

De elementenmethode toegepast op de Saint-Venant torsie

Citation for published version (APA):

Janssen, J. D. (1970). *De elementenmethode toegepast op de Saint-Venant torsie*. (DCT rapporten; Vol. 1970.012). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1970

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

De elementenmethode toegepast op de Saint-Venant torsie.1. Inleiding.

Tot nu toe is het gebruik van de elementenmethode in de groep WE beperkt tot elementen, waarvan de onbekende grootheden de gegeneraliseerde verplaatsingen zijn in de knooppunten.

De elementenmethode kan echter ook gebruikt worden om bepaalde soorten 2e orde partiele differentiaalvergelijkingen tot een oplossing te brengen. Voorbeelden zijn de Laplace- en Poisson-vergelijkingen.

Door Zienkiewicz wordt in zijn boek "The finite element method in structural and continuum mechanics" in hoofdstuk "10" "Field problems - heat conduction, seepage flow, etc." hierover uitgebreid bewijsmateriaal en te volgen werkwijze aangegeven.

Wij vermelden hier slechts dat problemen waarvoor de grootheid $\phi(x, y, z)$ gezocht moet worden uit een d.v. van het type:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0$$

(ϕ : enkelwaardig in beschouwd gebied; k_x , k_y , k_z en Q zijn bekende functies van (x, y, z) met randcondities:

van het type $\phi =$ gegeven op de rand

$$\text{en/of } k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + q + \alpha \phi = 0$$

(l_x , l_y , l_z , componenten van de buitenwaardsgerichte normaal: q en α constant)

zich lenen om op de wijze die ons bekend is tot een oplossing gebracht te worden.

Wij zullen hier geen algemene afleiding geven; wij willen slechts - Zienkiewicz op de voet volgend - het probleem van de Saint-Venant torsie uitwerken.

De keuze van dit probleem is bepaald door het feit, dat wij hiermee goed bekend zijn en door het feit, dat wij wellicht nog interessante resultaten kunnen verkrijgen. In dit verband denken wij aan de berekening van de spanningsverdeling bij hoeken en van de torsiestijfheid van open profielen (L, U, I)

Bovendien denken wij aan correcties op de Bredt-theorie voor betrekkelijk dikwandige kokers.

2. De Saint Venant-theorie.

2.1.

In fig. 2.1. is de dwarsdoorsnede getekend van een prismatische balk, die getordeerd wordt (géén welvingsverhindering; geen scheef trekken). Deze figuur bevat verder nog enige afspraken.

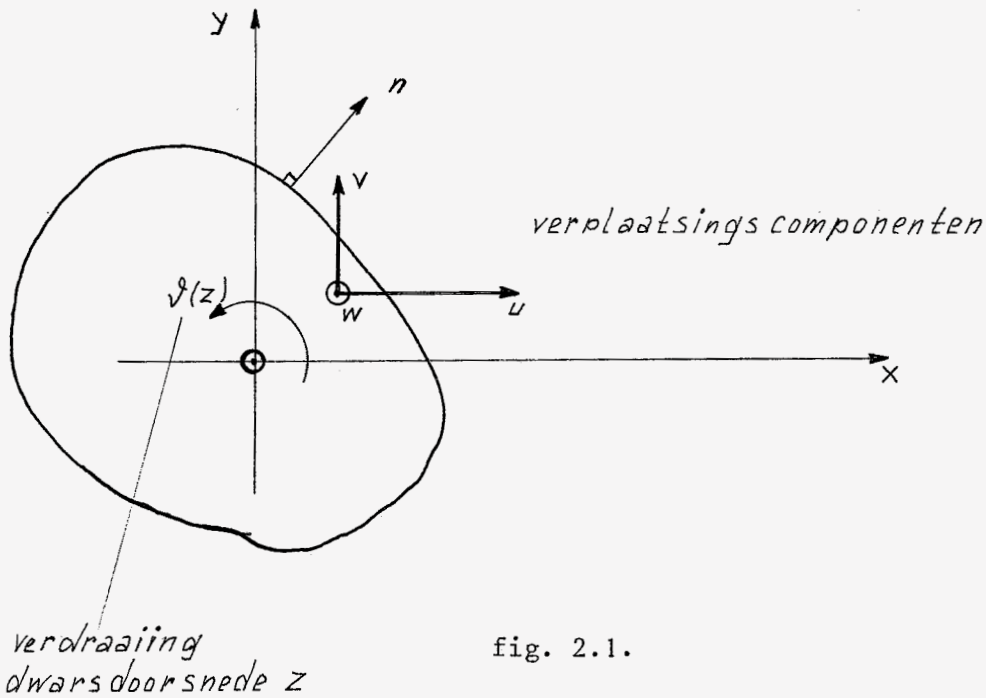


fig. 2.1.

Er geldt: $u = -\theta y$ (2.1)

$v = \theta x$ (2.2)

$w = \theta' \phi_0(x, y) \quad (\theta' = \frac{d}{dz})$ (2.3)

$\tau_{xz} = G\theta' \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} - y \right)$ (2.4)

$\tau_{yz} = G\theta' \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} + x \right)$ (2.5)

Alle andere spanningen nul.

Uit evenwicht:

$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = 0$ (2.6)

Randcondities op begrenzing:

$\frac{d\phi_0}{dn} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi_0}{\partial y} n_y = y n_x - x n_y$ (2.7)

Andere formulering van het probleem.

Voer in de functie $\psi(x, y)$, gedefinieerd door:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = + \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \qquad (2.8)$$

Dan geldt:

$$\tau_{xz} = + G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \qquad (2.9)$$

$$\tau_{yz} = - G\theta' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \qquad (2.10)$$

ψ moet voldoen aan:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.11)$$

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \text{ op de rand} \qquad (2.12)$$

Weer een andere formulering wordt verkregen door de substitutie:

$$\phi = \psi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \qquad (2.13)$$

Hiervoor geldt:

$$\tau_{xz} = G\theta' \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (2.14)$$

$$\tau_{yz} = G\theta' \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (2.15)$$

waar ϕ moet voldoen aan:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2 \qquad (2.16)$$

$\phi = 0$ op de rand (wij beperken ons tot een enkelvoudig samengesteld gebied)

3. Het probleem: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2; \quad \phi = 0$ op de rand.

Voor het in de kop van dit hoofdstuk geformuleerde probleem, willen wij een oplossing geven.

Definieer de volgende functionaal:

$$I = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 4\phi \right\} dF \qquad (3.1)$$

Bewering

Wanneer $\phi = 0$ op de rand dan volgt uit $\delta I = 0$ voor alle variaties van ϕ (die voldoen aan $\delta\phi = 0$ op de rand) de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2$$

Bewijs

Het bewijs wordt geleverd door het variatieproces uit te voeren:

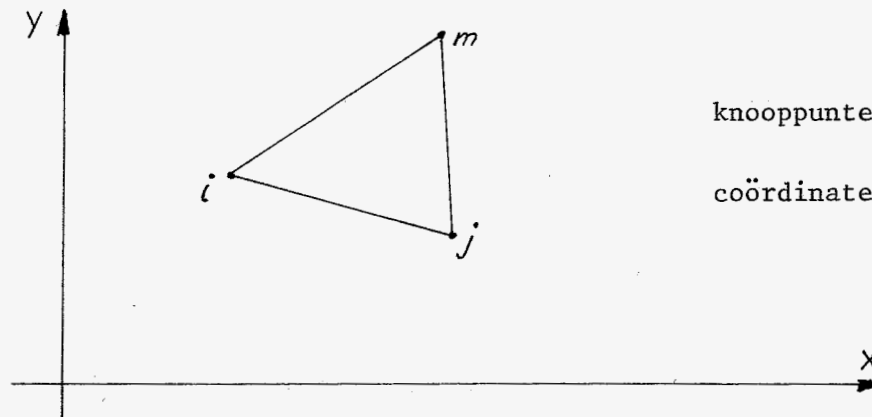
$$\begin{aligned} \delta I &= \iint_F \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\delta \partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\delta \partial \phi}{\partial y} - 2 \delta \phi \right\} dF = \\ &= \iint_F \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \phi \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \right) \right\} dF + \\ &= \iint_F \delta \phi \left\{ 2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} dF = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot n_y \right\} \delta \phi ds + \\ &= - \iint_F \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \right) \delta \phi dF \end{aligned} \tag{3.2}$$

Op de rand zou $\delta\phi = 0$ zijn, waardoor \int over de rand verdwijnt. Uit de oppervlakte-integraal volgt de verwachte differentiaalvergelijking.

Wij verdelen het te onderzoeken gebied in een aantal elementen met eenvoudige geometrische begrenzingsen (b.v. driehoeken).

In een element denken wij ons ϕ bepaald door de waarden van ϕ in de knooppunten.

Wij bekijken b.v. het driehoekige element uit fig. 3.1.



knooppunten i, j, m
coördinaten (x_i, y_i) enz.

fig. 3.1

Wij kiezen voor $\hat{\phi}(x,y)$ in het element (lineair veld):

(Opm.: $\hat{\phi}$ wordt weer gebruikt om de afhankelijkheid der coördinaten te accentueren)

$$\hat{\phi} = \begin{vmatrix} \hat{N}_i & \hat{N}_j & \hat{N}_m \end{vmatrix} \phi_e \quad (3.3)$$

$$\text{met } \hat{\phi}_e = (\phi_i, \phi_j, \phi_m) \quad (3.4)$$

$$\text{en } \hat{N}_i = (a_i + b_i x + c_i y) / (2\Delta) \text{ enz.} \quad (3.5)$$

Hierin zijn:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \text{ enz.} \quad (3.6)$$

$$b_i = y_j - y_m \quad (3.7)$$

$$c_i = x_m - x_j \quad (3.8)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (a_i + a_j + a_m) \quad (\text{oppervlakte driehoek}) \quad (3.9)$$

Voor het element geldt:

$$\begin{aligned}
 I_e &= \frac{1}{2} \iint_{\text{opp.el.}} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right)^2 - 4 \hat{\phi} \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \hat{\phi}_e^T H_e \hat{\phi}_e - \hat{\phi}_e^T f_e
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Berekend kan worden dat geldt:

$$H_e = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\text{met } h_{rs} = (b_r b_s + c_r c_s) / 4\Delta \tag{3.12}$$

$$\text{en } f_e^T = \frac{+2}{3} \Delta (1 \ 1 \ 1) \tag{3.13}$$

Bij de berekening van (3.13) kan zinvol gebruik worden gemaakt van het feit dat geldt:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\text{el.}} x dx dy &= \Delta \cdot \bar{x} \quad (\bar{x}: x\text{-coördinaat zwaartepunt}) \\
 &= \Delta \cdot \frac{1}{3} (x_i + x_j + x_m)
 \end{aligned}$$

en verder van het feit dat

$$\hat{N}_i = 1, \hat{N}_j = \hat{N}_m = 0 \text{ voor } (x, y) = (x_i, y_i)$$

is te vinden door de superpositie van I_e voor alle elementen waarin het oppervlak is verdeeld.

Er ontstaat op deze manier:

$$I = \frac{1}{2} \hat{\phi}^T H \hat{\phi} - \hat{\phi}^T f \tag{3.14}$$

waarbij in $\hat{\phi}$ de waarden van ϕ in de knooppunten van het oppervlak voorkomen. De knooppunten waar ϕ nul is (dit is met name voor de randpunten het geval) zijn in de "vector der onbekende ϕ waarden niet opgenomen.

Alle componenten van $\hat{\phi}$ kunnen onafhankelijk gevarieerd worden.

Uit $\delta I = 0$ volgt dan:

$$H\phi = f \quad (3.15)$$

Op de bekende manier wordt H verkregen uit de afzonderlijke matrices H_e van de bijdragende elementen.

Het is niet moeilijk H en f te construeren en vervolgens de componenten van ϕ te bepalen.

Het is zinvol gebruik te maken van eventueel aanwezige symmetrie in de dwarsdoorsnede. Bij een dwarsdoorsnede zoals in fig. 3.2 getekend, willen wij bijvoorbeeld alleen onze aandacht richten op het gearceerde gebied.

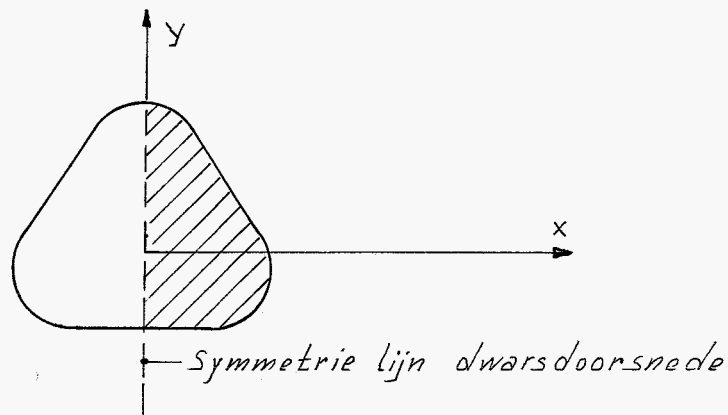


fig. 3.2

Uit een symmetriebeschouwing volgt voor het in fig. 3.2 getekende geval:

$$\tau_{yz} = 0 \text{ voor de lijn } x = 0$$

Wanneer wij de lijn $x = 0$ wensen op te vatten als een begrenzing van het te onderzoeken gebied, dan moet daar voor $\hat{\phi}$ gelden (zie 2.15)

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = 0 \text{ ofwel } \frac{d\hat{\phi}}{dn} = 0 \quad (3.16)$$

Voor een symmetrielijns is deze betrekking steeds juist. Wanneer wij onze aandacht richten op de uitdrukking voor δI in (3.2) en met name op de term:

$$\oint \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) \delta \phi ds =$$

$$\oint \frac{d\phi}{dn} \cdot \delta \phi ds$$

dan was deze uitdrukking langs een materiële rand nul omdat $\delta \phi = 0$. Voor een fictieve rand, samenvallend met een symmetrielijns, is deze term eveneens nul omdat daar

$$\frac{d\phi}{dn} = 0 \quad (\text{zie 3.16})$$

Op grond van het voorgaande is triviaal dat geschikt gebruik gemaakt kan worden van eventueel aanwezige symmetrie in het te onderzoeken gebied.

Wanneer de vector ϕ bepaald is, is het probleem in principe opgelost. Wij zijn echter direct geïnteresseerd in de schuifspanningen τ_{xz} en τ_{yz} (zie 2.14, 2.15)

$$\text{Uit (3.3): } \hat{\phi} = \begin{vmatrix} \hat{N}_i & \hat{N}_j & \hat{N}_m \end{vmatrix} \cdot \phi_e$$

$$\text{volgt: } \begin{vmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{vmatrix} = G\theta \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{G\theta}{2\Delta} \begin{vmatrix} c_i & c_j & c_m \\ -b_i & -b_j & -b_m \end{vmatrix} \cdot \phi_e \quad (3.17)$$

Opm. In form.(10.20) van Zienkiewicz is ten onrechte de factor $\frac{1}{2\Delta}$ niet opgenomen.

Wij constateren dat bij het gekozen element de schuifspanningen in een element constant zijn.

Het is zinvol de torsiestijfheid te berekenen.

Het is duidelijk dat voor het wringend moment M_w geldt (zie fig. 2.1)

$$M_w = \int_F (-\tau_{xz} \cdot y + \tau_{yz} \cdot x) dF \quad (3.18)$$

Met behulp van (2.14) en (2.15) wordt (3.18):

$$\begin{aligned} M_w &= -G\theta' \int_F \left[y \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx dy = \\ &= -G\theta' \int_F \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\phi) \right] dx dy + \\ &\quad + 2G\theta' \int_F \phi dx dy = \\ &= -G\theta' \oint \phi (x n_x + y n_y) + 2G\theta' \int_F \phi dx dy = \\ &\quad 2G\theta' \int_F \phi dx dy \text{ omdat op de rand } \phi = 0 \end{aligned}$$

Er geldt dus:

$$M_w = 2G\theta' \int_F \phi dx dy \quad (3.19)$$

Karakteriseren wij de torsiestijfheid door I_d , gedefinieerd als:

$$M_w = G I_d \theta' \quad (3.20)$$

dan geldt kennelijk:

$$I_d = 2 \int_F \phi dx dy \quad (3.21)$$

De bijdrage aan de torsiestijfheid door een bepaald element, I_{de} , wordt bij het gekozen element eenvoudig:

$$I_{de} = \frac{2}{3} \Delta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \phi_e \quad (3.22)$$

4. Procedure ter berekening van de matrix H_e (3.11) ¹⁾

Wij duiden het element aan als TRIF 3, hetgeen staat voor "triangular element for field problems with 3 nodes".

1) De bijlagen waarnaar verwezen wordt, zullen elders beschreven worden.

Impliciet wordt verondersteld dat wij te maken hebben met 2-dimensionale problemen

Procedure TRIF 3 (x_e, y_e, H_e);

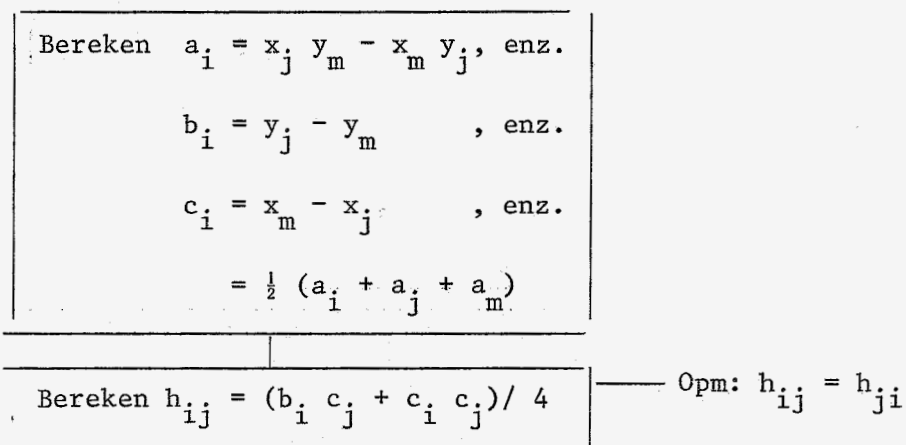
array x, y, H_e ;

Het array x_e bevat de x-coördinaten der knooppunten, dus ($x_i \ x_j \ x_m$);

y_e bevat ($y_i \ y_j \ y_m$)

Het 3 x 3 array H_e bevat de componenten van H_e .

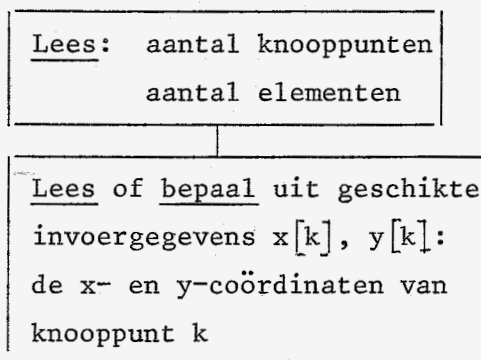
Het blokschema voor bovenstaande procedure luidt:



De tekst der procedure is opgenomen in bijlage

Met de procedure TAU TRIF 3 worden de schuifspanningen volgens (3.17) berekend (zie bijlage)

5. Opbouw computerprogramma.



Lees of bepaal de knooppunt-
nummers horend bij een element
 e_1 ; de waarde van $l_e [e_1, i]$
is het nummer van knooppunt i
(1, 2, of 3 van element e_1).

Bepaal de plaats in ϕ die wordt
ingenomen door de waarde van ϕ
in de knooppunten waar ϕ niet
gegeven is. $l_{np} [k]$ heeft de waar-
de nul, wanneer in knooppunt k ϕ
nul is; $l_{np} [k]$ heeft anders de
waarde die correspondeert met
de plaats van ϕ van knooppunt
 k in de vector ϕ

Bepaal H
Bepaal f

Bereken ϕ

Bereken schuifspanningen
Bereken torsiestijfheid

6. Generalisatie.

Wat

Tot nu toe hebben wij alleen randcondities $\phi = 0$ en $\frac{d\phi}{dn} = 0$ in onze beschouwing betrokken

Wanneer wij b.v. het in ϕ_0 geformuleerde torsieprobleem willen oplossen, dan hebben wij te maken met de randconditie (zie 2.7)

$$\frac{d\phi_0}{dn} = y n_x - x n_y \quad (6.1)$$

De te variëren functionaal wordt in dit geval:

$$I_0 = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dF - \int (y n_x - x n_y) \phi_0 ds \quad (6.2)$$

De tweede term in deze integraal levert alleen een bijdrage in de randpunten van het gebied.

De begrenzing van het gebied is zoals in fig. 6.1. is weergegeven.

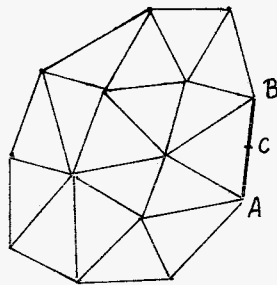


fig. 6.1

Over het gedeelte A-B van de rand verandert ϕ_0 bij TRIF 3 lineair.

Veronderstellen wij dat voor dit deel $(y n_x - x n_y)$ constant wordt genomen (b.v. de waarde in punt C), dan is de bijdrage van dit deel aan I_0 :

$$- \frac{1}{2} (y n_x - x n_y)_C \overline{AB} (\phi_A + \phi_B)$$

Het is duidelijk dat bij randcondities van het type (6.1) bij de keuze van het hier gehanteerde element I_0 te schrijven is als:

$$I_0 = \frac{1}{2} \phi^T H \phi - f_0 \phi$$

waarbij de vector ϕ de onbekende functiewaarden in de knooppunten bevat. De componenten van f_0 , die horen bij inwendige knooppunten zijn nul. Door de knooppunten op de rand van het gebied kunnen de componenten van f_0 op de hiervoor aangegeven manier berekend worden. In fig. 6.2 zijn voor een speciaal geval de waarden van f_0 bij een aantal randpunten weergegeven.

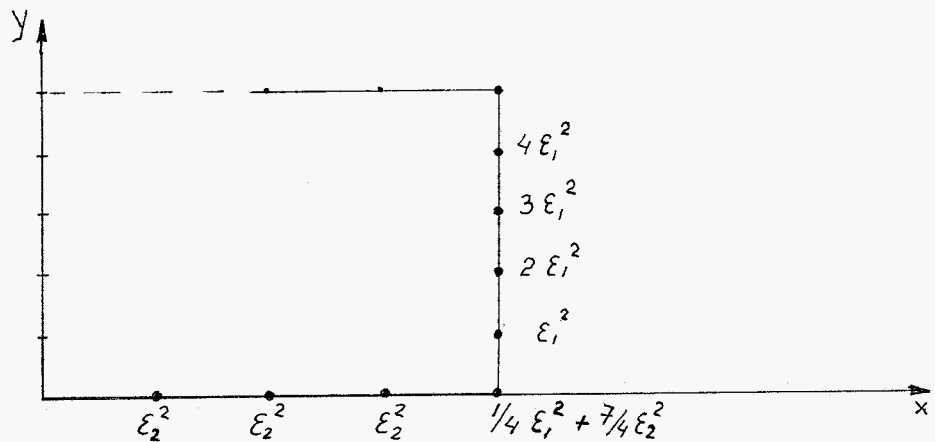


fig. 6.2

f_0 representeert een "randbelasting".

Een andere generalisatie wordt duidelijk wanneer wij ons richten op de functie ψ .

Voorgeschreven is de functiewaarde aan de randen. Deze functiewaarde is niet nul. Wij hebben hier dus te maken met een generalisatie van de voorgeschreven functiewaarde. (vroeger was deze waarde nul)

Een verdere uitwerking zal hier niet gegeven worden.

7. Suggesties.

In de inleiding zijn reeds enige problemen gesuggereerd, die met behulp van de elementenmethode mogelijk opgelost kunnen worden. Wij willen er hier nogmaals expliciet op attenderen.

Gedacht kan worden aan dunwandige, open profielen.

Vragen die gesteld kunnen worden, zijn:

- Wat is de spanningsverdeling in de Saint-Venant theorie met name in de buurt van afrondingen; wat is de invloed van de kromteschaal?
- Wat is de torsiestijfheid van reële profielen; wat is met name de invloed van tapse flenzen?

In de literatuur zijn beschouwingen over deze aspecten bekend.

Een nadeel van het gebruik van de elementenmethode voor dunwandige profielen is, dat de functie ϕ sterk varieert over de dikte van het profiel. In dikte-richting zijn derhalve veel elementen nodig. Dit impliceert dat in de richting der profiellijn zeer veel elementen noodzakelijk zijn.

Ook voor gesloten profielen is de geschetste procedure toe te passen. De vraag hierbij is hoe de constante waarde die door ϕ aan de binnenrand gegeven moet worden, verwerkt wordt. Door Zienkiewicz wordt de holte vervangen door elementen met kleine glijdingsmodulus.

Met behulp van de elementenmethode kan bijvoorbeeld voor rechthoekige kokers een onderzoek naar de waarde van de Bredt-theorie worden uitgevoerd. Het effect van de wanddikte en afrondingen zou nagegaan kunnen worden.

Ook voor balken met massieve dwarsdoorsnede zijn interessante onderzoeken uit te voeren. Gedacht kan worden aan spiegleuven, excentrische gaten enz.

Nagegaan zou kunnen worden of met behulp van de elementenmethode ook torsieproblemen voor assen met variërende dwarsdoorsnede via de daarvoor bestaande theorieën aangepakt kunnen worden.

Inhoudsopgave:

1.	Inleiding	1
2.	De Saint-Venant torsie	2
3.	Het probleem $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2$; $\phi = 0$ op de rand	3
4.	Procedure ter berekening van de matrix H_e	9
5.	Opbouw computerprogramma	10
6.	Generalisatie	12
7.	Suggesties	14