) als in de tijdcoördinaat diskretiseren om zodoende te komen tot een gewoon stelsel vergelijkingen hetgeen niet moeilijk op te lossen is.

We kunnen daarbij denken aan de methode v. Ritz waarbij over het gehele domein een benaderingsfunctie, beschreven door een aantal parameters wordt gelegd, als ook aan een elementen methode-achtige aanpak waarbij stuksgewijs benaderingen worden gekonstrueerd, welke voor het gehele domein op de juiste wijze worden gekoppeld.

We zullen aan de hand van de longitudinaal trillende balk de laatste methode toelichten, want het is deze methode welke ik in mijn onderzoek heb toegepast.

We gaan uit van de gevonden formulering in hoofdstuk I:

$$I = \int_{t=0}^T \int_{x=0}^l \left\{ -\frac{1}{2} \rho v^2 A - q \cdot u + \frac{1}{2} EA \epsilon_x^2 \right\} dx dt - \int_{t=0}^T \left\{ (N \cdot u)_{x=l} - (N \cdot u)_{x=0} \right\} dt + \int_{x=0}^l \left\{ (P \cdot u)_{t=T} - (P \cdot u)_{t=0} \right\} dx \quad (2.1)$$

We verdelen de lengte l van de balk in n stukken $[l_n^1, l_n^2]$ en het beschouwde tijdsinterval $[0, T]$ in m stukken $[t_m^1, t_m^2]$

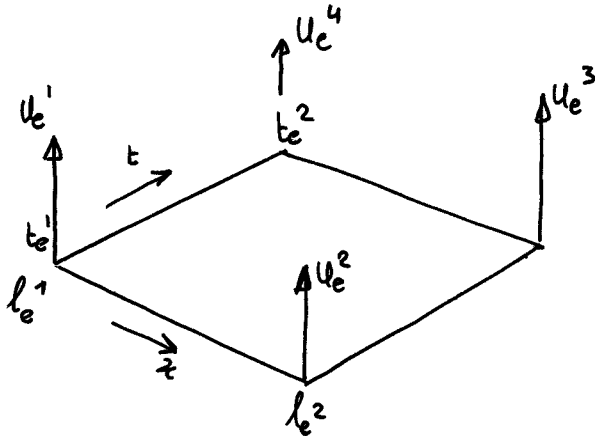
We definiëren een "element" als een gebied bepaald door de verdelingen $[l_e^1, l_e^2]$ en $[t_e^1, t_e^2]$ en kunnen dan voor (2.1) ook schrijven:

$$I = \sum_e \left[\int_{l_e^1}^{l_e^2} \int_{t_e^1}^{t_e^2} \left\{ -\frac{1}{2} A \rho v^2 - q \cdot u + \frac{1}{2} EA \epsilon_x^2 \right\} dx dt \right] - \sum_m \int_{t_m^1}^{t_m^2} \left\{ (N \cdot u)_l - (N \cdot u)_0 \right\} dt - \sum_n \int_{l_n^1}^{l_n^2} \left\{ (P \cdot u)_T - (P \cdot u)_0 \right\} dx \quad (2.2)$$

De eisen waaraan ons verplaatsingsveld op de elementranden moet voldoen luidt daarbij

$u =$ continu dus aansluiting gegarandeerd.
(continuïteit in x en in t -richting.)

We beschouwen één zo'n element:



Definieer: $\vec{u}_e = [u_e^1, u_e^2, u_e^3, u_e^4]$: (2.3)

We benaderen $u(x,t)$ binnen zo'n element door een polynoom in x en t , opgehangen aan bijv de vier discrete verplaatsingen in de hoekpunten.

We kunnen dus schrijven:

$$\textcircled{c} \quad u(x,t) = \vec{F}_e(x,t) \cdot \vec{u}_e \quad \vec{F}_e = [\underbrace{F_e^1, F_e^2, F_e^3, F_e^4}_{\text{Fie van } (x,t)}] \quad (2.4)$$

$$\text{met } v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{F}_e) \cdot \vec{u}_e \quad (2.5)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}_e) \cdot \vec{u}_e \quad (2.6)$$

krigen we:

$$I = \sum_e \left[\vec{u}_e \left\{ \int_{t_e^1}^{t_e^2} \int_{l_e^1}^{l_e^2} \left(-\frac{1}{2} \rho A \frac{\partial}{\partial t} (\vec{F}_e) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{F}_e) + \frac{1}{2} EA \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}_e) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F}_e) \right) dx dt \right\} \vec{u}_e + \left\{ \int_{t_e^1}^{t_e^2} \int_{l_e^1}^{l_e^2} -q(x,t) \cdot \vec{F}_e dx dt \right\} \vec{u}_e \right] - \sum_m \int_{t_m^1}^{t_m^2} \{ (N \cdot u)_l - (N \cdot u)_o \} dt + \sum_n \int_{l_n^1}^{l_n^2} \{ (P \cdot u)_+ - (P \cdot u)_o \} dx. \quad (2.7)$$

Door nu de elementen te assembleren en als vektor van vrijheidsgraden voor de hele constructie te definiëren:

$$\vec{U}_t = [U_t^1, \dots, U_t^p]$$

kunnen we voor (2.7) ook schrijven:

$$I = \frac{1}{2} \vec{U}_t^T Q_t U_t - \vec{q}_t \cdot U_t - \vec{N}_t U_t + \vec{P}_t \cdot U_t \quad (2.8)$$

waarbij

- Q_t = matrix tgv kyn. en elast. energie
- q_t = vektor tgv verdeelde belasting.
- N_t = vektor tgv randbelasting tgv $x=0$ en/of $x=l$.
- P_t = vektor tgv randimpuls tgv $t=0$ en/of $t=T$.

Door nu een stationaire waarde te eisen voor alle variaties δU_t welke voldoen aan de kinematische randvoorwaarden vinden we:

$$\boxed{Q_t \cdot U_t = q_t + N_t - P_t} \quad (2.9)$$

een gewoon stelsel vergelijkingen in de onbekenden U_t , hetgeen zonder veel problemen is op te lossen.

Opm: Bij dit variatieprincipe is niet eenduidig onder welke condities de matrix Q_t inverteerbaar is, dus onder welke condities een eënduidige oplossing van (2.9) mogelijk is. Hiervoor zijn wel bepaalde richtlijnen te geven, maar deze zullen in een later stadium nog aan de orde komen.

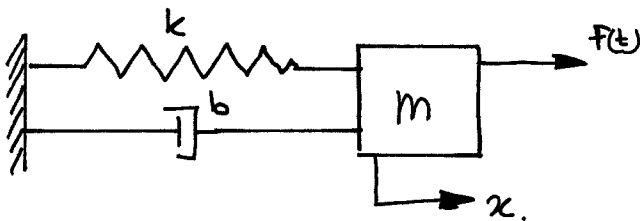
Opm: Het betreft hier „elementen“ in twee volkomen verschillende dimensies n.l. x en t . Om iets te kunnen vertellen over de elementverdeling (hoeveel in x -richting, hoeveel in t -richting) zal het daarom noodzakelijk zijn de functionaal waarvan wordt uitgegaan dimensielos te maken om een vergelijking van de grootheden welke een rol spelen mogelijk te maken.

III. Voorbeelden via de methode van de discrete Hamilton Functionaal doorgerkend.

Er zijn verschillende voorbeelden geanalyseerd via de discrete-Hamilton methode.

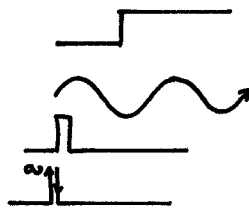
Dese voorbeelden zullen niet allemaal worden behandeld, in bepaalde gevallen zal enkel enige informatie worden gegeven over de achtergronden, niet over de numerieke resultaten.

Voorbeeld 1.

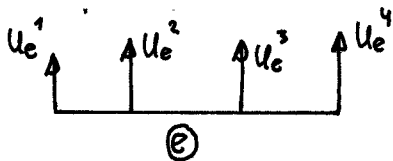


onderkritisch gedempt massa-veersysteem, belast met excitatiekracht $F(t)$.

- mogelijke begincondities:
elke willekeurige combinatie van 2 uit:
beginverpl., beginsnelheid, eindverplaatsing, eindsnelheid.
- belasting gevallen:
 - * stapfunctie
 - * harmonische functie
 - * pulsfunctie
 - * Stoot S op $t = t_p$.



Binnen een element werd de verplaatsing benaderd door een 3^e graads polynoom: beschreven door de 4 discrete verplaatsingen $u_e^{(i)}$; $i = 1, \dots, 4$.



Bij dit voorbeeld van een gedempt massa-veersysteem is het berekenen van theoretische opl. niet zo'n probleem.

We beschouwen twee situaties wat nader:

A pulsfunctie:

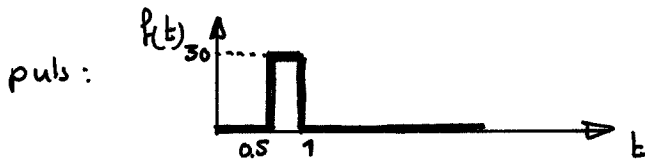
$$m = \frac{1}{2}, k = 2, \rightarrow \omega_n = 2 \rightarrow T_n = 3.14.$$

$$\xi = 0.4 \text{ (onderkritisch).}$$

beginverplaatsing = 5, beginsnelheid = 5.

beschouwde tijdsinterval 12 sec, verdeeld in 7 „elementen“.

↓ (element lengte ca $0.55 \times$
golflengte)



Bij dit probleem bleek de gemiddelde relatieve fout over het totale beschouwde interval tov de exacte oplossing ca 2% te zijn.

Zie ook grafiek I. (pag 10)

B Stoot S in $t = t_p$.

$$m = \frac{1}{2}, k = 2 \rightarrow \omega_n = 2 \rightarrow T_n = \pi.$$

$$\xi = 0.15$$

beschouwde tijdsinterval 5 sec verdeeld in 4 elementen.

beginverplaatsing 3, eindverplaatsing -2;

$S = 6$ in $t = 2.91$ sec.

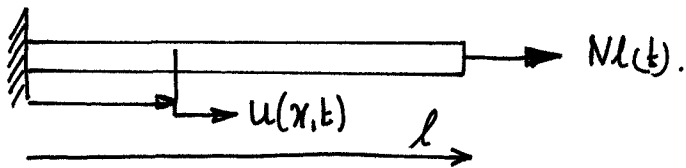
Hier bleek de relatieve fout tov de exacte oplossing ca $\frac{1}{2}\%$ te bedragen in de berekende verplaatsingen t.o.v de exacte verplaatsingen.

Zie ook grafiek II. (pag 19)

Omdat de Stoot midden in een element plaats vindt en de verpl. en snelheid binnen een element continu zijn kon de benadering t.p.v de stoot S de exacte verplaatsing niet helemaal volgen.

Voorbeeld 2.

De longitudinaal trillende balk.



$A=1; E=2; \rho=1; l=2$, beschouwde tijdsinterval $[0, 2 \text{ sec}]$

voorgeschreven: * inklemming t.p.v. $x=0$

* normaalkracht $Nl(t)$ t.p.v. $x=l$.

* randimpuls $P_0(x)$ t.p.v. $t=0 \text{ sec}$

* randimpuls $P_T(x)$ t.p.v. $t=2. \text{ sec}$

normaalkracht $Nl(t) = 2$.

randimpuls $P_0(x) = 2 \cdot x$.

" $P_T(x) = 3 \cdot x$.

In grafiek III ^(pag 20) vindt men een benadering voor het exacte verloop van $u(x,t)$ (vertikaal op de asrichting wiltgezet!) benaderd via een differentiemethode alsook het verloop van $u(x,t)$ verkregen via de diskrete Hamilton methode met een verdeling in 4 elementen (2 in x- en 2 in t-richting).

Voorbeeld 3 en 4

Ten slotte zijn nog twee bijzondere voorbeelden doorgerekend n.l.

* Diff. vgl van Mathieu.

* Torsie probleem met veranderend traagheidsmoment.

Beide zijn voorbeelden van een lin. dv met niet-constante coëfficiënten, doch coëf afh. van de onafhankelijke variabele.

Op deze laatste twee voorbeelden zal niet nader worden ingegaan.

Conclusies

Uit de resultaten verkregen bij de analyse van de gepresenteerde problemen via de gediskretiseerde Hamilton-functie blijkt dat deze laatste een goed gereedschap lijkt te vormen voor de analyse van dynamisch complexe problemen.

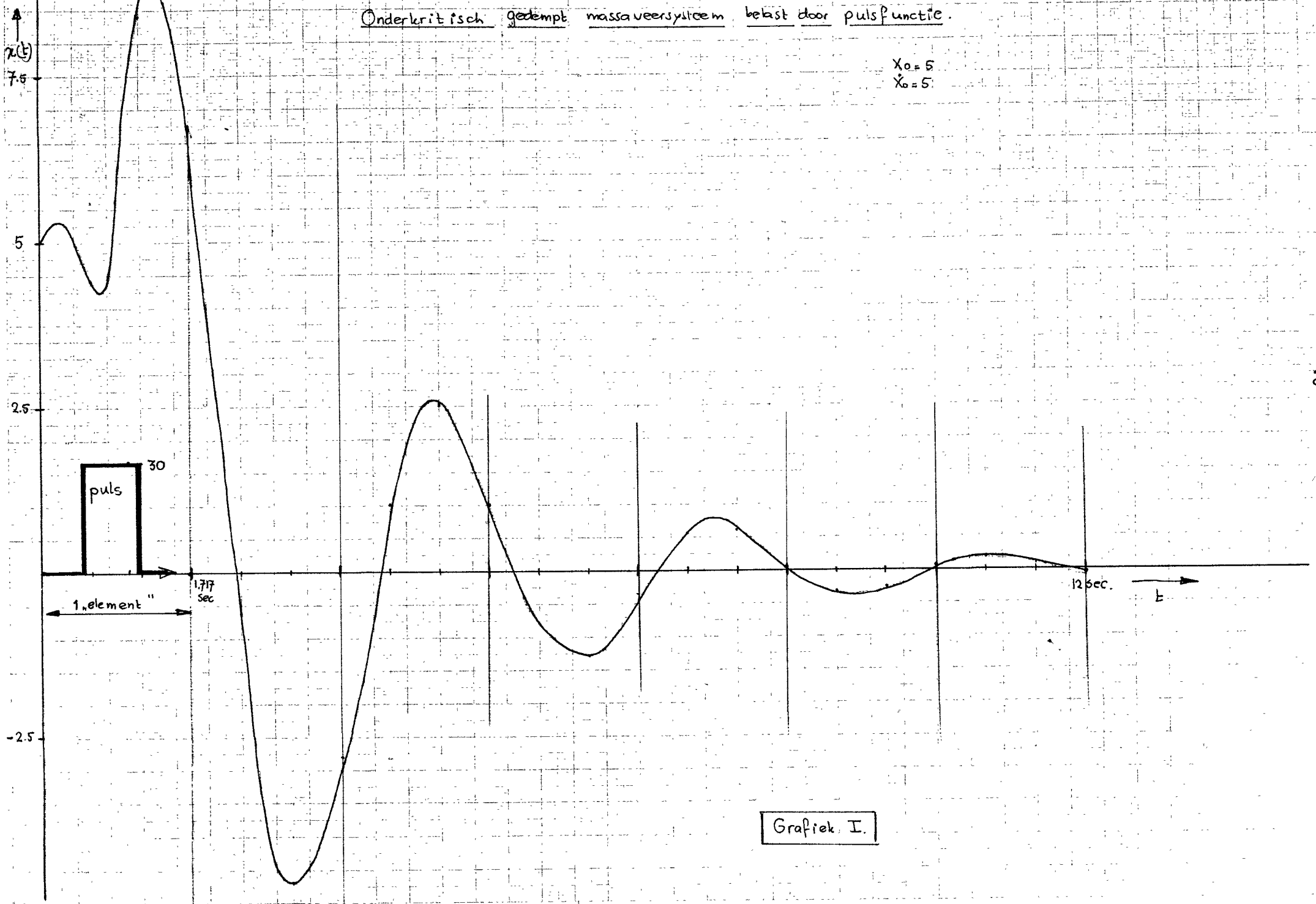
Men moet evenals bij statische problemen de elementverdeling (grofheid) aanpassen aan de te verwachten gradiënt, d.w.z. met betrekking tot de tijd-coördinaat aan de te verwachten golflengte van de beweging.

Is dit het geval dan blijkt reeds bij relatief weinig en relatief eenvoudige elementen de beweging van het systeem redelijk goed beschreven te worden.

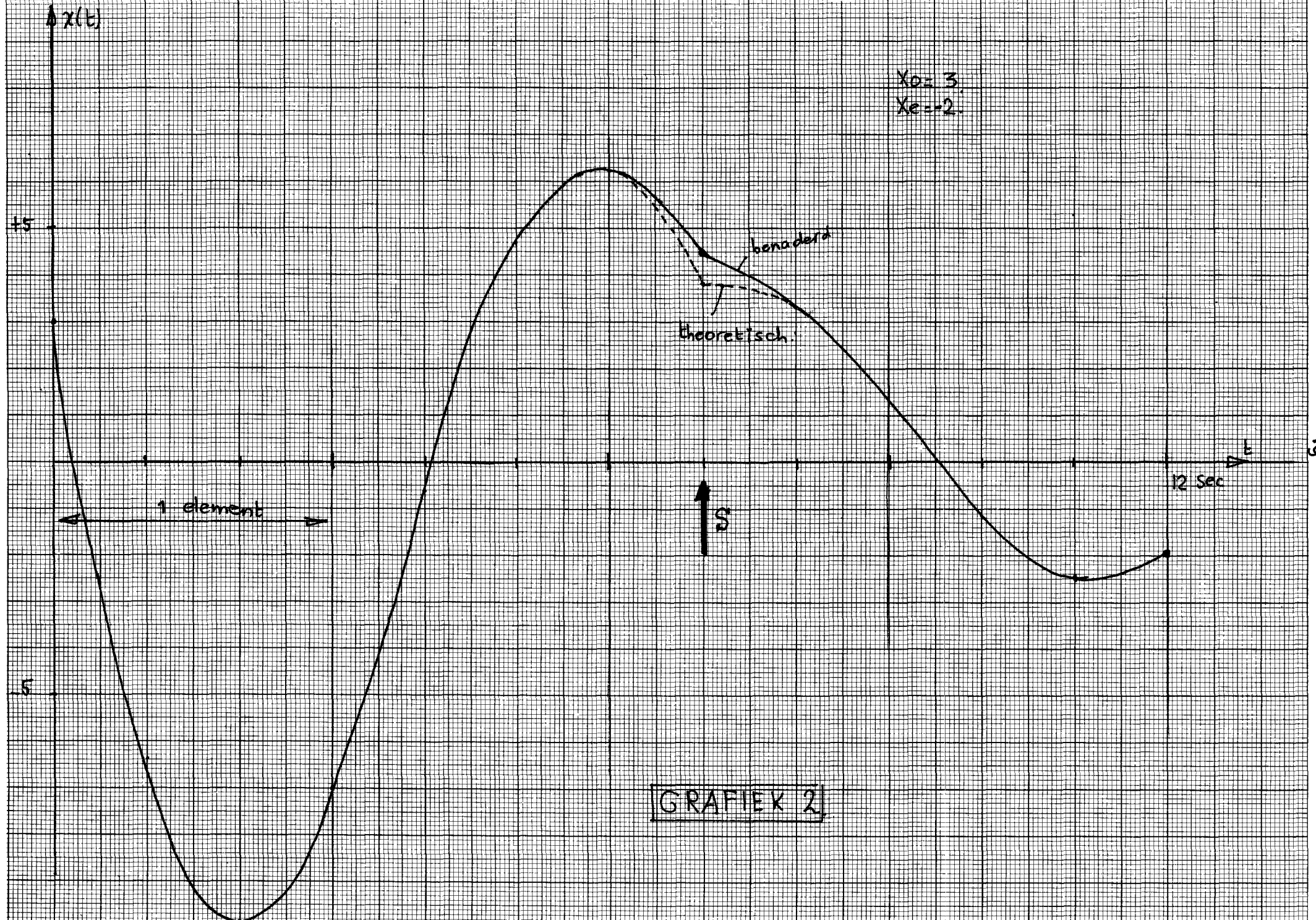
Ook voor de problemen met lin. diff. vergelijkingen doch niet konstante coëfficiënten (afh. van de tijd) blijkt de methode erg eenvoudig en goed te werken omdat deze tijdsafhankelijkheid door de integratie over de tijd heel eenvoudig in rekening gebracht kan worden.

Onderkritisch gedempt massa veersysteem belast door pulsfunctie.

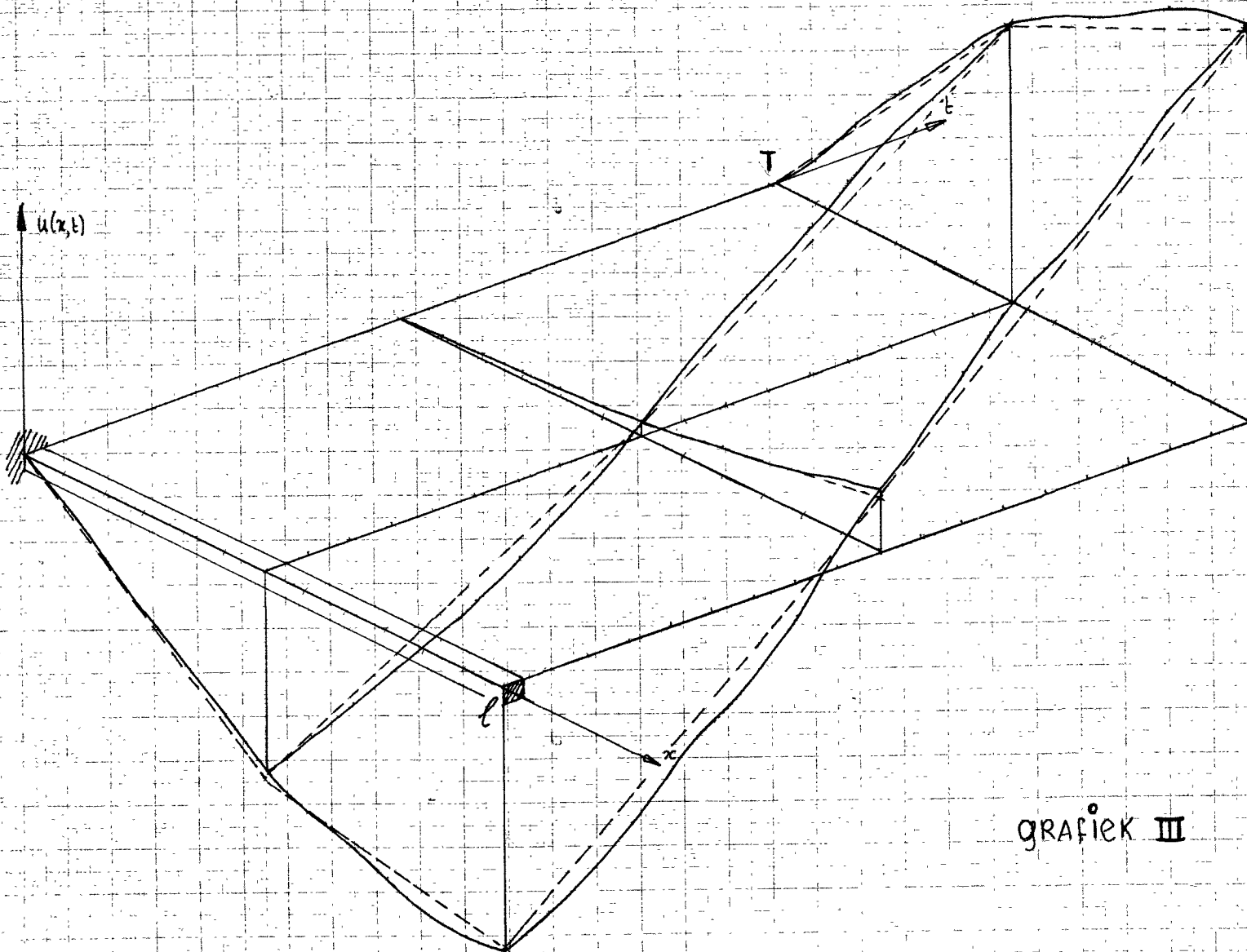
$$x_0 = 5$$
$$\dot{x}_0 = 5$$



Grafiek I.



— exakte oplossing
- - - - - diskrete Hamilton
2x2 elementen.



grafiek III

20-

IV Slotopmerkingen

We hebben in het voorgaande de functionaal afgeleid waarmee het totale dynamische gedrag van een systeem beschreven kan worden. Afhankelijk van de complexiteit van het beschouwde systeem kan deze functionaal gebruikt worden voor het bepalen van de dynamische respons van een systeem onder bepaalde belasting, begincondities etc.

Dit blijkt nog eens uit onderstaande tabel.

Hamilton functionaal voor het probleem (H)

eenvoudige problemen (a) analytisch niet zo complex	$H \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{partiele differentiaal vgl} \\ + \text{ dyn randkond.} \\ + \text{ kyn randkond} \\ + \text{ begincondities} \end{array} \right\} \text{opl.}$
geometrisch complexe (b) problemen	diskretisatie in plaatscoörd. $H \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{gewone d.v in diskrete} \\ \text{verplaatsingen.} \\ + \text{ begincondities} \end{array} \right\} \text{opl.}$
geometrisch } (c) in de tijd } complex	diskretisatie in plaatscoörd. én tijdcoördinaten. $H \rightarrow \text{gewoon stelsel vgl'n} \rightarrow \text{opl.}$

We hebben onze aandacht vooral gericht op de laatste, dus zowel geometrisch als in de tijd complexe problemen. (c).

(a) zou men kunnen zien als de klassieke weg, (b) de weg welke toegepast wordt in de methode der eindige elementen.

Enige voordelen van de methode:

- * We vinden direct de dynamische respons van het systeem zonder oplossing van eigenwaarde problemen, ontkoppelde differentiaalvergelijkingen, aanpassing van integratie constanten aan begincondities etc voor elke willekeurige excitatiebelasting $f(t)$.

- * Ook die systemen met variabele parameters (lin-systemen) kunnen eenvoudig aangepakt worden. Voor complexe afhankelijkheid kan de integratie over de tijd van deze parameters eventueel numeriek gebeuren op elementniveau.
- * In tegenstelling tot differentiemethoden is het met deze methode mogelijk het gedrag van het systeem te beschrijven zonder vooraf enige uitspraak te hoeven doen over het type randconditie en/of de werkelijke grootte daarvan.
- * Door de diskretisatie van alle functies is het mogelijk de analyse verregaand te generaliseren door het gebruik van min of meer standaard elementen, evenals dit ook het geval is bij de analyse van statische constructies via de elementenmethode.
- * Daar bij een dynamische respons vaak enkel de trillingsvormen met de laagste frequentie een rol spelen is met redelijk weinig en eenvoudige elementen meestal al snel een nauwkeurige benadering van de exacte oplossing mogelijk.

Nadelen:

- * De afhankelijkheid van het dynamisch gedrag van een systeem van de parameters welke in dat systeem een rol spelen wordt ondoorzichtiger door de totale diskretisatie, tov. bijv. een analytische oplossing.
- * Het aantal vrijheidsgraden neemt toe (het probleem wordt alw één dimensie complexer, 1 dim \rightarrow 2 dim) hetgeen echter door een verstandige reductiemethode redelijk beperkt kan blijven.

Toekomst

Punten welke op korte termijn aan de orde dienen te komen zijn

- * mogelijkheden van de methode voor de analyse van niet-lineaire systemen, eventueel ook de dynamische stabiliteit van niet-lineaire systemen.

In geval het een niet-lineair systeem betreft zal de methode ook leiden tot een niet-lineair stelsel vergelijkingen hetgeen volgens een iteratieve methode opgelost zou kunnen worden.

- * Welk complex van problemen wordt door deze analysemethode beter toegankelijk voor analyse van het dynamisch gedrag, waarbij gedacht dient te worden aan praktische problemen.

- * Keuze van een reële technische constructie aan de hand waarvan de verschillende facetten getoetst kunnen worden.

Het liefst wordt hier natuurlijk gedacht aan een probleem waarvoor ook langs andere weg (bijv. experimentele) reeds meer of minder goede oplossingen zijn gekonstrueerd, of waarvoor informatie over het werkelijke dynamische gedrag bestaat.

Literatuur:

- [1]: dynamics of structures,
W.C. Hurty and M.F. Rubinstein
Prentice - Hall Inc, (1964).
- [2]: Linear Vibration theory,
James B. Vernon
John Wiley & sons, Inc. (1967)
- [3]: Analytical methods in Vibrations
Leonard Meirovitch
The macmillan Company, New York (1967)
- [4] Methoden der math. physik I en II.
Courant und Hilbert.
- [5] Dynamics of vibrations
E. Volterra and E.C. Zachmanoglou.
Charles E. Merrill Books Inc. Ohio. (1965)
- [6] Advanced dynamics
S. Timoshenko and D.H. Young.
Mc. Graw-Hill (1948)
- [7] Non-linear vibrations
J.J. Stoker
Interscience Publishers Inc. New-York. (1950)
- [8] Stability criteria for linear dynamical systems.
B. Porter.
Oliver & Boyd, London (1967)
- [9] Dynamics of machine assemblies with non-linear coupling.
v.L. Veitz, N.I. Kolchin, AM Martynenko.
Jnl. Mechanisms Volume 6, pp 367-382. (juli 1970)
- [10] A finite element method for first-order hyperbolic equations.
G.A. Baker.
Math. of computations, volume 29, number 132.
pp 995-1006, (oct 1975)

- [11] Non-linear oscillations using the finite element technique.
J.H. Argyris, P.C. Dunne, T. Angelopoulos.
Comp. methods in [applied] mechanics and engineering. 2 (1973)
203 - 250.
- [12] The method of Ritz applied to the equation of Hamilton.
C. D. Bailey.
Comp. methods in applied mechanics and engineering. (1976)
(235-247)
- [13] The propagation of waves in a semi-infinite chain of
material points and springs representing a long train.
A.D. de Pater.
Vehicle system dynamics 3 (1974) pp 123-140.
- [14] A finite element method for the direct solution of
ordinary differential equations.
C Stavriniadis
Ikoss GmbH, Stuttgart Germany.
Finite element congress nov 1975, Baden-Baden.
- [15] A variational principle for nonlinear elastodynamics and
its application to the hybrid stress model.
J. Raasch.
Int. Jnl. Non linear mechanics vol 10, pp 215-222 (1975)
- [16] Finite element stress-formulation for dynamic
elastic-plastic analysis.
J. H. Biffle, E. B. Becker.
Comp. methods in applied mechanics and engineering.
6 (1975) 101-119.
- [17] Torsietrillingen van zuigermachines.
J. P. Reinhoudt.
Afstudeerverslag (sept 1963).

- [10] The application of finite element analysis to body wave propagation problems.
W.D. Smith.
Geophys. J. R. astr. Soc. (1975) 42, 747-760
- [19] Wave propagation in a nonlinearly elastic compressible rod with variable cross section.
Y. Benevise,
Acta mechanica 22, 197-208 (1975)
- [20] Applications of finite elements in space and time.
J.H. Argyris, A.S.L. Chan.
Ing. Archiv 41, 1972, 235-257.
- [21] Über die Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf lineare nichtkonservative Probleme.
H. Leibholz.
Ing. Archiv 40 (1971), 55-67.
- [22] The dual principles of elastodynamics, finite element applications.
B. Fraijs de Veubeke.
- [23] Calculations of plate frequencies from complementary energy formulations.
R.L. Sakaguchi, B. Tabarrok.
Int. Jnl. for num. methods in Eng. vol 2; 283-293. (1970)
- [24] Computational efficiency of equilibrium models in eigenvalue analysis.
M. Geradin.
Tutam symp., High Speed computing of elastic structures.
Tome 2, 1971.

- [25] Duality in structural analysis by finite elements.
B. Fraijs de Veubeke.
Lectures on finite elem. methods in continuum mechanics.
J.T Oden, ER Arantes e Oliviera (sept 1971) .
- [26] On energy and complementary energy formulations of
acoustic and structural vibration problems.
G.M.L. Gladwell, G. Zimmerman.
J. Sound Vib. (1966) 3 (3), 233-241.
- [27] On duality in the oscillations of framed structures.
B. Tabarrok.
J. Sound Vib. (1968) 8(3), 469-481
- [28] Variational principles in fluid dynamics.
B Fraijs de Veubeke
Fluid dynamics transactions.
3 (1966)