

Digitale signaalverwerking ten behoeve van ruwheidsonderzoek

Citation for published version (APA):

Struik, K. G., & Koning, J. (1977). *Digitale signaalverwerking ten behoeve van ruwheidsonderzoek*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0413). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1977

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

ARK
01
WPA

WT 0413

DIGITALE SIGNAALVERWERKING TEN BEHOEVE
VAN RUWHEIDSONDERZOEK.

Samenvatting van het college
Bijzondere onderwerpen uit de Lengtemeting

Coll.nr. 4.270.0

periode 76/77

Ing. K. Struik

Drs. J. Koning

Typewerk: Mevr. E. Langstadt

Technische Hogeschool
Eindhoven

Augustus 1977

WT Rapport No. 0413

Inhoud

	pagina
Inleiding	2
1. Impulsfunctie	3
2. Overdrachtsfunctie	3
3. Filteren door de konvolutie (analoog)	4
4. Principe van de superpositie (digitaal)	7
5. Overdrachtsfunctie van een dubbel RC-filter	8
6. Filteren door konvolutie met de impulsrespons van het dubbel RC-filter	10
7. Nadelen van het dubbel RC-filter	11
8. Het fase gecorrigeerde filter	13
9. Filteren door konvolutie met de impulsrespons van het fase gecorrigeerde filter	16
10. Numerieke berekening van de ruweidparameters	17
11. Intermezzo	19
12. Korrelatiefuncties en vermogensspectra	19
13. Sampling theorema van Shannon	22
14. Foutenbronnen	23
15. Berekening van de autokorrelatiefunctie en het Fourier spectrum	28
16. Fourier en Laplace transformatie	30
17. Principe van de snelle Fourier transformatie (FFT)	32
18. Literatuur	35

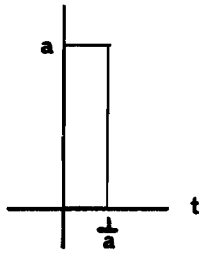
Inleiding

Een oppervlak is opgebouwd uit vormfouten, golving en ruwheid. Bij het bepalen van de ruwheid dient men deze van elkaar te scheiden. De scheiding tussen golving en ruwheid is niet exakt te maken, en zal tevens afhankelijk zijn van de grootte van de ruwheid. Voor analoge meetinstrumenten heeft men een RC-filter (volgens internationaal afgesproken specificaties) in de ruwheidsmeter ingebouwd. Dit filter geeft geen optimale scheiding, maar het is wel eenvoudig te maken. Tijdens het college zal uitgebreid worden ingegaan in de filtertechnieken, zowel voor analoge als digitale signalen. Hiertoe zal tevens de impulsrespons van een filter worden onderzocht. Verder zal bekeken worden wat het uitgangssignaal is van een diskreet ingangssignaal. De overdrachtsfunctie van het RC-filter zal besproken worden, en de nadelen zullen worden behandeld. Dit zal leiden tot het ontwerpen van een nieuw filter, het zogenaamde fase gecorrigeerde filter.

Een ruw oppervlak kan opgebouwd worden uit een reeks sinusvormige signalen. M.b.v. de diskrete Fourier transformatie zullen het power spektrum en de autokorrelatiefunctie van een oppervlak worden berekend. Tevens zullen de hierbij optredende beperkingen ter sprake komen.

1. Impuls functie

De impuls functie speelt bij digitale technieken een belangrijke rol. We gaan eerst kijken wat een impuls is.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a & 0 \leq t \leq \frac{1}{a} \\ 0 & t \geq \frac{1}{a} \end{cases}$$

Fig. 1.1.

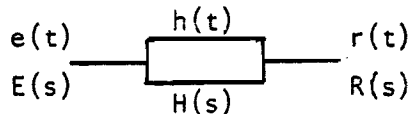
oppervlak $\int_0^{\epsilon} f(t) dt = 1 \quad \epsilon > \frac{1}{a}$

impuls functie $\delta(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} f(t)$

We vermenigvuldigen de eenheid impuls met een konstante k, dit geeft $k\delta(t)$. k wordt de sterkte van de impuls genoemd.

2. Overdrachtsfunctie

Beschouw het volgende netwerk



$r(t)$ wordt gegeven door de volgende integraal

$$r(t) = \int_0^t h(\tau) e(t-\tau) d\tau \quad (\text{konvolutie integraal}) \quad (2.1.)$$

ook geldt

$$R(s) = H(s) \cdot E(s) \quad (\text{Voor Laplace transformatie zie blz 30}) \quad (2.2.)$$

$$r(t) = L^{-1} [H(s) \cdot E(s)]$$

Impulsrespons.

Noem $L^{-1} [H(s)] = r_{\delta}(t)$

dit geeft in (2.1.)

$$r(t) = \int_0^t r_{\delta}(\tau) e(t-\tau) d\tau = \int_0^t r_{\delta}(t-\tau) e(\tau) d\tau \quad (2.3.)$$

We kunnen de tijdresponsie van een netwerk op een willekeurige functie $e(t)$ bepalen met behulp van de inverse transformatie van de overdrachtsfunctie van het netwerk.

Neem als input functie de eenheidsimpuls $\delta(t)$, noem de responsie van het netwerk hierop $r_\delta(t)$, met $L[r_\delta(t)] = R_\delta(s)$. Daar $L[\delta(t)] = 1$ geeft dit in (2.2) $R_\delta(s) = H(s)$.

$$L^{-1}[R_\delta(s)] = r_\delta(t) = L^{-1}[H(s)]$$

Dit zegt dat de inverse transformatie van de netwerkoverdrachtsfunctie gelijk is aan de impulsrespons van het netwerk.

Laten we nu formule (2.3.) eens nader bekijken. We zien dat, als de impuls respons bekend is, de respons op iedere andere functie $e(t)$ is bepaald. We moeten daartoe het produkt nemen van de exitatie op ieder tijdstip τ en de impulsrespons, niet op gelijk tijdstip, maar op een tijd $t-\tau$, en dan integreren (zie hfst. 3).

Een ander gezichtspunt is door te zeggen dat de input functie wordt "gewogen" door de impuls-respons. Dit leidt tot de naam "Weighting function".

3. Filteren door de konvolutie (analoog)

Bij een fysisch realiseerbaar filter start het ingangssignaal op $t = 0$, dus $f(t) = 0$ voor $t < 0$. De impulsrespons van een reëel filter kan niet bestaan voordat het ingangssignaal aanwezig is, $h(t) = 0$ voor $t < 0$. Dit bepaald de integratiegrenzen in de konvolutie integraal

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (3.1.)$$

Op het tijdstip t wensen we het uitgangssignaal $g(t)$ te kennen. Voor bovenstaande formule geldt dus dat $0 \leq \tau \leq t$. Dit betekent dat τ duidt op een tijdstip in het verleden. De vorm $(t-\tau)$ meet de tijd terug in het verleden, en zegt dus als het ware: hoelang is het tijdstip τ , op het moment t , al voorbij. De vorm $h(t-\tau)$ strekt zich dus uit in het verleden, de impulsrespons wordt omgeklapt. Het uitgangssignaal op het tijdstip t , namelijk $g(t)$ is een superpositie van waarden in het verleden van de ingang $f(t)$, die worden vermenigvuldigd met $h(t-\tau)$.

Voor een deterministisch*) ingangssignaal volgt hieronder een voorbeeld.

RC-filter.

Bepaal eerst de impuls-respons.

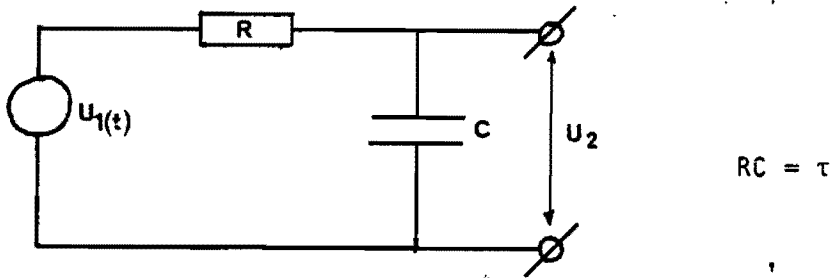


Fig. 3.1.

De D.V. luidt $\tau \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_1$.

Laplace $-\tau U_c(0) + \tau s \overline{U_c}(s) + \overline{U_c}(s) = \overline{U_1}(s)$

$$U_c(0) = 0$$

$$H(s) = \frac{\overline{U_c}(s)}{\overline{U_1}(s)} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Fourier transformatie jwc i.p.v. s

$$H(j\omega) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{\tau}} \quad (\text{sinusvormige signalen})$$

Impulsrespons $R_\delta(s) = H(s)$

$$r_\delta(t) = L^{-1} [H(s)] = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

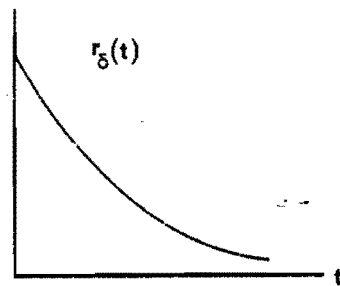


Fig. 3.2. Impulsrespons

Tijdrespons m.b.v. de konvolutie integraal (zie ook fig. 3.3.)

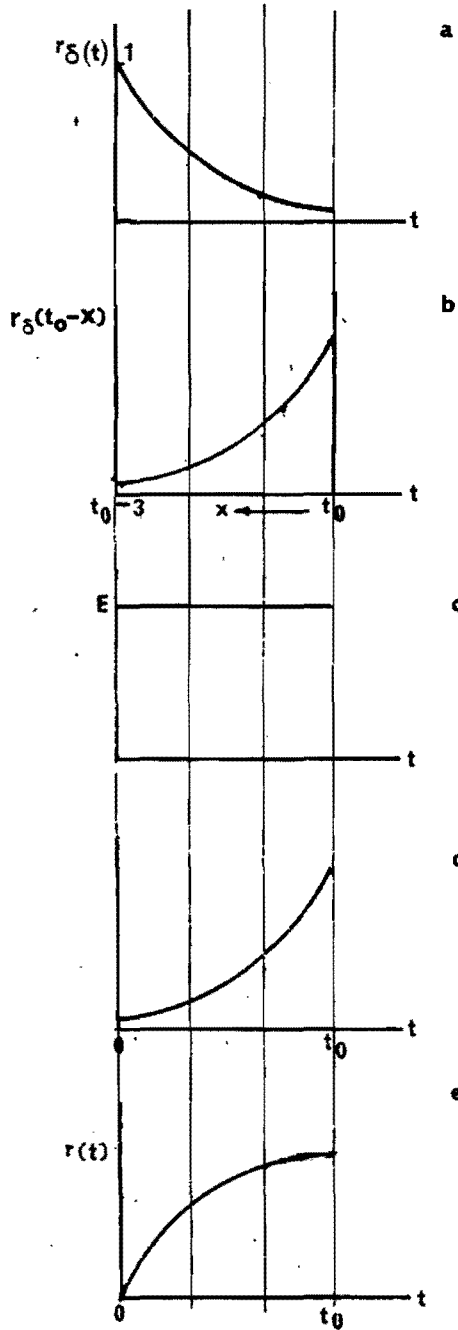
Neem als inputsignaal $U_1(t) = E$.

$$\text{Nu is } r(t) = \int_0^t r_\delta(x) u_1(t-x) dx = \int_0^t r_\delta(t-x) u_1(x) dx$$

$$r(t) = E \int_0^t e^{-\frac{x-t}{\tau}} d \frac{x-t}{\tau} = E (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

*) Een deterministisch signaal is als functie van b.v. de tijd t te schrijven.

Verduidelijking met tekeningen. Uitgangssignaal op $t = t_0$.



a

impuls-respons

$$r_{\delta}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b

gewichtsfunctie

$$r_{\delta}(t_0-x) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_0-x}{\tau}}$$

c

ingangssignaal

d

$$E \cdot r_{\delta}(t_0-x)$$

e

voor $t = t_0$

$$r(t_0) = \int_0^{t_0} E r_{\delta}(t_0-x) dx \quad \text{uitgangssignaal}$$

Fig. 3.3.

Getallen neem $\tau = 1$ en $E=1$

$$r_{\delta}(t) = e^{-t}$$

t	$r_{\delta}(t)$	x	$r_{\delta}(t_0-x)$
0	1	t_0	$r_{\delta}(0) = 1$
1	0,36	t_0-1	$r_{\delta}(1) = 0,36$
2	0,13	t_0-2	$r_{\delta}(2) = 0,13$
3	0,05	t_0-3	$r_{\delta}(3) = 0,05$

Is van een signaal de Laplace transformatie te bepalen, wat niet altijd het geval is, dan kan men beter gebruik maken van formule 2.2.

$$R(s) = H(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = \frac{E}{s}$$

$$R(s) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{E}{s} = \frac{E}{\tau} \left\{ \frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

$$r(t) = E \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}$$

4. Principe van de superpositie (digitaal)

Veronderstel het volgende niet deterministische ingangsignaal $e(t)$

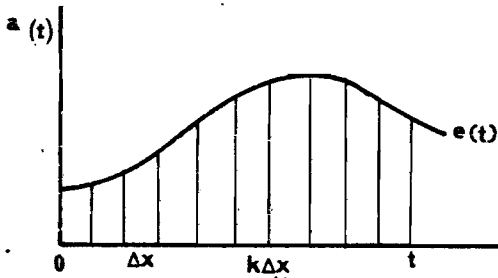


Fig. 4.1.

t is een vaste tijd,
 x is een willekeurige tijd in
 dit interval,
 laat het interval in n gelijke
 tijden zijn verdeeld met inter-
 vallen Δx .

Digitaliseer het signaal op tijden $k\Delta x$ geeft de signaalsterkten $\Delta x e(k\Delta x)$
 De hoogte van de pijlen zijn hiermee evenredig.

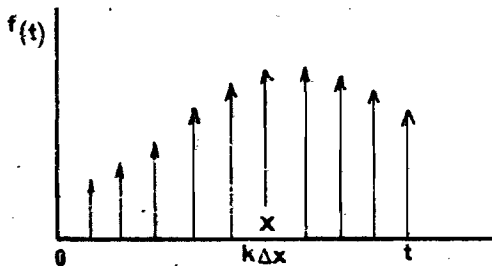


Fig. 4.2.

De impulsen zijn alle van oneindi-
 ge lengte, zodat dit geen goede
 representatie is van de excitatie
 functie.

$$f(t) = \sum_{k=1}^n e(k\Delta x) \Delta x \delta(t - k\Delta x) \quad (4.1.)$$

De respons van een van deze impulsen Δr_k is gelijk aan de sterkte van
 de impuls maal de impulsrespons op de juiste wijze verschoven.

$$\Delta r_k = [e(k\Delta x) \Delta x] r_\delta(t - k\Delta x) \quad (4.2.)$$

Als we nu Δx naar 0 laten naderen, en k evenredig vergroten, zodat $k\Delta x$ konstant is, b.v. punt x , dan geeft dit voor 4.1 en 4.2

$$f(t) = \sum_{k=1}^n e(x) \delta(t-x) \Delta x$$

$$\Delta r_k = e(x) r_{\delta}(t-x) \Delta x$$

De respons op een willekeurige tijd t wordt verkregen door de responsen van alle pulsen voorafgaande aan de tijd t op te tellen.

$r(t)$ is de response van een aantal impulsen.

$$r(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^t \Delta r_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=0}^t e(x) r_{\delta}(t-x) \Delta x = \int_0^t e(x) r_{\delta}(t-x) dx$$

In de limiet representeren de impulsen het ingangssignaal.

Twee belangrijke toepassingen:

- a. numerieke berekening van een netwerk respons,
- b. time domain synthesis.

ad a.

Veronderstel dat we de respons willen weten van een tijdfunctie, die niet in elementaire functies voorgesteld kan worden. Nu is geen transformatie mogelijk of zeer moeilijk. Nu is het gemakkelijk om $e(t)$ in het tijdgebied als een reeks pulsen voor te stellen.

5. Overdrachtsfunctie van een dubbel RC filter

(Filter dat in een ruweidsmeetinstrument is ingebouwd)

Dubbel RC Filter

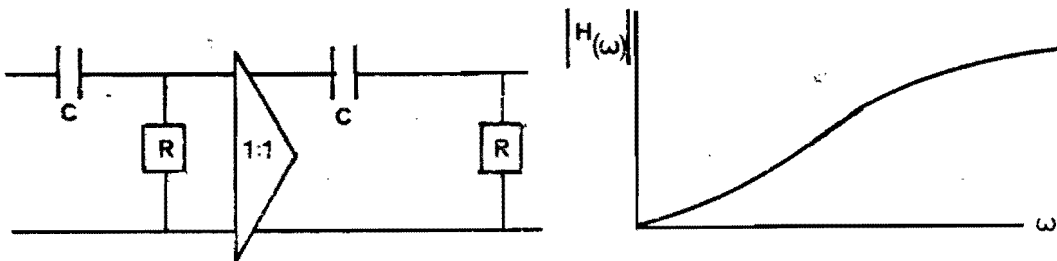


Fig. 5.1.

$$H(s) = \left(\frac{\tau s}{1 + \tau s} \right)^2$$

$$H(j\omega) = \left(\frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \right)^2$$

Impuls response $R_\delta(s) = H(s)$

$$R_\delta(s) = \left(1 - \frac{1}{1 + \tau s} \right)^2 = 1 - \frac{1}{\tau} \frac{2}{s + \frac{1}{\tau}} + \left(\frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)^2$$

$$r_\delta(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \left(2 - \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.1.)$$

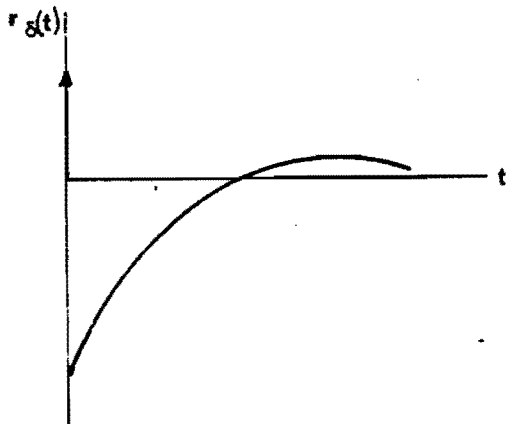


Fig. 5.2.

Dit kunnen we verder uitwerken.

Voor sinusvormige signalen geldt

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{(j\omega RC)^2}{(1 + j\omega RC)^2} \right| = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Voor $\omega = \omega_c$ is $|H(j\omega)| = 0,75$

(per definitie)

$$\therefore RC = \tau = \frac{\sqrt{3}}{\omega_c}$$

Met $f_c = \frac{v}{\lambda c}$ en $\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2\pi v}{\lambda c}$ geeft dit

$$\tau = \frac{\sqrt{3} \lambda c}{2\pi v} \quad (5.2.)$$

Voeren we nu de dimensieloze grootheid $\alpha = \frac{x}{\lambda c}$ in dan krijgen we met

$x = vt$ dat

$$t = \frac{\alpha \lambda c}{v} \quad (5.3.)$$

5.2. en 5.3 invullen in 5.1 geeft

$$h\left(\alpha \frac{\lambda c}{v}\right) = \delta\left(\alpha \frac{\lambda c}{v}\right) - A \frac{v}{\lambda c} \left(2 - A\alpha \right) e^{-A\alpha}$$

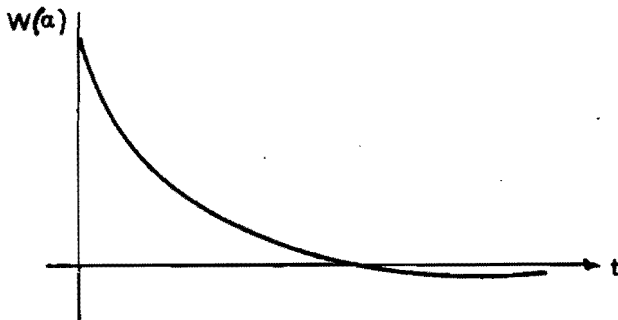
met $A = \frac{t}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

of $\frac{\lambda c}{v} h\left(\alpha \frac{\lambda c}{v}\right) = \frac{\lambda c}{v} \delta\left(\alpha \frac{\lambda c}{v}\right) - A \left(2 - A\alpha \right) e^{-A\alpha}$

Bij $\lambda c = 800 \mu\text{m}$ en een stap van $2,5 \mu\text{m}$ is $\alpha = 1/320$.

Nu is $W(\alpha) = A(2-\alpha A)e^{-\alpha A}$ met $\alpha = \frac{k}{320}$ $k = 1, 2, \dots$

$W(\alpha)$ wordt de "gewichtsfunctie" genoemd.



$W(\alpha)$ van het dubbel RC-filter.

Fig. 5.3.

6. Filteren door konvolutie met de impuls-respons van het dubbel RC-filter

De impuls in de impulsresponsie laat onmiddellijk een puls met waarde $f(t)$ door naar de uitgang, zie fig. 5.2. Het "geheugengedeelte" houdt rekening met vroegere waarden van $f(t)$. Dit geeft ons de negatieve ordinaat van de gemiddelde lijn $m(t)$ van het ingangssignaal op tijdstip t . Het totale uitgangssignaal $r(t) = f(t) - m(t)$. De ordinaat van de gemiddelde lijn $m(t)$ is dus het resultaat van de konvolutie van het ingangssignaal met de negatief omgeklapte impuls respons, zonder begin impuls, $w(t)$. Bij numerieke berekeningen worden de continue functies vervangen door diskrete, met stap $\Delta t = \frac{T}{N}$. Nu is

$$m(m\Delta t) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^m f((m-n)\Delta t) \cdot w(n\Delta t)$$

Tevens kunnen we de impulsresponsie van het standaardfilter praktisch afsnijden voor $t_a = 2,5 \lambda c$.

Zie fig. 6.1. blz. 11.

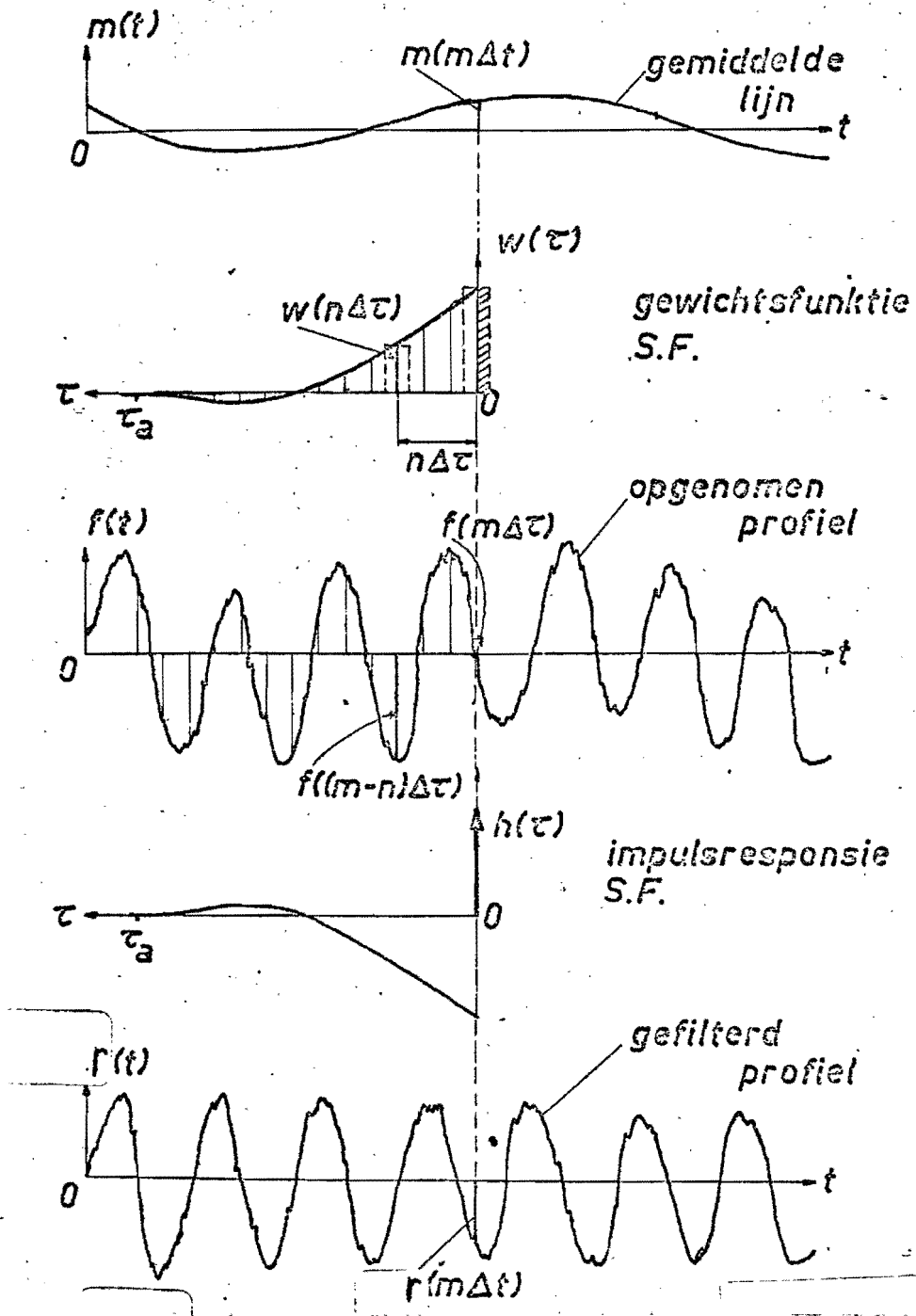


Fig. 6.1. Filtering met het standaardfilter.

7. Nadelen van het dubbel RC-filter

De overdrachtsfunctie van het dubbel RC-filter is als volgt te schrijven:

$$H(j\omega) = A(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

met
$$A(\omega) = \frac{\omega^2 r_c^2}{1 + \omega^2 r_c^2} = \frac{3 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 3 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad RC = \frac{\sqrt{3}}{\omega_c}$$

$$\theta = \arctan \frac{2\sqrt{3} \frac{\omega}{\omega_c}}{3 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1}$$

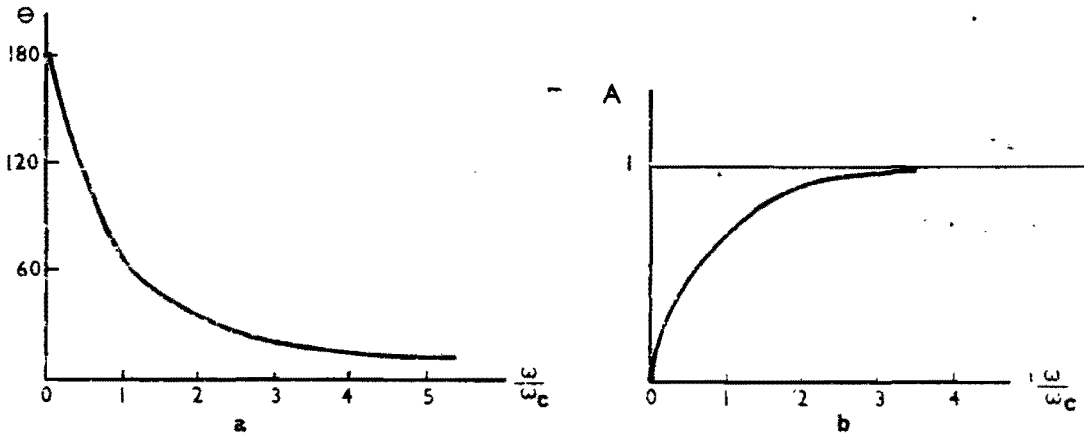


Fig. 7.1.

Fase en amplitude karakteristiek als functie van $\frac{\omega}{\omega_c}$.

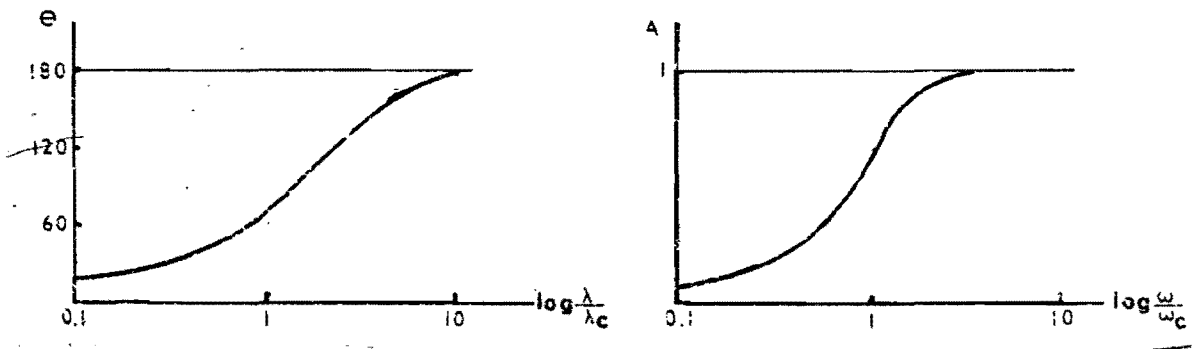


Fig. 7.2

De fase en amplitude karakteristiek.

We zien dat de faseverschuiving afhankelijk is van de frekwentie, en dat deze voor sinusvormige componenten met een golflengte van ongeveer λ_c in de buurt van 60° ligt.

In fig. 7.3 ziet men een sinusvormig en een driehoekig profiel. Het meeschommelen van de gemiddelde lijn met het profiel wordt veroorzaakt door de amplitudevervorming. De verschuiving naar rechts van de gemiddelde lijn t.o.v. het profiel is het resultaat van de faseverschuiving.

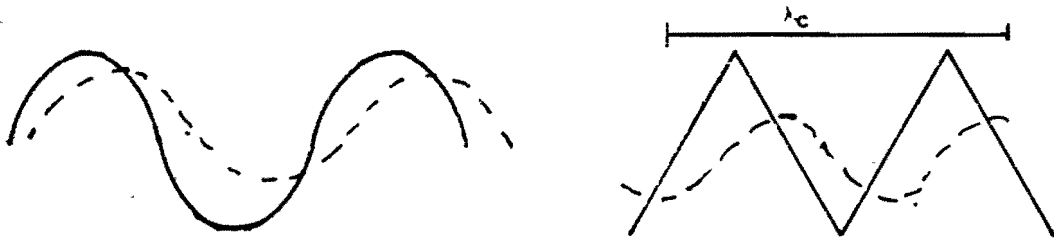


Fig. 7.3.

— profiel
 ---- gemiddelde lijn standaard filter.

8. Het fasegecorrigeerde filter

Een eerste verbetering is een filter met een lineaire fase karakteristiek, zodat alle componenten ^{dezelfde} lineaire faseverschuiving (of dezelfde) zullen ondergaan.

Neem een profiel dat bestaat uit een sinussignaal $f(x) = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda_a}$.
 Zie fig. 8.1.

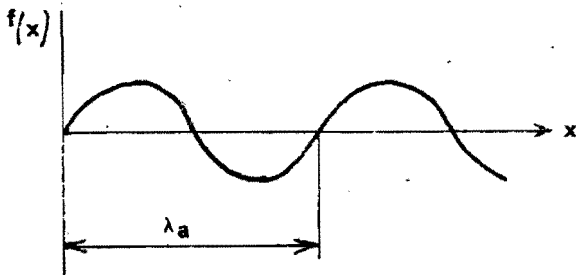


Fig. 8.1. Ruwheidssignaal

We hebben dus hier een ruwheidssignaal met golflengte λ_a .
 Bij opname met een snelheid v wordt dit signaal omgezet in het tijdsdomein $f(t) = A \sin \omega_a t$ met $t = \frac{x}{v}$ en $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda_a}$.

Na doorgang door een elektrisch filter met grensgolflengte λ_c krijgen we het uitgangssignaal $g(t) = A' \sin (\omega_a t + \phi_a)$. Overgang naar de x dimensie geeft het gefilterde profiel:

$$g(x) = A' \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda_a} + \phi_a \right) \text{ met } \phi_a = \frac{2\pi x_a}{\lambda_a}.$$

We willen nu dat alle componenten dezelfde lengteverschuiving ondergaan. Hieruit volgt nu dat

$$\phi_a = \frac{2\pi x_a \lambda_c}{\lambda_c \lambda_a}$$

of
$$\frac{x_a}{\lambda_c} = \frac{\phi_a}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_c} = c$$

$$\phi_a = c \cdot 2\pi \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_c} = c \cdot 2\pi \frac{w_a}{w_c}$$

We zien dus dat de faseverschuiving ϕ_a evenredig moet zijn met de hoek frekwentie w_a .

Hieronder volgt nu een andere aanpak.

Het filter wordt "distortionless" genoemd als zijn respons $g(t)$ op een willekeurige input functie $f(t)$ dezelfde vorm heeft als de input. Dus als $g(t) = Af(t-t_0)$. De Fourier getransformeerde van $f(t)$ en $g(t)$ zijn respectievelijk $F(w)$ en $G(w)$. In het frekwentiegebied geldt dat:

$$G(w) = A(w) e^{-jw t_0} F(w)$$

De overdrachtsfunctie van het filter $H(w) = A(w) e^{-jw t_0}$ is nu volledig bepaald. Algemeen geldt $H(w) = A(w) e^{-j\phi(w)}$. Zo dat voor de fasehoek nu geldt:

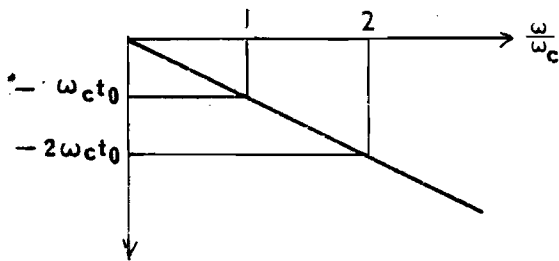


Fig. 8.2. Fasehoek.

$$\phi(w) = -w t_0 = -\frac{w}{w_c} \cdot w_c \cdot t_0$$

Zie fig. 8.2.

De fasehoek is ook

$$\phi(w) = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

dus
$$\frac{2\pi x}{\lambda} = -\frac{w}{w_c} w_c t_0$$

$$\frac{w}{w_c} = \frac{\lambda_c}{\lambda}$$
 dit geeft:

$$\frac{x}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_c}{\lambda} w_c t_0 \text{ of}$$

$$\frac{x}{\lambda_c} = -\frac{1}{2\pi} w_c t_0 = \text{constant}$$

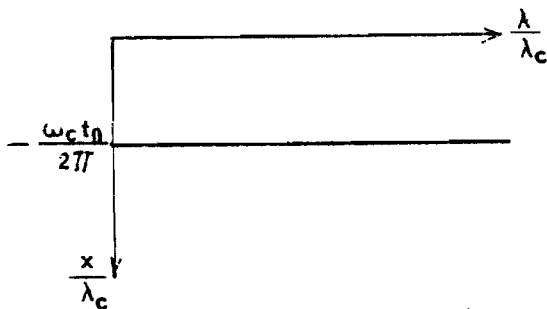
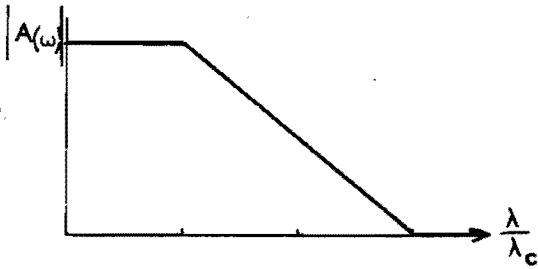


Fig. 8.3. Lengteverschuiving.

We kunnen nu ook de amplitude karakteristiek verbeteren. Uit onderzoekingen van D.J. Whitehouse en R.E. Reason blijkt dat bij een afsnij-



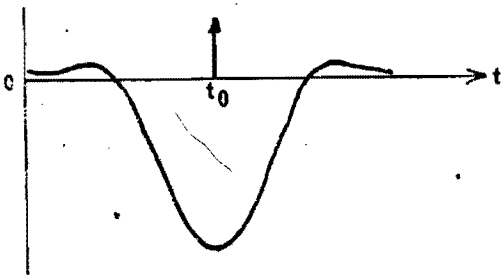
golflengte van $3 \cdot \lambda_c$ de cut of lengte een optimale filtering van het signaal wordt verkregen. Zie fig. 8.4. Het zo verkregen 3 : 1 fase gecorrigeerde filter is volledig gedefinieerd door zijn amplitude en fase karakteristiek

Fig. 8.4. Amplitude karakteristiek.

De impuls-respons van dit filter in het tijdsgebied wordt gegeven door de volgende formule:

$$h(t) = \delta(t-t_0) - \frac{2}{\pi w_2(1-\beta)} \frac{\sin(1+\beta)(t-t_0) \frac{w_2}{2} \sin(1-\beta)(t-t_0) \frac{w_2}{2}}{(t-t_0)^2}$$

Hierin is $\beta = \frac{w_1}{w_2}$. Zie fig. 8.5.



Een eenheidsimpuls zal een tijd t_0 later een signaal doorgeven aan de uitgang. Voor $t < t_0$ en $t > t_0$ hebben we het geheugen gedeelte. Dit filter is fysisch zeer moeilijk realiseerbaar.

Fig. 8.5. Impulsrespons.

De gewichtsfunctie luidt, bij $\lambda_c = 800 \mu\text{m}$ en een stap van $2,5 \mu\text{m}$:

$$w(\alpha) = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi^2} * \frac{\sin(1,5-\alpha) \frac{4}{3} \pi * \sin(1,5-\alpha) \frac{2}{3} \pi}{(1,5-\alpha)^2} \quad \alpha \neq 1,5$$

met $\alpha = \frac{k}{320}$ en $k = 1, 2, \dots, 960$.

9. Filteren door konvolutie met de impulsrespons van het fasegecorrigeerde filter

Om numerieke berekeningen mogelijk te maken, wordt ook hier de impulsrespons afgesneden, en wel zo dat $h(t) = 0$ voor $t \leq 0$ en voor $t \geq 2t_0$ met $t_0 = 1,5 \lambda c$. Hoe de filtering verloopt kan het best aangetoond worden met fig. 9.1.

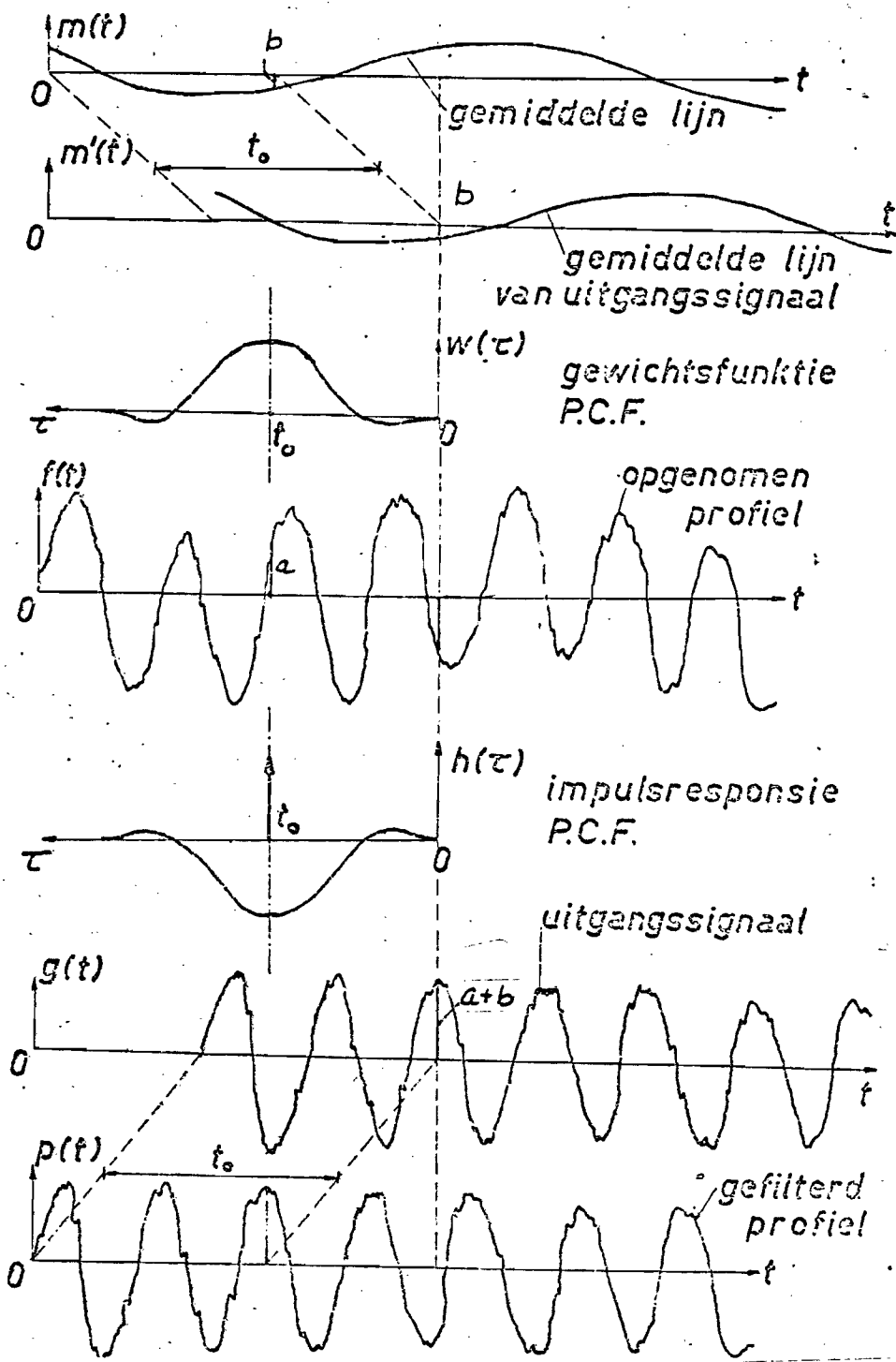


Fig. 9.1. Filtering met het fasegecorrigeerde filter.

Het geheugengedeelte van het uitgangssignaal van het filter op het ogenblik $t = m\Delta t$ is:

$$m'(m\Delta t) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^m f((m-n)\Delta t) W(n.\Delta t)$$

N is aantal ordinaten per grens golflengte: $\frac{T}{N} = \Delta t = \frac{1}{320}$.

$W(n\Delta t)$ is weer de negatief omgeklapte impulsrespons zonder puls.

$m'(t)$ is de ordinaat van de gemiddelde lijn een tijd t_0 geleden.

Dus $m'(t) = m(t-t_0)$. Het uitgangssignaal van het filter op dit ogenblik t is $G(t) = \text{impulsprofielordinaat tijd } t_0 \text{ geleden} - m'(t)$.

Dus $G(t) = f(t-t_0) - m(t-t_0)$. Stellen we door $P(t)$ het gefilterde profiel voor, en door $m(t)$ de gemiddelde lijn, dan is $P(t-t_0) = g(t)$ of $P(t) = g(t+t_0)$.

Om het gefilterde profiel $P(t)$ of de middenlijn $m(t)$ op tijdstip t te kennen, moeten we een konvolutie uitvoeren tot het tijdstip $t+t_0$, dus een tijd t_0 vooruit in de toekomst. Juist hierdoor is het mogelijk fasevervorming te vermijden.

Het standaardfilter houdt enkel rekening met profielordinaten uit het verleden, zodat we de fasevervorming krijgen.

10. Numerieke berekening van de ruweidparameters

Door de opgenomen ruweids ordinaten Y_n , $n = 1, 2, \dots, N$, wordt eerst m.b.v. de kleinste kwadraten methode een middenlijn bepaald. Van de ordinaten t.o.v. deze middenlijn (voor het gemak aangeduid met Y_n) worden de volgende ruweidparameters berekend.

$$\begin{aligned} RA &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n & ; & \quad RT = Y_{\max} - Y_{\min} \\ RMS &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^2} & ; & \quad RP = \text{afstand van } Y_{\max} \text{ tot de kleinste} \\ & & & \quad \quad \quad \text{kwadratenlijn.} \end{aligned}$$

Ordinatenverdeling

De totale diepte van het profiel wordt door parallelle lijnen in equidistante stukken verdeeld (fig. 10.1a).

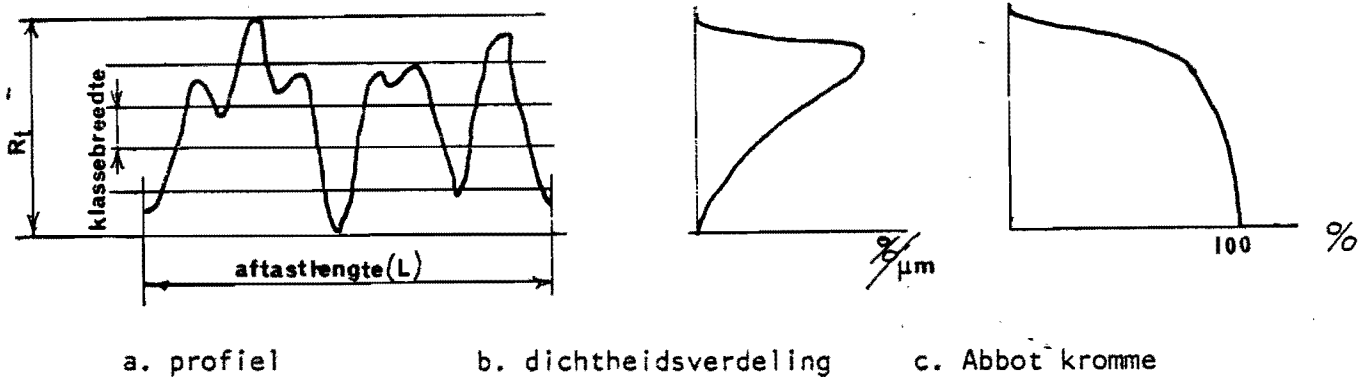


Fig. 10.1.

Het aantal ordinaten dat tussen 2 lijnen ligt M_i , $i = 1 \dots 50$, gedeeld door het totale aantal ordinaten geeft de procentuele dichtheid van die klasse. Dit getal wordt nog gedeeld door de klassebreedte, waardoor de dichtheidsverdeling genormaliseerd wordt. De vorm van de dichtheidsverdeling wordt door 2 parameters aangegeven.

$$\text{Koëfficiënt van scheefheid (skewness)} = \frac{1}{\text{RMS}^3} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^3$$

$$\text{Koëfficiënt van platheid (kurtosis)} = \frac{1}{\text{RMS}^4} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^4$$

De koëfficiënt van scheefheid is nul als de dichtheidsfunctie symmetrisch is om de gemiddelde waard. Als er relatief meer ordinaten in de top van het profiel liggen is de waarde positief, anders negatief. De koëfficiënt van platheid is 3 voor een Gausskromme, de waarde is groter dan 3 voor een spitsere- en kleiner dan 3 voor een vlakkere kromme.

De Abbotkromme is de som van de dichtheidsverdelingen, in formule $\sum_{i=1}^{50} M_i$ (fig. 10.1c).

Hellingsverdeling

De helling van 2 profiel ordinaten wordt gegeven door $Y_1 - Y_2 / \text{stap}$. Een heilingsgebied van $-0,6$ tot $0,6 \mu\text{m}/\mu\text{m}$ blijkt in de praktijk voldoende te zijn. Dit heilingsgebied wordt verdeeld in 60 klassen. Het aantal hellingen per klasse wordt bepaald en gedeeld door het totale aantal hellingen. De hellingsverdeling wordt genormaliseerd door haar te delen door de klassebreedte en wordt daardoor uitgedrukt in $\%/\mu\text{m}/\mu\text{m}$.

Om deze waarde minder ongevoelig te maken voor zeer kleine plaatselijke variaties, die in het gebied van de meetonzekerheid van het ruweheidsinstrument kunnen liggen, wordt de helling niet bepaald tussen 2 opeenvolgende punten, maar over 5 punten.

De RMS waarde van de hellingen wordt berekend volgens:

$$RMS_{slope} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (slope_i)^2}$$

De gemiddelde golflengte (geïntroduceerd door Whitehouse) is gelijk aan:

$$AvWL = 2\pi \frac{RMS}{RMS-slope}$$

Tevens wordt voor ieder van de 5 stukken profiel, ter lengte van λ -cut off (0,8 mm), de parameters RA, RMS, RT en RP berekend.

Nadat de profielordinaten Y_n digitaal gefilterd zijn door het dubbel RC-filter worden bovenstaande parameters wederom berekend. Dit gebeurt eveneens na digitale filtering met het fasegecorrigeerde filter.

11. Intermezzo

Een oppervlak bevat meer informatie als de tot nu toe berekende parameters. er is informatie aanwezig betreffende haar periodiciteit alsmede over de frekwentieverdeling. Het is op het ogenblik mogelijk om met speciale hiertoe ontwikkelde apparatuur autocorrelatie-functies en spectrale verdelingen te verkrijgen (spectrum analyzers). Deze apparatuur is erg duur en tot nu toe voor enkel ruweidsonderzoek in een laboratorium te kostbaar. Door de opkomst van de snelle digitale Fourier transformatie met de komputer (Cooley Tukey Algoritme) kan men in de laboratorium_sfeer m.b.v. digitale technieken de autocorrelatie-functies en spectrale verdelingen van oppervlakken bepalen. In het hierna volgende zal hierop worden ingegaan.

12. Korrelatiefuncties en vermogensspectra

Analoog

Neem 2 begrensde continue functies $f(t)$ en $g(t)$, dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt \quad \text{zijn bepaald en eindig.}$$

Onder de (kruis)korrelatiefunctie van $f(t)$ en $g(t)$ verstaan we:

$$\psi_{fG}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-\tau) dt \quad (\text{convolutie integraal})$$

Voor de ergodische*) signalen geldt

$$\psi_{fG}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t-\tau) dt \quad \text{voor } \tau < 0$$

$$f(t) = g(t) = 0.$$

Als $f(t) = g(t)$ dan vinden we de autokorrelatiefunctie ψ_{ff} :

$$\psi_{ff} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t-\tau) dt$$

met $\tau = 0$ en gemiddelde = 0 volgt $\psi_{ff}(0) = \sigma^2$.

Verder gelden 2 belangrijke relaties: Wiener-Khintchin relaties genoemd:

$$\phi_{XX}(w) = F[\psi_{XX}(\tau)]$$

$$\psi_{XX}(\tau) = F^{-1}[\phi_{XX}(w)]$$

met $\phi_{XX}(w) = F(w)$. $F^*(w) = \text{vermogenspectrum} = |F(w)|^2$

Verklaring van het vermogenspectrum.

Beschouw een weerstand van 1Ω . Het vermogen $w = V(t) \cdot i(t) = V^2(t)$

$$\text{De energie} = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(w) e^{j\omega t} dw}_{V(t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(w) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{j\omega t} dt}_{V(w)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(w) V(-w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(w) V^*(w) dw$$

of
$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |V(w)|^2 dw \quad \text{Stelling van Parseval.}$$

Ter verduidelijking een voorbeeld:

$$F(w) = R(w) + j X(w) = A(w) e^{j\phi_w}$$

*) De verwachtingswaarde van het signaal is onafhankelijk van b.v. de tijd.

Hierin is: $A(\omega)$ = Fourier spectrum van $f(t)$
 $A^2(\omega)$ = energie spectrum
 $\phi(\omega)$ = fase hoek.

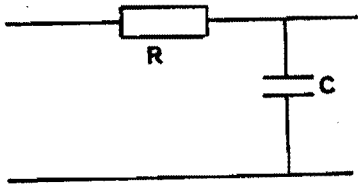


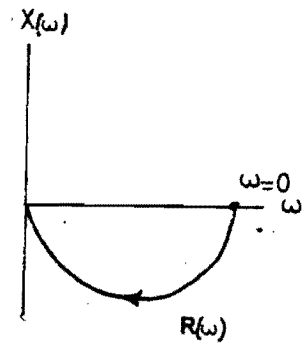
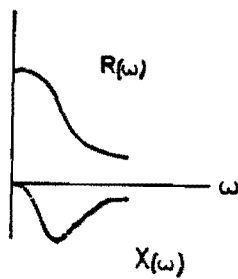
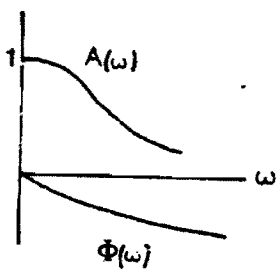
Fig. 12.1. RC-kring.

$$F(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \quad \text{met } \tau = 1$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j \text{bg} \tan \omega}$$

$$= \frac{1}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

(Fig. 12.2.)



Nyquist diagram.

Fig. 12.2.

Diskrete funkties in een eindig interval

i.p.v. funkties $f(t)$ en $g(t)$

2 rijen: $x[0, n-1]$
 $y[0, n-1]$

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

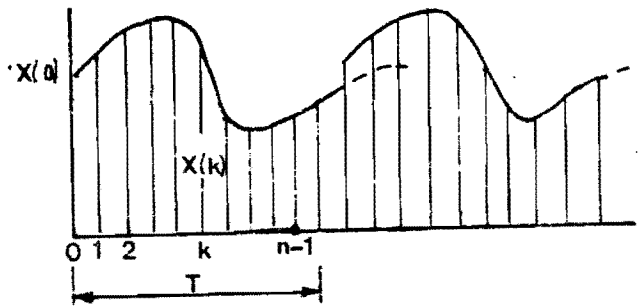


Fig. 12.3.

Def. Kruiskorrelatie functie.

$$1. \quad \psi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x(k) y(k-\lambda) \quad \lambda = 0, 1, \dots, n-1$$

$k-\lambda$ modulo n , als $k-\lambda$ niet tussen 0 en $n-1$ ligt moet er een veelvoud van n worden opgeteld of afgetrokken.

De rekentijd is evenredig met n^2 bewerkingen.

2. Diskrete Fourier-Transformatie D.F.T.

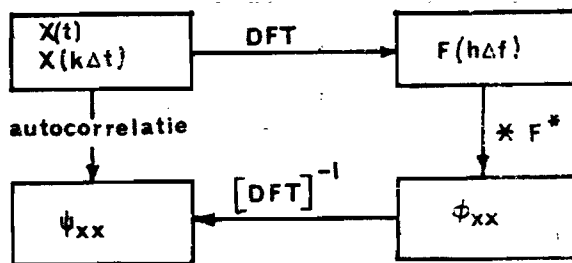
$$F(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi k}{n} h} \quad h = 0, 1, \dots, n-1$$

De rekentijd is evenredig met n^2 bewerkingen.

$$3. \quad \text{D.F.T. } [\psi_{xx}(\lambda)] = F(h) F^*(h)$$

of ook $\psi_{xx}(\lambda) = (\text{D.F.T.})^{-1} [F(h) F^*(h)]$

M.b.v. de snelle D.F.T. is de rekentijd evenredig met $n \log n$ bewerkingen. Via schijnbare omweg grote tijdsbesparing en we verkrijgen tevens het vermogenspectrum.



Het principe van de snelle Fourier-transformatie staat beschreven in hoofdstuk 17 .

13. Sampling theorema van Shannon

In de praktijk meten we gedurende een eindige tijd of over een eindige afstand.

Dan geldt $F_{\max} = \frac{1}{2\Delta t}$ Δt sampling afstand (2,5 μm)

$$F_{\max} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ cycli/mm .}$$

$$\text{Frekwentie step} = \frac{2 F_{\max}}{N} = \frac{1}{\Delta l \cdot N} = \frac{1}{L}$$

$$\text{Aftastlengte } L = N \cdot \Delta l$$

$$\text{Frekw. stap} = \frac{400}{2048} = 0.195 \approx 0,2 \text{ cycl/mm}$$

$$\text{golglente } \lambda \approx 5 \text{ mm}$$

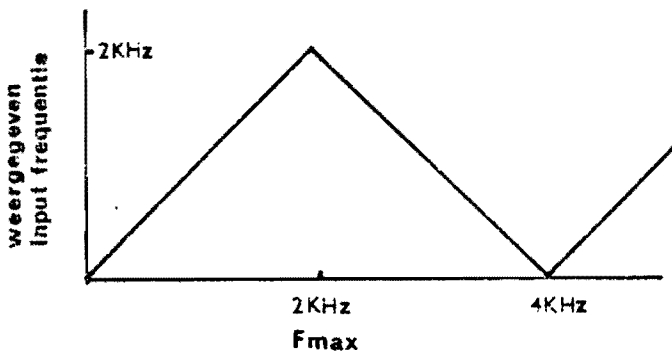
Voor lagere frekwenties dient men langer te meten (grotere aftastweg)

Voor hoge F_{\max} dient men snel achter elkaar te meten.

14. Foutenbronnen

a. Aliasing errors

Als men een analoge signaal heeft met een bepaalde max. frekwentie F , en er wordt niet snel genoeg gemeten (dus F_{\max} is kleiner dan F), dan komen deze frekwenties in een lagere frekwentie tevoorschijn, en wel zoals in fig. 14.1 is aangegeven.



2,2 kHz zal gezien worden als 1,8 kHz enz.

Fig. 14.1. inputfrekwentie.

Neem als voorbeeld het signaal van fig. 14.2. In fig. 14.2a is F_{\max} getekend. $F_{\max} = \frac{1}{2} \text{ cycl/cm}$, $\Delta l = 1 \text{ cm}$ en $L = 20 \cdot \Delta l = 20 \text{ cm}$,
frekwentiestap $= \frac{1}{L} = \frac{1}{20}$.

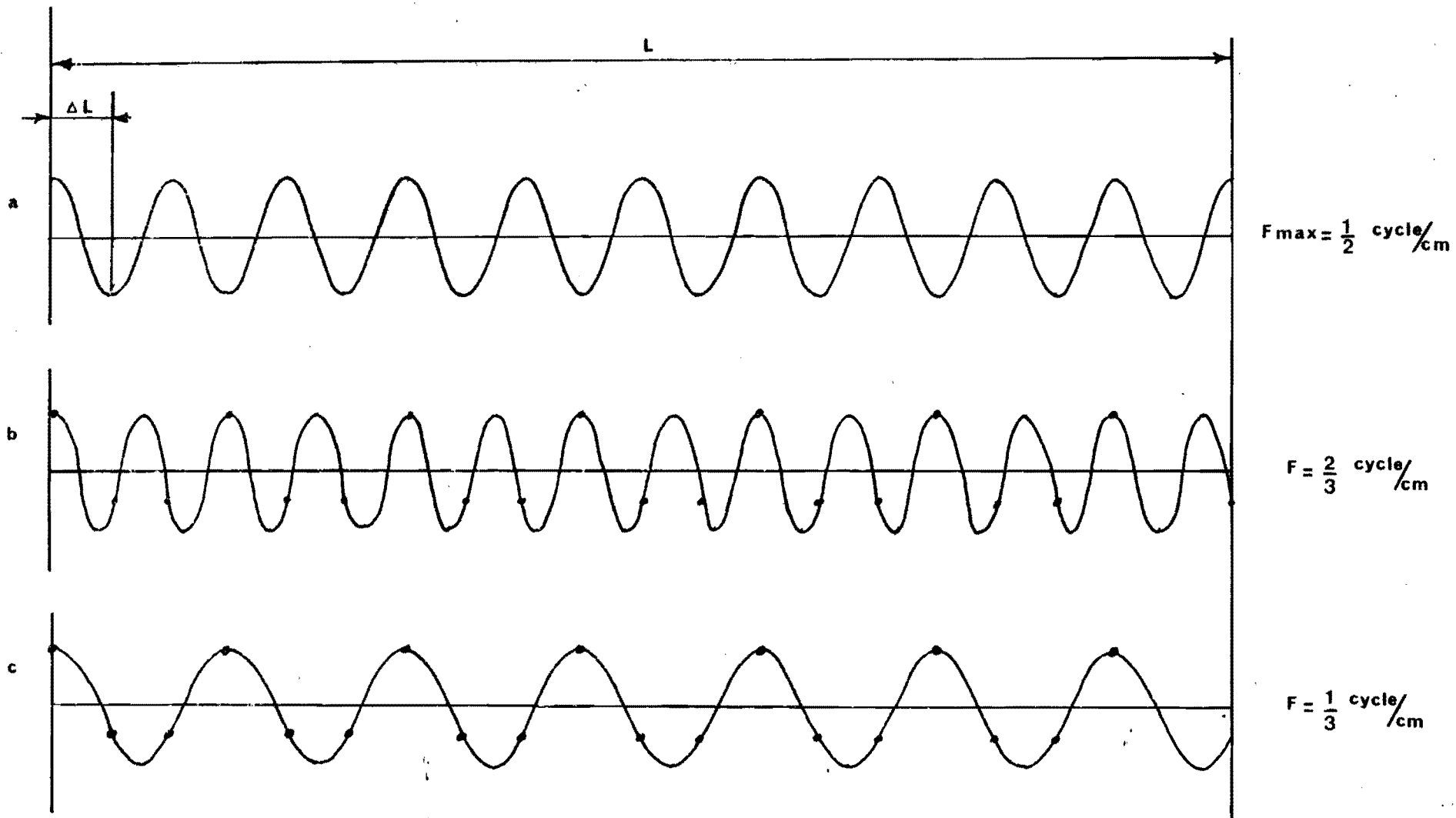


Fig. 14.2.

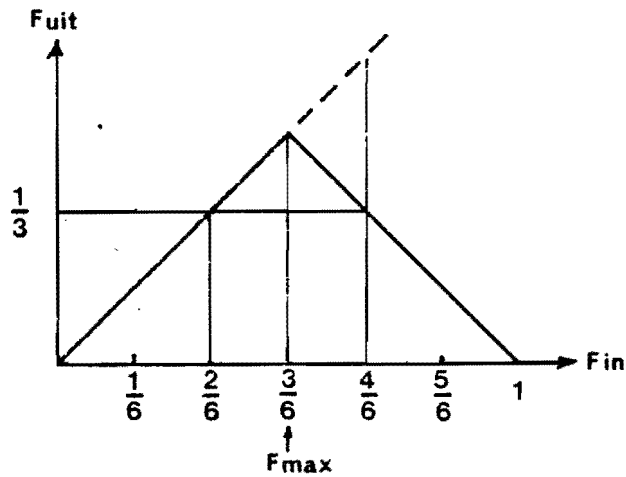


Fig. 14.3.

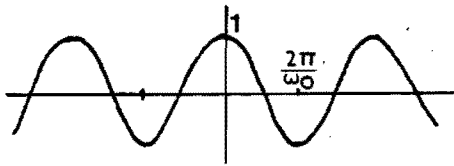
Fig. 14.2b toont een signaal met een frekwentie van $2/3$ cycl/cm. Wordt dit signaal nu gesampeld met een Δl van 1 cm dan vinden we de in de figuur aangegeven meetpunten. Door deze meetpunten gaat ook een signaal met een frekwentie van $1/3$ cycl/cm (zie fig. 14.2c). Dus frekwenties hoger dan F_{\max} geven een bijdrage in de lagere frekwentie (fig. 14.3). Dit effect wordt ook wel "Fall back" genoemd.

b. Window error

Analoog

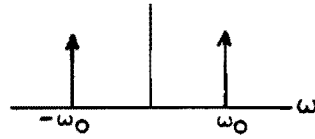
Wordt veroorzaakt omdat het signaal niet periodiek is gedurende de opneemtijd.

1. Dit kan verbeterd worden door langere sampling tijd, dan wordt de breedte van $G(w)$ (fig. d) kleiner.
2. Door een andere venstervorm te kiezen, o.a. Hanningvenster.



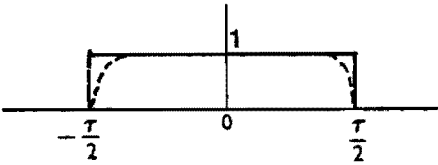
$$f(t) = \cos w_0 t$$

a.



b.

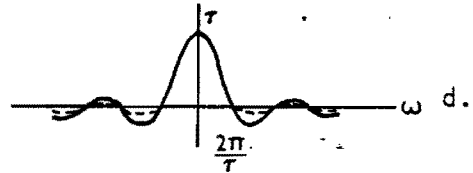
$$F(w) = \frac{\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)}{2}$$



$$g(t) = 1 \quad |t| < \frac{\tau}{2}$$

$$= 0 \quad |t| > \frac{\tau}{2}$$

c.

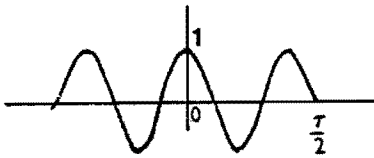


d.

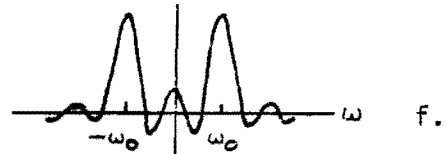
$$G(w) = \tau \frac{\sin\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\left(\frac{w\tau}{2}\right)}$$

$$e(t) = f(t) \cdot g(t)$$

$$E(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) G(w-s) ds$$



e.



f.

Fig. 14.4.

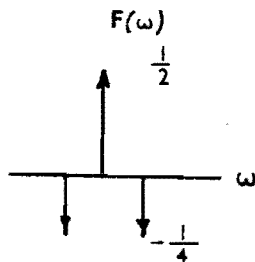
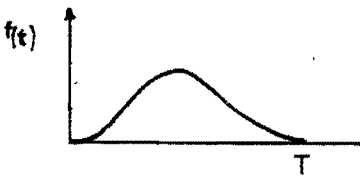


Fig. 14.5.

Betere amplitude nauwkeurigheid maar grotere frekwentie-onzekerheid.

$$g(\tau) = \frac{1 - \cos \frac{2\pi\tau}{T}}{2} \quad \text{Hanning-venster.}$$

Digitaal

Ls is de periode van de sinus, met n een geheel getal. De sinus "past" in het venster als $L = n \cdot Ls$.

De frekwentie van de sinus $f_s = \frac{1}{Ls}$ en $f = \frac{1}{L}$ (frekwentiestap)

$$f_s = n \Delta f \quad \text{of} \quad w_s = n \Delta w$$

Dit wil zeggen dat de Fourier getransformeerde precies op $n\Delta\omega$ ligt.

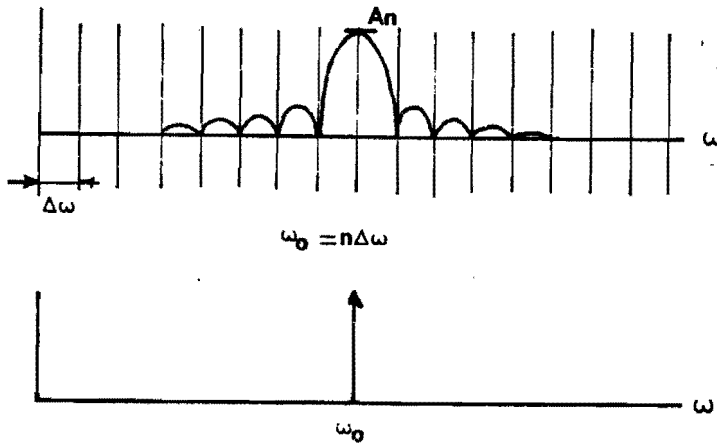


Fig. 14.6.

is n niet geheel dan krijgen we het volgende

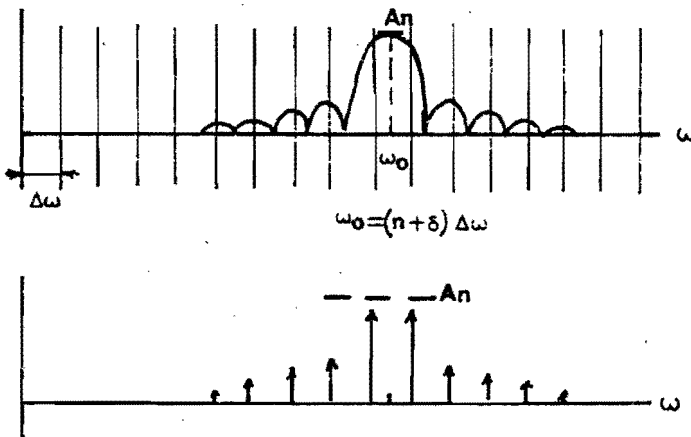


Fig. 14.7.

c. Wrap around error

Een probleem bij de correlatie berekening ligt in het feit dat het gebruikte algoritme, hoewel ze slechts een functie opgegeven krijgt binnen een eindig interval bepaald door het rechthoekig venster, dit interpreteert als een functie die ook buiten dit interval bestaat in de vorm van een periodieke herhaling. Dit heeft tot gevolg dat bij de correlatie berekening bij verschuiving van λ , b.v. de laatste ordinaat waarde $x_{(n-1)}$ niet wordt vermenigvuldige met $x_{(n-1+\lambda)}$, maar met $x_{(\lambda+1)}$ (indices worden modulo n beschouwd).

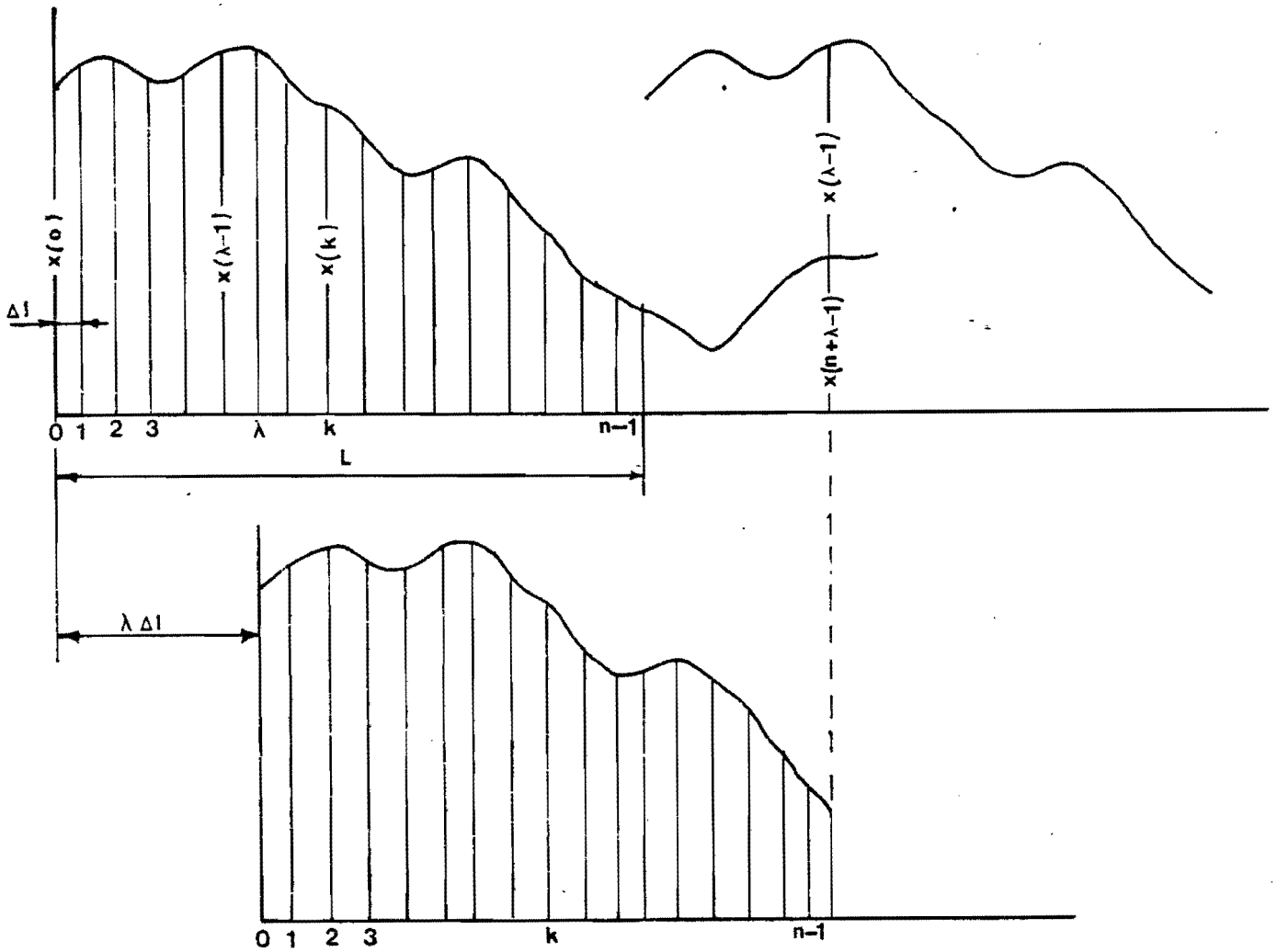


Fig. 14.8.

De hierdoor onstane afwijking noemt men wrap around error.

Om deze te vermijden berekent men vaak een quasi-autocorrelatie functie, door op de gegevens eenmaal een volledig venster van lengte L en eenmaal een venster ter lengte $L/2$ toe te passen, en de twee ontstane funkties met elkaar te correleren.

15. Berekening van het frekwentie spectrum en de autocorrelatie functie

Voor bovenstaande berekening maken we gebruik van 2048 ordinaat waarden ($2048 = 2^{11}$, dit i.v.m. FFT, zie hoofdstuk 17). We maken 2 series ordinaat waarden, het ene bevat 2048 ordinaatwaarden, x signaal, en het andere signaal, y , bevat 1024 ordinaten die gelijk zijn aan de eerste 1024 van

het x signaal en 1024 ordinaten gelijk aan 0. Schematisch weergegeven in fig. 15.1a.

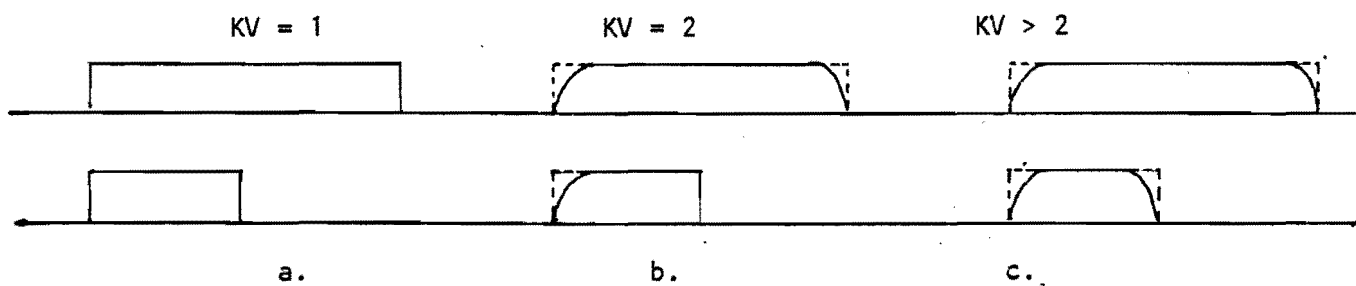
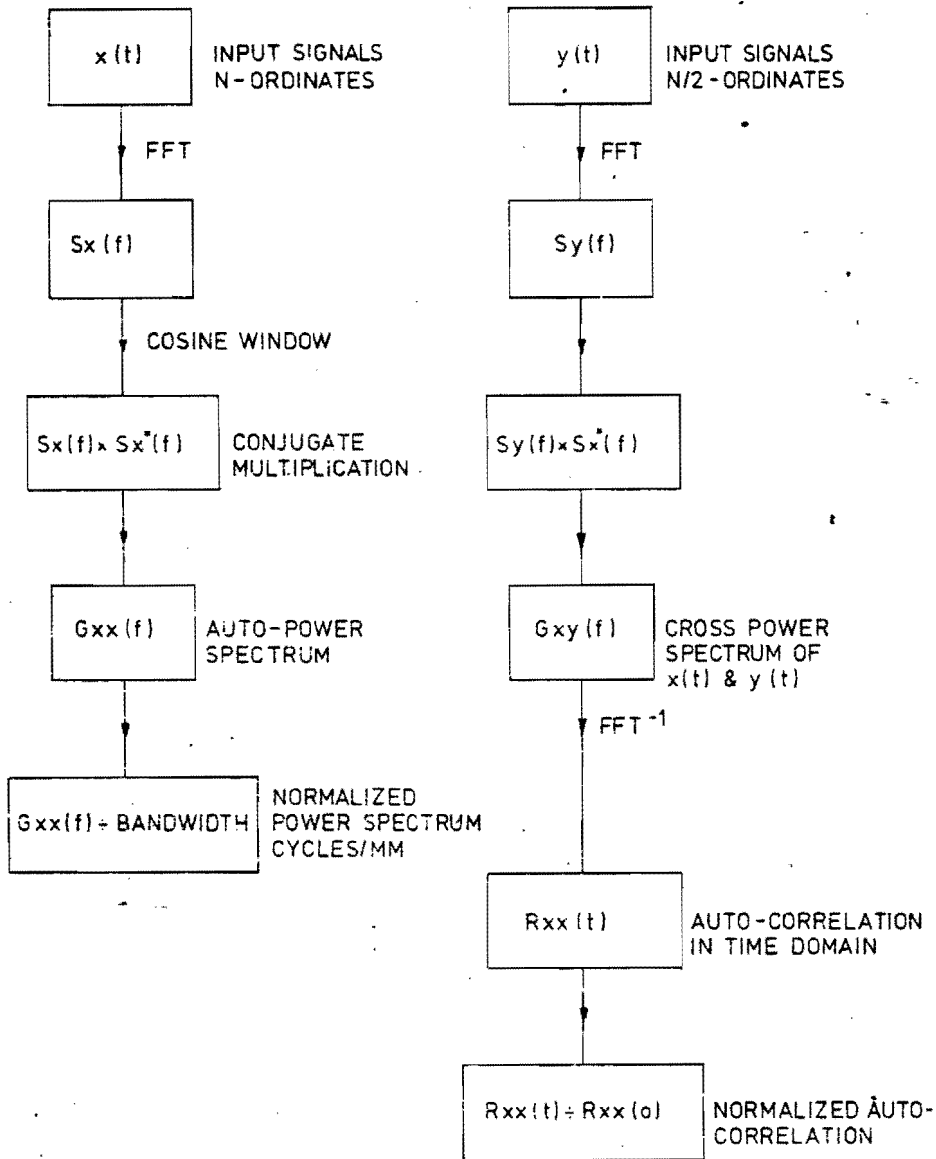


Fig. 15.1.

Afhankelijk van de waarde van een bepaalde faktor (KV) in het programma worden de einden cosinusvormig afgerond (de eerste en laatste 20 ordinaten) Zie fig. 15.1b en c. Meestal wordt bij de berekeningen $KV = 2$ gekozen. De berekeningen vinden plaats volgens het schema in fig. 15.2. Hierin staat FFT voor de Fast Fourier Transformatie. Om het power spectrum te normaliseren, wordt het gedeeld door de bandbreedte in $\text{cycl}/\mu\text{m}$, zodat de dimensie μm^3 wordt. Theoretisch zou men de inverse Fourier transformatie toe kunnen passen op het verkregen autopower spectrum. Dit zou aanleiding geven tot de besproken "wrap around error". Daarom wordt het cross power spectrum berekend van de 2 signalen x en y en wordt hierop de inverse Fourier transformatie toegepast. Om deze functie te normaliseren wordt ze gedeeld door de waarde die overeenkomt met een verschuiving nul.

De fase informatie gaat bij de autocorrelatie functie verloren. Een sinusvormig of een cosinusvormig signaal (90° faseverschuiving) hebben beide een cosinusvormige autocorrelatiefunctie.

Zie fig. 15.2 op biz. 30.



The Fourier transform

Fig. 15.2.

16. Laplace en Fourier transformaties

Laplace transformatie (enkelzijdig, $f(t) = 0$ voor $t < 0$). Definitie:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = L[f(t)]$$

inverse Laplace transformatie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_j - \infty}^{c_j + \infty} F(s) e^{st} ds$$

Tabel Laplace transformaties:

$f(t)$	\leftrightarrow	$F(s)$	geldig voor
c		$\frac{c}{s}$	$s > 0$
ct^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}		$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$t^n e^{at}$		$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$\cos bt$		$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\sin bt$		$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\delta(t)$		1	

Eigenschappen van Laplace transformaties:

$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-1} f(0)$
$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$

Er bestaat ook nog de dubbelzijdige Laplace transformatie

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

hierop gaan we niet verder in.

Fourier transformaties

In bovenstaande Laplace transformaties kan s complex zijn, $s = \alpha + \beta j$. Vervangen we s door $-j\omega$, dan ontstaat als bijzonder geval van de tweezijdige Laplace transformatie de Fourier transformatie

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

met inverse

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

De Laplace transformatie heeft een minder snel aansprekende interpretatie. Aanvankelijk werd hij slechts beschouwd als een wiskundig hulpmiddel om problemen (o.a. met beginwaarde en inschakelverschijnselen) te vereenvoudigen. In de moderne theorie van elektrische kringen krijgt de Laplace transformatie echter wel een interpretatie, en bepalen polen en nulpunten het gedrag van een elektrische kring.

17. Principe van de snelle Fourier transformatie (FFT)

De algemene schrijfwijze van een getal is:

$$0 \leq i \leq n \quad n = 1000 = 10 \times 10 \times 10 \\ = n_1 \times n_2 \times n_3$$

$$i = i_2 \cdot 10^2 + i_1 \cdot 10^1 + i_0 \quad i_2 = 0,1 \dots q = 0,1 \dots, n_3^{-1} \\ i = i_2(n_1 n_2) + i_1 n_1 + i_0 \quad i_1 = 0,1 \dots q = 0,1 \dots, n_2^{-1} \\ i_0 = 0,1 \dots q = 0,1 \dots, n_1^{-1}$$

Analoog bij willekeurige ontbinding $n = n_1 n_2 n_3 \dots n_m$.
Ieder getal i kan geschreven worden als:

$$i = i_{m-1} \cdot P_{m-1} + i_{m-2} \cdot P_{m-2} + \dots \quad i_0 P_0$$

met

$$P_0 = 1 \quad i_0 = 0,1 \dots, n_1^{-1} \\ P_1 = n_1 \quad i_1 = 0,1 \dots, n_2^{-1} \\ P_2 = n_1 \cdot n_2 \\ \vdots \\ P_{m-1} = n_1 \cdot n_2 \dots n_{m-1} \quad i_{m-1} = 0,1 \dots, n_m^{-1}$$

$$i_0 = \frac{\text{mod}(i, P_1)}{P_0} \\ i_j = \frac{\text{mod}(i, P_{j+1}) - \sum_{k=0}^{j-1} i_k P_k}{P_j}$$

$\text{mod}(i, P_{j+1})$ is de rest van de deling $\frac{i}{P_{j+1}}$. De geïnverteerde van een getal i is g zodanig dat

$$g = i_0 q_{m-1} + i_1 q_{m-2} + \dots + i_{m-1} q_0$$

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = n_m$$

$$q_2 = n_m \cdot n_{m-1}$$

⋮

$$q_{m-1} = n_m \cdot n_{m-1} \cdots n_2$$

Dezelfde coëfficiënten i_j , ald die behorende bij het getal i , maar in omgekeerde volgorde.

a. Beschouw de term $e^{+j \frac{2\pi}{n} b} = w$

$$w^b = w^{b+n} = w^{b+kn} \quad (w^n = w^0 = 1)$$

$$(w^b = e^{j \frac{2\pi}{n} b} \quad w^{b+n} = e^{j \frac{2\pi}{n} (b+n)} = e^{j \frac{2\pi b}{n}} \cdot e^{j 2\pi b} = e^{j \frac{2\pi b}{n}})$$

b. Het verwerken van de parameters h en k volgens een veralgemeende schrijfwijze.

Hierdoor wordt het mogelijk in het produkt $h.k$ de veelvouden van n af te scheiden, zodat de uitdrukking

$$e^{-j \frac{2\pi hk}{n}} = w^{-hk}$$

sterk vereenvoudigd kan worden (zie a.).

Voorbeeld: $n = n_1 \cdot n_2$ (ontbinding in 2 deelfactoren).

Algemene schrijfwijze van h en k :

$$h = h_1 \cdot n_1 + h_0$$

$$h_0 = 0, 1, \dots, n_1 - 1$$

$$h_1 = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

$$k = k_1 \cdot n_2 + k_0$$

$$k_0 = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

$$k_1 = 0, 1, \dots, n_1 - 1$$

Nu wordt

$$F(h) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(k) e^{-j \frac{2\pi hk}{n}} \quad h = 0, 1, \dots, n-1$$

$$F(h_1 n_1 + h_0) = \frac{1}{n} \sum_{k_0=0}^{n_2-1} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} X(k_1 n_2 + k_0) w^{-(h_1 n_1 + h_0) \cdot (k_1 n_2 + k_0)}$$

Volgens a is $w^{h_1 k_1 n_1 n_2} = w^{h_1 k_1 n} = w^0 = 1$.

$$F(h_1 n_1 + h_0) = \frac{1}{n} \sum_{k_0}^{n_2-1} \left[\sum_{k_1}^{n_1-1} x(k_1 n_2 + k_0) w^{-h_0 k_1 n_2} \right] w^{-h k_0}$$

Stel nu:

$$X_1(h_0 n_2 + k_0) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} x(k_1 n_2 + k_0) w^{-h_0 k_1 n_2} \quad \text{A.}$$

$$X_2(h_0 n_2 + h_1) = \sum_{k_0=0}^{n_2-1} x_1(h_0 n_2 + k_0) w^{-h k_0} \quad \text{B.}$$

dan is

$$F(h_1 n_1 + h_0) = \frac{1}{n} X_2(h_0 n_2 + h_1) \quad \text{C.}$$

- a. x_1 berekenen uit x volgens A.
- b. x_2 berekenen uit x_1 volgens B.
- c. x_2 invertieren en delen door n om de rij F volgens C. te verkrijgen; $(h_0 n_2 + h_1)$ is het geïnverteerde getal van $(h_1 n_1 + h_0)$.

$h_0 n_2 + h_1$ is de geïnverteerde van $h_1 n_1 + h_0$.

Volgens a. $n_1 \cdot n$ elementaire bewerkingen.

b. $n_2 \cdot n$ " "

Totaal $n \cdot (n_1 + n_2)$

Tijd voor inversie verwaarloosbaar.

Algemeen $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_m$ nu is de tijd evenredig met $n(n_1 + n_2 \dots n_m)$; noem alle $n_i = r$ ($n = r^m$) dan is de benodigde rekentijd evenredig met $n m r = n \log n$.

Bewijs:

$$n = r^m \quad \text{en} \quad t = n \cdot m \cdot r$$

Voor welke r is t minimaal.

$$\log n = m \log r \quad \rightarrow \quad t = n \frac{\log n}{\log r} \cdot r$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{(\log r - 1)}{(\log r)^2} n \cdot \log n$$

Extreem als $\log r = 1$ dus als $r = e$, nu is $t = n^e \log n$.

18. Literatuur

- Papoulis : The Fourier integral and its applications. bse BJ 6205
- György, F. : Laplace transform in engineering. bse BJ 6501
Fourier transforms and convolution. bsa BJ 6101
- Otnes and Enochso : Digital time series analysis. bsa BLt 7231
- Seshr and Baibabian : Linear network analyses. blu EB 5902
- Carson, J.R.: Electronic circuit theory on the operational calculus. bsa BJ 5304
Measurement and analyses of random data. bsa BL 6607