

# De toepassing van de eindige elementenmethode bij stromingsproblemen

**Citation for published version (APA):**

Gijsen, F. J. H. (1989). *De toepassing van de eindige elementenmethode bij stromingsproblemen*. (DCT rapporten; Vol. 1989.011). Technische Universiteit Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1989

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

De toepassing van de eindige elementenmethode  
bij stromingsproblemen. (89.011)

Verslag van Frank Bijsen  
Geunepeweg 34  
5625 AH Eindhoven

Opgave	<u>I</u>	:	blz.	1
Opgave	<u>II</u>	:	blz.	9
Opgave	<u>III</u>	:	blz.	22
Opgave	<u>IV</u>	:	blz.	32
Opgave	<u>V</u>	:	blz.	43

## OPGAVE I.

De bedoeling van opgave I is het testen van programmatuur door het bepalen van een benaderingsoplossing van functie die exact bekend is.

Daartoe is gedefinieerd:

$$-\Delta \vec{u} = f \quad \text{met } \Omega = (0,1) \text{ voor } x \text{ en } y$$

$$\vec{u} = \vec{u}(x,y)$$

$$f = f(x,y) = 2 \sin x \cdot \sin y$$

$$\text{De randvoorwaarden (RVW): } \begin{aligned} u(x,0) &= u(0,y) = 0 \\ u(1,y) &= u(x,1) = \sin x \sin y \end{aligned}$$

De exacte oplossing:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= 2 \sin x \sin y & \text{met } u &= \sin x \sin y \\ -(-\sin x \sin y - \sin x \sin y) &= 2 \sin x \sin y & \text{QED.} \end{aligned}$$

$$u = \sin x \cdot \sin y \quad \text{voldoet ook aan de RVW.}$$

Het verwachte patroon van de hoogtekaart van "snelheidslijnen" is getekend (Bijlage I)

De verwachte lijnen van constante snelheid zijn van

$$\text{het type } \sin x \cdot \sin y = c$$

$$\sin y = \frac{c}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{c}{x'}$$

We gaan de benadering construeren mbv. de EEM.

Het eerste gedeelte van de opgave wordt besteed aan het genereren van elementen, van een mesh. Dit genereren gebeurt in een SEPRAN-subroutine genaamd MESH.

Deze subroutine gebiedt ons een Standard Input File (S.I.F) aan te maken en daarin de hoekpunten, de lijnen tussen de hoekpunten, het aantal elementen op de lijnen, en de oppervlakten te benoemen. Zo kunnen we een mesh met ongeveer 50 elementen genereren. (Bijlage II)

Met een PLOT-routine kan alles op het scherm getoond worden. Omdat dit voor elk van de volgende opgaven hetzelfde zal zijn wordt dit met inang van OPG. IB. weggelaten.

In het tweede gedeelte wordt een benaderingsoplossing gezocht.

$$-\Delta u = f \quad \text{met } f = 2 \sin x \cdot \sin y$$

$$u(x, 0) = u(0, y) = 0$$

$$u(x, 1) = u(1, y) = \sin x \cdot \sin y.$$

Het type vergelijking is een tweede orde elliptische differentiaalvgl. en wel een Poissonvgl.

De RVW. kunnen onderverdeeld worden in essentiële RVW. en natuurlijke RVW. Essentiële RVW. reduceren het aantal onbekenden direct (Dirichlet RVW.) terwijl natuurlijke RVW. aanleiding geven tot lijnintegralen (Neumann en Robin RVW.). Hier hebben we te maken met essentiële RVW.

Al het bovenstaande hebben we nodig in het gebruikte Fortran programma dat voornamelijk bestaat uit het aanroepen van subroutines uit de SEPRAN-bibliotheek. Omdat dit programma als basis dient voor de rest van het practicum volgt er nu een overzicht:

- Declareren van gebruikte arrays.
- [MESH] : De mesh wordt gegenereerd.
- [PROBDEF] : Via de S.I.F. wordt het type vergelijking en het type RVW. vastgelegd.
- [COMMAT] : De oplossingsmethode wordt gekozen en een array wordt aangemaakt voor informatie over de coëfficiëntenmatrix.
- [BVALUE] : De waarden van de RVW. worden vastgelegd. Zijn dit geen constanten wordt de functie FUNCBC aangeroepen.

- [SYSTEM] : In deze subroutine wordt de coëfficiëntmatrix en de elementvector berekend. Daartoe is natuurlijk ook de waarde van  $f$  nodig. Deze, en nog andere, informatie wordt gestald in de arrays IUSER en USER die gevuld kunnen worden met FIL 100.
- [SOLVE] : Deze subroutine zorgt voor de oplossing van het stelsel vergelijkingen.

Het geheel is uitgerekend en geprint (Bijlage IIIA)

Uit het plaatje blijkt dat er inderdaad contourlijnen van het type  $y' = \frac{c}{x}$  tevoorschijn komen.

Duidelijk is echter ook al in het plaatje de MESH-grootte te zien door de stukjes rechte lijn.

De outputfile leert ons dat de waarden aan de rand exact kloppen. De RW. zijn dus goed ingevoerd en meegenomen.

In de outputfile staan ook de coördinaten van de knooppunten en de aldaar berekende benaderingsoplossing. Doordat we de coördinaten kennen kunnen wij per knooppunt de exacte waarde van  $u(x,y)$  berekenen. Door deze te vergelijken met de berekende benadering komen we tot de conclusie dat de benaderingsoplossing in ieder geval correct is tot <sup>ten met</sup> het 2<sup>e</sup> cijfer achter de komma. De verwachte nauwkeurigheid (lineair element, lineaire benadering) is  $O(h^2)$  en daaraan voldoet het pakket.

Het derde deel bestaat uit het definiëren van een eigen element, om daarna weer een benaderingsoplossing te construeren.

Daartoe wordt in de S.I.F. een elementtype gekozen dat niet tot de standaard SEPRAN-elementen behoort waardoor SYSTEM de subroetine ELEM aanroept. (voor werking ELEM zie pag. 7).

Het geheel kan geplott worden. (zie Bijlage III B)

De plot ziet hetzelfde uit als die van de vorige benadering.

De vector print-out leert ons dat er in het 3<sup>e</sup> cijfer achter de komma verschillen optreden. Of elementen die we zelf geconstrueerd hebben beter zijn valt moeilijk te zeggen.

Het blijkt ook hier dat uit de exacte berekening mbv. van de bekende knooppuntcoördinaten volgt dat de door ELEM gegenereerde elementen een oplossing leveren die t/m het 2<sup>e</sup> cijfer achter de komma is.

$$\boxed{A} \quad -\Delta \vec{u} = f \quad \text{RVW.} \quad u(x, 0) = u(0, y) = 0 \\ u(x, 1) = u(1, y) = \sin x \cdot \sin y$$

- \* Gebruikte basisfuncties : \*  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$
- \* lineair binnen het element
- \* continu op  $\Omega$

$$* \text{ Benadering : } \tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \varphi_i(x, y) + \sum_{i=N+1}^{N+D} g_i \cdot \varphi_i(x, y)$$

De benadering is opgesplitst in een onbekend deel ( $i = 1 \dots N$ ), dat als weegfuncties gebruikt zal gaan worden, en een bekend deel (Dirichlet RVW.)

Verder geldt :  $\varphi_i|_{\Gamma} = 0 \quad i = 1 \dots N.$

$$* \int_{\Omega} (-\Delta \vec{u} - f) w_j \, dx dy = 0 \quad , \quad w_j = \text{weegfunctie.}$$

$$* \int_{\Omega} (-\Delta \vec{u} - f) \cdot \varphi_j \, dx dy = 0 \quad j = 1 \dots N$$

$$* \text{ Integratie over } \Omega \text{ levert : } \int_{\Omega} (-\Delta \vec{u} - f) \varphi_j \, dx dy = 0 \quad j = 1 \dots N$$

De volgende stap is partiële integratie van de 2<sup>e</sup> orde term:

$$\int_{\Omega} \nabla \vec{u} \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \int_{\Omega} f \varphi_j \, dx dy \quad , \quad j = 1 \dots N$$

De randintegralen verdwijnen omdat voor  $j = 1 \dots N$   $\varphi_j$  gelijk is aan nul op de vand.



\* substitutie van de benaderingsoplossing:

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_j \, dx dy - \sum_{i=N+1}^{N+D} g_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy.$$

$$A \cdot \underline{u} = \underline{f}$$

Dit is het stelsel Galerkinvergelijkingen met links de diffusie-term, rechts het rechterlid met de inhomogene Dirichlet RVW.

**B** In ELEM wordt een twee-dimensionaal lineair element geconstrueerd.

Vervolgens bekijken wij de Galerkin-vergelijking per element:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K u_i \int_{e_k} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^K \int_{e_k} f' \, dx dy$$

$f'$ :  $f$  + Dirichlet RVW.

Per element met 3 knooppunten levert dat vergelijkingen van het type:

$$\int_e \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \, dx dy = \int_e \frac{d\lambda_1}{dx} \frac{d\lambda_2}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy} \frac{d\lambda_2}{dy} \, dx dy$$

met  $\lambda$ : Lagrange benaderingspolynoom.

Deze vergelijkingen kunnen met behulp van integratievoeg

$$\int_e \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \, dx dy = \frac{m_1! m_2!}{(m_1 + m_2 + 2)!} \cdot |\Delta| \text{ worden opgelost.}$$

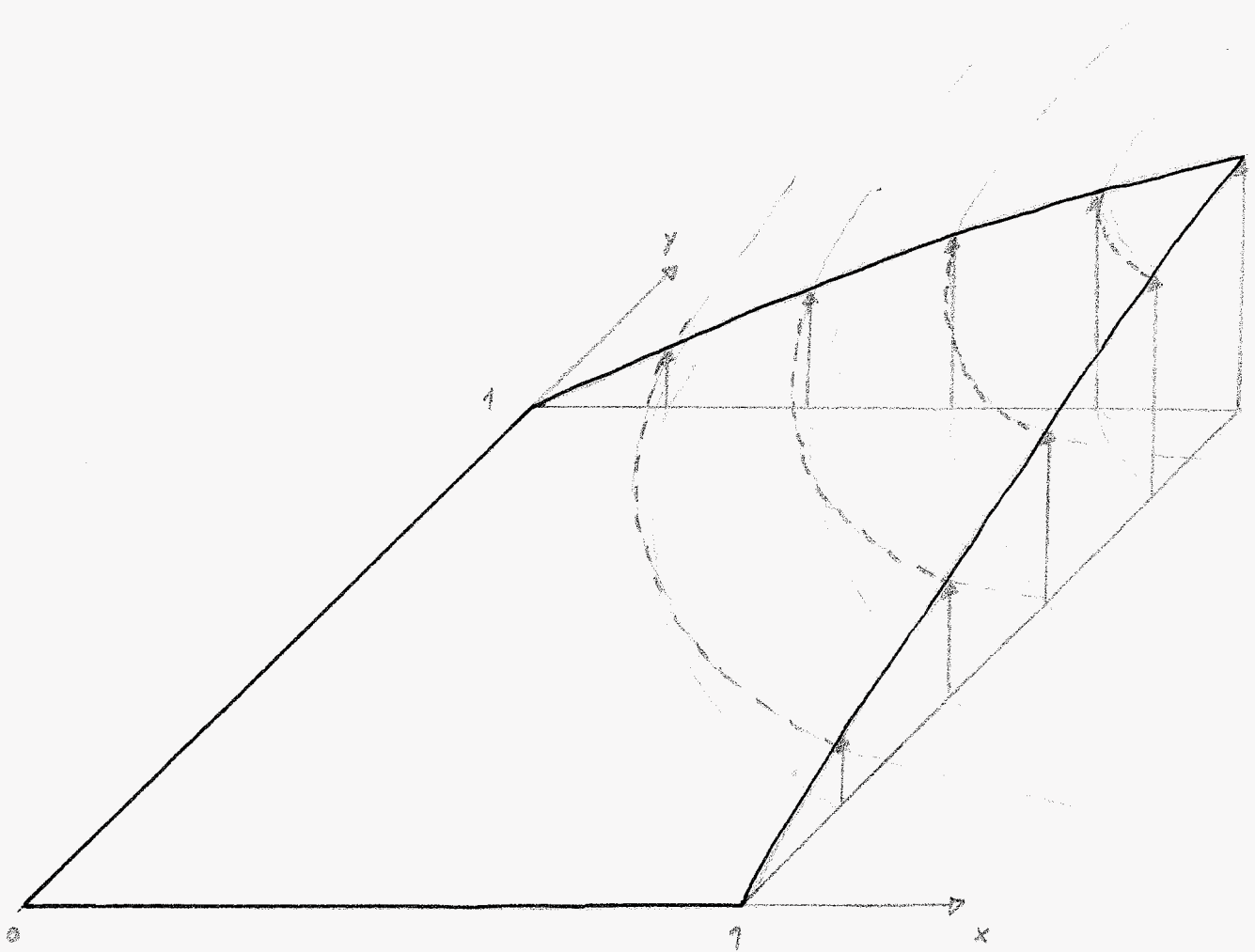
Dit levert :

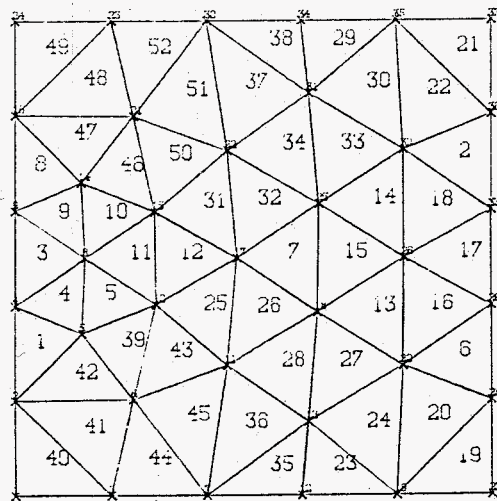
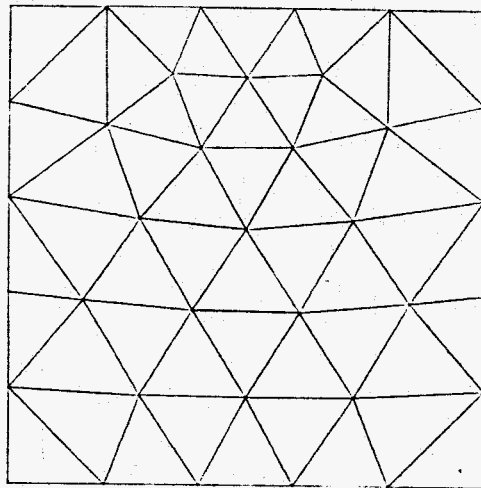
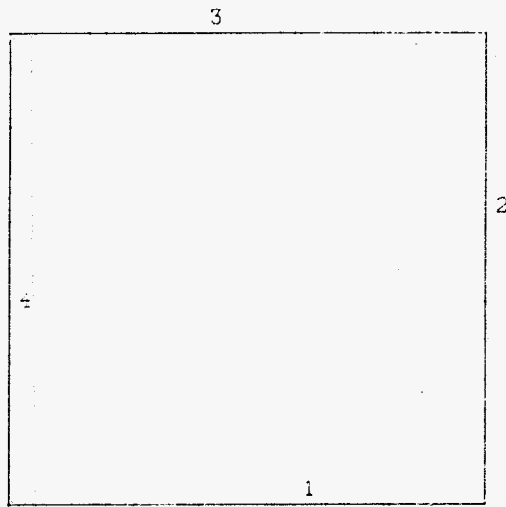
$$\frac{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{\Delta^2} \cdot \frac{|\Delta|}{2}$$

Dit ziet men in FEM gebeuren. De coëfficiëntmatrix wordt zo element na element samengesteld.

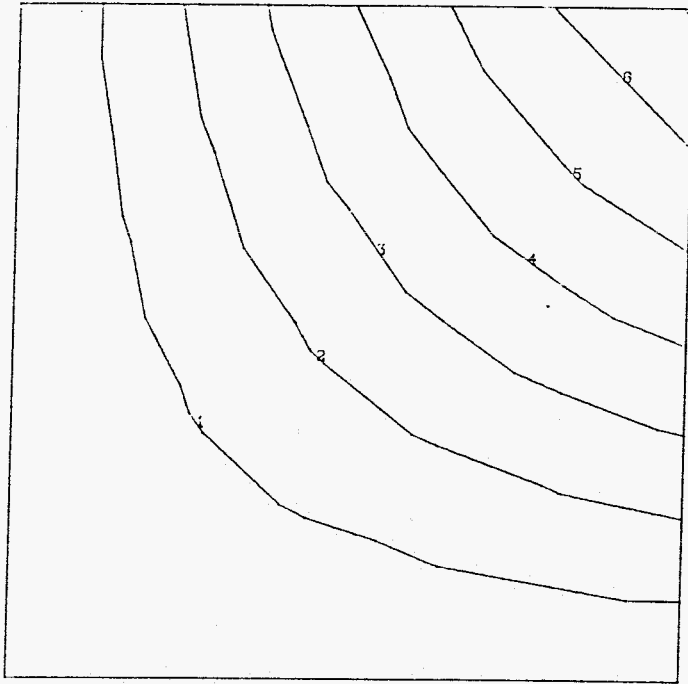
Op een vergelijkbare manier wordt de elementvector dmv. een integratieregel bepaald uit de vergelijking per element.

Bjlage I

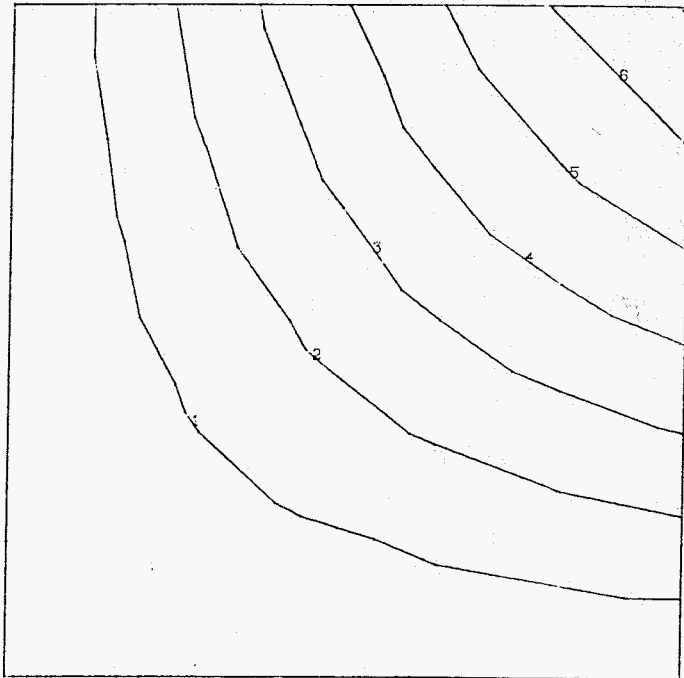




A.



B.



## OPGAVE II

In deze opgave gaan we de warmtestroom in een plaat onderzoeken onder verschillende voorwaarden. Zo hopen we iets te kunnen zeggen over de invloed van RVW. en mesh-grootte. Bovendien zullen we de werking van het pakket bij een complexe geometrie bekijken.

We bekijken daarvoor een plaat ( $h \times b$ ) en passen daarop de energievergelijking toe:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c u \cdot \text{grad } T = \lambda \nabla^2 T + \phi + 2\eta D:D$$

Wij bekijken de stationaire situatie en overvaan de dissipatieterm. Bovendien is er geen convectief warmte transport in vaste stoffen. Bekijk we nu de dimensieloze LAPLACE-vergelijking:

$$-\nabla^2 T = \phi \quad \text{met } T = T(x, y)$$

$\phi$ : bronterm.

We gaan dit toepassen op een plaat van  $h \times b$ .

De gebruikte RVW. zijn:

$$T(0, y) = T(b, y) = 0$$

$$T(x, 0) = 1$$

$$\frac{dT}{dn}(x, h) = 0$$



In het eerste gedeelte van de opgave wordt de invloed van de mesh-verfijning bekeken.

Daartoe bekijken wij weer de halve plaat met de bijbehorende beschrijvende vergelijking en RVW.

$$\begin{aligned}
 -\nabla^2 T &= \phi & x=0, x=b &: T=0 \\
 & & y=0 &: T=1 \\
 & & y=h &: q_n=0 = -\frac{\partial T}{\partial n}
 \end{aligned}$$

Vit symmetrie-overwegingen mogen we dus een halve plaat bekijken.  $x=b: T=0$  wordt dan  $x=\frac{1}{2}b: \frac{\partial T}{\partial n}=0$

Om nu de verschillende mesh-groottes te testen en om een indruk te krijgen van de warmtestroomdichtheid dient het hoofdprogramma op enkele punten aangepast te worden.

Het type probleem blijft hetzelfde. De RVW. zijn echter anders. Op randen 2 en 3 geldt namelijk dat de warmtestroom loodrecht op de wand nul is. Dit leidt tot  $\frac{\partial T}{\partial n}=0$ . Dit is een homogene Neumann RVW. De handleiding leert ons dat deze RVW. niet verder benoemd hoeft te worden.

De warmtestroomdichtheid kan in de afzonderlijke richtingen (x en y) worden bepaald in de subrutine DERIVA. Deze moeten wij dus 2 maal aanvoepen om de warmtestroomdichtheidsvector te kunnen bepalen. Met DERIVA schrijven we dus de afgeleide van de temperatuur weg oftewel - warmtestroomdichtheidsvector.



Door in de S.I.F. het aantal elementen per cove te variëren kunnen we de verschillende situaties bekijken.

Het geheel is weer getekend :  $2 \times 4$  mesh (Bylage I),  $4 \times 6$  mesh (Bylage II) en de  $5 \times 10$  mesh (Bylage III).

Vit de plaatjes blijkt dat de hoogtelijnen (= iso- termen) globaal voldoen aan de verwachtingen.

Er zijn echter enkele duidelijke afwijkingen.

Zo is er het verschijnsel van de oorsprong van de hoogtelijnen. Het als laatste benoemen van de RWV.

$T=0$  op lijn (= rand) 4 zorgt ervoor dat het punt  $(0,0)$  de waarde nul krijgt. Alle hoogtelijnen komen dus uit het eerste element op de x-as. Als deze rand weinig elementen heeft leidt dat ertoe dat de hoogtelijnen over een groot deel van de breedte ontstaan.

Dit is niet in overeenstemming met de RWV. Het verkleinen van de elementen leidt ertoe dat het "ontstaan gebied" van de hoogtelijnen dichterbij nul brengt : er wordt beter voldaan aan de RWV.

Hetzelfde geldt voor de randen 2 en 3. Naarmate de mesh fijner wordt ligt de T dichterbij de T die aan de rand ligt waardoor de warmtestroom dichterbij naar nul nadert.

Vit de print-oot van de bepaalde warmtestroom blijkt dat die met een factor  $10 \times$  kleiner bepaald wordt i.g.v. de  $5 \times 10$  mesh.

De energiebalans wordt in ons geval gegeven door:

$$q_{in} * \frac{1}{2}b + \phi * \frac{1}{2}b * h = q_{uit} * h$$

- stationaire toestand
- homogene plaatdikte.

Willen we deze balans bekijken stuiten we wederom op de problemen met het invullen van de R.V.W.

Dit probleem is geïllustreerd door het laatste deel van de opgave te herhalen (5x10 mesh) met een andere volgorde van de benoeming van de R.V.W. De rand ① wordt nu als laatste benoemd. (Bijlage IV)

We zien nu dat de temperatuurgradiënt zich op rand ④ bevindt en niet op rand ①. Dit heeft natuurlijk gevolgen voor de grootte van de warmtestroomdichtheidsvector.

Een mogelijke oplossing is dat de waarde van de vector wel correct is (in beide gevallen is de lengte van de vector gelijk) maar dat de richting  $\perp$  op de x-as of  $\perp$  y-as foutief is. Door een hoek te kiezen van  $45^\circ$  voor de vector ( $45^\circ$  met x- en y-as) krijgen we het volgende resultaat:

Kies lineaire benadering tussen 2 knooppunten:

$$\frac{1}{2} * q_{in} = 1.59$$

$$q_{uit} = 2.01$$

$$\phi = 1$$

$$h = b = 1$$

$$1.59 * b + h * b = 2.01 * h$$

$$\text{met } h = b = 1 \Rightarrow 2.09 = 2.01$$

De afwijking ligt in de orde van 4%.

In het tweede gedeelte van de opgave bekijken we de invloed van gemengde RVW.

Er wordt van het eerste gedeelte van de opgave uitgegaan met dit verschil dat de bovenwand niet als geïsoleerd wordt beschouwd maar dat er een warmtestroom  $q_n = -\nabla T = \alpha T$  wordt voorgeschreven.

We verwachten t.g.v. het afwezig zijn van isolatie dat door de warmtestroom naar buiten toe de temperatuur op de rand lager zal zijn dan in het geval van de vorige opdracht.

Hiertoe passen we het programma toe uit het laatste deel van de vorige opgave (5x10 mesh). De inhomogene Neumann RVW. kan direct benoemd worden via FIL 1Ø1. Via FIL 1Ø1 wordt de informatie in USER en IUSER opgeslagen die dit weer doorgeven aan SYSTEM.

Het geheel kan weer worden getekend (Bijlage V)

De plot toont ons dat de "isothermen" eerder naar beneden afbuigen en vlak bij de bovenwand verder uit elkaar liggen. Dit duidt er al op dat de temperaturen aldaar lager zullen liggen dan i.g.v. een geïsoleerde wand.

In dit geval is de vector print-out duidelijker:

$$\begin{array}{l} \text{bovenrand :} \\ q = 0 \quad \phi \quad 0.076 \quad 0.138 \quad 0.185 \quad 0.214 \quad 0.223 \\ \hline q = T \quad \phi \quad 0.059 \quad 0.105 \quad 0.141 \quad 0.162 \quad 0.169 \end{array}$$

De bolletjes zijn de knooppunten met hun bijbehorende getalwaarden van de temperatuur.

We zullen ook de printout van de warmtestroom bekijken.

$$\begin{array}{l} T: \quad \phi \quad 0.059 \quad 0.105 \quad 0.141 \quad 0.162 \quad 0.169 \\ \text{bovenrand :} \\ \hline -q: \quad \phi \quad -0.065 \quad -0.120 \quad -0.162 \quad -0.181 \quad -0.204 \end{array}$$

Hieruit blijkt dat de warmtestroom de temperatuur wel volgt maar naarmate de x-coördinaat toeneemt behoorlijk afwijkt. Dit lijkt ~~hier~~ ~~te~~ te verklaren met de onnavolgheden van het "gewone" aard. Bij het laatste deel van de vorige opgave bleven de afwijkingen in de orde van  $0.005$ .

In het laatste gedeelte van de opgave wordt een gecompliceerde geometrie ingevoerd en bekeken.

Daartoe wordt opnieuw de plaat bekeken maar nu met een gat van  $h_0 = b_0 = 0.4 \cdot h$  in het midden.

We beschouwen de rand van het gat als geïsoleerd. Hetzelfde doen we met de bovenrand.

We verwachten dat de warmtestroom door de plaat als geheel gelijk blijft. De warmtestroom kan niet "door het gat" omdat dat geïsoleerd is. De warmtestroom zal in de buurt van het gat dus groter moeten zijn. Bovendien moet om te voldoen aan de RUV betreffende de isolatie de isothermen loodrecht op de randen van het gat staan.

Ook in dit geval zijn weer aanpassingen van het programma nodig.

Op de 1<sup>e</sup> plaats wordt de nieuwe geometrie in de S.I.F. ingevoerd.

Verder hebben we op de symmetrie-as, de rand van het gat en de bovenrand te maken met homogene Neumann RUV. Hieraan hoeven wij dus niets te doen.

Door op randen van het gat en de symmetrie-as 2 maal zoveel elementen te nemen als in het 1<sup>e</sup> geval ("5x10") gaan we nogmaals de invloed van de mesh-grootte na.

Vit de PLOT's blijkt dat de benadering redelijk aan de verwachtingen beantwoord. (Bijlage VI)

De grotere warmtestroom blijkt uit de grotere pijlen en het dichter bij elkaar liggen van de isothermen. Ook nu blijkt uit de PLOT's het beter voldoen aan de RVW. naarmate het mesh fijner is hetgeen zich uit in het loodrecht op de randen zijn van de hoogtelijn.

Door het toepassen van de mesh-verfijning blijkt de warmtestroom door de wand (moet wel zijn) in de buurt van het gat ongeveer 2\* zo klein is geworden. (Bijlage VII)

## VRAGEN OPG. II

A Gevraagd wordt aan te tonen dat de EDM en de EEM onder bepaalde condities dezelfde oplossing geven.

$$-\nabla^2 T(x) = f(x) \quad \Omega = (0,1) \quad T(0) = \frac{\partial T}{\partial x}(1) = 0$$

$$\boxed{\text{EDM}} \quad -\nabla T = -\frac{d^2 T}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-T(x+h) + 2T(x) - T(x-h)}{h^2}$$

$$-\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-T(x+h) + 2T(x) - T(x-h)}{h^2} + \sigma(h^2)$$

$$\text{Benadering: } -\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-T(x+h) + 2T(x) - T(x-h)}{h^2}$$

$$T(x_i) = T_i, \quad T(x+h) = T_{i+1}, \quad T(x-h) = T_{i-1}$$

$$\text{RVW: } T_0 = 0 \quad \frac{dT}{dx}(x_n) = 0$$

$$i=0 : T_0 = 0$$

$$i=1 : 2T_1 - T_2 = f_1 \cdot h^2$$

$$i=2 : -T_1 + 2T_2 - T_3 = f_2 \cdot h^2$$

$$\vdots$$

$$i=n : -T_{n-1} + 2T_n - T_{n+1} = f_n \cdot h^2$$

$$\text{met } \frac{dT}{dx} = \frac{T(x-h) - T(x+h)}{2h} = 0 \Rightarrow T_{n+1} = T_{n-1}$$

$$i=n : -2T_{n-1} + 2T_n = f_n \cdot h^2$$

De matrixvgl. wordt

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} = A \quad h^2 \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}f_n \end{bmatrix} = f$$

EEM

- basisfunctie :  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$

- lineair binnen element

- continuu op  $\Omega$

= benadering :  $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x)$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{d^2 u}{dx^2} - f \right) \varphi_j dx = 0 \quad j = 1 \dots N$$

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_j dx \quad (\text{R.V.W. laat staktermen verdwijnen}).$$

$$= \sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \int_0^1 f \varphi_j dx \quad j = 1 \dots N$$

Per element wordt de volgende stijfheidsmatrix bepaald:

$$S_e = \begin{bmatrix} \int \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} dx & \int \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx \\ \int \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} dx & \int \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx \end{bmatrix}$$

Door nu een equidistante mesh te kiezen geldt:

$$\varphi_k = \frac{x}{h} \quad ; \quad \varphi_{k-1} = \frac{h-x}{h} \quad ; \quad \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} = -\frac{1}{h} \quad ; \quad \frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$S_e = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per element wordt ook de elementvector bepaald:

$$F_e = \begin{bmatrix} \int_e f \cdot \varphi_{k-1} dx \\ \int_e f \cdot \varphi_k dx \end{bmatrix} \Rightarrow F = h \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot f$$

$$\text{Randen:} \quad S^{e_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Samenstelling levert :

$$S = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} h \cdot f_1 \\ h \cdot f_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} h f_n \end{bmatrix}$$

Dit levert exact dezelfde vergelijkingen als bij de EDM. Voorwaarde is dat bij de EEM een equidistante mesh en een lineair benaderingspolynoom gebruikt wordt.

De invloed van de RWV. is op beide methoden analoog :

- inhomogene Dirichlet RWV.: een term van  $f$  verandert.
- inhomogene Neumann RWV.: een term van  $f$  verandert
- inhomogene Robin RWV. : een term van de matrix en van  $f$  verandert. De matrix blijft positief definit en het stelsel oplosbaar.

ⓑ Er zijn twee vuistregels voor de nauwkeurigheid :

$$|u - \tilde{u}| \leq C \cdot h^{m+1}$$

$$I_0 = \left[ \int_{\mathcal{R}} (u - \tilde{u})^2 d\mathcal{R} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_0 \leq C \cdot h^{k+1} \quad 2m \leq k+1$$

$$I_0 \leq C \cdot h^{2(k-m+1)} \quad 2m \geq k+1$$

Hierin is :

$m$  : orde van de hoogste afgeleide nadat door partiël integreren die orde zoveel mogelijk is verlaagd.

$h$  : grootte van lijnstuk of zijde van een driehoek.

$k$  : graad van de benaderingspolynoom.

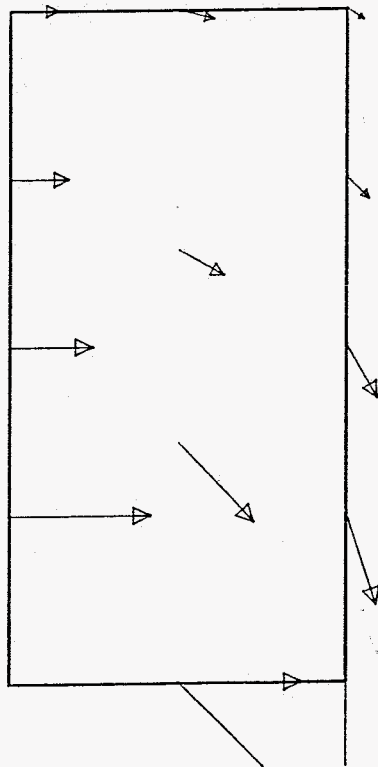
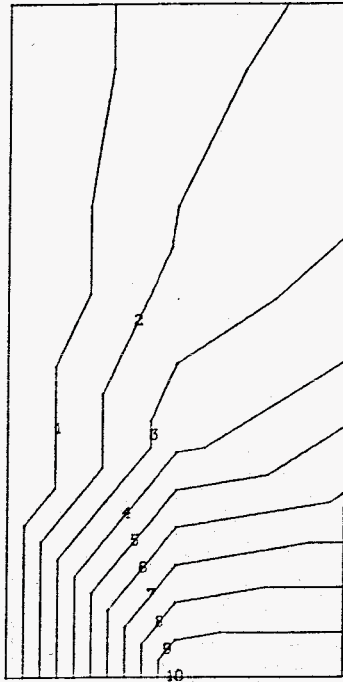
In ons geval is  $k = m = 1$

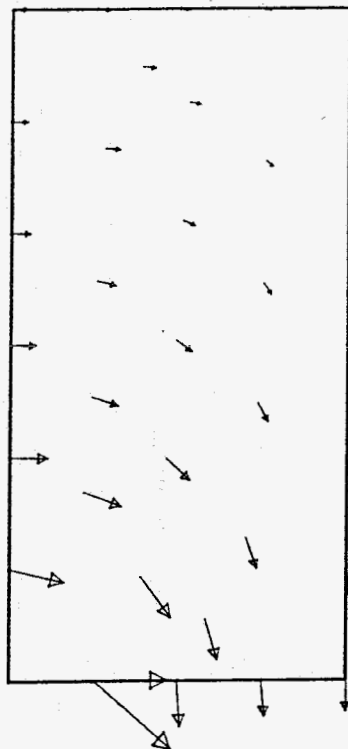
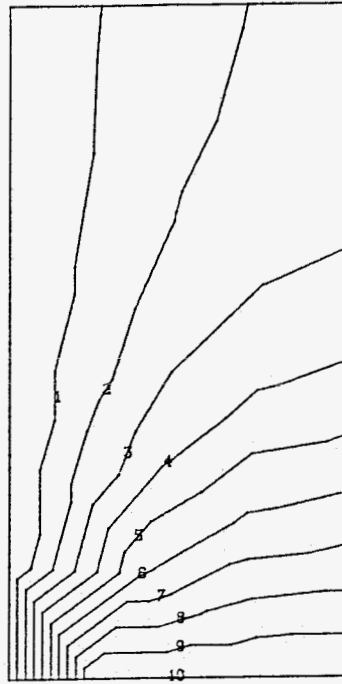
De ene methode maakt onderscheid tussen de verschillende graden van de benaderingspolynoom, de ander niet. Het maakt in ons geval niet uit.

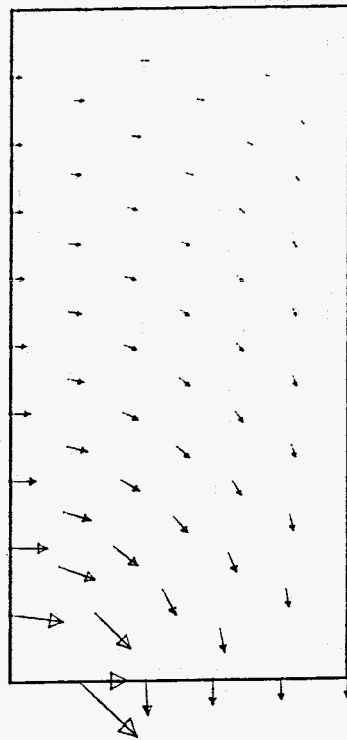
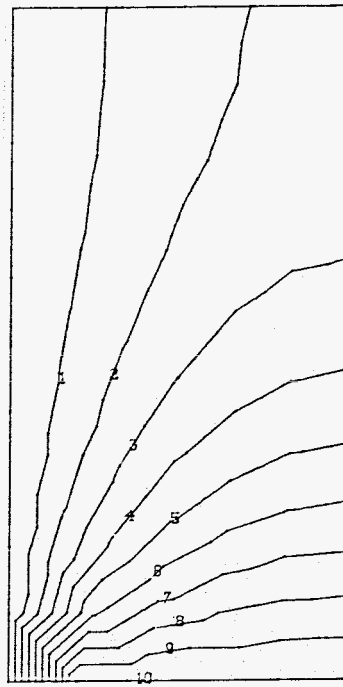
$$|u - \tilde{u}| = C \cdot h^2$$

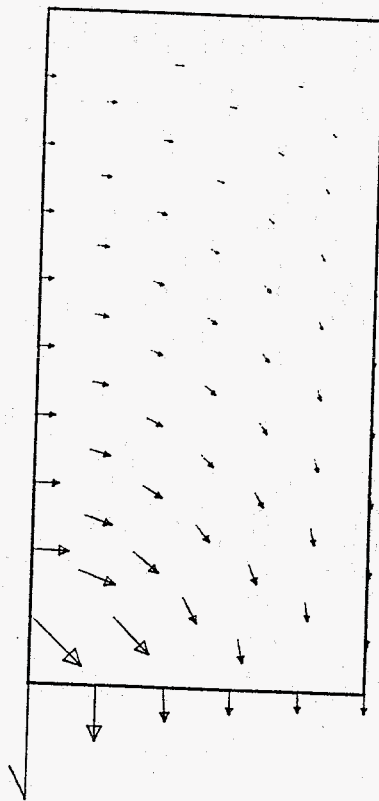
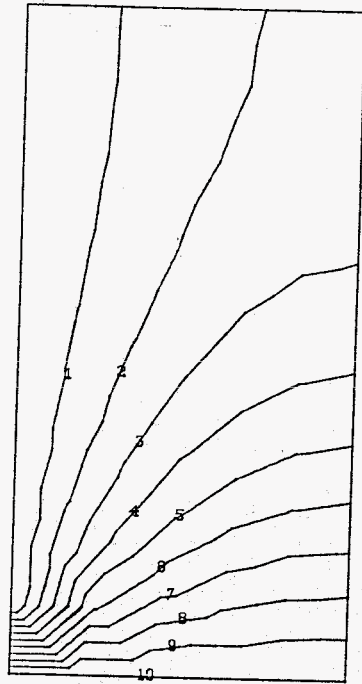
$C$  is een variabele die afhankelijk is van de hoek in het element, van  $\mathcal{R}$ , van  $f$ , van  $\tilde{u}$  en de  $m$ -de afgeleide van  $u$ .

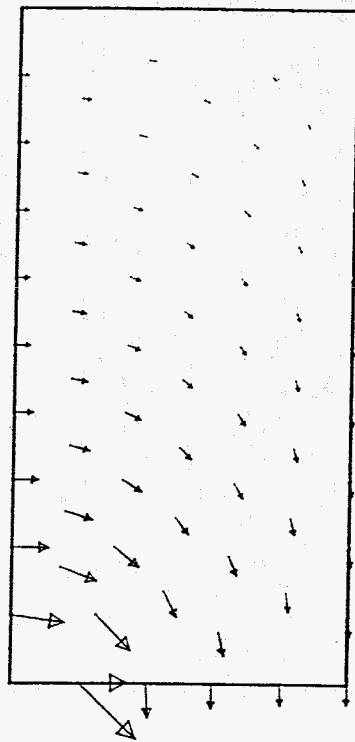
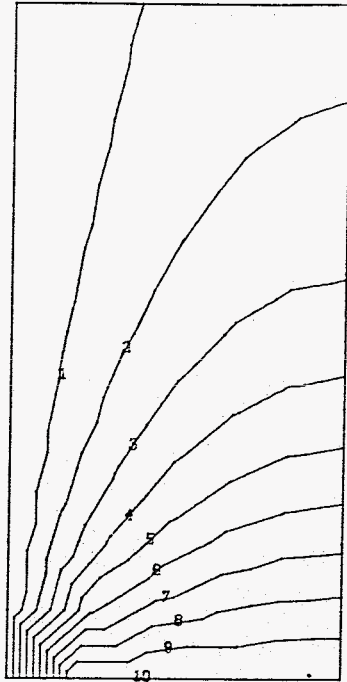
Verfijning van de mesh met een factor 2 heeft dus een factor 4 nauwkeurigere oplossing tot gevolg.

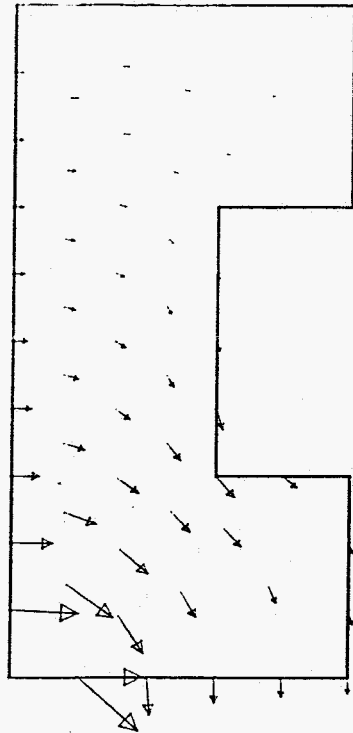
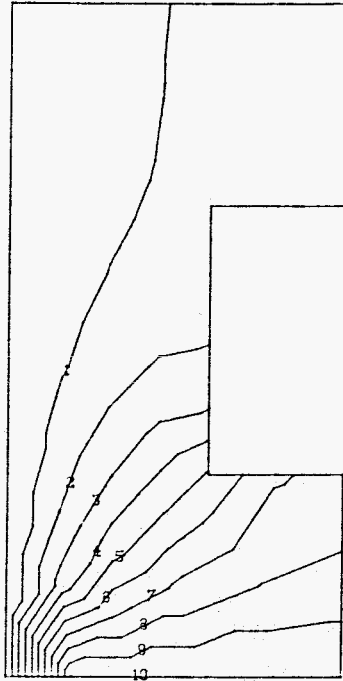




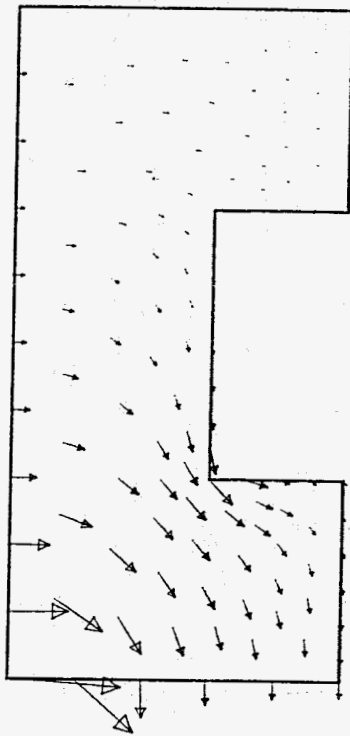
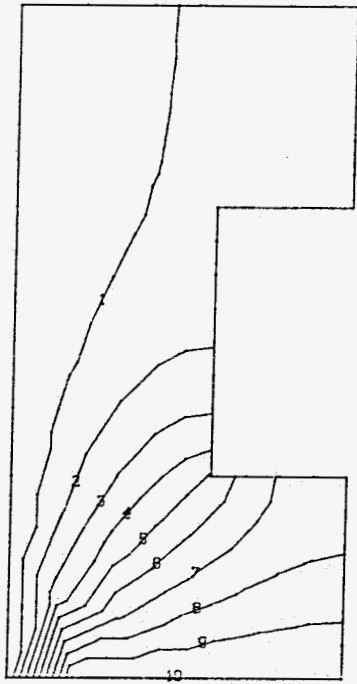












## OPGAVE III

In deze opgave onderzoeken we een rotatiesymmetrische stroming met een convectieterm. We bekijken wederom de invloed van RVW (stroomafwaartse RVW) en het fenomeen van numerieke oscillaties.

Daartoe bekijken we de energievergelijking en passen deze toe voor warmteoverdrachts- en temperatuursverdelingsanalyse in een rechte buis met cirkelvormige doorsnede voor een Poiseuille-stroming. Verder nemen we aan:

- stationaire situatie
- geen bronterm
- dissipatie van warmte verwaarloosd.

Dit is te controleren met het getal van Brinkman, dat voor vloeistoffen vaak heel klein is.

- verwaarlozing snelheidsverandering t.g.v. temperatuursverschillen.
- axiaalsymmetrische stroming
- parabolisch snelheidsprofiel.  $= U_{\max} (1 - \frac{r^2}{R^2})$

Er blijft dan van de energievergl. in cilindercoördinaten over:

$$\frac{U_{\max}}{a} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

Deze formule passen we toe op een buis met een lengte  $l$ . De stroming komt de buis binnen en de wand (en dus ook de vloeistof) hebben de temperatuur  $T_0$ . Op de plaats  $z=0$  wordt de temperatuur van de wand plotseling  $T_1$ . Wat er fysisch gebeurt is verduidelijkt in 'n figuur (Bijlage I)

De warmte die door de wand via geleiding door die wand binnenkomt wordt door convectie via de vloeistof afgevoerd. Na een bepaalde "inlooptegte" heeft de vloeistof dezelfde temperatuur als de wand. De analytische oplossing geeft voor dit geval:

$$l_{in} = 0.6 \left( \frac{U_{max} \cdot R}{a} \right) R$$

$$\frac{U_{max} \cdot R}{a} = Pe$$

$Pe =$  getal van Peclet =  $\frac{\text{convectie warmtetransport}}{\text{warmtegeleiding}}$ .

Voor een grote waarde van  $Pe$  overheerst het warmte-transport door convectie.

Dit wetende leiden we een dimensieloze vorm af van de energie vgl. om als uitgangspunt voor deze opgave te gebruiken.:

$$\frac{U_{max}}{a} (1-r'^2) \frac{T}{R} \frac{\partial T'}{\partial z'} = \frac{T}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'}{\partial r'} \right]$$

$$Pe (1-r^2) \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\underline{u} \cdot \nabla T = \epsilon \nabla^2 T \quad \text{met} \quad \epsilon = \frac{1}{Pe}$$

In het eerste deel van de opgave bekijken we de temperatuurverdeling en de invloed van de mesh-grootte op het verschijnsel numerieke oscillatie.

Daartoe bekijken we de helft van de buisdoorsnede uit de inleiding.

$$u \cdot \nabla T = \frac{1}{Pe} \cdot \nabla^2 T$$

$$\begin{array}{lll} z=0, & 0 \leq r \leq 1 & : T=0 \\ 0 \leq z \leq 500, & r=0 & : \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \\ 0 \leq z \leq 500, & r=1 & : T=1 \\ z=500, & 0 \leq r \leq 1 & : T=1 \end{array}$$

We nemen :

$$Re = \frac{U_{max} \cdot R}{\nu} = 100$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$a = 0.15 \text{ m}^2/\text{s}$$

Bij  $R = 10^{-2} \text{ m}$  volgt een  $U_{max} = 10^{-2} \text{ m/s}$

$$Pe = 700, \quad l_w = 420 * R$$

- Als eerste wordt de nieuwe mesh ingevoerd. Factorisatie bij het plotten is onvermijdelijk.
- De RVW. worden op de inmiddels bekende wijze ingevoerd.
- Het problem definition number in de S.I.F. dient aangepast te worden i.v.m. het gebruikte coördinaten systeem.
- In USER en IUSER worden via FIL 100 de coëfficiënten ( $= \frac{1}{Pe}$ ) van de vergelijkingen gestopt.

Het geheel is uitgetekend (Bijlage II\*)

Uit de plot blijkt dat voldaan wordt aan de verwachtingen omtrent de loop van de isothermen.

Ook hier bepaalt de volgorde van benoemen van de Dirichlet R.V.W. weer aan welke "kant" de elementen zitten vanwaaruit de isothermen vertrekken. Mesh-verfijning zou voor beter voldoen aan de R.V.W. zorgen.

Bovendien zien we dat er inderdaad zoiets als een inlooptegte is. Deze lengte werd in dit geval gegeven door:

$$l_{in} = 420 \cdot R \Rightarrow \frac{l_{in}}{R} = 420$$

Voorbij het punt  $z=420$  mag de temperatuur dus volgens deze formule met niet meer dan 1% veranderen.

Be kijken we de variatie van de snelheid na  $l=450$  (op die waarde van  $l$  ligt een knooppunt) blijkt dat in dit geval de snelheid nog met ongeveer 7% verandert. Dit strookt niet met de verwachting.

Be kijken we de vector print-out nader dan blijkt de volgorde van benoemen van de R.V.W. belangrijk is. Wij hebben er in 1<sup>e</sup> instantie voor gezorgd dat in knooppunt 5 (begin van de vand, waar de vloeistof binnenkomt) de temperatuur gelijk is aan w.v. Door dit te veranderen, hetgeen fysisch juist is bekeken we dat de snelheid nog maar  $\pm 2\frac{1}{2}$  % varieert.

Vervolgens wordt een benaderingsoplossing geconstrueerd voor de hele buis met hetzelfde aantal elementen als bij de halve buis.

We vervangen in de -S.I.F. de waarde voor  $n$  en laten die nu lopen van  $p$  tot 2.

Tevens dienen we de homogene Neumann RVW. te vervangen door de Dirichlet RVW.

Het resultaat is geplot (Bijlage II B)

De plot laat duidelijk het verschijnsel numerieke oscillatie zien. Het optreden van dit verschijnsel heeft alles te maken met de structuur van de coëfficiënten matrix en kan vermeden worden door een fijnere mesh-verdeling of een Neumann i.p.v. een Dirichlet RVW. als stroomafwaartse RVW. te kiezen.

In het tweede gedeelte van de opgave komt de invloed van stroomafwaartse RVW. duidelijk naar voren.

We beschouwen het probleem uit het eerste deel van de opgave. We veranderen nu de lengte 500 in 250. Dit houdt in dat de stroming minder tijd heeft om zich voldoende te ontwikkelen. De Dirichlet RVW, die stroomafwaarts op 1 is gesteld, is in dit geval evg streng.

We passen het S.I.F. aan dook  $l=500$  te vervangen door  $l=250$ .

De berekening wordt uitgevoerd en getekend (Bylage III A)

De tekeningen tonen hetzelfde patroon als bij de numerieke oscillatie bij de vorige opgave. Deze numerieke oscillatie vindt zijn oorsprong echter niet in een te groot mesh ( mesh is fijner dan bij het 1<sup>e</sup> deel van de vorige berekening ) maar in de te strenge Dirichlet RVW.

Vervangen we in deze opgave de Dirichlet RVW. stroomafwaarts door een homogene Neumann RVW, die fysisch juist is omdat hij voorschrijft dat de stroming stroomafwaarts niet meer verandert. blijkt uit de tekening ( Bylage III B ) dat deze RVW blijkbaar minder streng is en op die manier numerieke oscillaties onderdrukt.

## VRAGEN OPG. III

[A] In ons geval luidt de beschrijvende vergelijking:

$$v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]$$

Het is duidelijk dat de factor  $\frac{1}{r}$  voor problemen kan zorgen. Als  $r=0$  dreigt namelijk een singulariteit. Extra RVW. kunnen dit voorkomen. Wij eisen symmetrie door te stellen:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r=0 \quad u_r = 0$$

Hierdoor wordt symmetrie voorgeschreven.

[B] Het gebruik van Dirichlet RVW. in combinatie met een laag  $(Re)^{-1}$ -getal kan leiden tot numerieke oscillaties. De oorzaak hiervan is gelegen in de structuur van de coëfficiëntenmatrix. Is deze niet diagonaal dominant kunnen er numerieke oscillaties optreden. Om uitspraken te kunnen doen over al dan niet optreden van de numerieke oscillaties moeten we de coëfficiëntenmatrix bepalen.



De beschrijvende vergelijking luidt:

$$-\nabla^2 T + (u \nabla) T = 0 \quad \text{voor } x = (0, 1)$$

We nemen als Dirichlet RVW.  $T(x=0) = T(x=1) = 0$

Als benadering kiezen we:

$$\tilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} T_i \varphi_i(x)$$

De bijbehorende differentiaalvergelijking:

$$\int_0^1 \varphi_j (-\nabla^2 T + u \nabla T) dx = 0$$

Partieel integreren levert:

$$\int_0^1 \left( \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} + u \frac{dT}{dx} \varphi_j \right) dx = 0$$

Substitutie van de benadering  $\tilde{T}(x)$  levert:

$$\sum_{i=1}^{N-1} T_i \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_j}{dx} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} + u \frac{d\varphi_i}{dx} \varphi_j \right) dx = 0$$

Per element moet worden opgelost:

$$S_{ek} = \left[ \begin{array}{l} \int_{\ell_k}^1 \left( \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} + u \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \varphi_{k-1} \right) dx \quad \int_{\ell_k} \left( \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} + u \frac{d\varphi_k}{dx} \varphi_{k-1} \right) dx \\ \int_{\ell_k} \left( \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} + u \frac{d\varphi_{k-1}}{dx} \varphi_{k-1} \right) dx \quad \int_{\ell_k} \left( \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} + u \frac{d\varphi_k}{dx} \varphi_k \right) dx \end{array} \right]$$

met  $\varphi_{k-1} = \frac{h-x}{h}$   $\frac{d\varphi_{k-1}}{dx} = -\frac{1}{h}$

$\varphi_k = \frac{h}{x}$   $\frac{d\varphi_k}{dx} = \frac{1}{h}$

wordt  $S_{\text{ek}}$  : 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} - \frac{1}{2}u & -\frac{1}{h} + \frac{1}{2}u \\ -\frac{1}{h} - \frac{1}{2}u & \frac{1}{h} + \frac{1}{2}u \end{bmatrix}$$

Assembleren levert voor de coëfficiëntenmatrix:

$$A = \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 + \frac{hu}{2} & & & \\ -1 - \frac{hu}{2} & 2 & -1 + \frac{hu}{2} & & \\ & -1 - \frac{hu}{2} & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 - \frac{hu}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Dit levert dezelfde matrix als bij het gebruik van centraal gedeelde differentie.

Stabiliteitsvoorwaarde wordt nu:

$h < \frac{2}{v}$  : bij grotere  $v$  wordt de eis voor  $h$  strenger.

Artificiële viscositeit kan optreden bij gebruik van de E.D.M. met een achterwaarts gedeeld differentieschema. De gebruikte gediscretiseerde convectie-diffusie vergelijking luidt:

$$-u_{i-1} + \frac{2u_i}{h^2} - u_{i+1} + v \left( \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) + \sigma(h) = 0$$

De lokale afbreekfout is  $\sigma(h)$ .

Indien de benaderingsvergelijking een nauwkeurigheid van  $\mathcal{O}(h^2)$  heeft zal deze dus niet correct zijn.

De omgekeerde weg wordt gevolgd om te onderzoeken in hoeverre de oorspronkelijke vergelijking wordt aangetast.

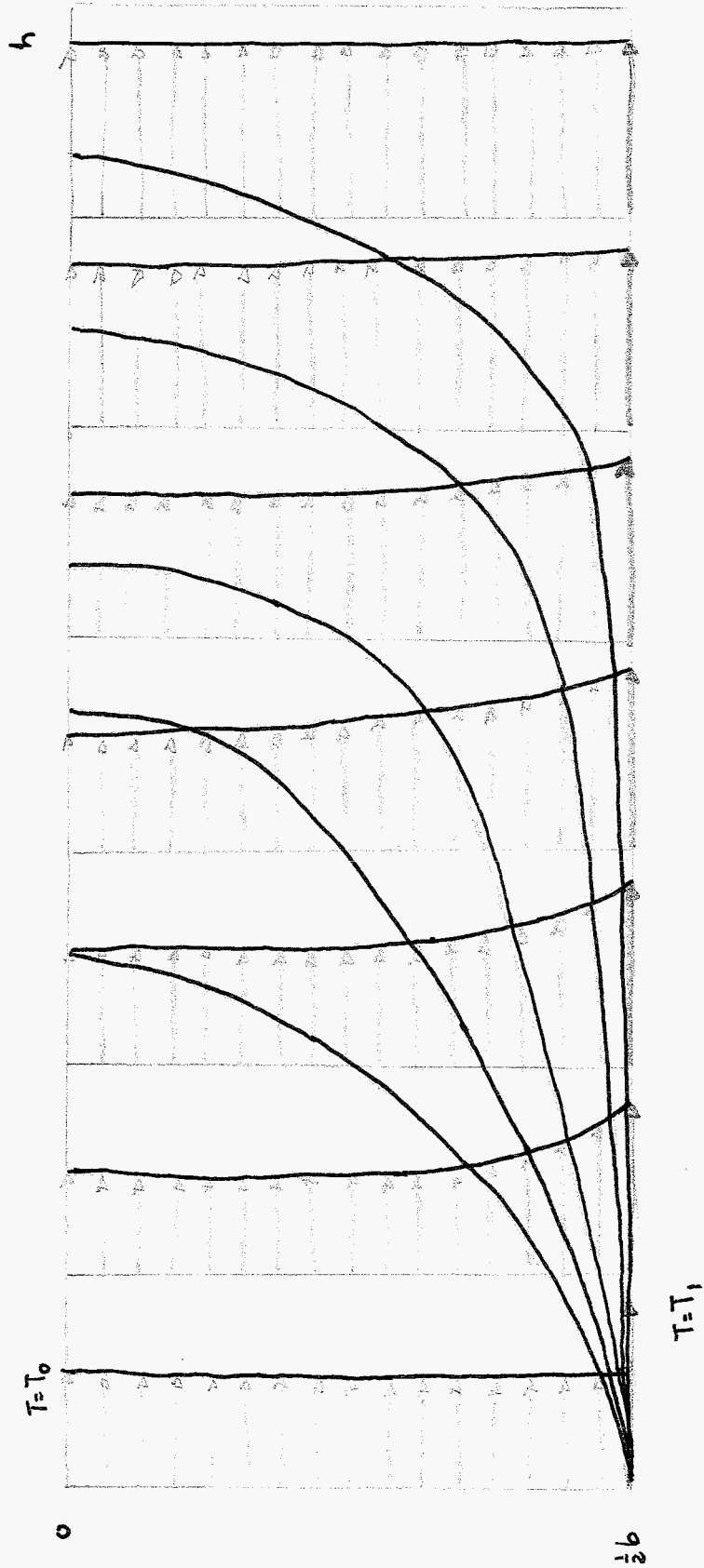
De omgekeerde weg van de afleiding van de differentieschema's laat ons de Taylor benadering substitueren.

De gevonden differentiaalvergelijking luidt:

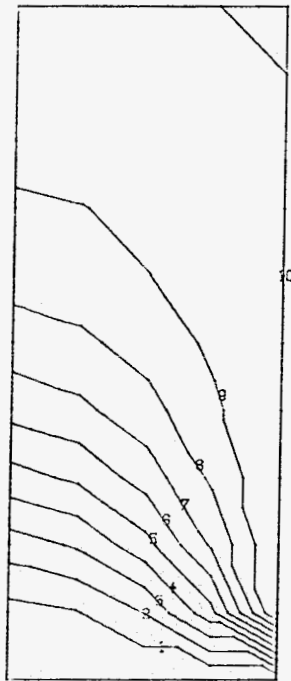
$$-\left(1 + \frac{vh}{2}\right) \frac{d^2u}{dx^2} + v \frac{du}{dx} = 0$$

De extra term  $\frac{vh}{2}$  heet artificiële viscositeit.

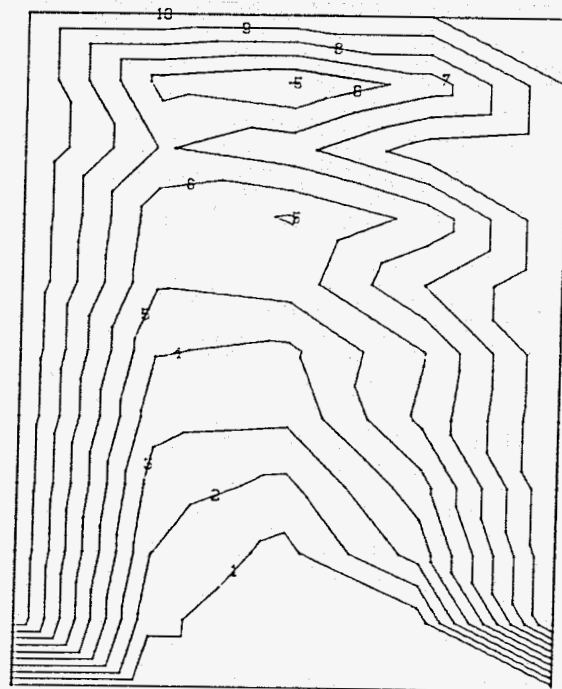
Bij afleiding van de coëfficiëntenmatrix lijkt het dat in ons geval geen gebruik gemaakt is van de artificiële viscositeit.



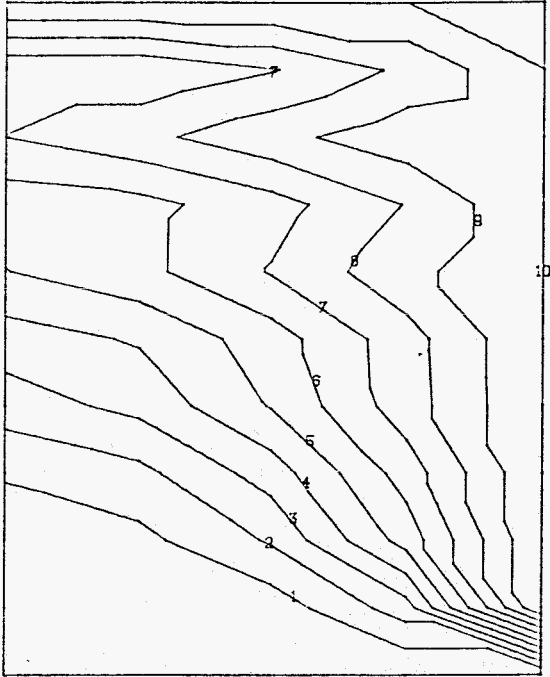
A.



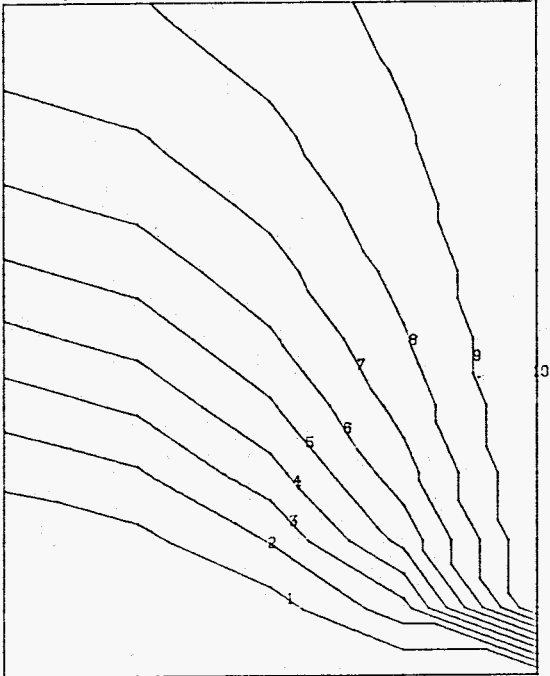
B.



A.



B.



## OPGAVE IV

In deze opgave wordt de stroming in een rechte pijp onderzocht met behulp van een benaderingsoplossing van de Stokes- en de Navier-Stokes-vergelijking.

Door eerst de Stokesvergelijking toe te passen voor het construeren van een benaderingsoplossing verwaarlozen we de convectieve term. Omdat voor de viskeuze term de factor  $\frac{1}{Re}$  staat kan deze verwaarlozing alleen straffe-loos worden toegepast bij lage  $Re$ . Dan slechts is de Stokes-vergelijking te gebruiken als beginschatting voor het iteratieve oplossingsproces van de Navier-Stokes vergelijking.

Wij verwachten bij een constante instroomsnelheid dat de effecten van de wand door de viskeuze eigenschappen van het medium naar het midden toe verschillen. De snelheid aan de wand wordt nul terwijl die naar het midden toe groter wordt.

Op een bepaalde afstand van de inlaat van de pijp zal de stroming volledig ontwikkeld zijn.

Bij de oplossing van de Navier-Stokes vergelijking wordt ook de convectieve term meegenomen. Wij verwachten nu een iets "trager" stroming. De effecten van de wand zullen minder snel volledig ontwikkelde stroming tot gevolg hebben.

Vit de impulsvergelijking en de constitutieve vergelijkingen van het medium volgt de Navier-Stokes-vgl.:

$$\rho(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{u}$$

Dimensieloos maken levert:

$$-\frac{1}{Re} \Delta \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\nabla p$$

$$\text{div } \underline{u} = 0$$

In de Stokes-oplossing wordt  $(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$  verwaarloosd.

Voor ons probleem wordt de instroming tussen 2 vlakke platen beschouwd. Symmetrie leert ons dat we slechts de helft van kanaalhoogte  $h$  hoeven te beschouwen. (Bijlage IA)

Het is noodzakelijk om 2 RVW. per rand voor te

schrijven: - Rand ① :  $\frac{\partial v}{\partial n} = v = 0$  : symetrie.

- Rand ② :  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  : ontwikkelde stroming.  
 $v = 0$

- Rand ③ :  $u = v = 0$  : vaste wand.

- Rand ④ :  $u = f(y)$  : instroming  
 $v = 0$



Het eerste gedeelte van de opgave wordt gebruikt om een benadering van de stroming mbv. de Stokes-vergelijking te bepalen.

We beschouwen de 2 rechte platen met lengte  $l=10$  en de halve kanaalhoogte  $\frac{1}{2}h=0.5$ .

Als instroomprofiel nemen we  $u=\frac{2}{3}$  en  $v=0$ .

Aan gezien we het probleem gaan oplossen mbv. de boete-functiemethode hebben we ook een boete junctionparameter nodig. Deze wordt gesteld op  $\epsilon=1 \times 10^{-6}$ .

We gaan een  $4 \times 3$  mesh genereren met driehoekige kwadratische elementen.

Omdat we kwadratische elementen willen gebruiken dienen we een nieuwe elementnummer in te voeren.

De RW. dienen op de bekende wijze, zij het nu per vrijheidsgraad, ingevoerd te worden met BVALUE.

We kunnen SYSTEM weer correct voeden door USER en IUSER via FIL 100 met de correcte parameters te vullen. Hierin wordt o.m. de boete junctionparameter vastgelegd en gesteld dat we de convectieve term verwaarlozen.

Het instroomprofiel hoeft niet als aparte FUNCBC aan het einde benoemd te worden maar kan als inhomogene Dirichlet RW. beschouwd worden.

Het geheel kan weer via de plotter worden uitgetekend (Bijlage IB)

De plot toont het verwachte resultaat.

De effecten van de wand veroorzaken een snelheid nul aan de wand. Naar het midden toe zal de snelheid toenemen.

Ook is duidelijk dat de snelheid na verloop van tijd (afstand) niet meer verandert. We kunnen spreken van een ontwikkelde stroming.

De vector print-out levert ons het volgende:

• $\emptyset$	• $\emptyset$	• $\emptyset$	$y = \frac{1}{2} h$
• 0.535	• 0.561	• 0.553	$y = \frac{1}{3} h$
• 0.881	• 0.901	• 0.877	$y = \frac{1}{6} h$
• 1.039	• 0.997	• 0.992	$y = 0$

$$x = 0.375 * l$$

$$x = 0.5 * l$$

$$x = 0.625 * l$$

De bolletjes geven de knooppunten weer, de getallen de waarde van  $u$ . Hieruit blijkt dat van  $x = 0.5 * l$  tot  $x = 0.625 * l$  de waarde van  $u$  slechts  $\pm 1\%$  varieert. De stroming kan als ontwikkeld beschouwd worden.

Het tweede gedeelte van de opgave wordt besteed aan de oplossing van het snelheidsveld, stroomfunctie en het drukverloop via de Navier-Stokes vergelijking.

Het toepassen van de Navier-Stokes vergelijking eist een iteratief oplosproces vanwege de niet-lineaire term. Als uitgangswaarde voor de te maken iteratielus kan men i.g.v. een niet te hoog  $Re$ -getal, de oplossing van de Stokes vergelijking kiezen.

Voor het programma betekent dit dat we na de bepaling van de Stokes-oplossing (programma van het vorige gedeelte) een lus moeten maken.

In deze lus dient telkens opnieuw de oplossing via SYSTEM en SOLVE bepaald te worden. SYSTEM moet echter goed worden zonder verwaarlozing van de convectieve term. Dit kunnen we via  $FILLP$  veranderen. Voorts wordt de nieuw berekende waarde in de subroutine DIFFVC vergeleken te worden met de oude waarde. Is deze groter dan  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) dan dient de laatste waarde mbv. COPY VC. weggeschreven te worden en moet er opnieuw een benadering worden bepaald. Is het verschil kleiner dan  $\delta$  wordt de iteratie-lus verlaten. Het aantal iteratieslagen wordt met een WRITE-statement weggeschreven.

Door DERIVA en STREAM aan te roepen kunnen we resp. de drukcontourlijnen en de stroomfunctie bepalen.

Het geheel is getekend ( Bijlage II ).

De verwachte tragere stroming blijkt goed als we de vector print-out bekijken. We krijgen nu inderdaad een afwijkend profiel indien wij de x-term van de snelheid beschouwen ( Bijlage III )

De controle van de inlaatlengte  $l_c = 0.045 \cdot Re \cdot h$  leert ons dat na het knooppunt dat op  $0.5 \cdot l$  ligt ( bij  $Re = 100$  is dat het eerste knooppunt "na de inlooptlengte" ) de snelheid nog met maximaal 1.7% verandert. Dit is een ontwikkelde stroming.

Vanaf de helft van de loeis blijkt de Navier-Stokes oplossing nauwelijks meer te verschillen van de Stokes-oplossing (  $< 1\%$  )

De stroomjunctie geeft een verwacht plaatje. Tussen 2 stroomlijnen is het debiet constant. Naarmate de snelheid groter wordt liggen de stroomlijnen dichter bij elkaar. Als de stroming ontwikkeld is zullen de stroomlijnen parallel lopen.

A Bespreking van de Navier-Stokes vergelijkingen.

In het 2-dimensionale geval verkrijgen we het stelsel:

$$-\frac{1}{Re} \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = f_1$$

$$-\frac{1}{Re} \Delta v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = f_2$$

$$\text{div } \underline{v} = 0$$

Door de Stokesvgl. te nemen, benadering voor  $\underline{v}$  te kiezen, basisfuncties te substitueren krijgen we:

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{Re} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy - \sum_{i=1}^M p_i \int_{\mathcal{R}} \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \, dx dy = \int_{\mathcal{R}} f_1 \varphi_j \, dx dy$$

$$\sum_{i=1}^N v_i \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{Re} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy - \sum_{i=1}^M p_i \int_{\mathcal{R}} \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \, dx dy = \int_{\mathcal{R}} f_2 \varphi_j \, dx dy$$

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{R}} \left( u_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \psi_j \, dx dy = 0$$

$$j = 1 \dots N$$

$$j = 1 \dots M$$

In Matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} S_{uu} & 0 & L_{up}^T \\ 0 & S_{vv} & L_{vp}^T \\ L_{pu} & L_{pv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bij de Navier - Stokes vergelijking hebben we te maken met een convectieve term:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N v_i v_k \varphi_i \frac{d\varphi_k}{dx}$$

Deze niet - lineaire term wordt gelineariseerd volgens de methode van Newton waarin  $u^{I-1}$  de  $u$  uit de vorige stap is en de aanname  $u^I = u^{I-1} + \delta u^{I-1}$  wordt gebruikt.

$$\begin{aligned} u^I \cdot \nabla u^I &= (u^{I-1} + \delta u^{I-1}) \cdot \nabla (u^{I-1} + \delta u^{I-1}) \\ &= u^{I-1} \cdot \nabla u^I + u^I \cdot \nabla u^{I-1} - u^{I-1} \cdot \nabla u^{I-1} + \delta u^{I-1} \cdot \nabla \delta u^{I-1} \\ &= u^I \cdot \nabla u^{I-1} + u^{I-1} \cdot \nabla u^I - u^{I-1} \cdot \nabla u^{I-1} \end{aligned}$$

$u^I \cdot \nabla u^{I-1} + u^{I-1} \cdot \nabla u^I$  : lineaire termen van de coëfficiëntenmatrix

$u^{I-1} \cdot \nabla u^{I-1}$  : bijdrage rechterlid.

De convectieve termen leveren:

$$\begin{bmatrix} N_{uv} & N_{vv} & 0 \\ N_{vu} & N_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Totale matrix: } \begin{bmatrix} S_{uu} + N_{uu} & N_{uv} & L_{up}^T \\ N_{vu} & S_{vv} + N_{vv} & L_{vp}^T \\ L_{pu} & L_{pv} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_3 \\ f_2 + f_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▢ De essentie van de boetejunctionmethode.

De beschrijvende vergelijking voor een stroming luidt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p &= \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

De boetejunctionmethode vervangt nu "de massabehoudswet"  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  door

$$\frac{1}{\tau} \cdot p + \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

met  $\tau$ : boetejunctionparameter.

Bij voldoende grote  $\tau$  wijzen numerieke resultaten in richting van convergentie.

De discretisatie van de boetejunctionmethode levert voor  $\frac{1}{\tau} p + \operatorname{div} \vec{u} = 0$ :

$$\int_{\Omega} \tilde{p}_i \psi_j \, dx \, dy = -\tau \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \psi_j \, dx \, dy \quad j=1, \dots, M$$

Na substitutie krijgen wij in matrixvorm:

$$\underline{D} \underline{P} = \tau \cdot \underline{L} \cdot \underline{U} \quad \text{met } \underline{D}: \text{drukmatrix}$$

Hieruit volgt:  $\underline{P} = \tau \underline{D}^{-1} \cdot \underline{L} \cdot \underline{U}$

Dit geeft ons de mogelijkheid  $\underline{P}$  te elimineren uit bv. de Stokesvgl.

We krijgen dan:

$$S \underline{U} + \tau L^T D^{-1} L \underline{U} = F$$

$$P = \tau D^{-1} L \underline{U}$$

Onafhankelijk oplossen heeft numeriek veel voordelen.

Problemen treden er op bij de keuze van  $\tau$ . Enerzijds moet hij zo groot mogelijk zijn zodat de massabehoudswet waar blijft, anderzijds levert een te kleine  $\tau$  problemen.

$$(S + \tau L^T D^{-1} L) \underline{U} = F$$

$L^T D^{-1} L$  is een singuliere matrix ( $M \times 2N$ ). Als  $\tau$  heel groot wordt kan de hele coëfficiëntenmatrix singulier worden.

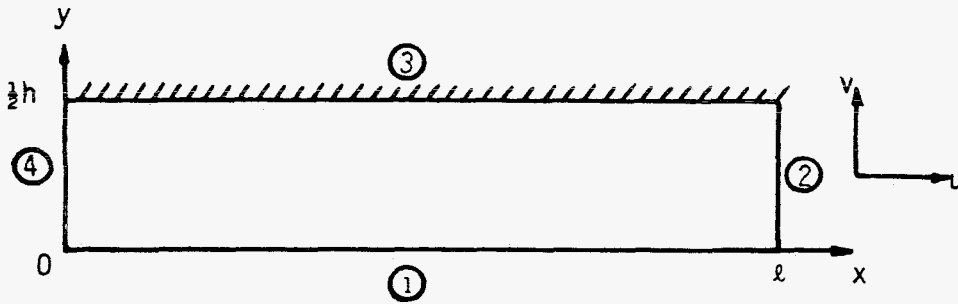
☐ Door het Crouzeix - Raviart element te kiezen mogen we de druk discontinuïte laten zijn. De basisfuncties kunnen zo gunstig gekozen worden dat  $D^{-1}$  gemakkelijk op te lossen is. Bij Taylor-Hood is dit niet mogelijk.



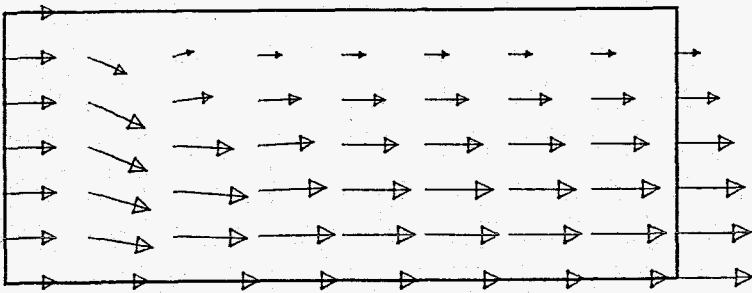
Bij het  $P_2^+ - P_1$  C.R. element kunnen via enkele manipulaties vervolgens de zwaartepuntssnelheden en de drukkafgeleiden in het zwaartepunt worden geëlimineerd zodat het aantal onbekenden per element met 4 afneemt. We zien daarom het C.R. element vaak gepaard gaan met de boete-functie methode.

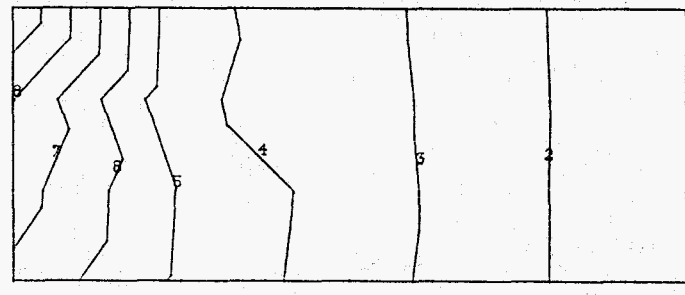
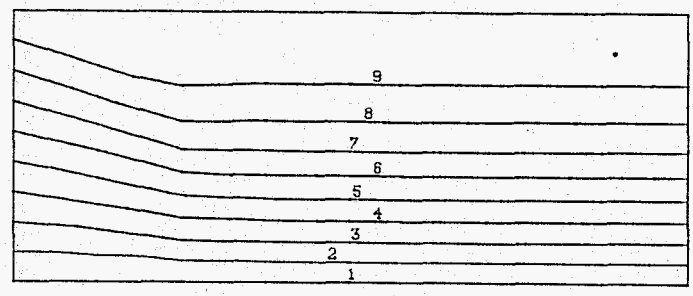
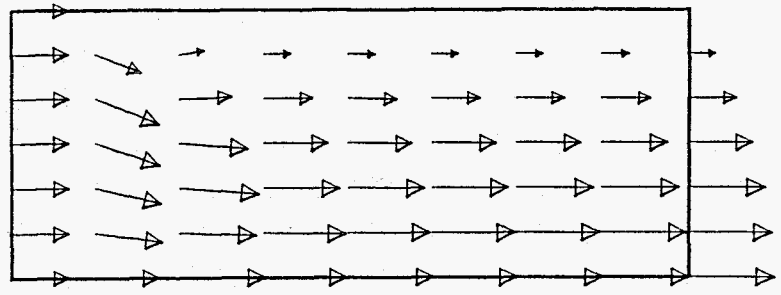
- De instationaire Navier - Stokes vergelijking betekent uitbreiding van de vergelijking met de term  $\frac{d\vec{u}}{dt}$ .

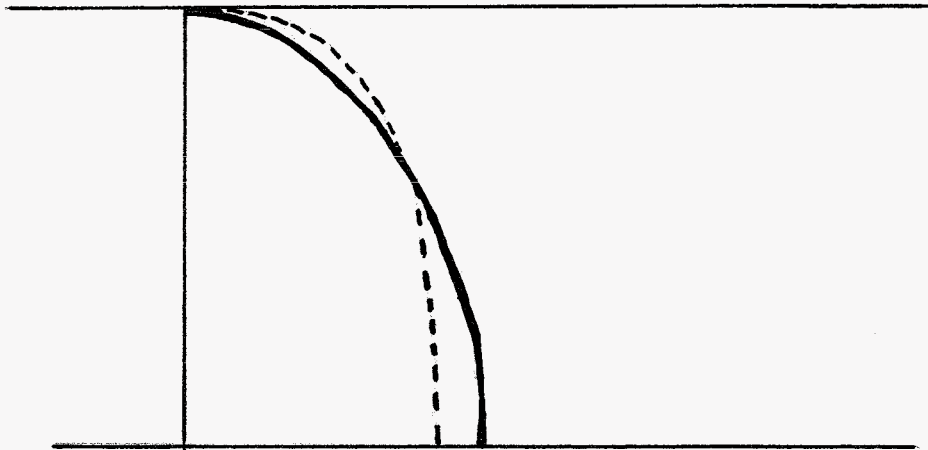
A.



B.







— Stokes - oplossing  
--- Navier - Stokes - oplossing

## OPGAVE V

In opgave IV heb ik de stroming in een verwijding bekeken.

Het optreden van het verschijnsel loslating is onderzocht als functie van de verwijdingshoek en als functie van de instroomsnelheid.

Het verschijnsel loslating kan worden beschreven mbv. de grenslaagtheorie van Prandtl.

Uitgangspunt van deze theorie is dat in de grenslaag de viskeuze krachten van dezelfde orde grootte zijn als de traagheidskrachten.

Deze bewering wordt als uitgangspunt voor een schatting van de orde-grootte van de verschillende termen van de 2-dimensionale Navier-Stokes vergelijking gebruikt. Na verwaarlozing van termen van  $O(\frac{\nu}{L})$  blijft er over:

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Uit de eerste vergelijking blijkt dat indien de drukgradiënt negatief is deze samen met de viskeuze krachten kan werken. Negatieve drukgradiënt plus de viskeuze krachten kunnen samen de impuls van de vloeistof tegen-werken en zelfs loslating doen ontstaan.

Dit wetende beschouwen wij de stroming in een ver-  
wĳding.

De wet van behoud van massa levert:

$$\rho VA = c.$$

Bĳ verwĳding ( $A >$ ) betekent dit een verlaging van  
de snelheid  $V$ . Bernoulli voorspelt dan via:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gh = c$$

dat de druk zal moeten toenemen.

Dit levert dus de gerochte negatieve drukgradiënt  
(verderop in de stroming is de druk groter).

Zoals we kunnen zien is de  $\rho p$  afhankelijk van  
 $\Delta V^2$ . De  $V$  is afhankelijk van  $A$ . Grotere  $A$   
(of grotere verwĳdingshoek  $\alpha$ ) betekent lagere  
 $V$ , grotere  $p$  en dus eerder terugstroming.

Nemen we een grotere snelheid wordt de impuls  
welliswaar groter maar de drukgradiënt ook en  
deze is afhankelijk van  $\Delta V^2$ . Bĳ grotere  $V$  zal  
dus eerder terugstroming op-treden

Het programma voor het bepalen van de Navier-Stokes-oplossing uit opgave IV wordt gebruikt.

Er zijn van situaties tekeningen gemaakt:

Terugstroming blijkt al voor te komen bij een hoek van  $\pm 12^\circ$ . (Bijlage ). Bij een hoek van  $\pm 10^\circ$  blijkt terugstroming niet meer voor te komen.

Vergroten we de instroomsnelheid met een factor 2 blijkt de verwijdingshoek nog kleiner te moeten zijn om terugstroming te voorkomen.

Terugstroming treedt nu op bij een hoek van  $\pm 8^\circ$  (Bijlage )

Bjlag I

