

Eenvoudige modellen voor composieten met korte vezels

Citation for published version (APA):

van der Wijst, M. W. M. (1992). *Eenvoudige modellen voor composieten met korte vezels*. (DCT rapporten; Vol. 1992.028). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Eenvoudige modellen voor composieten
met korte vezels

M.W.M. van der Wijst

Id.nr: 256199

Veldhoven, maart 1992

Stageverslag

WFW-rapport: 92.028

Eenvoudige modellen voor composieten met korte vezels

M.W.M. van der Wijst

ID.NR: 256199

Begeleider: Dr.Ir. P.J.G. Schreurs

Veldhoven, maart 1992

Stageverslag

WFW-rapport: 92.028

TU Eindhoven
Faculteit der Werktuigbouwkunde
Vakgroep WFW

Samenvatting

In dit verslag worden eenvoudige modellen beschreven om de materiaaleigenschappen van een composiet met korte vezels te berekenen. Deze vezels kunnen alle in dezelfde richting liggen of in statistisch verdeelde richtingen.

Er kunnen ook laminaateigenschappen worden berekend. De invloed van de hechting tussen de lagen wordt gemodelleerd met interfacelagen, waarvan de elasticiteitsmodulus en dikte kan worden gevarieerd.

De berekeningen worden uitgevoerd met behulp van een 20-tal M-files in PC-Matlab.

Er zijn eenvoudige trekproeven uitgevoerd om een beeld te krijgen van de overeenstemming tussen model en werkelijkheid.

Inhoudsopgave

| | |
|---|-----------|
| Samenvatting | i |
| Dankwoord | iii |
| Inleiding | 1 |
| 1 Theorie | 2 |
| 1.1 Constitutief gedrag | 2 |
| 1.2 Lineaire plaatbuigtheorie | 4 |
| 1.3 Laminaten | 6 |
| 2 Verschillende modellen | 11 |
| 2.1 Composiet met unidirectionele vezels in 1-richting | 11 |
| 2.2 Composiet met unidirectionele vezels in willekeurige richting . | 15 |
| 2.3 Composiet met vezels in willekeurige richtingen | 18 |
| 2.4 Laminaten met korte vezels | 23 |
| 2.5 Invloed van de hechting tussen de laminaatlagen | 25 |
| 2.6 Overeenstemming met experimenten | 27 |
| 3 Hoe werkt het programma | 29 |
| 4 Experimenten | 31 |
| 5 Conclusies | 34 |
| Bijlage A | b.1 |
| Bijlage B | b.3 |
| Bijlage C | b.26 |

Dankwoord

Bij het uitvoeren van deze stage, met name het experimentele gedeelte, zijn mij een aantal mensen behulpzaam geweest, die ik bij deze daarvoor wil bedanken. Met de hulp en uitleg van Hr. Boekholt was het mogelijk in T-laag trekstaven te maken bestaande uit polystyreen en glasvezels. Leon Govaert heeft het functioneren van de FRANK trekbank in het Polymerenlab uitgelegd, en heeft enkele nuttige tips gegeven. Tenslotte wil ik mijn begeleider Piet Schreurs bedanken voor alle uitleg en op- en aanmerkingen, waar ik veel profijt van gehad heb.

Inleiding

Vezelversterkte composieten kunnen bestaan uit lange of korte vezels. Dit rapport houdt zich bezig met de tweede categorie. Voor composieten met unidirectionele korte vezels heeft R. Ramaekers [1] analytische 2D-modellen geformuleerd.

In werkelijkheid liggen korte vezels nooit precies in één richting, maar zijn de vezelrichtingen statistisch verdeeld. In het eerste deel van hoofdstuk 2 worden voor deze situatie (analytische) modellen te geformuleerd. In het tweede deel vindt een uitbreiding naar meer lagen plaats, zodat er modellen ontstaan voor laminaten. De hiervoor relevante theorie wordt eerst in hoofdstuk 1 behandeld.

In hoofdstuk 3 is in het kort de werking van het rekenprogramma, bestaande uit M-files, beschreven. De programmatekst van de M-files is te vinden in bijlage B.

Om de modellen aan de realiteit te toetsen zijn trekproeven gedaan aan polystyreen/glasvezel, zoals beschreven wordt in hoofdstuk 4. De resultaten van de trekproeven zijn getabelleerd in bijlage C.

Hoofdstuk 5 tenslotte is gewijd aan de conclusies.

1 Theorie

1.1 Constitutief gedrag

Constitutief gedrag is dat deel van het gedrag van een materiaal dat niet meer met algemeen geldende fysische wetten te beschrijven is, maar dat materiaalafhankelijk is. Dit gedrag kan worden beschreven met constitutieve wetten, zoals de wet die het verband beschrijft tussen een opgelegde spanning en de resulterende rek. De algemene constitutieve vergelijking voor deze spanning σ luidt [2]:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= N\{F(\tau) \mid \tau \leq t\} \\ \text{met} & \\ N\{Q \cdot F\} &= Q \cdot N\{F\} \cdot Q^c \quad \forall Q \mid Q^c \cdot Q = I; \det(Q) = 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

met σ : de symmetrische Cauchy-spanningstensor

F : de deformatietensor

Q : een willekeurige rotatietensor.

Bij zuiver elastisch (geheugenloos) materiaal speelt de geschiedenis geen rol: de spanningstoestand op tijdstip t wordt geheel bepaald door de rektoestand op tijdstip t . Als het verband tussen σ en ϵ lineair is (fysisch lineair materiaalgedrag) en de vervormingen blijven klein, dan kan deze relatie worden weergegeven met behulp van een 4^e-orde materiaaltensor 4L :

$$\sigma = {}^4L : \epsilon \tag{1.2}$$

of in componentvorm:

$$\sigma_{ij} = L_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{1.3}$$

met $\epsilon = (\mathbf{F}^c \cdot \mathbf{F})^{\frac{1}{2}} - \mathbf{I}$: de symmetrische lineaire rektensor

Uitgeschreven ziet vergelijking (1.3) er zo uit:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = & L_{ij11} \epsilon_{11} + (L_{ij12} + L_{ij21}) \epsilon_{12} + \\ & L_{ij22} \epsilon_{22} + (L_{ij23} + L_{ij32}) \epsilon_{23} + \\ & L_{ij33} \epsilon_{33} + (L_{ij31} + L_{ij13}) \epsilon_{31}\end{aligned}$$

Vanwege symmetrie hebben σ en ϵ beide 6 onafhankelijke componenten. Deze worden opgeborgen in de kolommen σ resp. ϵ . Door ${}^4\mathbf{L}$ rechtssymmetrisch te kiezen (${}^4\mathbf{L}^{rc} = {}^4\mathbf{L}$), en bovendien de rekken ϵ_{12} , ϵ_{23} en ϵ_{31} in ξ te vervangen door $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$, $\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$ en $\gamma_{31} = 2\epsilon_{31}$, kan het constitutieve verband met een symmetrische (6*6)-matrix \underline{L}^* worden genoteerd:

$$\sigma^T = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}] \quad \xi^T = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31}]$$

$$\sigma = \underline{L}^* \xi = \underline{S} \epsilon \quad (1.4)$$

$$\xi = \underline{C} \sigma \quad (1.5)$$

met \underline{S} : de stijfheidsmatrix

\underline{C} : de compliantiematrix

$$\underline{C} = \underline{S}^{-1}.$$

Het aantal onafhankelijke elementen in de matrices \underline{C} en \underline{S} hangt af van de mate van isotropie: is er in elk punt van het materiaal minstens één vlak te vinden ten opzichte waarvan de eigenschappen symmetrisch zijn? Men onderscheidt de volgende gevallen:

- volledige anisotropie: de materiaaleigenschappen zijn in elke willekeurige richting anders. Er zijn 21 onafhankelijke parameters.
- aelotropie: er is minstens in één richting symmetrie, onder te verdelen in:
 - monoklien materiaal: in elk punt is één symmetrievlak aanwezig. Het aantal onafhankelijke parameters bedraagt 13.

- orthotrop materiaal: er zijn drie onderling loodrechte symmetrievlakken met bijbehorende materiaalhoofdrichtingen. Compliantiematrix \underline{C} is opgebouwd uit 12 componenten, maar omdat \underline{C} symmetrisch is gelden er 3 afhankelijkheidsrelaties, zodat er 9 onafhankelijke parameters zijn, zie (1.6).

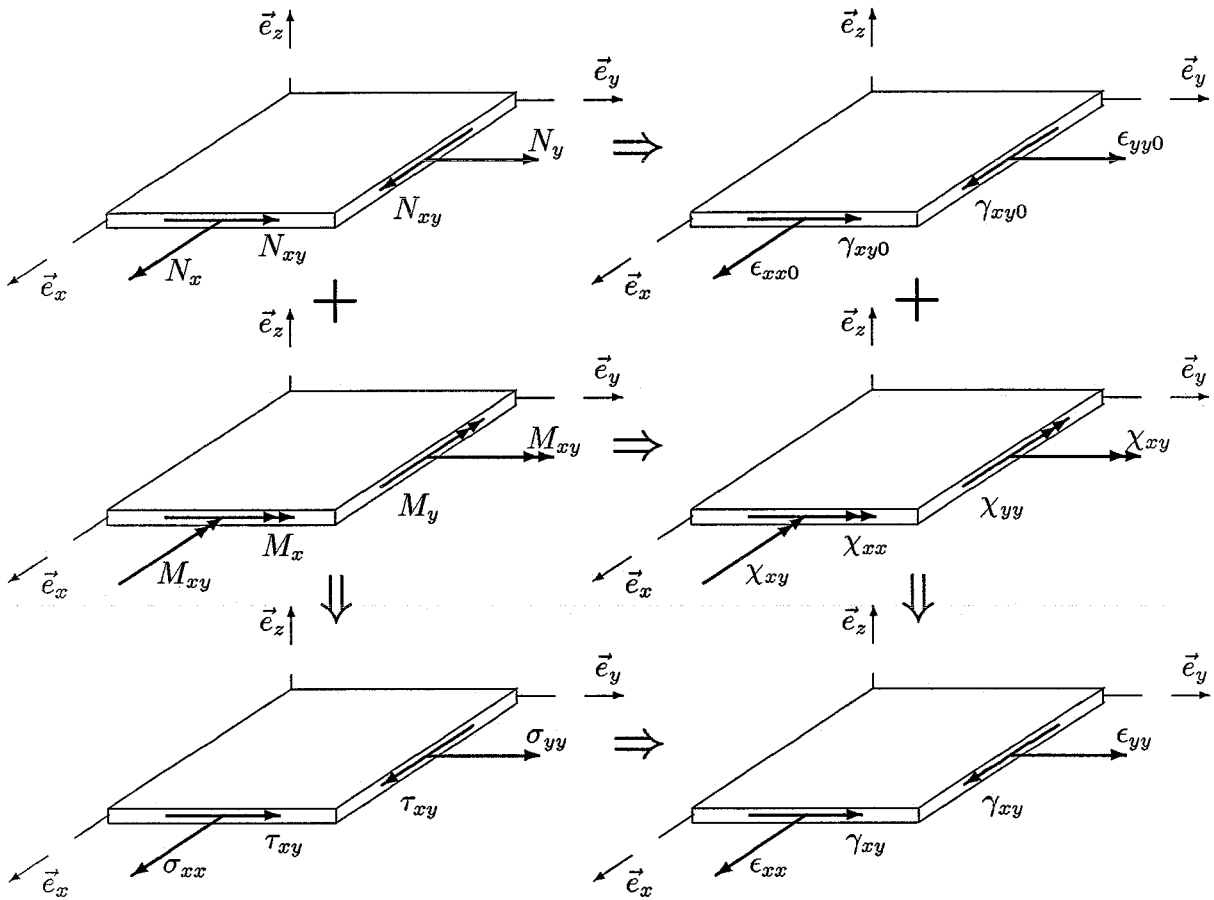
$$\underline{C} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12}E_2^{-1} & -\nu_{13}E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}E_1^{-1} & E_2^{-1} & -\nu_{23}E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}E_1^{-1} & -\nu_{32}E_2^{-1} & E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \nu_{12}E_2^{-1} &= \nu_{21}E_1^{-1} \\ \nu_{13}E_3^{-1} &= \nu_{31}E_1^{-1} \\ \nu_{23}E_3^{-1} &= \nu_{32}E_2^{-1} \end{aligned}$$

- transversaal isotrop materiaal: in één van de drie symmetrievlakken, het isotropevlak, zijn de eigenschappen in elke richting hetzelfde. Er blijven 5 onafhankelijke parameters over.
- volledige isotropie: in alle richtingen zijn de materiaaleigenschappen hetzelfde. Er zijn nog slechts 2 parameters: Young's modulus E en de Poisson-coëfficiënt ν .

1.2 Lineaire plaatbuigtheorie

We gaan uit van een vlakke plaat (middenvlak= $(x, y, z = 0)$) met dikte h , waarbij h veel kleiner is dan de overige afmetingen. De belasting kan bestaan uit krachten per lengte-eenheid $N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$ werkend in het middenvlak, resulterend in de rekken $\epsilon_{xx0}, \epsilon_{yy0}$ en de afschuiving γ_{xy0} in het middenvlak, en momenten per lengte-eenheid $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$, resulterend in de krommingen χ_{xx}, χ_{yy} en χ_{xy} van het middenvlak. In een willekeurig punt van de plaat op een afstand z boven het middenvlak veroorzaken de spanningen σ_x, σ_y en $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ de rekken $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ en γ_{xy} . Deze belastings- en vervormingsgrootheden zijn weergegeven in figuur (1.1) en (1.2); de volgende



Figuur 1.1: Belastingen

Figuur 1.2: Rekken

relaties zijn van toepassing:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx0} \\ \epsilon_{yy0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\xi^{xy} = \xi_0 + z \chi$$

We beschouwen een dergelijke vlakke plaat bestaande uit een matrix met daarin (lange of korte) vezels, zodat er sprake is van orthotroop gedrag. De vezels liggen in de richting van de \vec{e}_1 -symmetrieas; de \vec{e}_2 -as staat loodrecht op de vezels. (Zie fig. (1.3)). Schrijven we verg. (1.5) uit in de relevante (1,2)-componenten met behulp van (1.6):

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12}E_2^{-1} & 0 \\ -\nu_{21}E_1^{-1} & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\nu_{12}E_2^{-1} = \nu_{21}E_1^{-1}$$

zodat:

$$\underline{S} = \underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & S_{1221} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_2 & 0 \\ \nu_{12}E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

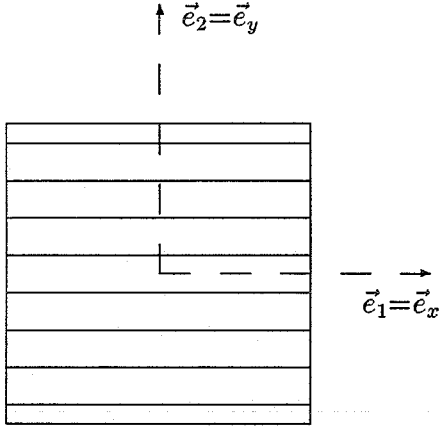
$$\nu_{21}E_2 = \nu_{12}E_1$$

1.3 Laminaten

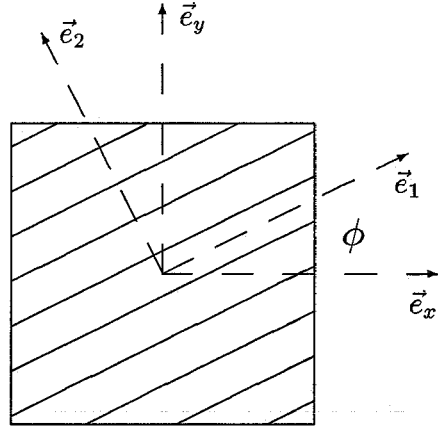
Vaak komen de (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -assen niet overeen met de (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -richtingen, omdat de vezels onder een hoek ϕ met het globale (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -assenstelsel liggen, zie fig. (1.4). Door een aantal (n) van deze platen met vezels in elke plaat onder een hoek $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ op elkaar te lijmen, ontstaat een laminaat. (Het woord 'laminaat' komt van het Latijnse *lāmīna* of *lāmna*, -ae: *plaat, schijf van metaal* (Ook: *lāmella*, -ae: *dun plaatje*)). De eigenschappen van een laminaat hangen af van de afzonderlijke laageigenschappen en de oriëntatie van de vezels, dus de hoeken ϕ_1, \dots, ϕ_n .

De materiaaleigenschappen van de k -de laag komen tot uiting in stijfheidsmatrix \underline{S}_k (of compliantiematrix \underline{C}_k). De invloed van de vezeloriëntatie

op de spannings-tek-relatie in (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -richting kan bepaald worden door transformatie van de spannings- en tekgrootheden van laag k in (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -richting naar (x,y) -componenten. De berekening van de transformatiematrix is te



Figuur 1.3: Symmetrierichtingen vallen samen met de (x,y) -richtingen



Figuur 1.4: Symmetrierichtingen vallen niet samen met (x,y) -richtingen

vinden in bijlage A.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_k^{xy} &= \underline{T}_k \epsilon_k^{12} = \underline{C}_k^\phi \sigma_k^{xy} \\ \sigma_k^{xy} &= \underline{T}_k^{-T} \varrho_k^{12} = \underline{S}_k^\phi \epsilon_k^{xy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

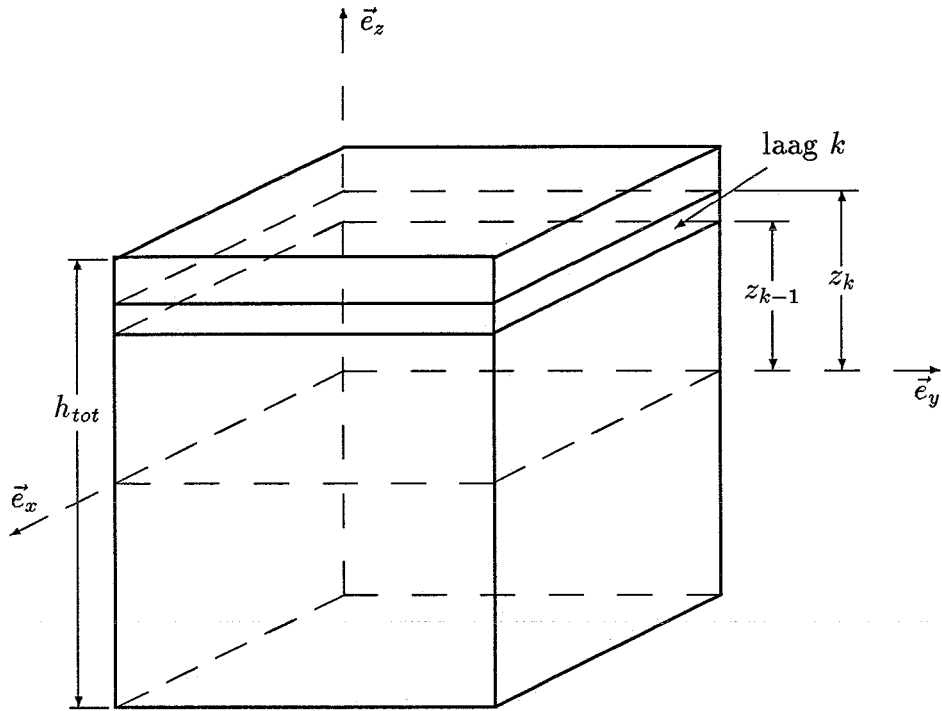
$$\underline{C}_k^\phi = \underline{T}_k \underline{C}_k \underline{T}_k^T \quad (1.12)$$

$$\underline{S}_k^\phi = \underline{T}_k^{-T} \underline{S}_k \underline{T}_k^{-1} \quad (1.13)$$

met $\underline{C}_k^\phi, \underline{S}_k^\phi$: de compliantie- resp. stijfheidsmatrix in (x,y) -richting van laag k waarin de vezels onder een hoek ϕ liggen.

Met behulp van vergelijking (1.9) kunnen we schrijven:

$$\sigma_k^{xy} = \underline{S}_k^\phi (\epsilon_0 + z \chi) \quad (1.14)$$



Figuur 1.5: Laminaat

Als we vergelijkingen (1.7) en (1.8) toepassen op laag k , volgt (zie ook fig. 1.5):

$$\begin{aligned}
 \underline{N}_k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \underline{\sigma}_k^{xy} dz = (z_k - z_{k-1}) \underline{S}_k^\phi \underline{\epsilon}_0 + \frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2) \underline{S}_k^\phi \chi \\
 &= \underline{A}_k \underline{\epsilon}_0 + \underline{B}_k \chi
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \underline{\sigma}_k^{xy} z dz = \frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2) \underline{S}_k^\phi \underline{\epsilon}_0 + \frac{1}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3) \underline{S}_k^\phi \chi \\
 &= \underline{B}_k \underline{\epsilon}_0 + \underline{D}_k \chi
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Sommatie van de bijdragen van alle lagen geeft de stijfheidsmatrix van het

gehele laminaat:

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^n N_k = \underline{A} \epsilon_0 + \underline{B} \chi \\ M &= \sum_{k=1}^n M_k = \underline{B} \epsilon_0 + \underline{D} \chi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \chi \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

met \underline{A} : de rekstijfheidsmatrix
 \underline{B} : de buigstijfheidsmatrix
 \underline{D} : de koppelstijfheidsmatrix.

Voor N geldt tevens:

$$N = \bar{\sigma} \cdot h_{tot} \quad (1.18)$$

met $\bar{\sigma}$: de gemiddelde spanning op het hele laminaat
 h_{tot} : de totale dikte van het laminaat.

zodat:

$$\bar{\sigma} = \frac{\underline{A}}{h_{tot}} \cdot \epsilon_0 + \frac{\underline{B}}{h_{tot}} \cdot \chi \quad (1.19)$$

waarmee we de uiteindelijke gereduceerde stijfheidsmatrix $\underline{\bar{S}}$ vinden:

$$\underline{\bar{S}} = \frac{\underline{A}}{h_{tot}} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{1111} & \bar{S}_{1122} & \bar{S}_{1121} \\ \bar{S}_{1122} & \bar{S}_{2222} & \bar{S}_{2221} \\ \bar{S}_{1121} & \bar{S}_{2221} & \bar{S}_{1221} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Van nu af aan zal de in de laminaattheorie gebruikelijke notatie voor de elementen van $\underline{\bar{S}}$ (\bar{S}_{16} etc.) worden gebruikt [3]. Voor $\underline{\bar{S}}$ kunnen we ook een iets andere uitdrukking gebruiken:

$$\underline{\bar{S}} = \frac{\underline{A}}{h_{tot}} = \frac{\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \underline{S}_k^\phi}{h_{tot}} = \frac{\sum_{k=1}^n h_k \underline{S}_k^\phi}{h_{tot}} = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k^\phi \frac{h_k}{h_{tot}} \quad (1.21)$$

waarbij h_k : de dikte van laag k

De gereduceerde stijfheidsmatrix $\bar{\underline{S}}$ is als het ware een gewogen gemiddelde van de stijfheidsmatrices van n parallel geschakelde veren met h_k als weegfactoren.

Uit $\bar{\underline{S}}$ kunnen we dan de grootheden E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} en G_{xy} bepalen. Want op dezelfde wijze als in vergelijking (1.11) geldt:

$$\bar{S}_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (1.22)$$

$$\bar{S}_{12} = \frac{\nu_{yx}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{xy}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (1.23)$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \quad (1.24)$$

$$\bar{S}_{66} = G_{xy} \quad (1.25)$$

Uit deze vijf vergelijkingen kunnen tenslotte de vijf gevraagde materiaalpharameters in (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -richting worden opgelost:

$$E_x = \bar{S}_{11} - \frac{\bar{S}_{12}^2}{\bar{S}_{22}} \quad (1.26)$$

$$E_y = \bar{S}_{22} - \frac{\bar{S}_{12}^2}{\bar{S}_{11}} \quad (1.27)$$

$$\nu_{xy} = \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{11}} \quad (1.28)$$

$$\nu_{yx} = \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{22}} \quad (1.29)$$

$$G_{xy} = \bar{S}_{66} \quad (1.30)$$

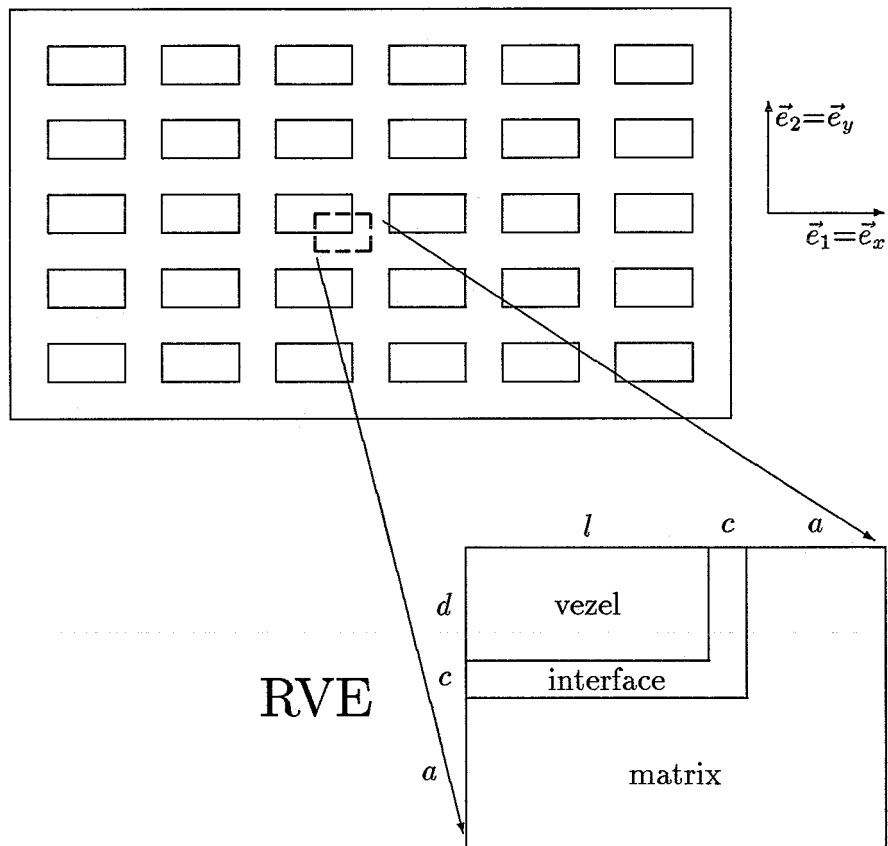
2 Verschillende modellen

Met behulp van de theorie uit hoofdstuk 1 worden modellen bepaald waarmee op bijna geheel analytische wijze de vijf grootheden uit vergelijking (1.26) t/m (1.30) van een composiet met korte vezels uit te rekenen zijn.

2.1 Composiet met unidirectionele vezels in 1-richting

Een composiet met korte vezels kan als volgt worden gemodelleerd: in een matrix liggen rechthoekige vezels, alle van dezelfde afmetingen, liggend in dezelfde richting op onderling dezelfde afstand. We werken dus 2-dimensionaal. Door deze structuur kan de composiet opgebouwd worden gedacht uit elementen, waarvan de eigenschappen, zoals elasticiteitsmodulus etc. identiek zijn aan die van de h ele composiet. We noemen zo'n element dan ook een Representatief Volume Element (RVE). Om de hechting tussen vezel en matrix in rekening te brengen, kan er een dun overgangslaagje worden verondersteld, de interface, zie figuur (2.1).

R. Ramaekers [1] heeft analytische modellen geformuleerd om waardes te bepalen voor de elasticiteitsmoduli in longitudinale-, E_1 , en transversale richting, E_2 , de dwarscontractieco effici nten ν_{12} en ν_{21} en de glijdingsmodulus G_{12} . Voor elk van deze vijf grootheden blijken twee modellen gebruikt te kunnen worden, afhankelijk van de opdelingswijze van het RVE; een isostress-isostrainberekening en een isostrain-isostressberekening. Voor de berekening van de glijdingsmodulus blijkt het bovendien nog verschil uit te maken of er uitgegaan wordt van afschuiving loodrecht op of evenwijdig aan de vezels.



Figuur 2.1: composiet met Representatief Volume Element

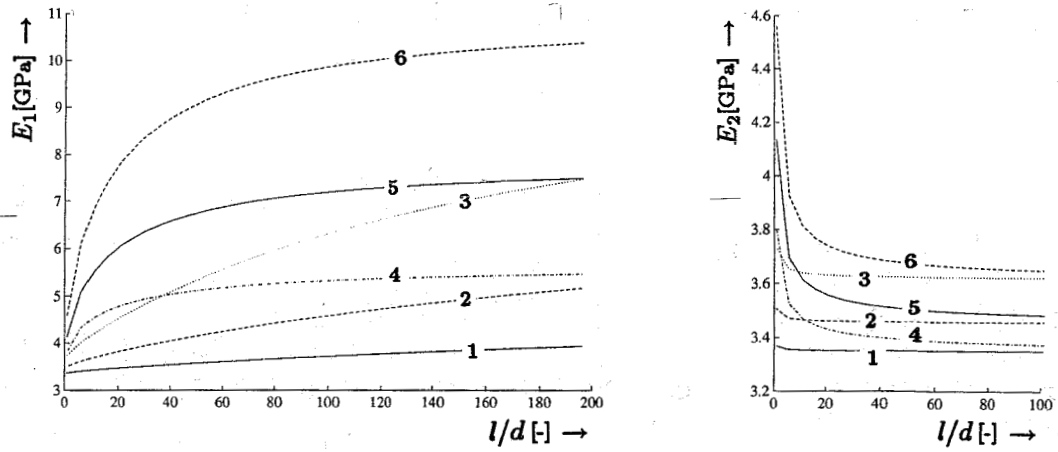
Als parameters treden op:

l/d : de lengte-dikteverhouding van de vezels,

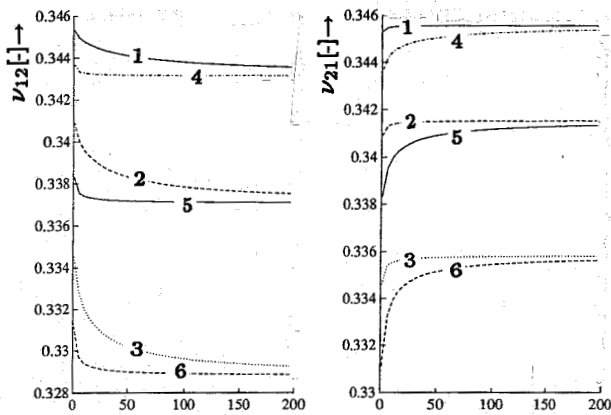
v_f : de volumefractie van de vezels en

c/d : de verhouding interfacedikte-vezeldikte

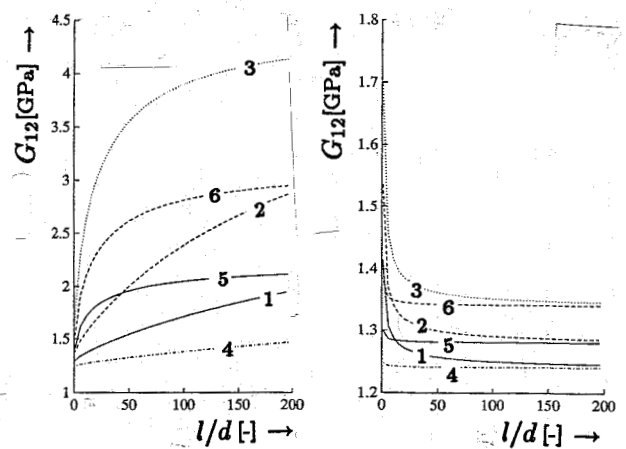
In figuur (2.2) t/m (2.4) zijn de vijf grootheden uitgezet tegen l/d , zoals te vinden in [1]. De lijnen 1, 2 en 3 zijn telkens het resultaat van een isostress-isostrainberekening, 4, 5 en 6 van een isostrain-isostressberekening.



Figuur 2.2: E_1 en E_2 als functie van l/d met $v_f=3.4\%$ (1,4), 6.5% (2,5), 10.9% (3,6); 1,2,3: isostress-isostrain; 4,5,6: isostrain-isostress; $E_m = 3.24$, $E_f = 75$

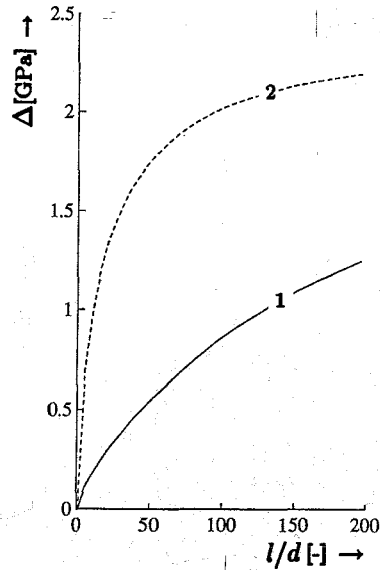


Figuur 2.3: ν_{12} en ν_{21} als functie van l/d met $v_f=3.4\%$ (1,4), 6.5% (2,5), 10.9% (3,6); 1,2,3: isostress-isostrain; 4,5,6: isostrain-isostress; $\nu_m = 0.35$, $\nu_f = 0.22$

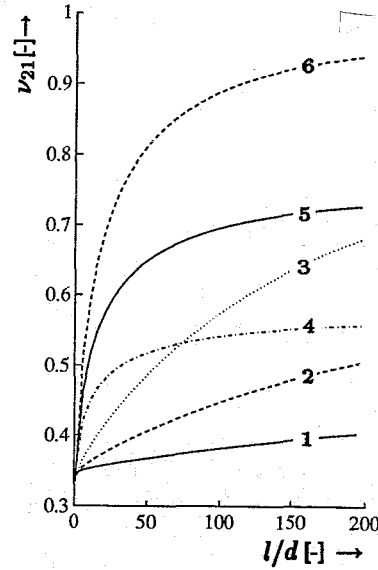


Figuur 2.4: G_{12} als functie van l/d met $v_f=3.4\%$ (1,4), 6.5% (2,5), 10.9% (3,6); 1,2,3: isostress-isostrain; 4,5,6: isostrain-isostress; $G_m=1.2$, $G_f=31$. Links: afschuiving \perp vezels; rechts: afschuiving $//$ vezels

Volgens vergelijking (1.11) moet altijd aan de reciprociteitsvoorwaarde worden voldaan. Dit is niet het geval indien voor E_1 , E_2 , ν_{12} en ν_{21} de analytisch berekende waarden uit figuur (2.2) en (2.3) worden genomen. Dit



Figuur 2.5: $\Delta = \nu_{12}E_1 - \nu_{21}E_2$ berekend met isostress-isostrainmethode (1) en isostrain-isostressmethode (2); $\nu_f = 10.9\%$



Figuur 2.6: $\nu_{21} = E_1\nu_{12}/E_2$ als functie van l/d met $\nu_f = 3.4\%$ (1,4), 6.5% (2,5), 10.9% (3,6); 1,2,3: isostress-isostrain; 4,5,6: isostrain-isostress; $\nu_m = 0.35$, $\nu_f = 0.22$

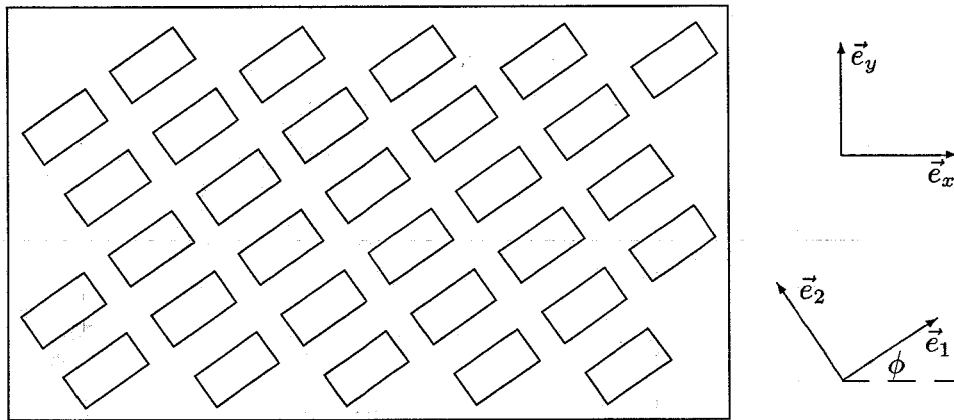
is goed te zien in figuur (2.5), waar $\Delta = \nu_{12}E_1 - \nu_{21}E_2$ is uitgezet tegen l/d . Het gevolg hiervan is dat de stijfheidsmatrices uit (1.11), (1.13) en (1.3) niet symmetrisch zijn. Om toch aan de reciprociteitsvoorwaarde te voldoen, moet één van de vier grootheden die in deze voorwaarde voorkomen afhankelijk gemaakt worden van de andere drie. In principe maakt het niet uit welke grootheid hiervoor genomen wordt; omdat de dwarscontractiecoëfficiënten verder niet gebruikt worden, valt de keuze op ν_{21} . Deze wordt dus niet meer met een model uit [1] bepaald, maar als volgt berekend:

$$\nu_{21} = \frac{E_1 \nu_{12}}{E_2} \quad (2.1)$$

Het verloop van ν_{21} op deze manier berekend is te zien in figuur (2.6); ν_{21} blijft toenemen bij groter wordende l/d . Er is een duidelijk verschil met figuur (2.3), waar ν_{21} naar een bepaalde asymptotische waarde nadert.

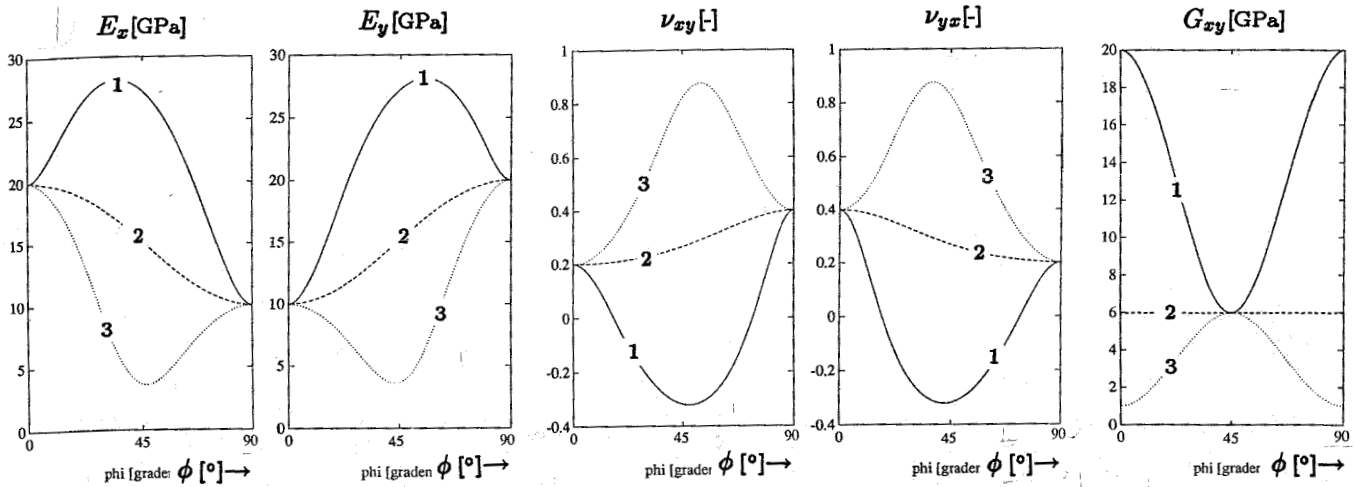
2.2 Composiet met unidirectionele vezels in willekeurige richting

In de voorafgaande paragraaf lagen de vezels in de globale hoofdrichtingen van de plaat. Bij laminaten is het vaak zo, dat de vezels in een laag onder een hoek ϕ ten opzichte van het globale (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -assenstelsel liggen, zie figuur (2.7). De eigenschappen in (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -richting zijn bekend. Met $E_1 = E_1(\frac{l}{d}, \nu_f, \frac{c}{d})$,



Figuur 2.7: composiet met vezels onder hoek ϕ

$E_2 = E_2(\frac{l}{d}, \nu_f, \frac{c}{d})$, $\nu_{12} = \nu_{12}(\frac{l}{d}, \nu_f, \frac{c}{d})$, $\nu_{21} = \nu_{21}(\frac{l}{d}, \nu_f, \frac{c}{d})$ en $G_{12} = G_{12}(\frac{l}{d}, \nu_f, \frac{c}{d})$ wordt stijfheidsmatrix \underline{S} opgebouwd, zie vgl. (1.11). Om de eigenschappen in (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -richting te kunnen bepalen, is coördinatentransformatie nodig, middels transformatiematrix \underline{T} , zie vgl.(1.13). Er ontstaat dan een nieuwe stijfheidsmatrix \underline{S}^ϕ . Daaruit kunnen met behulp van de vergelijkingen (1.26) - (1.30) de waarden van E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} en G_{xy} worden berekend. Door de transformatie zijn ze alle een functie van ϕ én van de eigenschappen in (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -richting. Het verband tussen bovenstaande compositie-eigenschappen en de vezelhoek ϕ is als in figuur (2.8). Het is duidelijk dat $E_x(\phi) = E_y(90 - \phi)$ en hetzelfde voor de dwarscontractiecoëfficiënten. Wat nog meer opvalt is dat de grafieken drie vormen kunnen hebben, afhankelijk van de grootte van G_{12} .



Figuur 2.8: E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} , G_{xy} als functie van ϕ bij 3 waardes voor G_{12} : $G_{12} = 20$ (lijn 1), $G_{12} = 5.98$ (lijn 2) en $G_{12} = 1$ (lijn 3); $E_1 = 20$, $E_2 = 10$, $\nu_{12} = .2$, $\nu_{21} = .4$

Een centrale rol speelt $G_{xy}(45^\circ)$:

$$G_{xy}(45^\circ) = \frac{E_1 + (1 - 2\nu_{12})E_2}{4(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.2)$$

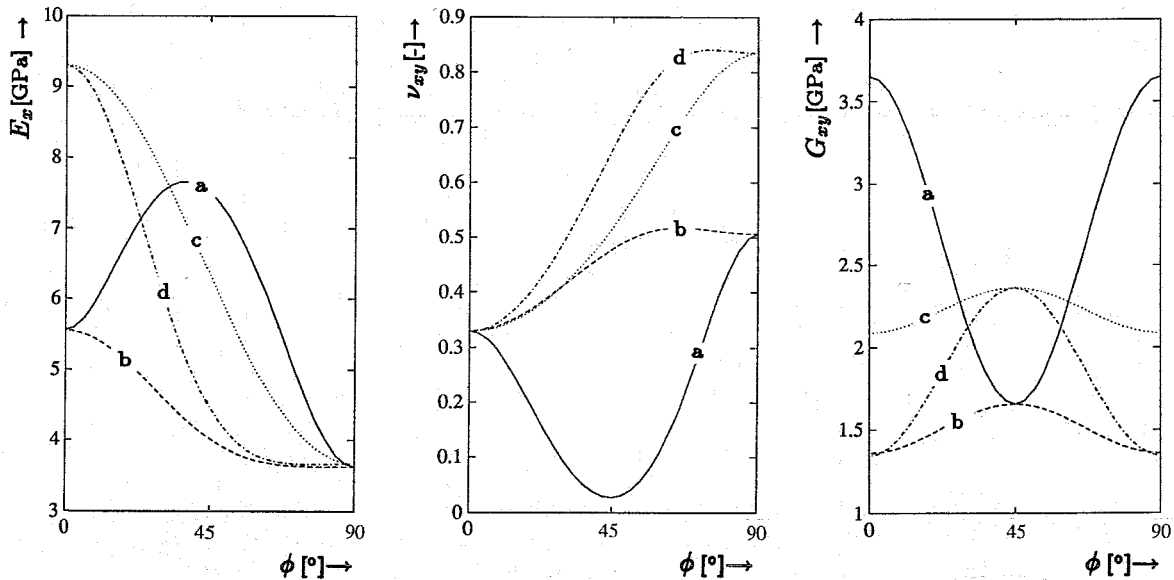
$G_{xy}(45^\circ)$ is onafhankelijk van G_{12} ! Als G_{12} gelijk is aan het rechterlid is G_{xy} overall even groot en vertonen $E_x(\phi)$, $E_y(\phi)$, $\nu_{xy}(\phi)$ en $\nu_{yx}(\phi)$ geen maxima of minima tussen 0° en 90° .

Aangezien E_x , E_y etc. afhankelijk zijn van E_1 , E_2 etc., en E_1 , E_2 en ν_{12} op twee en G_{12} zelfs op vier manieren berekend kunnen worden, zijn er dus voor E_x , E_y etc. 32 berekeningswijzen mogelijk! Omwille van de eenvoud worden er telkens maar 4 bekeken:

- methode a: - E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} berekend volgens isostress-isostrainmethode
 - bij de berekening van G_{12} wordt uitgegaan van afschuiving \perp vezels
- methode b: - E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} berekend volgens isostress-isostrainmethode
 - bij de berekening van G_{12} wordt uitgegaan van afschuiving $//$ vezels
- methode c: - E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} berekend volgens isostrain-isostressmethode

- bij de berekening van G_{12} wordt uitgegaan van afschuiving \perp vezels
- methode d: - $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ berekend volgens isostrain-isostressmethode
- bij de berekening van G_{12} wordt uitgegaan van afschuiving $//$ vezels

In figuur (2.9) zijn E_x, ν_{xy} en G_{xy} volgens deze vier methodes berekend. De afwijkende vorm van lijn a in de drie grafieken van figuur (2.9) is als volgt

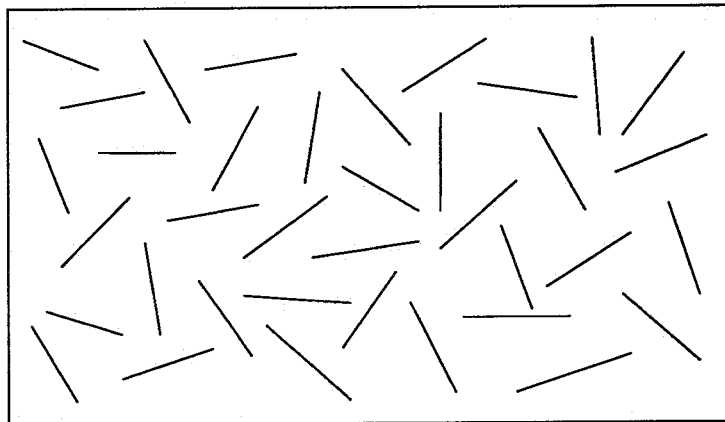


Figuur 2.9: E_x, ν_{xy}, G_{xy} als functie van ϕ volgens methode a, b, c en d; $l/d = 60$, $\nu_f = 10.9\%$

te verklaren. In figuur (2.2) en (2.4) is te zien dat G_{12} , uitgerekend volgens de isostress-isostrainmethode en afschuiving \perp de vezels, grote waarden bereikt met name ten opzichte van E_1 , die bij de isostress-isostrainmethode juist minder groot is, ofwel bij methode a wordt een relatief grote G_{12} verkregen, wat zoals eerder gezegd een maximum in E_x en E_y resp. minimum in ν_{xy} en ν_{yx} geeft.

2.3 Composiet met vezels in willekeurige richtingen

In werkelijkheid liggen korte vezels nooit precies in dezelfde richting, zelfs als er geprobeerd is om ze op een of andere manier te richten. Afhankelijk van de methode waarmee de composiet is geproduceerd kunnen de vezels in mindere of meerdere mate dezelfde richting hebben. Er zijn twee uitersten te onderscheiden: in het eerste geval liggen de vezels allemaal in dezelfde richting; dit is niet eenvoudig te verwezenlijken. Het model zoals beschreven in de paragrafen 2.1 en 2.2 is dan geschikt om de parameters van het composietmateriaal te bepalen. Het andere uiterste is gemakkelijker te realiseren: de vezeltjes liggen random verspreid, er is geen voorkeur voor een bepaalde richting, zie figuur (2.10). Tussen deze twee uitersten ligt het gebied waarin



Figuur 2.10: composiet met vezels in willekeurige richtingen

de vezels een voorkeursrichting hebben, terwijl er toch variaties in hoek aanwezig zijn. We kunnen stellen dat de vezelhoeken statistisch verdeeld zijn; er is een gemiddelde hoek $\bar{\phi}$ en een bepaalde standaarddeviatie σ , wat een maat voor de gerichtheid is. De vezelhoek ϕ is dus een random variabele die elke willekeurige waarde kan aannemen binnen een bepaald interval.

Als er van geen enkele gerichtheid sprake is heeft ϕ een *uniforme* verdeling [4]; de waarschijnlijkheid dat ϕ een bepaalde waarde heeft, is in het interval

$[a, b]$ overal even groot. Buiten dit interval is de waarschijnlijkheid nul. De grenzen a en b kunnen elke willekeurige waarde aannemen, zolang geldt dat het interval $[a, b]$ lengte π heeft. Er is geen vaste gemiddelde hoek; deze hangt geheel af van de keuze voor a en b . Omdat de oppervlakte onder de *waarschijnlijkheidsdichtheid functie* $f(\phi)$ gelijk aan 1 moet zijn, is de hoogte van $f(\phi)$ van deze uniforme verdeling gelijk aan $1/\pi$. Kortom:

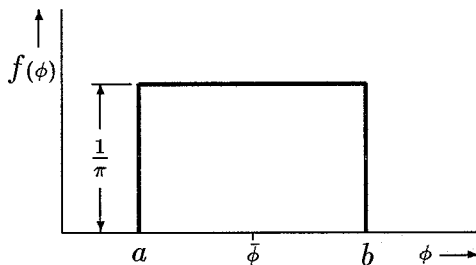
$$f(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\pi} & a < \phi < b \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De variantie bedraagt:

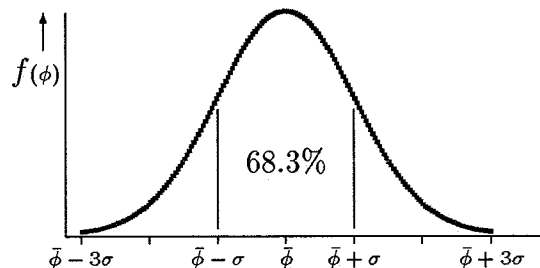
$$\begin{aligned} \text{var}(\phi) = \sigma^2 &= E(\phi - \bar{\phi})^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\phi - \bar{\phi})^2 f(\phi) d\phi = \int_a^b (\phi - \bar{\phi})^2 \frac{1}{\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{3\pi} (\phi - \bar{\phi})^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3\pi} (b - a)^3 \\ &= \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Zie ook figuur (2.11).

Is er bij de fabricage van het composiet geprobeerd de vezels dezelfde richting



Figuur 2.11: uniforme verdeling



Figuur 2.12: normale verdeling

te geven, dan zal ϕ nagenoeg een *normale* of *Gauss*-verdeling hebben. In tegenstelling tot de uniform verdeelde vezels is er nu wél sprake van een gemiddelde hoek $\bar{\phi}$. De standaarddeviatie σ is kleiner dan bij de uniforme

verdeling. 68.3% van de vezeltjes ligt onder een hoek die ligt in het interval $[\bar{\phi} - \sigma, \bar{\phi} + \sigma]$, 95.4% ligt binnen $[\bar{\phi} - 2\sigma, \bar{\phi} + 2\sigma]$ en bijna alle vezelhoeken, nl. 99.7% liggen in het interval $[\bar{\phi} - 3\sigma, \bar{\phi} + 3\sigma]$. Als bijv. bij $\bar{\phi} = 0$ alle vezeltjes in het interval $[-\theta_{grens}, +\theta_{grens}]$ liggen, dan kan hieruit een schatting s voor σ worden bepaald: $\theta_{grens} = 3s \Rightarrow s = \frac{\theta_{grens}}{3}$. De *waarschijnlijkheidsdichtheid functie* $f(\phi)$ luidt nu:

$$f(\phi) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\phi-\bar{\phi})^2}{2s^2}}$$

$$\text{met } s = \frac{\theta_{grens}}{3}$$

Zie ook figuur (2.12).

Zoals we al hebben gezien zijn de vijf materiaalgrootheden in (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -richting een functie van ϕ via de transformatiematrix \underline{T} . Als ϕ een random variabele is, dan is elke grootheid $g = g(\phi)$ ook een random variabele, en geldt voor de verwachting van $g(\phi)$:

$$E[g(\phi)] = \bar{g}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\phi) f(\phi) d\phi \quad (2.3)$$

en voor de variantie:

$$\begin{aligned} \text{var}[g(\phi)] &= E[g(\phi) - E[g(\phi)]]^2 \\ &= E[g^2(\phi)] - E^2[g(\phi)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\phi) f(\phi) d\phi - \bar{g}^2(\phi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

In ons geval is g een van de grootheden $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ of G_{xy} . We kunnen nu twee strategieën volgen:

1. Als we vergelijking (1.13) uitschrijven krijgen we 6 vergelijkingen waarin de 6 onafhankelijke elementen van \underline{S}^ϕ worden uitgedrukt in de elementen van \underline{S} en termen als $\cos^4\phi, \cos^3\phi\sin\phi, \dots, \sin^4\phi$. Van elk van deze termen wordt de verwachting uitgerekend. De verwachting van de 6 elementen van \underline{S}^ϕ kan dan gemakkelijk worden uitgerekend met de regel: $E(ax + by) = aE(x) + bE(y)$. We weten nu de verwachting van de gehele matrix \underline{S}^ϕ en willen dan met behulp van vergelijkingen (1.26) - (1.30) de verwachting van E_x, \dots, G_{xy} bepalen. Voor bijv. E_x zou dat

worden:

$$\begin{aligned} E(E_x) &= E\left(S_{11}^\phi - \frac{S_{12}^{\phi^2}}{S_{22}^\phi}\right) \\ &= E(S_{11}^\phi) - E\left(\frac{S_{12}^{\phi^2}}{S_{22}^\phi}\right) \\ &\neq E(S_{11}^\phi) - \frac{E(S_{12}^{\phi^2})}{E(S_{22}^\phi)} \end{aligned}$$

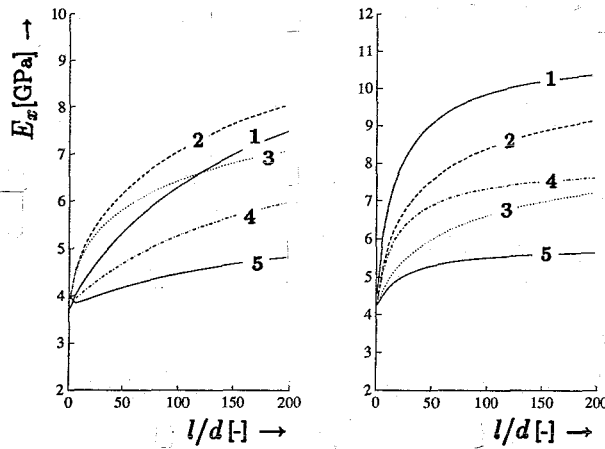
Omdat S_{12}^ϕ en S_{22}^ϕ niet onafhankelijk zijn, is de een-na-laatste regel niet gelijk aan de laatste regel, en is de verwachting van E_x etc. niet eenvoudig te bepalen.

2. Met behulp van vergelijkingen (1.11), (1.13) en (1.26) - (1.30) rekenen we $E_x = E_x(\phi)$ etc. uit, zodat er uitdrukkingen in ϕ ontstaan, die we in z'n geheel invullen als $g(\phi)$ in vergelijking (2.3). In het PC-matlab-programma zijn alle grootheden matrices, ook E_x etc. Er dient dus een integraal van een matrix te worden uitgerekend, wat niet op analytische wijze mogelijk is. De integraal wordt benaderd met behulp van de Simpsonmethode. Dit houdt in dat het interval waarover geïntegreerd moet worden verdeeld wordt in n stukken op onderlinge afstand $dist$, waarna in elk van deze punten $\phi_1, \dots, \phi_{n+1}$ de functiewaarde $g(\phi) f(\phi)$ (dit is een matrix) wordt bepaald, zie ook hoofdstuk 3. Uit deze $n + 1$ matrices kan dan de integraal worden berekend. Vanwege de $n + 1$ matrixberekeningen zal deze rekenmethode meer rekentijd vergen dan de eerste. Toch gebruiken we de tweede methode omdat de verwachting van E_x etc. gemakkelijk te bepalen is.

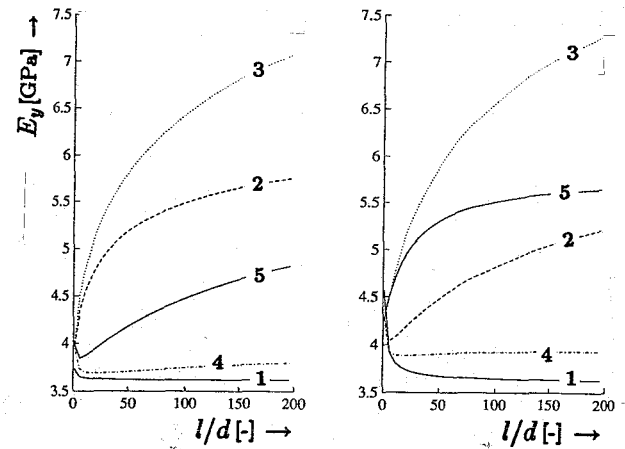
Figuur (2.13) en (2.14) geven de verwachting van E_x en E_y bij:

1. géén verdeling; alle vezeltjes liggen in dezelfde richting (1),
2. een Gauss-verdeling van ϕ : $\phi = N(0, \frac{\theta_{grens}}{3}) = N(0, \frac{\pi}{6})$ (2,4),
3. een uniforme verdeling van ϕ (3,5).

De verwachting van E_x bij methode b, c en d is zoals verwacht; E_x is het hoogst wanneer alle vezels in x-richting liggen ($=E_x(0)$). Bij Gauss-verdeelde vezelhoeken telt $E_x(\phi)$ bij toenemende ϕ steeds minder mee, bij een uniforme verdeling telt $E_x(\phi)$ overal even zwaar. Aangezien E_x daalt bij toenemende ϕ is $E(E_x)$ bij een Gauss-verdeling lager dan $E_x(0)$, maar hoger dan $E(E_x)$ bij een uniforme verdeling.



Figuur 2.13: E_x (1), $E(E_x)$ bij een normale (2,4) en uniforme verdeling (3,5). Links met methode a (2,3) en b (4,5), rechts met methode c (2,3) en d (4,5); $v_f=10.9\%$



Figuur 2.14: E_y (1), $E(E_y)$ bij een normale (2,4) en uniforme verdeling (3,5). Links met methode a (2,3) en b (4,5), rechts met methode c (2,3) en d (4,5); $v_f=10.9\%$

Voor E_y geldt het omgekeerde; $E_y(0)$ is het laagst, het hoogst is de verwachting bij uniform verdeelde vezels, en daar tussenin ligt $E(E_y)$ bij een Gauss-verdeling.

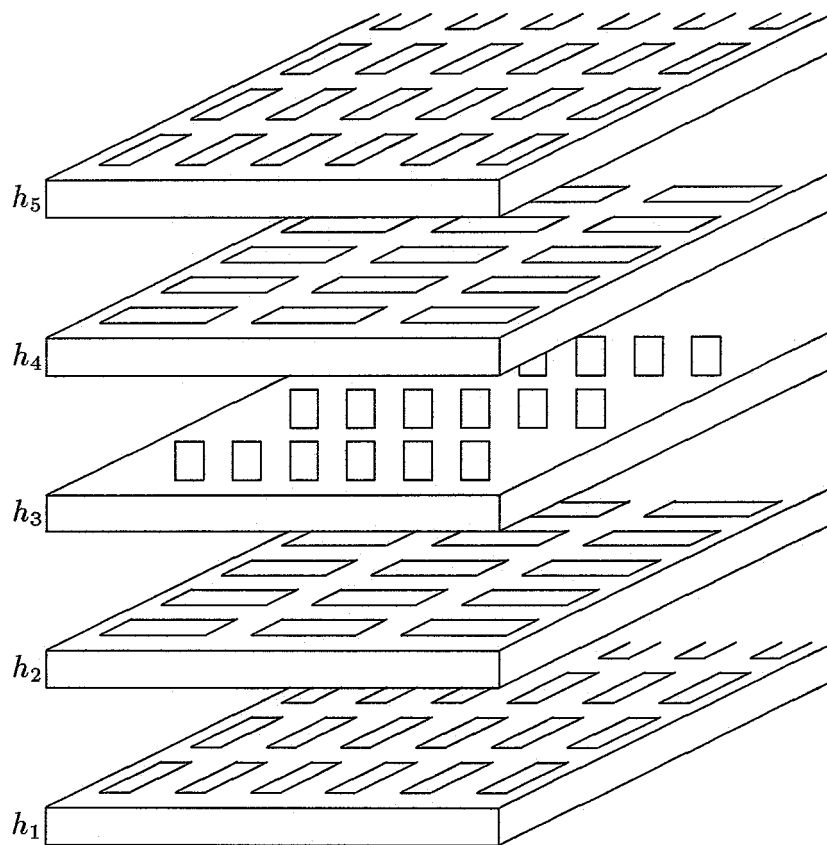
Bij methode a heeft E_x echter een maximum ergens tussen $\phi = 0^\circ$ en $\phi = 45^\circ$. Bij grotere l/d -verhoudingen neemt het verschil tussen E_1 en E_2 toe (I). Anderzijds volgt uit vergelijking (2.2) dat als G_{12} en E_1 in gelijke mate toenemen (wat hier het geval is), dat het linkerlid relatief groter wordt ten opzichte van het rechterlid (II). Ten gevolge van (I) wordt de piek in E_1 kleiner, door (II) wordt de piek groter. Het nettoresultaat is een kleiner wordende top bij toenemende l/d . Bij lage l/d -waarden is er echter nog zo'n aanzienlijk maximum dat de verwachting bij een normale en zelfs bij een uniforme verdeling (in feite de gemiddelde E_x) groter is dan $E_x(0)$. Door de kleiner wordende top zakt bij $l/d=120$ $E(E_x)_{uniform}$ onder $E_x(0)$. $E(E_x)_{Gauss}$ zal pas bij zeer grote l/d -verhoudingen kleiner zijn dan $E_x(0)$.

Voor E_y heeft dit minder gevolgen. De verwachtingen bij methode a zijn alleen door de piek veel hoger dan bij methode b.

Bij elke methode geldt dat $E(E_x)_{uniform} = E(E_y)_{uniform}$.

2.4 Laminaten met korte vezels

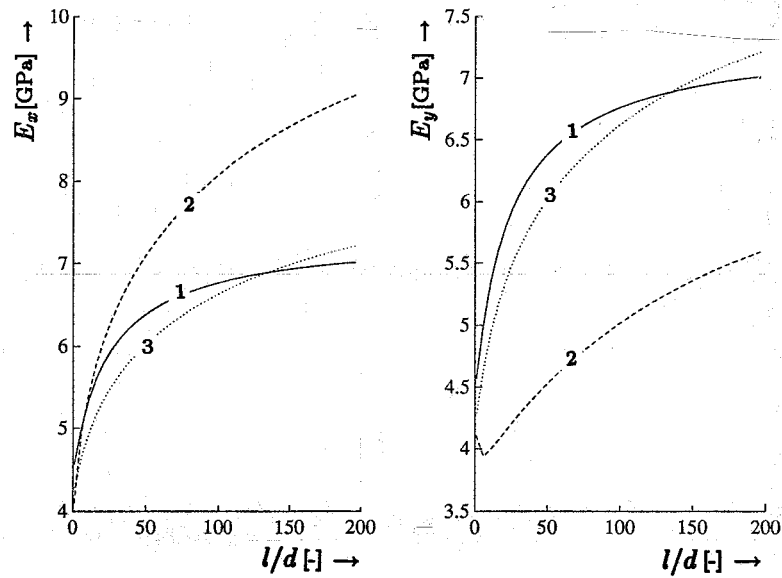
Tot nu toe is er steeds sprake geweest van één laag. Laminaten bestaan uit meerdere lagen, waarbij per laag de vezels in één richting liggen. In fig. (2.15) is een voorbeeld van een laminaat te zien. De onderste laag is laag 1, de



Figuur 2.15: laminaat bestaande uit vijf lagen met korte vezels

bovenste is laag n , in dit geval is n gelijk aan 5. Elke laag heeft een bepaalde dikte. Voor elke laag zijn E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{21} en G_{12} hetzelfde, maar vanwege de verschillende hoeken heeft elke laag k z'n eigen \underline{S}_k^ϕ , zie verg. (1.13). Met verg. (1.21) kan de gereduceerde stijfheidsmatrix $\underline{\bar{S}}$ van het hele laminaat

worden bepaald. In onderstaand plaatje zijn E_x en E_y van drie laminaten berekend. Daarbij is methode c gebruikt, vanwege het 'gladde' verloop van E_x en E_y in figuur (2.9), waardoor figuur (2.16) beter te begrijpen is dan met bijv. methode a het geval zou zijn.

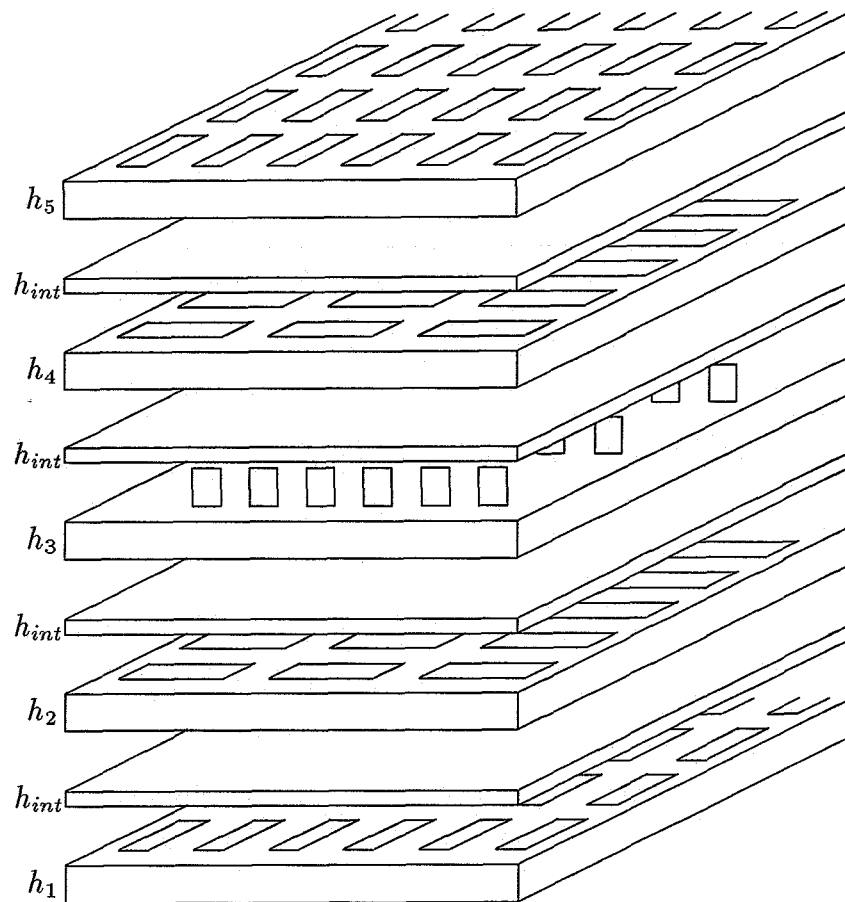


Figuur 2.16: E_x (links) en E_y (rechts) van drie laminaten: $[0/90/90/0]$ (1), $[30/-30/-30/30]$ (2) en $[0/30/60/90/120/150]$ (3) berekend met methode c; $v_f=10.9\%$

Figuur (2.16) bevestigt een aantal verwachtingen. Ten eerste zijn E_x en E_y van het laminaat $[0/90/90/0]$ lager resp. hoger dan die van het laminaat $[30/-30/-30/30]$. Dat is ook te verwachten aangezien het tweede laminaat meer een composiet benadert waarin alle vezels in x-richting liggen dan het eerste. Ten tweede zijn bij het eerste en derde $[0/30/60/90/120/150]$ laminaat E_x en E_y aan elkaar gelijk. Tenslotte zouden E_x en E_y van het derde laminaat in de buurt moeten liggen van E_x en E_y van een composiet met uniform verdeelde vezels. Vergelijking van figuur (2.16) met figuur (2.13) bevestigt dit.

2.5 Invloed van de hechting tussen de laminaatlagen

In paragraaf 2.1 is beschreven dat de invloed van de hechting tussen vezel en matrix gemodelleerd wordt met behulp van een interface. Deze interface is niets anders dan een (denkbeeldig) materiaal met een eigen elasticiteitsmodulus etc. Tussen de verschillende lagen van een laminaat is ook sprake van een bepaalde hechting, die we overeenkomstig de vezel-matrixhechting modelle-



Figuur 2.17: laminaat met interfacelagen

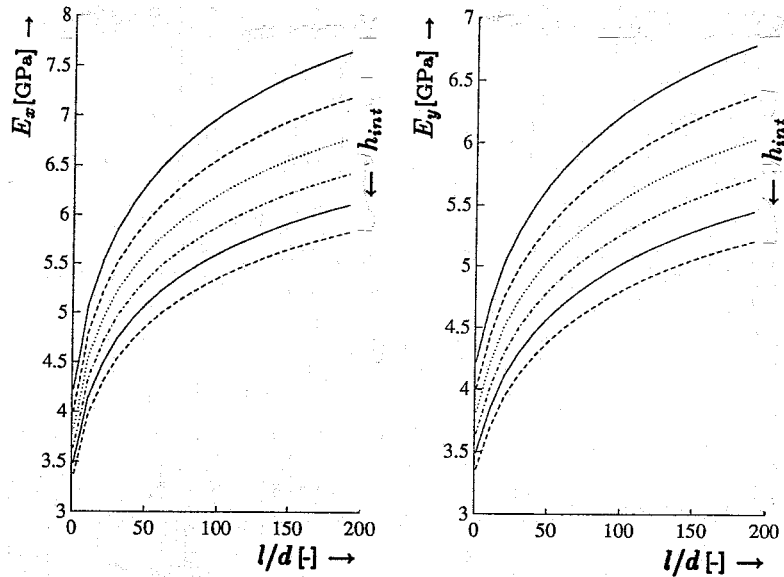
ren met een interfacelaag met dikte h_{int} . Deze $n - 1$ interfacelagen worden volledig isotroop beschouwd en hebben dan ook maar twee karakteristieke materiaaleigenschappen: een elasticiteitsmodulus E_{int} en een dwarscontractiecoëfficiënt ν . De glijdingsmodulus kan hieruit worden berekend volgens

$$G_{int} = \frac{E_{int}}{2(1 + \nu_{int})} \quad (2.5)$$

In figuur (2.17) zijn de interfacelagen te zien. Ook nu kunnen we \bar{S} uitrekenen met vergelijking (1.21), die we een beetje aanpassen. We weten nl. dat de stijfheidsmatrices en diktes van de $n - 1$ interfacelagen gelijk zijn: daarmee wordt \bar{S} :

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k^\phi \frac{h_k}{h_{tot}} + \sum_{l=1}^{n-1} \underline{S}_{int} \frac{h_{int}}{h_{tot}} = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k^\phi \frac{h_k}{h_{tot}} + \underline{S}_{int} \frac{(n-1)h_{int}}{h_{tot}} \quad (2.6)$$

In figuur (2.18) zijn E_x en E_y berekend van een laminaat [30/-30/-30/30] met interfacelagen met een toenemende dikte.

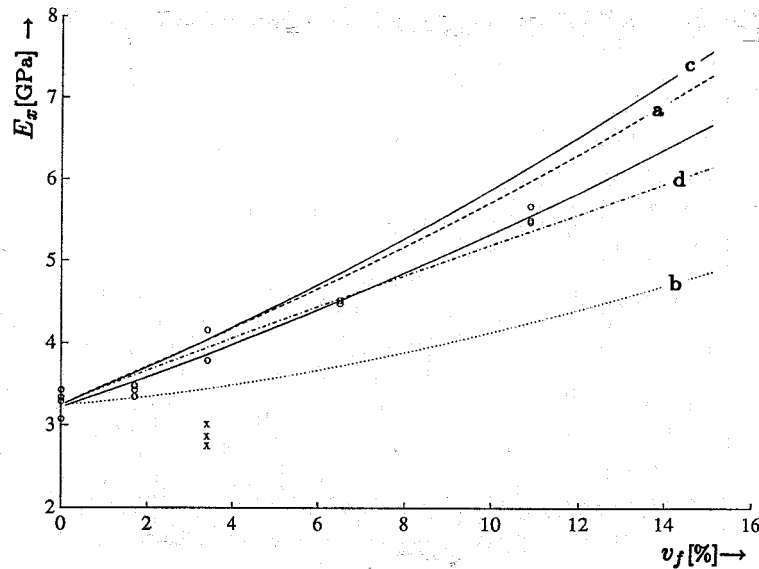


Figuur 2.18: E_x (links) en E_y (rechts) van een laminaat [30/-30/-30/30] bij toenemende interfacelaagdikte: $h_{int}=0,1,\dots,5$; $\nu_f=10.9\%$

De invloed van interfacelagen is duidelijk; als voor de interfacelagen een lage elasticiteitsmodulus wordt gekozen (zwakke hechting), dan zorgt een toenemende interfacelaagdikte voor een groter aandeel in de uiteindelijke laminaatstijfheidsmatrix, en nemen zowel E_x als E_y af.

2.6 Overeenstemming met experimenten

Bij de trekproeven zijn elasticiteitsmoduli bepaald bij vijf verschillende v_f 's. De vezels lagen random verdeeld. In figuur (2.19) is met de vier methodes de verwachting van $E_x(v_f)$ berekend bij uniform verdeelde vezels. Bovendien zijn de elasticiteitsmoduli verkregen uit de trekproeven aangegeven. Voor de kleinste kwadratenfitlijn door de meetpunten is een kwadratisch verloop gekozen (de drie 'x'-punten liggen nogal vreemd en zijn niet meegeteld). De fitlijn blijkt heel aardig in het gebied te liggen waarin de theoretische lijnen

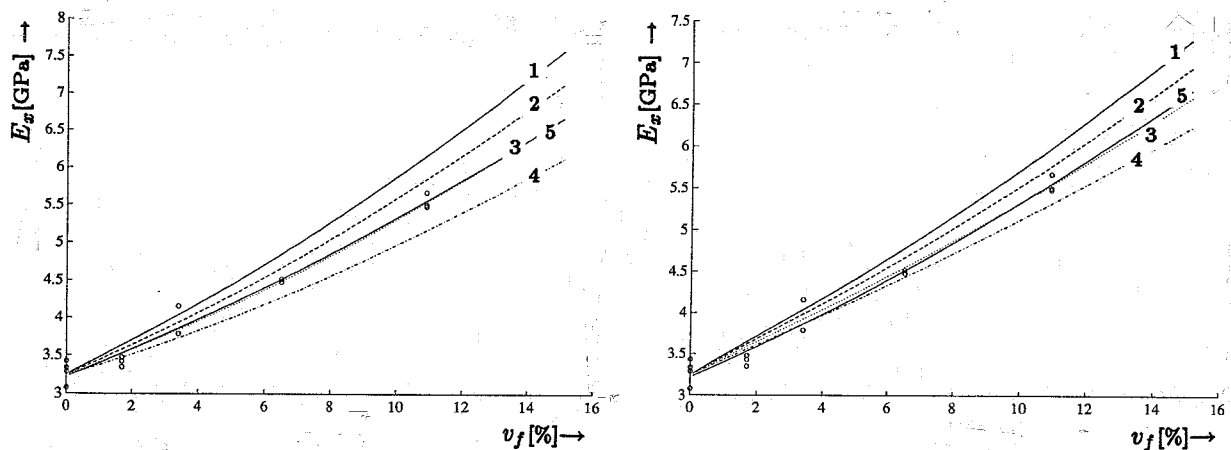


Figuur 2.19: $E(E_x)$ bij een uniforme verdeling als functie van v_f met methode a, b, c en d; $l/d=60$. De vijfde lijn is een kwadratische fitlijn door de meetpunten (o)

lopen. Het verband tussen $E(E_x)$ en v_f berekend met methode b geeft te

lage waarden ten opzichte van de meetpunten. Methode d geeft een vrijwel rechte lijn, en sluit dus qua vorm niet goed aan bij de kwadratische fitlijn door de meetpunten. Wanneer op de bovenste twee lijnen, behorend bij methodes c en a, geprobeerd wordt polynomen te fitten, dan blijken dat bij benadering parabolen te zijn, zodat er kwalitatief goede overeenstemming is met de fitlijn.

Als er niet-perfecte hechting tussen vezels en matrix verondersteld wordt, en er een interfacelaagje met een lage E_i en bepaalde c/d -verhouding gemoduleerd wordt, kunnen de lijnen c en a ongeveer samenvallen met de fitlijn. Het resultaat is te zien in figuur (2.20). Voor methode c en a zijn bijna dezelfde c/d -waarden nodig: 0.12 resp. 0.11. Vooral bij methode a vallen de theoretische en experimentele lijn bijna samen.



Figuur 2.20: $E(E_x)$ bij een uniforme verdeling als functie van v_f met links: methode c; $c/d=0$ (1), 0.05 (2), 0.12 (3) en 0.2 (4); rechts methode a; $c/d=0$ (1), 0.05 (2), 0.11 (3) en 0.2 (4); lijn 5 is de fitlijn; $l/d=60$

3 Hoe werkt het programma

In dit hoofdstuk zal in het kort worden uitgelegd, hoe de theorie uit het vorige hoofdstuk is verwerkt in PC-Matlab-files.

Er zijn twintig M-files, die voornamelijk door elkaar worden aangeroepen. Voordat er gerekend kan worden moeten eerst via een editor (bijv. Norton of MicroEmacs) in de invoerfile **INVOER** een aantal zaken worden ingevuld, zoals de materiaaleigenschappen van matrix, vezel en eventueel interface(lagen), de eventuele laagdiktes, welke grootte berekend moet worden met welke parameter als variabele, etc.

Het hoofdprogramma heet **MAIN**. Eerst wordt de invoerfile gelezen. De te bepalen grootte wordt uitgerekend bij verschillende waarden van $ld(=l/d)$ en één andere parameter, bijv. v_f . ld en in dit geval v_f zijn dus vectoren met lengte j resp. row . De te berekenen grootte wordt dan gerepresenteerd door een $(row \times j)$ matrix. Nemen we als voorbeeld E_x , die bepaald wordt bij 20 waardes voor ld en 5 voor v_f , met cd , E_{int} en h_{int} constant. Dan resulteert na alle berekeningen uiteindelijk:

$$E_x = \begin{bmatrix} E_x(ld_1, v_{f1}, cd, E_{int}, h_{int}) & \cdots & E_x(ld_{20}, v_{f1}, cd, E_{int}, h_{int}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_x(ld_1, v_{f5}, cd, E_{int}, h_{int}) & \cdots & E_x(ld_{20}, v_{f5}, cd, E_{int}, h_{int}) \end{bmatrix}$$

Een groot aantal berekeningen wordt vergemakkelijkt als ld , cd etc. worden omgezet in $(row \times j)$ matrices. Dit wordt gedaan in **MATRIX**.

Daarna volgt de berekening van de $(row \times j)$ matrices \underline{E}_1 , \underline{E}_2 , \underline{v}_{12} , \underline{v}_{21} en \underline{G}_{12} in resp. **EMODULUS**, **DWARS** en **GLIJ**.

Nu kunnen we twee kanten op: als de vezelhoeken statistisch verdeeld zijn wordt **INTEGRAL** aangeroepen, als de vezeltjes per laag in dezelfde richting liggen komen we bij **FIXANGLE** terecht.

INTEGRAL werkt als volgt: om een verwachting en variantie uit te rekenen moet een integraal, zie vgl. (2.3) worden bepaald. Dat gebeurt in **INTEGRAL** met een Simpsonbenadering; dit is een benadering met kwadratische functies waarbij een halvering van de stapgrootte de fout $\pm 16 \times$ zo klein maakt. Bij elke slag wordt bij n verschillende hoeken α die op afstand $dist$ van elkaar liggen het volgende gedaan: in **STIFNES1** wordt de stijfheidsmatrix \underline{S}_k^ϕ uit vgl. (1.13) bepaald (deze heeft dimensies $(3row \times 3j)$, omdat E_1 etc. $(row \times j)$ zijn), en vervolgens \underline{S}^α . In **SINTFACE** wordt de stijfheidsmatrix van eventuele interfacelagen bepaald; \underline{S}^α en \underline{S}_{int} worden gebruikt voor de berekening van \underline{A} en daarna $\underline{\bar{S}}$ in **STIFNES2**, zie vgl. (2.6). In **PARAMET1** worden \underline{E}_x etc. uit $\underline{\bar{S}}$ opgelost, zie vgl (1.26)-(1.27) en vervolgens wordt $par2 = [\underline{E}_x, \underline{E}_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}, \underline{G}_{xy}, \underline{E}_x^2, \underline{E}_y^2, \nu_{xy}^2, \nu_{yx}^2, \underline{G}_{xy}^2]$ gevormd. Tenslotte wordt $par2(row \times 10j)$ vermenigvuldigd met de juiste statistische functie uit **STATFIE**. We berekenen dus de integraal:

$$\underline{I}(row \times 10j) = \int_{\bar{\theta} - \theta_{grens}}^{\bar{\theta} + \theta_{grens}} par2 \cdot f(\alpha) d\alpha$$

Telkens wordt de stapgrootte gehalveerd en de integraal opnieuw bepaald totdat de relatieve fout tussen de nieuwe en oude benadering kleiner is dan 0.001. Dan wordt de loop afgebroken en worden $E(\underline{E}_x)$ etc. in $par(row \times 5j)$ en $var(\underline{E}_x) = E(\underline{E}_x^2) - E^2(\underline{E}_x)$ etc. in $var(row \times 5j)$ gezet.

Als **FIXANGLE** wordt aangeroepen gebeurt het volgende: voor elke laag k met hoek ϕ wordt \underline{S}_k^ϕ in **STIFNES1** berekend, dan eventueel \underline{S}_{int} in **SINTFACE**, waarna \underline{A} en $\underline{\bar{S}}$ worden bepaald. Tenslotte worden in **PARAMET1** $\underline{E}_x, \underline{E}_y$ etc. uitgerekend en in par opgeslagen.

We hebben nu dus hetzij via **INTEGRAL** hetzij via **FIXANGLE** de matrix par . Daaruit wordt de gevraagde grootte in de vorm van een $(row \times j)$ matrix gehaald. Deze wordt geplot met ld op de x-as. Er verschijnen row grafieken, daar de gevraagde grootte bij row verschillende waarden van de andere parameter is berekend.

EPILOG tenslotte kan apart gebruikt worden na **MAIN** om bij één bepaalde waarde voor ld en de andere parameter de grootte van $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ en G_{xy} te bepalen.

4 Experimenten

We hebben nu een aardig analytisch model, maar komt het ook overeen met de praktijk? Om dat te bekijken zijn experimenten nodig. Er zal alleen naar de elasticiteitsmodulus worden gekeken, omdat die gemakkelijk via uniaxiale trekproeven te bepalen is. Voor de dwarscontractiecoëfficiënten en de glijdingsmodulus ligt dat wat moeilijker.

De trekstaven zijn gemaakt van de volgende twee materialen: als matrixmateriaal is gebruikt polystyreen; het vezelmateriaal bestaat uit glasvezeltjes. De staven zijn als volgt gemaakt: 100 g polystyreenkorreltjes wordt tussen 2 gladde rollen (soort wringer) met een temperatuur van $\pm 190^\circ\text{C}$ gegoten. De korreltjes smelten en vormen een kleverige transparante laag om één van

| | ρ (kg/m^3) | E (GPa) | ν (-) | G (GPa) | opmerkingen |
|-------------|--------------------------------------|----------------|--------------|-----------------------|---|
| Polystyreen | 1050 | 3.24^\dagger | 0.35 | 1.2 | amorf transparant $T_g \approx 90^\circ\text{C}$ |
| Glasvezel | 3000 | 75 | 0.22 | $31^{\dagger\dagger}$ | lengte $l \approx 3\text{mm}$ diameter $d \approx 12\mu\text{m}$ |

† : bepaald uit trekproef

†† : berekend uit E en ν (er geldt isotropie)

Tabel 4.1: Gegevens over polystyreen en glas

de twee rollen. Een bepaalde hoeveelheid glasvezeltjes wordt daar aan toegevoegd en door het wringereffect worden de vezeltjes door het polystyreen

gemengd. Na voldoende menging wordt de laag van de rol geschraapt, waarna deze massa (die snel hard wordt) in een vorm van $160 \times 160 \times 3\text{mm}$ eerst in een warme (190°C) pers wordt geplaatst onder 20 bar druk, totdat de vorm zich gevuld heeft, en dan in een koude pers. De uiteindelijke plaat wordt in repen van 18mm gezaagd. Uit deze repen wordt de uiteindelijke trekstaaf gefreesd. Tabel (4.1) geeft nadere informatie over zuiver polystyreen en glas (gegevens voornamelijk afkomstig uit de literatuur [5-8]).

In hoofdstuk 2 bleek dat de materiaaleigenschappen onder andere afhankelijk zijn van de hoeveelheid vezel in het composiet. Daarom zijn er proefstaven gemaakt met vijf verschillende hoeveelheden vezel, resulterend in vijf verschillende massafractie's. Omdat het computermodel rekent met volumefractie's, dienen de massafractie's vezel m_f omgerekend te worden naar volumefractie's v_f :

$$\begin{aligned}
 v_f &= \frac{\text{Volume}_f}{\text{Volume}_f + \text{Volume}_m} = \\
 &= \frac{\text{massa}_f / \rho_f}{\text{massa}_f / \rho_f + \text{massa}_m / \rho_m} \\
 &= \frac{\rho_m \cdot m_f}{\rho_m \cdot m_f + (1 - m_f) \cdot \rho_f}
 \end{aligned}$$

De resulterende waarden voor v_f staan vermeld in tabel (4.2).

| hoeveelheid polystyreen (g) | hoeveelheid glasvezel (g) | m_f (%) | v_f (%) |
|-----------------------------------|---------------------------------|--------------|--------------|
| 100 | 0 | 0.0 | 0.0 |
| 100 | 5 | 4.8 | 1.7 |
| 100 | 10 | 9.1 | 3.4 |
| 100 | 20 | 16.7 | 6.5 |
| 100 | 35 [†] | 25.9 | 10.9 |

[†]: meer was niet mogelijk

Tabel 4.2: volumefractie's

De lengte-diameterverhouding van de vezeltjes is ook een parameter die de eigenschappen van het composiet beïnvloedt. Vóóordat de glasvezeltjes in

het composiet komen zijn ze bijna allemaal even lang, ongeveer 3mm. Door de wijze waarop de trekstaven gemaakt zijn (kneden, walsen, persen), zijn (bijna?) alle glasvezeltjes gebroken. Er komen dus allerlei lengtes voor. Om een beeld te krijgen van de gemiddelde lengte zijn twee stukjes composiet met 12.9% resp. 45% volumefractie vezel opgelost in Xyleen, zodat alleen de glasvezeltjes overblijven. Onder een microscoop is daarna volledig willekeurig de lengte vastgesteld van 50 glasvezels. De kleinste lengte die voorkomt is ongeveer gelijk aan de diameter: $\pm 12\mu\text{m}$, de grootste is nog maar één derde van de oorspronkelijke lengte: $\pm 1\text{mm}$. De gemiddelde lengte is voor beide composieten ongeveer 0.7mm. Er is weinig verschil tussen de twee monsters. De gemiddelde ld -verhouding is derhalve ± 60 .

Van de vijf verschillende composieten zijn ook gladgeschuurde en gepolijste monsters onder een microscoop bekeken. Drie zaken vallen op:

1. als we van een trekstaaf de trekrichting de 1-richting noemen, de breedte langs de 2-as ligt en de dikte langs de 3-as, dan liggen de vezels qua hoek redelijk uniform verdeeld in het 12-vlak,
2. in het 13-vlak en 23-vlak liggen relatief veel vezels ongeveer in de 1- en 2-richting,
3. composieten met verschillende volumefractie's geven allemaal hetzelfde beeld te zien.

De vezels liggen dus bij benadering 2-dimensionaal random verdeeld, zodat het model hiervoor geschikt is.

Het analytische model gaat uit van zuiver elastisch materiaal. Polystyreen vertoont visco-elastischeit. Door middel van twee relaxatieproeven en drie trekproeven bij verschillende reksnelheden ($\dot{\epsilon}=0.1, 1.0$ en 5.0 mm/min) is de mate van visco-elastisch gedrag bekeken. Polystyreen blijkt slechts een klein beetje visco-elastisch gedrag te vertonen. Om ook de invloed van dat kleine beetje zoveel mogelijk te beperken is een zo hoog mogelijke treksnelheid gekozen, waarbij het minstens een halve minuut moet duren voordat de trekstaaf breekt [9]. Deze snelheid bedraagt ongeveer 1mm/min. Uit een rek/tijd-diagram kan de werkelijke reksnelheid $\dot{\epsilon}$ worden gehaald; deze is gelijk aan de helling van de rek/tijd-grafiek gedeeld door de afstand tussen de meetmesjes van de extensiemeter ($\pm 52\text{mm}$), zodat $\dot{\epsilon} = 0.014$ %/s.

De trekproefresultaten in de vorm van elasticiteitsmoduli zijn te vinden in bijlage C.

5 Conclusies

De grootte van E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} en G_{xy} zijn, behalve natuurlijk van parameters zoals l/d etc., vooral afhankelijk van de manier waarop E_1 en G_{12} worden bepaald.

De grootte van E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} en G_{xy} kan alleen op analytische wijze worden berekend als alle vezels in dezelfde (willekeurige) richting liggen. Bij statistisch verdeelde vezelrichtingen moet bijna altijd een numerieke benaderingsmethode worden toegepast.

Desalniettemin komen de resultaten van het toch eenvoudige model aardig overeen met experimentele resultaten, ondanks flinke onzekerheden wat betreft invoergrootheden voor het rekenprogramma (materiaaleigenschappen van matrix, maar zeker van vezels; gemiddelde l/d -waarde) en kwaliteit van de trekstaven (random verdeelde vezels?; variërende concentraties vezel).

De veronderstelling dat afschuiving \perp vezels plaatsvindt biedt betere overeenstemming met experimenten dan afschuiving $//$ vezels. Over de isostress-isostrain- of isostrain-isostressaanpak is weinig te zeggen.

Er zijn meer experimenten nodig om bijv. overeenstemming bij andere materialen en de invloed van meer gerichte vezels te bekijken, en om meer over de interface-eigenschappen te kunnen zeggen.

Bibliografie

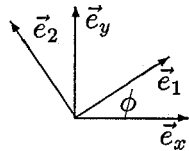
- [1] Ramaekers, R.J.A.E.
Discrete modellen voor een composiet met unidirectionele korte vezels
WFW-rapport 91.031, april '91
- [2] Oomens, C.W.J.
Constitutieve modellen
diktaat 4687, januari '91
- [3] *Samenvatting Transversaal Isotroop Materiaalgedrag*
bijlage uitgereikt bij het vak 4A420 Constitutieve modellen
- [4] Chatfield, C.
Statistics for technology
Chapman & Hall, London 1983
- [5] Mazurin, O.V. e.a.
Handbook of glass data, part A
Silica glass and binary silicate glasses
Elsevier, 1983
- [6] Dani, A. de
Glass fibre reinforced plastics
George Newnes Ltd, 1963
- [7] Creemers, M.R. e.a.
Poly-technisch Zakboekje, 42^e editie
Koninklijke PBNA, Arnhem '87

- [8] Jansen, A.I. e.a.
BINAS
Wolters-Noordhoff, Groningen '77
- [9] ASTM D 638
Standard test method for tensile properties of plastics

Bijlage A

Bepalen transformatiematrix \underline{T}

De transformatiematrix \underline{T} kan met een evenwichtsbeschouwing van de spanningen en rekken op twee driehoeken worden bepaald. Eenvoudiger is het om uit te gaan van de tensoren σ resp. ϵ . Voor σ gaat dat als volgt: we definiëren de bases \vec{e} en \vec{e}^* op de volgende manier:



$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$
$$\vec{e}^* = \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{bmatrix}$$

Voor deze bases geldt:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \underline{R} \vec{e}^*$$

Voor de tensor σ kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \sigma &= \vec{e}^T \underline{\sigma} \vec{e} = \vec{e}^{*T} \underline{\sigma}^* \vec{e}^* \\ &= \vec{e}^T \underline{R}^{-T} \underline{\sigma}^* \underline{R}^{-1} \vec{e} \end{aligned}$$

met:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$\underline{\sigma}^* = \underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R}$$

Dit levert het volgende stelsel op:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \cos^2\phi \cdot \sigma_{11} + \sin^2\phi \cdot \sigma_{22} - 2\cos\phi \sin\phi \cdot \tau_{12} \\ \sigma_{yy} &= \sin^2\phi \cdot \sigma_{11} + \cos^2\phi \cdot \sigma_{22} + 2\cos\phi \sin\phi \cdot \tau_{12} \\ \tau_{xy} &= \cos\phi \sin\phi \cdot \sigma_{11} - \cos\phi \sin\phi \cdot \sigma_{22} + (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \cdot \tau_{12}\end{aligned}$$

zodat:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & -2\cos\phi \sin\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 2\cos\phi \sin\phi \\ \cos\phi \sin\phi & -\cos\phi \sin\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

Kort geschreven:

$$\underline{\sigma}_{xy} = \underline{U} \underline{\sigma}_{12}$$

Voor de rekgrootheden geldt bijna precies hetzelfde verhaal; we krijgen dezelfde matrix \underline{U} als we ϵ_{xy} en ϵ_{12} gebruiken in plaats van γ_{xy} en γ_{12} . Meestal wordt echter $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ gebruikt als maat voor de afschuiving. Daardoor verandert \underline{U} . De nieuwe matrix \underline{T} is de transformatiematrix die we zoeken:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{T} \underline{\epsilon}_{xy} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & -\cos\phi \sin\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & \cos\phi \sin\phi \\ 2\cos\phi \sin\phi & -2\cos\phi \sin\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Bovendien blijkt te gelden $\underline{U} = \underline{T}^{-T}$, zodat:

$$\underline{\epsilon}_{xy} = \underline{T} \underline{\epsilon}_{12} \quad \text{en} \quad \underline{\sigma}_{xy} = \underline{T}^{-T} \underline{\sigma}_{12}$$

Bijlage B

Inhoud M-files

INVOER.M

```
%*****  
% Invoer-file voor het berekenen van de longitudinale (El),  
% transversale (Et) en glijdingsmodulus (G) en de  
% dwarscontractiecoëfficiënten (nu12 en nu21) van een composiet.  
% Geef de waarde van de moduli van resp. het matrixmateriaal,  
% het vezelmateriaal en het interfacemateriaal in GPa!!!!.  
%*****  
  
Elm = 3.24;      Etm = 3.24;  
Elf = 75;       Etf = 75;  
Eli = .5;       Eti = .5;  
  
nu12m = .35;    nu21m = .35;  
nu12f = .22;    nu21f = .22;  
nu12i = .21;    nu21i = .21;  
  
Gm = 1.2;  
Gf = 31;  
Gi = 1;  
  
%*****  
% Geef in yplot aan welke grootheden (max 4) u (achtereenvolgens)  
% wilt berekenen door in yplot de bijbehorende getallen te plaatsen  
% (bv: yplot = [3 4] => nuxy en nuyx worden berekend):  
% - Ex:  1  
% - Ey:  2
```

```

% - nuxy: 3
% - nuyx: 4
% - Gxy: 5
%*****

yplot = [1];

%*****
% Bovenstaande parameter(s) kunnen berekend worden als functie van:
% - de lengte-diameter verhouding van een vezel (l/d): ld,
% - de verhouding interfacedikte/vezeldiameter (c/d): cd,
% - de volumefractie vezel in de matrix: vf,
% - de elasticiteitsmodulus van de (eventuele) interfacelagen: Eint,
% - de dikte van de (eventuele) interfacelagen: hint.
% Men kan een vector opgeven met beginwaarde, stapgrootte en
% eindwaarde, bv. ld = 1:1:100. (ld moet altijd een vector zijn.)
% Geef in parplot op dezelfde wijze als hierboven aan welke
% parameters u wilt variëren; de i-de grootte van yplot wordt
% berekend als functie van de i-de parameter van parplot
% (yplot en parplot moeten derhalve dezelfde lengte hebben!):
% - cd: 1
% - vf: 2
% - Eint: 3
% - hint: 4
%*****

ld = 1:5:199;
cd = 0;
vf = 0:.2:1;
Eint = 1;
hint = 1;

parplot = [2];

%*****
% Is er sprake van equal spacing?
% - ja : dan y = 1
% - nee: geef dan de gewenste verhouding van a en b: y = a / b
%*****

y = 1;

%*****
% De berekening mbv de rule of mixtures kan geschieden op twee

```

```

% manieren. Eerst een iso-stress berekening gevolgd door een
% iso-strain of omgekeerd; geef dit aan in q en r:
% - vezel/interface : isostress-isostrain (q=1)
%                   : isostrain-isostress (q=2)
% - vezel+int./matrix: isostress-isostrain (r=1)
%                   : isostrain-isostress (r=2)
% * eerste element: berekening van de elasticiteitsmoduli
% * tweede element: berekening van de dwarscontractiecoefficienten
% * derde element : berekening van de glijdingsmodulus
%*****

q = [1 1 1];
r = [1 1 1];

%*****
% Bij de berekening van de glijdingsmodulus kunnen er twee situaties
% worden onderscheiden:
% - afschuiving loodrecht op de vezels: p = 1,
% - afschuiving evenwijdig aan de vezels: p = 2.
%*****

p = 1;

%*****
% Geef de dikte van de composietlagen aan in vector h
% (het i-de element van h is de dikte van de i-de laag)
%*****

h = [1];

%*****
% Geef de dwarscontractiecoefficient van de interfacelagen
%*****

nu = .3;

%*****
% Geef voor elke berekening aan of de hoek van de vezels statistisch
% verdeeld is en zo ja, hoe de kansdichtheidsfunctie er uitziet:
% - geen statistiek:          statist = 0,
% - normale (Gauss) verdeling: statist = 1,
% - constante verdeling:     statist = 2.
% N.B. statist is een vector met dezelfde lengte als yplot.
%*****

```

```

statist = [0];

%*****
% Als de vezels statistisch verdeeld in de matrix liggen, geef dan
% de gemiddelde waarde van de hoek waaronder de vezels liggen: theta,
% en de grenzen van die hoek (tov de gemiddelde hoek): thetagrens.
%*****

theta = 0;
thetagrens = pi/2;

%*****
% Als de vezels unidirectioneel in de composietlagen liggen, geef dan
% per laag de hoek aan.
% N.B. phi heeft dezelfde lengte als h.
%*****

phi = [0];

```

MAIN.M

```

%*****
% Dit is een programma waarmee de elasticiteitsmoduli, de dwars-
% contractiecoefficienten en de glijdingsmodulus van een
% composiet(laminaat) berekend kunnen worden met de vezels
% onder een bekende hoek of statistisch verdeeld.
%*****

clear
clg

%*****
% Het inlezen van de gegevens
%*****

invoer;

%*****
% Er kunnen op een scherm meerdere grafieken van berekeningen met
% telkens andere parameters worden afgebeeld. Daarom moet per
% berekening (dus per plotje) worden bepaald welke parameters

```



```

% worden gevarieerd.
%*****

for ypl = 1:1:length(yplot)
if parplot(ypl) <= 2
    Eint = Eint(1);
    hint = hint(1);
    if parplot(ypl) == 1
        vf = vf(1);
        param = cd;
        str1 = 'c/d';
    else
        cd = cd(1);
        param = vf;
        str1 = 'vf';
    end
else
    cd = cd(1);
    vf = vf(1);
    if parplot(ypl) == 3
        hint = hint(1);
        param = Eint;
        str1 = 'Eint';
    else
        Eint = Eint(1);
        param = hint;
        str1 = 'hint';
    end
end
end

%*****
% Het omzetten van de vectoren ld, cd, vf, Eint, hint met
% verschillende dimensies in matrices met alle dezelfde dimensies
%*****

[ld,cd,vf,Eint,hint,row,j] = matrix(ld,cd,vf,Eint,hint);

%*****
% Berekening van de longitudinale en transversale elasticiteits-
% modulus, de dwarscontractiecoefficienten en de glijdingsmodulus
% van een RVE
%*****

[E1,E2] = emodulus(Elm,Elf,Eli,Etm,ETF,Eti,ld,cd,vf,q,r,y);

```

```

[nu12,nu21] = dwars(nu12m,nu12f,nu12i,nu21m,nu21f,nu21i,ld,cd,vf,..
                  q,r,y);
G12 = glij(Gm,Gf,Gi,ld,cd,vf,p,q,r,y);

%*****
% Indien de hoek waaronder de vezels in de matrix liggen statistisch
% verdeeld is, wordt de verwachte waarde van de te berekenen grootheid
% bepaald. Indien de hoek van de vezels een vaste, bekende waarde
% heeft, wordt de waarde van de grootheid onder die hoek berekend.
% In beide gevallen kan de berekening voor een laminaat met meerdere
% lagen worden gedaan.
%*****

stat = statist(ypl);
if stat > 0
    [par,var] = integral(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu,hint,h,...
                       theta,thetagens,stat);
else
    par = fixangle(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu,hint,h,phi);
end
yvar = par(:,(yplot(ypl)-1)*j+1:yplot(ypl)*j);
yvar = yvar';

%*****
% Gegevens voor de titel van het plotje
%*****

if yplot(ypl) <= 2
    if yplot(ypl) == 1
        str2 = 'Ex';
    else
        str2 = 'Ey';
    end
elseif yplot(ypl) <= 4
    if yplot(ypl) == 3
        str2 = 'nuxy';
    else
        str2 = 'nuyx';
    end
else
    str2 = 'Gxy';
end

```

```

%*****
% Verdeling van het beeldscherm in 1, 2 of 4 stukken, afhankelijk van
% het aantal te berekenen grootheden
%*****

if length(yplot) == 1
    subplot
elseif length(yplot) == 2
    if ypl == 1
        subplot(121)
    else
        subplot(122)
    end
else
    if ypl == 1
        subplot(221)
    elseif ypl == 2
        subplot(222)
    else
        if ypl == 3
            subplot(223)
        else
            subplot(224)
        end
    end
end
end

%*****
% Het plotje
%*****

plot(ld',yvar)
if row ==1
    title([str2,' tegen 1/d'])
else
    title([str2,' tegen 1/d met ',str1,' als parameter'])
end
xlabel('1/d [-]')
ylabel(str2)

if ypl==length(yplot)
    ld = ld(1,:);
    save pardata par ld param str1;
else

```

```

clear
invoer;
end

end

```

MATRIX.M

```

function [ld,cd,vf,Eint,hint,row,j] = matrix(ld,cd,vf,Eint,hint)

%*****
% Het veranderen van de vectoren: ld(1,j), cd(1,k), vf(1,l), Eint(1,m),
% hint(1,n) in de matrices: ld, cd, vf, Eint, hint, alle met dezelfde
% dimensies (k*l*m*n,j), zodat eenvoudig array operaties kunnen worden
% toegepast.
%*****

j = length(ld);
k = length(cd);
l = length(vf);
m = length(Eint);
n = length(hint);
row = k*l*m*n;

%*****
% Bepalen van matrix ld
%*****

ld = ones(k*l*m*n,1) * ld;

%*****
% Bepalen van matrix cd
%*****
cd = ones(j,1) * cd;
cd1 = cd;
for i = 1:1:l*m*n-1
    cd1 = [cd1,cd];
end
cd = cd1';

%*****
% Bepalen van matrix vf

```

```

%*****

vf = ones(j,1) * vf;
vf1 = vf(:,1) * ones(1,k);
for i = 2:1:l
    vf2 = vf(:,i) * ones(1,k);
    vf1 = [vf1,vf2];
end
vf2 = vf1;
for i = 1:1:m*n-1
    vf1 = [vf2,vf1];
end
vf = vf1';

%*****
% Bepalen van matrix Eint
%*****

Eint = ones(j,1) * Eint;
Eint1 = Eint(:,1) * ones(1,k*1);
for i = 2:1:m
    Eint2 = Eint(:,i) * ones(1,k*1);
    Eint1 = [Eint1,Eint2];
end
Eint2 = Eint1;
for i = 1:1:n-1
    Eint1 = [Eint2,Eint1];
end
Eint = Eint1';

%*****
% Bepalen van matrix hint
%*****

hint = ones(j,1) * hint;
hint1 = hint(:,1) * ones(1,k*1*m);
for i = 2:1:n
    hint2 = hint(:,i) * ones(1,k*1*m);
    hint1 = [hint1,hint2];
end
hint = hint1';

```

EMODULUS.M

```
function [E1,E2] = emodulus(Elm,Elf,Eli,Etm,Etf,Eti,ld,cd,vf,q,r,y)

%*****
% Berekening van de elasticiteitsmoduli van een composiet met korte
% vezels
%*****

for Edir =1:1:2
if Edir == 1
    Em = Elm;
    Ef = Elf;
    Ei = Eli;
else
    Em = Etm;
    Ef = Etf;
    Ei = Eti;
end;
qrn = 1;

%*****
% Berekening van de volumefractie vf' = vezel/(vezel+interface)
%*****

vfr = ld ./ ((ld+cd) .* (1+cd));

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,cd,q,Edir,qrn);

%*****
% Het berekenen van de Emodulus van de vezel-interface
%*****

Efi = modulus(Ei,Ef,g,vfr);

%*****
% De totale Emodulus van vezel en interface is nu bekend.
%
% Berekening van de a/d verhouding
```

```

%*****

ad = spacing(ld,cd,vf,y);

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,ad,r,Edir,qrn);

%*****
% Het berekenen van de Emodulus van het totale element
%*****

Efim = modulus(Em,Efi,g,vf);

%*****
% Na de eerste berekening is E1 bekend, na de tweede E2.
%*****

if Edir == 1
    E1 = Efim;
else
    E2 = Efim;
end
end

```

STRUPAR.M

```

function g = strupar(ld,acd,qr,dir,qrn)

%*****
% Het bepalen van de functie g=g(structuurparameters)
%*****

if qrn >= 2
    if qr(qrn) == 1
        qr(qrn) = 2;
    else
        qr(qrn) = 1;
    end
end
end

```

```

if qr(qrn) == 1
    if dir == 1
        g = (1+acd) ./ (1+acd+ld);
    else
        g = (acd+ld) ./ (1+acd+ld);
    end
else
    if dir == 1
        g = 1 ./ (1+acd+ld);
    else
        g = ld ./ (1+acd+ld);
    end
end
end

```

MODULUS.M

```

function D1 = modulus(D2,D3,g,vf)

%*****
% Berekening van een elasticiteits- of glijdingsmodulus of
% dwarscontractiecoefficient van het composiet
%*****

D1 = D2 + (vf .* (D3-D2) .* D2) ./ (D2 + g .* (1-vf) .* (D3-D2));

```

SPACING.M

```

function ad = spacing(ld,cd,vf,y)

%*****
% Berekening van de a/d-verhouding bij gegeven l/d-, c/d- en a/b-
% verhouding en volumefractie vezel vf.
%*****

ad = .5*sqrt(((ld/y+1) + (1/y+1)*cd) .* ((ld/y+1) + (1/y+1)*cd) +...
    4/y*(ld - (ld+cd) .* (1+cd) .* vf) ./ vf) -...
    .5*((ld/y+1) + (1/y+1)*cd);

```


DWARS.M

```
function [nu12,nu21] = dwars(nu12m,nu12f,nu12i,nu21m,nu21f,nu21i,..
                            ld,cd,vf,q,r,y)

%*****
% Berekening van de dwarscontractie-coëfficiënten van een composiet
% met korte vezels
%*****

for nudir = 1:1:2
if nudir == 1
    num = nu21m;
    nuf = nu21f;
    nui = nu21i;
else
    num = nu12m;
    nuf = nu12f;
    nui = nu12i;
end
qrn = 2;

%*****
% Berekening van de volumefractie vf' = vezel/(vezel+interface)
%*****

vfr = ld ./ ((ld+cd) .* (1+cd));

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,cd,q,nudir,qrn);

%*****
% Het berekenen van de poisson ratio van de vezel-interface
%*****

nufi = modulus(nui,nuf,g,vfr);

%*****
% De totale poisson ratio van vezel en interface is nu bekend.
%
```

```

% Berekening van de a/d verhouding
%*****

ad = spacing(ld,cd,vf,y);

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,ad,r,nudir,qrn);

%*****
% Het berekenen van de poisson ratio van het totale element
%*****

nufim = modulus(num,nufi,g,vf);

%*****
% Na de eerste berekening is nu21 bekend, na de tweede nu12.
%*****

if nudir == 1
    nu21 = nufim;
else
    nu12 = nufim;
end
end
clear nu12m nu12f nu12i nu21m nu21f nu21i

```

GLIJ.M

```

function G12 = glij(Gm,Gf,Gi,ld,cd,vf,p,q,r,y)

%*****
% Berekening van de glijdingsmodulus van een composiet met korte
% vezels
%*****

qrn = 3;

%*****
% Berekening van de volumefractie vf' = vezel/(vezel+interface)

```

```

%*****

vfr = ld ./ ((ld+cd) .* (1+cd));

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,cd,q,p,qrn);

%*****
% Het berekenen van de glijdingsmodulus van de vezel-interface
%*****

Gfi = modulus(Gi,Gf,g,vfr);

%*****
% De totale glijdingsmodulus van vezel en interface is nu bekend.
%
% Berekening van de a/d verhouding
%*****

ad = spacing(ld,cd,vf,y);

%*****
% Het berekenen van de waarde van de structurele parameter g
%*****

g = strupar(ld,ad,r,p,qrn);

%*****
% Het berekenen van de glijdingsmodulus van het totale element
%*****

G12 = modulus(Gm,Gfi,g,vf);
clear Gm Gf Gi

```

INTEGRAL.M

```

function [par,var] = integral(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu,hint,h,..
                             theta,thetagens,stat)

```

```

%*****
% Berekening van de verwachting en variantie van de elementen in par2.
% De integraal wordt met de Simpsonbenadering bepaald.
%*****

clear functions;
p1 = theta - thetagrens;
p2 = theta + thetagrens;
alpha = p1;
par2 = paramet2(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu, hint,h,alpha);
y1 = statfie(alpha,theta,thetagrens,stat) * par2;
alpha = p2;
par2 = paramet2(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu, hint,h,alpha);
y2 = statfie(alpha,theta,thetagrens,stat) * par2 + y1;
t = y2/2 * (p2 - p1);
s1 = t;
error = 0;
max1 = 1;
n = 1;
while max1 > error
    s2 = s1;
    dist = (p2 - p1)/n;
    d = 0;
    for i = 1:1:n
        m = i
        alpha = p1 + (i - .5)*dist;
        par2 = paramet2(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu, hint,h,alpha);
        d = d + statfie(alpha,theta,thetagrens,stat) * par2;
    end
    s1 = (2*dist*d + t)/3;
    t = (t + dist*d)/2;
    spar1 = s1(:,1:5*j);
    spar2 = s2(:,1:5*j);
    svar1 = s1(:,5*j+1:10*j);
    svar2 = s2(:,5*j+1:10*j);
    max1 = max(max(abs(spar2 - spar1)))
    error = max(max(abs(spar1))) * 1e-3
    n = 2 * n;
end

%*****
% De verwachting van Ex, Ey, nuxy, nuyx en Gxy wordt in par gezet,
% de variantie in var.
%*****

```

```

par = spar1;
var = svar1 - spar1 .* spar1;
clear E1 E2 nu12 nu21 G12

```

STATFIE.M

```

function functie = statfie(alpha,theta,thetagens,stat)

%*****
% Als stat = 1 wordt er een normale (Gausse) verdeling verondersteld,
% als stat = 2 een uniforme verdeling.
%*****

if stat == 1
    var = thetagens/3;
    functie = 1/(var*sqrt(2*pi))*exp(-(alpha-theta)*(alpha-theta)/(2*var*var));
elseif stat == 2
    functie = 1/(2*thetagens);
else
    end
end
end

```

FIXANGLE.M

```

function par = fixangle(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu,hint,h,phi)

%*****
% Berekenen van Ex, Ey, nuxy, nuyx en Gxy bij bekende vaste
% vezelrichting(en). Deze vijf grootheden worden in par gezet.
%*****

clear functions
hintm = [ hint hint hint
          hint hint hint
          hint hint hint ];
htot = sum(h) * ones(3*row,3*j) + (length(h)-1) * hintm;
z0 = -htot/2;
z1 = z0 + h(1);
alpha = phi(1);
s1 = stifnes1(E1,E2,nu12,nu21,G12,alpha,row,j);

```

```

A = s1 .* (z1 - z0);
zk = z1;
for i = 2:1:length(h)
    alpha = phi(i);
    z1 = zk + hintm;
    zm = z1 + h(i);
    s1 = stifnes1(E1,E2,nu12,nu21,G12,alpha,row,j);
    sint = sintface(Eint,nu,row,j);
    A1 = stifnes3(s1,sint,zk,z1,zm,row,j);
    A = A + A1;
    zk = zm;
end
s2 = A ./ htot;
par = paramet1(s2,row,j);

```

STIFNES1.M

```

function s1 = stifnes1(E1,E2,nu12,nu21,G12,a,row,j)

%*****
% Transformatie van de (1,2)-componenten van de stijfheidsmatrix S
% naar (x,y)-componenten, zodat geldt:
% s1 = t(-T) * S * t(-1),
% waarbij t      : transformatiematrix,
%      t(-T): invers getransponeerde van t en
%      t(-1): inverse van t.
%*****

%*****
% Opbouw van de stijfheidsmatrix in (1,2)-richting (=vezelrichting)
%*****

shelp = 1 - nu12 .* nu21;

s11 = E1 ./ shelp;
s12 = nu21 .* E2 ./ shelp;
s13 = zeros(row,j);
s21 = nu12 .* E1 ./ shelp;
s22 = E2 ./ shelp;
s23 = zeros(row,j);
s31 = zeros(row,j);
s32 = zeros(row,j);

```

```

s33 = G12;

sk1 = [ s11; s21; s31 ];
sk2 = [ s12; s22; s32 ];
sk3 = [ s13; s23; s33 ];

%*****
% Berekening van transformatiematrix t en inverse t1, met
% a = hoek tussen (1,2)-basis en (x,y)-basis
%*****

t = [ cos(a)*cos(a) sin(a)*sin(a) -cos(a)*sin(a)
      sin(a)*sin(a) cos(a)*cos(a) cos(a)*sin(a)
      2*cos(a)*sin(a) -2*cos(a)*sin(a) cos(a)*cos(a)-sin(a)*sin(a) ];

t1 = inv(t);

%*****
% Bepalen van shelp1 = S * t(-1)
%*****

shelp1 = [ (sk1.*t1(1,1) + sk2.*t1(2,1) + sk3.*t1(3,1)),...
           (sk1.*t1(1,2) + sk2.*t1(2,2) + sk3.*t1(3,2)),...
           (sk1.*t1(1,3) + sk2.*t1(2,3) + sk3.*t1(3,3)) ];

sr1 = shelp1(1:row,:);
sr2 = shelp1(row+1:2*row,:);
sr3 = shelp1(2*row+1:3*row,:);

%*****
% Bepalen van s1 = t(-T) * shelp1 = t(-T) * S * t(-1)
%*****

s1 = [ (sr1.*t1(1,1) + sr2.*t1(2,1) + sr3.*t1(3,1));
       (sr1.*t1(1,2) + sr2.*t1(2,2) + sr3.*t1(3,2));
       (sr1.*t1(1,3) + sr2.*t1(2,3) + sr3.*t1(3,3)) ];

```

STIFNES2.M

```

function s2 = stifnes2(s1,sint,h,hint,row,j)

%*****

```

```

% Berekening van A = SOM{k=1,n}(s1(k) * (z1 - zk)),
% waarbij n    : aantal lagen van het laminaat,
%      zk     : z-coördinaat van de onderkant van de k-de laag,
%      z1     : z-coördinaat van de bovenkant van de k-de laag en
%      s1(k)  : stijfheidsmatrix in (x,y)-richting van de k-de laag.
%*****

hintm = [ hint hint hint
          hint hint hint
          hint hint hint ];
htot = sum(h) * ones(3*row,3*j) + (length(h)-1) * hintm;
z0 = -htot/2;
z1 = z0 + h(1);
A = s1 .* (z1 -z0);
zk = z1;
for i = 2:1:length(h);
    z1 = zk + hintm;
    zm = z1 + h(i);
    A1 = s1 .* (zm - z1) + sint .* (z1 - zk);
    A = A + A1;
    zk = zm;
end
s2 = A ./ htot;

```

STIFNES3.M

```

function A = stifnes3(s1,sint,zk,zl,zm,row,j)

%*****
% Berekening van A = SOM{k=1,n}(s1(k) * (z1 - zk)),
% waarbij n    : aantal lagen van het laminaat,
%      zk     : z-coördinaat van de onderkant van de k-de laag,
%      z1     : z-coördinaat van de bovenkant van de k-de laag en
%      s1(k)  : stijfheidsmatrix in (x,y)-richting van de k-de laag.
%*****

A = (s1 .* (zm - z1) + sint .* (z1 - zk));

```

SINTFACE.M

```

function sint = sintface(Eint,nu,row,j)

```



```

%*****
% Bepalen stijfheidsmatrix van de (isotrope) interfacelagen
%*****

sinthelp = Eint / (1-nu*nu);
G = Eint / (2*(1+nu));

sint = [ sinthelp      nu*sinthelp  zeros(row,j)
         nu*sinthelp  sinthelp      zeros(row,j)
         zeros(row,j) zeros(row,j)  G          ];

```

PARAMET1.M

```

function par2 = paramet1(s2,row,j)

%*****
% Bepalen van Ex, Ey, nuxy, nuyx en Gxy uit s2
%*****

Ehelp11 = s2(1:row,1:j);
Ehelp12 = s2(1:row,j+1:2*j);
Ehelp21 = s2(row+1:2*row,1:j);
Ehelp22 = s2(row+1:2*row,j+1:2*j);
Ehelp33 = s2(2*row+1:3*row,2*j+1:3*j);

Ex = Ehelp11 - Ehelp12 .* Ehelp12 ./ Ehelp22;
Ey = Ehelp22 - Ehelp12 .* Ehelp12 ./ Ehelp11;
nuxy = Ehelp12 ./ Ehelp11;
nuyx = Ehelp12 ./ Ehelp22;
Gxy = Ehelp33;

%*****
% Par2 wordt of direct gebruikt, of in een statistiek-integraal
% toegepast om de verwachting van de elementen in par2 uit te
% rekenen. In par3 staan alle elementen van par1 gekwadrateerd
% ten behoeve van de variantieberekening.
%*****

par1 = [ Ex, Ey, nuxy, nuyx, Gxy ];
par3 = par1 .* par1;
par2 = [par1, par3];

```

PARAMET2.M

```
function par2 = paramet2(E1,E2,nu12,nu21,G12,row,j,Eint,nu,hint,h,alpha)
```

```
*****  
% Achtereenvolgens worden vier functionfiles aangeroepen met par2  
% als resultaat.  
*****
```

```
s1 = stifnes1(E1,E2,nu12,nu21,G12,alpha,row,j);  
sint = sintface(Eint,nu,row,j);  
s2 = stifnes2(s1,sint,h,hint,row,j);  
par2 = paramet1(s2,row,j);
```

EPILOG.M

```
load pardata;  
j = length(ld);  
x1 = input('Welke l/d-waarde?:');  
x2 = input(['Welke ',stri,'-waarde?:']);  
dx1 = x1 - min(ld)  
dld = ld(2) - ld(1)  
plxmin = ceil(dx1/dld)  
if plxmin == 0  
    plxmin = 1  
end;  
plxmax = plxmin + 1  
p11 = (param >= x2);  
p12 = (param <= x2+1e-10);  
p1 = find(p12 .* p11);  
p2 = [];  
for i = 0:4  
    p2 = [p2,i*j+plxmin,i*j+plxmax];  
end  
par1 = par(p1,p2)  
par2 = par1(1:2:9) + (par1(2:2:10) - par1(1:2:9)) / dld *(x1 - ld(plxmin))  
Ex = par2(1)  
Ey = par2(2)  
nuxy = par2(3)  
nuyx = par2(4)  
Gxy = par2(5)
```

DIAM.M

```
%*****
% Dit is een programma waarmee de elasticiteitsmoduli van een
% composiet berekend kunnen worden als uitgegaan wordt van een
% diamondrangschikking van de vezels
%*****

clear
clg

%*****
% Het inlezen van de gegevens
%*****

invoer;

%*****
% Het omzetten van de vectoren ld, cd, vf, Eint, hint met
% verschillende dimensies in matrices met alle dezelfde dimensies
%*****

[ld,cd,vf,Eint,hint,row,j] = matrix(ld,cd,vf,Eint,hint);

%*****
% Berekening van de elasticiteitsmodulus van een RVE
%*****

ad = spacing(ld,cd,vf,y);
u1 = ones(row,j)./(2*(1 + ad));
t1 = 2*u1;
s1 = 2*ad./(ld + ad);
E1= Etm*Etf*ones(row,j)./(u1*Etm + (1-u1)*Etf);
E2= Etm*Etf*ones(row,j)./(t1*Etm + (1-t1)*Etf);
Et= s1.*E1 + (1-s1).*E2;
plot(ld',Et')
title('E2 tegen l/d met vf als parameter')
xlabel('l/d [-]')
ylabel('E2')
```

Bijlage C

Trekproefresultaten

| v_f (%) | b (mm) | d (mm) | A (mm ²) | ΔF (N) | $\Delta\sigma$ (N/mm ²) | $\Delta\epsilon$ (%) | E^\dagger (GPa) |
|--------------|-------------|-------------|---------------------------|-------------------|--|-------------------------|----------------------|
| 0.0 | 12.42 | 3.11 | 38.63 | 254 | 6.57 | 0.2 | 3.29 |
| | 13.05 | 3.15 | 41.11 | 282 | 6.86 | 0.2 | 3.43 |
| | 12.65 | 2.95 | 37.32 | 230 | 6.16 | 0.2 | 3.08 |
| | 12.70 | 2.95 | 37.47 | 250 | 6.67 | 0.2 | 3.34 |
| | 12.40 | 2.95 | 36.58 | 225 | 6.15 | 0.2 | 3.08 |
| 1.7 | 12.75 | 3.10 | 39.53 | 275 | 6.96 | 0.2 | 3.48 |
| | 12.35 | 3.00 | 37.05 | 248 | 6.69 | 0.2 | 3.35 |
| | 12.50 | 3.10 | 38.75 | 266 | 6.86 | 0.2 | 3.43 |
| 3.4 | 12.40 | 3.10 | 38.44 | 231 | 6.01 | 0.2 | 3.01 ^{††} |
| | 12.40 | 3.10 | 38.44 | 211 | 5.49 | 0.2 | 2.75 ^{††} |
| | 12.40 | 3.10 | 38.44 | 220 | 5.72 | 0.2 | 2.86 ^{††} |
| | 13.15 | 3.20 | 42.08 | 350 | 8.32 | 0.2 | 4.16 |
| | 13.20 | 3.15 | 41.58 | 315 | 7.58 | 0.2 | 3.79 |
| 6.5 | 12.80 | 3.20 | 40.96 | 370 | 9.03 | 0.2 | 4.52 |
| | 12.75 | 3.20 | 40.80 | 365 | 8.95 | 0.2 | 4.48 |
| 10.9 | 12.90 | 3.50 | 45.15 | 495 | 10.96 | 0.2 | 5.48 |
| | 12.95 | 3.65 | 47.27 | 520 | 11.00 | 0.2 | 5.50 |
| | 13.30 | 3.75 | 49.87 | 565 | 11.33 | 0.2 | 5.67 |

†: Secantmodulus: gem. helling tussen .05% en .25% rek (DIN 53457)

††: worden niet meegenomen