

Breukkans van tandheelkundige composieten bij numerieke simulaties van drie-punts buigproeven

Citation for published version (APA):

Rademaker, C. W., & Gils, van, M. A. J. (1992). *Breukkans van tandheelkundige composieten bij numerieke simulaties van drie-punts buigproeven*. (DCT rapporten; Vol. 1992.037). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1992

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Breukkans van tandheelkundige
composieten bij numerieke
simulaties van drie-punts buigproeven

Christian Rademaker
Marcel van Gils

Rapport nr.: WFW.92.037

Breukkans van tandheelkundige composieten bij numerieke simulaties
van drie-punts buigproeven

Auteurs: Christian W. Rademaker

Marcel A. J. van Gils

Stagebegeleiders: Henk de Vree

Paul van der Varst

Marcel Brekelmans

Eindhoven, Mei 1992

VAKGROEP FUNDAMENTELE WERKTUIGKUNDE

FACULTEIT WERKTUIGBOUWKUNDE

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN

Samenvatting

Dit verslag geeft het resultaat weer van onderzoek om via numerieke simulaties de breukkans van het tandheelkundig composiet Silux door middel van twee equivalent-spanningsdefinities nl. "Modified von Mises" en "Drücker-Prager" met de experimentele resultaten te toetsen. De mate van overeenstemming tussen de voorspelling van de breukkans uit de numerieke resultaten en de breukkans die volgt uit de experimentele resultaten zegt iets over de bruikbaarheid van de equivalent-spanningsdefinities met betrekking tot de schatting van de breukkans voor composietrestauraties. De experimentele breukkansen zijn bepaald aan de hand van resultaten van drie-punts buigproeven op Silux balkjes met verschillende inzagingen. Deze resultaten zijn al beschikbaar zodat met name de numerieke bepaling van de breukkans centraal staat.

Voor de breukkans geldt een Weibull kansverdeling welke door de volgende functie beschreven wordt:

$$p = 1 - e^{-\frac{(\sigma - \sigma_0)^m}{\sigma_r^m}}$$

Hierbij is σ_0 de drempelspanning (voor spanningstoestanden lager dan deze spanning treedt er zeker geen breuk op), σ_r een referentiespanning en m de Weibull modulus. Deze waarden zijn met behulp van de Maximum Likelihood Methode aan de hand van de experimentele resultaten van de niet-ingezaagde balk geschat.

Na het genereren van de mesh met de pre-proces faciliteiten van het pakket IDEAS, zijn met het eindige elementen pakket DIANA de hoofdspanningen in de integratiepunten en de volumefracties per integratiepunt bepaald. Met behulp van deze uitvoer wordt in Matlab de breukkans als functie van de belastingskracht bepaald. Zowel de 2-dimensionale vlakspanning als de 3-dimensionale situatie zijn beschouwd.

De Modified von Mises equivalentenspanning levert bij dezelfde belastingskracht een grotere breukkans op dan de Drücker-Prager equivalentenspanning. Maar beide zijn in staat om de breukkans goed te voorspellen.

De experimentele resultaten zijn statistisch gezien nogal beperkt daar weinig resultaten beschikbaar zijn. De grootte van de inzaging varieert tussen een boven- en ondergrens, waarvan het verschil tot 34% van de grootte van de inzaging kan oplopen. De hypothese is onderzocht of deze afwijking van de ideale inzaging ook invloed heeft op de verdeling van de breukkans als functie van de belasting. Helaas is deze hypothese bevestigd.

Inhoudsopgave

Samenvatting	1
Inhoudsopgave	2
Symbolenlijst	4
1. Inleiding	5
2. Theoretische achtergronden	6
2.1 Inleiding	6
2.2 Beknopte achtergronden met betrekking tot de Weibull functie	6
2.3 Theorie	7
2.4 Een mogelijke benadering	7
2.5 De werkwijze	8
2.6 Equivalente spanningstoestanden	9
2.7 Generalisatie van de hoofdspansingen	10
3. De experimentele resultaten	11
3.1 Inleiding	11
3.2 De experimentele opstelling	11
3.3 Materiaaleigenschappen	11
3.4 Balkgeometrieën	12
3.5 De experimentele resultaten	13
4. Numerieke achtergronden	14
4.1 Inleiding	14
4.2 Het aanpassen van de DIANA-subroutines voor eigen gebruik	14
4.3 Algemene elementkeuze	15
4.4 Het 2-dimensionale element	15
4.5 Het 3-dimensionale element	17
4.6 Randvoorwaarden voor de 2-dimensionale situatie	17
4.7 Randvoorwaarden voor de 3-dimensionale situatie	18
4.8 Toelichting bij de programmatuur	19
5. De numerieke resultaten	20
5.1 De 2-dimensionale resultaten	20
5.1.1 Inleiding	20
5.1.2 Invloed van de meshverfijning	20
5.1.3 Afhankelijkheid van het integratieschema	21
5.1.4 Algemene keuze	21

Inhoudsopgave	3
5.1.5 Afhankelijkheid van de Weibull modulus	21
5.1.6 Invloed van de afwijking in inzaging	21
5.1.7 Niet-ingezaagde balk: vergelijking van de equivalentspanningen bij één-assige spanningstoestand	22
5.1.8 Resultaten van de overige geometrieën	22
5.2 De 3-dimensionale resultaten	22
5.3 Vergelijking van de 2-dimensionale en 3-dimensionale resultaten	23
5.4 $\frac{3}{4}$ -inzaging nader bekeken	24
6. Conclusies en aanbevelingen	25
6.1 Conclusies	25
6.2 Aanbevelingen	25
Literatuuropgave	26
Bijlagen	27
Bijlage A. Tabellen behorend bij hoofdstuk 3	27
Bijlage B. Spanningsequivalentie bij een één-assige spanningstoestand	30
Bijlage C. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.1	31
Bijlage D. Figuren behorend bij hoofdstuk 5.1	37
Bijlage E. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.2	41
Bijlage F. Figuren behorend bij hoofdstuk 5.2	43
Bijlage G. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.4	46
Bijlage H. Programmatuur	47

Symbolenlijst

σ	spanning	[N/m ²]
ϵ	rek	
E	elasticiteitsmodulus	[N/m ²]
ν	dwarskontractie-coëfficiënt	
p	breukkans	
δs	overlevingskans	
x	3-dimensionale plaatsvector	[m m m]
a	zaagsnede diepte	[m]
s	afstand tussen de oplegpunten	[m]
h	hoogte	[m]
b	breedte	[m]
l	lengte van de balk	[m]
F	kracht	[N]
F_r	referentiekraft	[N]
σ_c	druksterkte	[N/m ²]
σ_t	treksterkte	[N/m ²]
k	verhouding tussen de druksterkte en treksterkte	
σ_0	drempelspanning	[N/m ²]
σ_r	referentiespanning	[N/m ²]
σ_{eq}	equivalentspanning	[N/m ²]
σ_{MvM}	Modified von Mises spanning	[N/m ²]
σ_{DP}	Drücker-Prager spanning	[N/m ²]
σ_1	1° hoofdsparing	[N/m ²]
σ_2	2° hoofdsparing	[N/m ²]
σ_3	3° hoofdsparing	[N/m ²]
J_1	1° invariant van de spanningstensor	[N/m ²]
J_2^1	2° invariant van de deviatorische spanningstensor	[N ² /m ⁴]
m	Weibull modulus	
V	volume	[m ³]
V_{ref}	referentievolume	[m ³]
P_{MvM}	Modified von Mises breukkans	
P_{DP}	Drücker-Prager breukkans	

1. Inleiding

In de vakgroep Cariologie en Endodontologie van de Katholieke Universiteit van Nijmegen zijn, in het kader van onderzoek naar de materiaaleigenschappen van tandheelkundige composieten [1], drie-punts buigproeven verricht met balkjes van het tandheelkundig composiet Silux.

Om de spanningstoestand in een proefstuk weer te geven wordt vaak gebruik gemaakt van equivalentspanningen. Bij het gebruik van de "von Mises" equivalentspanningsdefinitie wordt men geconfronteerd met het probleem dat "von Mises" geen onderscheid maakt tussen de druk- en treksterkte van het materiaal. Dit is een probleem daar tandheelkundige composieten een veel grotere druksterkte dan treksterkte hebben. Bij een keuze van een equivalentspanningsdefinitie zoals Modified von Mises en Drücker-Prager wordt het verschil in breuk- en treksterkte verdisconteerd.

Het doel van dit onderzoek is, om via numerieke simulaties, twee equivalent-spanningsdefinities nl. "Modified von Mises" en "Drücker-Prager" met de experimentele resultaten te toetsen. De mate van overeenstemming tussen de voorspelling van de breukkans uit de numerieke resultaten en de breukkans die volgt uit de experimentele resultaten zegt iets over de bruikbaarheid van deze equivalent-spanningsdefinities met betrekking tot de schatting van de breukkans voor composietrestauraties.

Bij het beschrijven van het breukgedrag wordt uitgegaan van de volumehypothese. De volumehypothese gaat er van uit dat de grootte en de dichtheid van de onvolkomenheden in het materiaal aan het oppervlak identiek is aan dat van het inwendig volume. Bij de volumehypothese kan het materiaal in principe overal falen en de kans hierop wordt bepaald door de spanningsverdeling door de hele constructie heen.

In hoofdstuk 2 van dit stageverslag zal worden ingegaan op de theoretische achtergronden van de definities van de breukkansen bij de twee equivalentspanningen en het berekenen hiervan. In hoofdstuk 3 wordt de experimentele opstelling waarmee de drie-punts buigproeven zijn uitgevoerd, besproken en de hiermee bereikte experimentele resultaten weergegeven. In hoofdstuk 4 worden de numerieke achtergronden waarmee de breukkansberekeningen worden uitgevoerd besproken. De resultaten hiervan zijn voor de 2-dimensionale en 3-dimensionale situatie in hoofdstuk 5 weergegeven. Afsluitend volgen de conclusies van dit onderzoek en aanbevelingen voor eventueel opvolgend onderzoek.

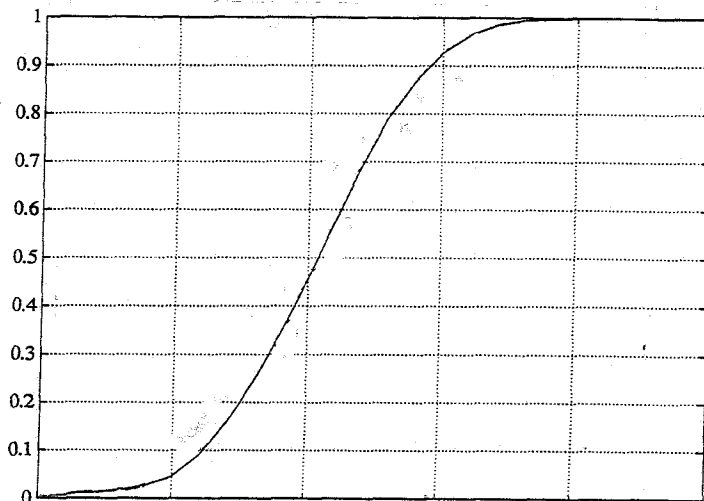
2. Theoretische achtergronden

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden de theoretische achtergronden met betrekking tot de specifieke definitie van de breukansen en de berekening hiervan aan de hand van de numerieke uitvoer van de eindige elementen methode programmatuur, nader toegelicht.

2.2 Beknopte achtergronden met betrekking tot de Weibull functie

De Weibull verdeling wordt in statistische beschouwingen [7] vaak gebruikt om bijvoorbeeld vermoeiingsbreuken, uitval van lichtbuizen en levensduur van lagers te beschrijven. De vorm van de Weibull kromme is in de volgende figuur weergegeven.



Figuur 2.1: Weibull kromme

Bij de beschouwing van ons probleem wordt er van uitgegaan dat ten gevolge van onvolkomenheden de sterkte van een proefstuk een Weibull breukkansverdeling volgt. De in het kader van dit onderzoek gebruikte breukkans wordt als volgt gedefinieerd:

De breukkans is de kans dat een proefstuk (dat door een drie-punts buigproef belast wordt) ten gevolge van de kracht op het symmetrievlak van de balk breekt.

De Weibullverdeling wordt door de volgende functie beschreven:

$$p = 1 - e^{-\frac{(\sigma - \sigma_0)^m}{\sigma^m}} = 1 - e^{-\lambda(\sigma - \sigma_0)^m} \quad (2.1)$$

Deze functie is afhankelijk van enkele parameters:

- σ_0 is een materiaalgrootheid en is ongeveer omgekeerd evenredig met de grootste onvolkomenheid in het materiaal. σ_0 is een drempelwaarde voor de spanning, dat wil zeggen dat een spanningstoestand onder deze spanning nooit tot een breukkans $P > 0$ zal leiden.
- m is een materiaalgrootheid en wordt in de literatuur de Weibull modulus genoemd.
- σ_r is de referentiespanning en is ook een materiaalgrootheid.
- λ is een combinatie van vorm- en materiaalgrootheden en wordt in de literatuur de Weibull schaalparameter genoemd.

2.3 Theorie

De materialen zijn ideaal bros en inherent is dat ze onvolkomenheden bevatten. Breuk kan beschouwd worden als een stochastische grootheid. Toepassing van de Weibull theorie geeft dan dat voor een trekstaaf (één-assige en homogene spanningstoestand) de breukkans p gegeven wordt door formule (2.1). Voor brosse materialen is een klassieke trekproef moeilijk uit te voeren en er wordt daarom een drie-punts buigproef gekozen. Bij de drie-punts buigproef is, bij een geschikte keuze van de afmetingen van de balk, de spanningsverdeling bij benadering één-assig maar niet meer uniform.

De vraag is nu hoe je meer-assige spanningstoestanden moet verdisconteren. In de praktijk wil je immers de breukkans van echte konstrukties bepalen en in die situatie is de spanningsverdeling doorgaans inhomogeen en meer-assig.

2.4 Een mogelijke benadering

Een mogelijke benadering is de volgende:

Beschouw een volume-elementje ΔV waarin een spanningstoestand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (hoofdspanningen) aanwezig is. Vooropgesteld dat ΔV voldoende klein is mogen we veronderstellen dat binnen ΔV de spanningstoestand homogeen is. De kans dat ΔV een spanningstoestand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ overleefd is $\delta s = (1-p)$. Voor de overlevingskans δs van het elementje stellen we:

$$\delta s = e^{-\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) * \Delta V} \quad (2.2)$$

Daar we uitgaan van een isotroop materiaalgedrag is het voorstelbaar dat meerdere combinaties van σ_1, σ_2 en σ_3 hetzelfde effect hebben in de zin dat al deze combinaties die aanwezig zijn in een volume-element ΔV , een gelijke waarde voor de overlevingskans opleveren. Al deze combinaties zijn in die zin equivalent. Een verzameling equivalente spanningstoestanden is een vlak in de ruimte opgespannen door σ_1, σ_2 en σ_3 . Het ligt nu voor de hand elk vlak te karakteriseren door een scalair getal dat we de equivalentenspanning σ_{eq} noemen. Aansluiting met (2.1) krijgen we door:

$$\lambda(\sigma_{eq} - \sigma_0)^m = \Phi * \Delta V \quad (2.3)$$

Het linkerlid van (2.3) kan worden omschreven tot:

$$\lambda(\sigma_{eq} - \sigma_0)^m = \alpha * (\sigma_{eq} - \sigma_0)^m * V_{ref} \quad (2.4)$$

waarbij voor de constante geldt:

$$\alpha = \lambda * \frac{1}{V_{ref}} = \left(\frac{1}{\sigma_r}\right)^m * \frac{1}{V_{ref}} \quad \left[\frac{\text{kracht}^{-m}}{\text{lengte}^{3-2m}}\right]$$

Het referentievolume is het volume van de niet-ingezaagde balk exclusief de balkstukken welke buiten de oplegpunten liggen daar deze bijna onbelast zijn en dus geen bijdrage leveren aan de breukkans. Het referentievolume is in dit geval dus gelijk aan $48 * 10^{-9} \text{ m}^3$.

Een volume element ΔV_i ter plaatse x_i heeft dus een overlevingskans δs_i .

$$\delta s_i = \begin{cases} 1 & \text{als } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ e^{-\alpha(\sigma_{eq} - \sigma_0)^m \Delta V_i} & \text{als } \sigma_{eq} > \sigma_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

en de gehele constructie heeft dus de overlevingskans:

$$\delta s_{tot} = \delta s_1 * \delta s_2 * \delta s_3 * \dots * \delta s_n \quad (2.6)$$

als de constructie in n deelelementjes verdeeld is.

We introduceren nu de Heaviside functie $h(\xi)$:

$$\begin{aligned} h(\xi) &= 0 & \text{als } \xi < 0 \\ h(\xi) &= 1 & \text{als } \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hiermee vinden we dan voor de overlevingskans van de totale constructie:

$$\delta s_{tot} = e^{-\alpha \sum_i (\sigma_{eq}(x_i) - \sigma_0)^m h(\sigma_{eq}(x_i) - \sigma_0) \Delta V_i} \quad (2.8)$$

De totale breukkans van de constructie volgt uit $p = 1 - \delta s_{tot}$:

$$p = 1 - e^{-\alpha \sum_i (\sigma_{eq}(x_i) - \sigma_0)^m h(\sigma_{eq}(x_i) - \sigma_0) \Delta V_i} \quad (2.9)$$

2.5 De werkwijze

Er kan nu een globale werkwijze worden opgesteld. De bedoeling is nu het volgende:

- de parameters α , σ_0 en m zijn via de Maximum Likelihood Methode geschat met behulp van de experimentele resultaten van de niet-ingezaagde balkjes.
- deze waarden worden vervolgens gebruikt om voor de ingezaagde balkjes met behulp van de eindige elementenmethode de breukkans te voorspellen.
- de breukkans kan bepaald worden met behulp van (2.9). Hierin geldt dat ΔV_i gelijk is aan de

volumefractie per integratiepunt en in de definities van σ_{eq} moeten de hoofdspinningen per integratiepunt worden ingevuld.

■ deze breukkans kan vergeleken worden met de breukkans zoals die uit de data voor de ingezaagde balkjes aanwezig is.

2.6 Equivalente spanningstoestanden

Het idee achter equivalente spanningstoestanden is om in één spanningsdefinitie weer te geven dat verschillende spanningstoestanden dezelfde invloed op een materiaal hebben. Een bekend voorbeeld van een equivalente spanning is de "von Mises" spanningsdefinitie. Het grote nadeel van "von Mises" is dat er geen onderscheid wordt gemaakt tussen een spanningstoestand ten gevolge van een trekproef en een spanningstoestand ten gevolge van een drukproef. Dit kan met name bij tandheelkundige composieten tot complicaties leiden daar de druksterkte veel groter is dan de treksterkte (σ_c is 5 tot 8 keer zo groot als σ_t). Gemakkelijkshalve voeren we nu de parameter k in, welke gedefinieerd is als de verhouding tussen de druksterkte en de treksterkte. Voor tandheelkundige composieten ligt de waarde van k tussen 5 en 8.

We poneren nu twee equivalente spanningen die wel het verschil tussen een trekproef en een drukproef kunnen verdisconteren:

1) Modified von Mises

$$\sigma_{eq} = \sigma_{MvM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{(k-1)}{2k} J_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{(k-1)^2 J_1^2 - 12k J_2^1}$$

2) Drucker-Prager

$$\sigma_{eq} = \sigma_{DP}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{(k-1)}{2k} J_1 + \frac{(k+1)}{2k} \sqrt{-3J_2^1}$$

Waarbij de spanningsinvarianten J_1 en J_2^1 als volgt gedefinieerd zijn:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2^1 = -\frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$$

De Modified von Mises-spanning wordt met name gebruikt om de spanningstoestand in polymeren te beschrijven terwijl Drucker-Prager met name gebruikt wordt om de spanningstoestand in zand te beschrijven. Silux is een tandheelkundige composiet bestaande uit kwarts kristallen (\approx zand) in een polymeermatrix [6]. De Modified von Mises en Drucker-Prager equivalente spanningen zouden dus een boven- en ondergrens markeren waartussen de equivalente spanningstoestand van een tandheelkundig composiet ligt.

Beide equivalent spanningsdefinities houden rekening met het feit dat voor veel tandheelkundige materialen de druksterkte σ_c vele malen groter is dan de treksterkte σ_t . Bij bezwijken is $\sigma = \sigma_t$

(trekproef) of $\sigma = -\sigma_c$ (drukproef) zodat $\{\sigma_{eq}^{(crit)}\}_{trek} = \sigma_t = \sigma_c / k = \{\sigma_{eq}^{(crit)}\}_{druk}$. Beide criteria geven dus dezelfde waarde van de equivalentenspanning ongeacht of het een trekproef of drukproef betreft.

2.7 Generalisatie van de hoofdspinningen

Via een eindige elementen analyse kan bij een bepaalde kracht als randvoorwaarde de hoofdspinningen in de elementen bepaald worden. Hieruit kan dan de equivalentenspanning berekend worden. Voor de spanning geldt het volgende:

1) het systeem is lineair:

$$\sigma(F, x) = F * \sigma(1, x)$$

2) de equivalentenspanningen zijn homogeen van de graad één in de hoofdspinningen:

$$\sigma_{eq}(\sigma_1(F, x), \sigma_2(F, x), \sigma_3(F, x)) = \sigma_{eq}(F * \sigma_1(1, x), F * \sigma_2(1, x), F * \sigma_3(1, x)) = F * \sigma_{eq}(\sigma_1(1, x), \sigma_2(1, x), \sigma_3(1, x))$$

(n.b. hierbij moet wel gelden dat $F > 0$)

Meer algemeen kan het volgende gesteld worden:

$$\sigma_{eq} \Big|_{bij\ de\ belasting\ F} = \frac{F}{F_r} * \sigma_{eq} \Big|_{bij\ de\ belasting\ F_r}$$

Er zal later blijken dat de breukkans bij een bepaalde F , die door schaling van de equivalentenspanningen bij de referentiekracht berekend wordt, precies gelijk is aan de breukkans die berekend wordt door de nieuwe waarde van de belasting in DIANA in te voeren en de hele cyclus ter berekening van de kans op breuk te doorlopen.

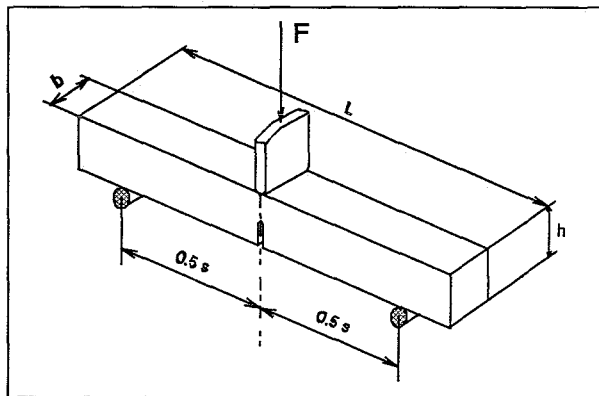
3. De experimentele resultaten

3.1 Inleiding

Dit onderzoek heeft als doel het verifiëren van de equivalentspanningen door middel van computersimulaties. Als experiment is gekozen voor een drie-punts buigproef. In dit hoofdstuk wordt ten eerste de experimentele opstelling besproken en er wordt verder ingegaan op de materiaaleigenschappen van Silux en de verkregen experimentele resultaten.

3.2 De experimentele opstelling

De proefstukjes worden met behulp van de in de volgende figuur weergegeven experimentele opstelling getest.



Figuur 3.1: Experimentele opstelling

Op het symmetrie-vlak van de balk waar een eventuele zaagsnede is aangebracht, veroorzaakt de nok een verplaatsing van 0.5 mm/min. Op de nok is een 'load cel' aangebracht welke de dynamische randvoorwaarde omzet in een meetbare kracht. Op het symmetrie-vlak van de balk is de buigspanning het grootst. De proefstukjes worden ondersteund door twee oplegrollen welke een beweging in y-richting (tegengestelde richting van de richting van de load cel) onderdrukken.

3.3 Materiaaleigenschappen

De drie-punts buigproeven zijn uitgevoerd op het tandheelkundig composiet Silux. Silux is een matrix van BisGMA hars gevuld met colloïdale (colloïdaal= zich fijn verdeeld in een vloeistof bevindend) siliciumdioxide deeltjes met een gemiddelde grootte van $0.04\mu\text{m}$ en een vulgraad van 51 gewichtsprocenten. In de volgende tabel staan enkele materiaaleigenschappen van Silux weergegeven:

Tabel 3.1: Materiaaleigenschappen van Silux

	E-modulus [GN/m ²]	ν	m	σ_0 [MN/m ²]	σ_r [MN/m ²]
Silux	5.1	0.3	3.05	40.5	5.3

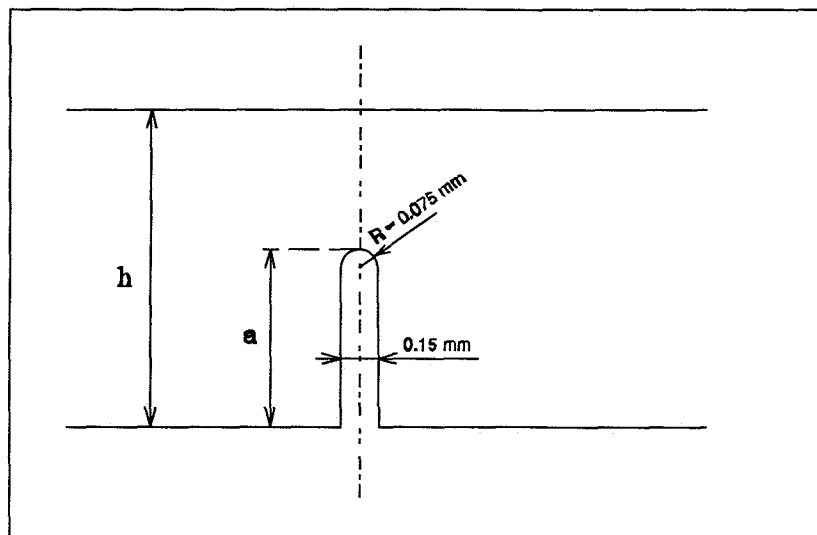
3.4 Balkgeometrieën

De vaste afmetingen van de proefstukjes zijn: $h = 2\text{mm}$, $s = 12\text{mm}$, $b = 2\text{mm}$ en $l = 16\text{mm}$. De afmetingen van de proefstukjes zijn zo klein omdat het proefmateriaal een licht-uithardend composiet is, dat wil zeggen dat het door bestraling van licht gehard wordt. De indringdiepte van de straling is maar beperkt vandaar de kleine afmetingen.

Er worden vier verschillende typen van balkgeometrie bekeken:

- 1) niet ingezaagd
- 2) ingezaagd tot op ongeveer $\frac{1}{4}$ hoogte
- 3) ingezaagd tot op ongeveer $\frac{1}{2}$ hoogte
- 4) ingezaagd tot op ongeveer $\frac{3}{4}$ hoogte

In de volgende figuur is de geometrie van de inzaging weergegeven:



Figuur 3.2: Geometrie van de inzaging

Met de proeven worden de volgende grootheden gemeten:

- 1) breukbelasting := kracht waarbij het proefstukje volledig bezwiken is (scheurvorming heeft zich zover ontwikkeld dat er loslating van twee oppervlakken is opgetreden).
- 2) doorzakking op het moment van breuk

Daar de meting van de tweede grootte niet nauwkeurig kan geschieden en deze grootte voor verdere analyse niet van belang is, zal deze niet verder worden behandeld.

3.5 De experimentele resultaten

De resultaten van de drie-punts buigproeven bij de verschillende geometrieën zijn in de tabellen A.1 tot A.4 in bijlage A weergegeven. In de volgende tabel staan de gemiddelde waarden van de inzaging en gemiddelde waarde van de breukbelasting overzichtelijk per afzonderlijke geometrie weergegeven.

Tabel 3.2: Gemiddelde inzaging en gemiddelde breukbelastingen.

inzaging	gemiddelde a [mm]	gemiddelde breukbelasting [N]
geen	-	30.33
¼ hoogte	0.521	11.49
½ hoogte	1.047	5.86
¾ hoogte	1.646	1.18

Er treedt een kleine verstoring op van het statistisch beeld omdat er al proefstukjes kapot zijn gegaan bij inzaging, deze premature bezwijking worden desondanks buiten de statistische beschouwing gelaten.

4. Numerieke achtergronden

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt nader ingegaan op de specifieke keuze van de programmatuur en gebruikte hardware. Om de eindige elementen berekeningen te maken wordt er gebruik gemaakt van het pakket DIANA. Daar de pre-proces mogelijkheden met betrekking tot het genereren van een nauwkeurige mesh in DIANA beperkt zijn (met name de inzaging is moeilijk te modelleren) wordt het pakket IDEAS gebruikt om de geometrie en de mesh te genereren. Via een interface kan de volledige informatie van de mesh naar DIANA worden omgezet. Door toepassing van een geschikte commandofile en wijzigingen in bepaalde segmenten van DIANA zijn als DIANA uitvoer de hoofdspanningen en volumefractie per integratiepunt ter beschikking. Hiermee kunnen door implementatie in een Matlab algoritme de numerieke breukkansen bepaald worden.

4.2 Het aanpassen van de DIANA-subroutines voor eigen gebruik

Voor het berekenen van de totale breukkans van de constructie is het volume per integratiepunt nodig. Aangezien dit niet standaard door DIANA als uitvoer gegeven wordt is het nodig om in DIANA "in te breken" [5]. Hiervoor moet als eerste stap uitgezocht worden in welk segment van DIANA de gewenste gegevens uitgerekend worden. In ons geval is dit in het segment "st22" wat onder het module "st22" valt. Het pad waar de files in staan is dan dus: /src/diana/share/src/st22.

In dit segment staan zoals in elk segment de volgende vier hoofdbestanden: "root.f" , "lv1.f" , "lv2.f" en "lv3.f" . Hierbij wordt in "lv1" op constructieniveau ,in "lv2" op elementniveau en in "lv3" op integratieniveau gerekend. Naast deze hoofdbestanden staan in de directory nog hulpbestanden die door de vier hoofdbestanden worden aangeroepen. Eén zo'n file die staat onder de directory "elmsl" (van " st22") is voor ons van belang omdat daarin de volumefracties van de integratiepunten gebruikt worden. Dit is de subroutine "slni.f" die door "lv2.f" wordt aangeroepen. In deze subroutine wordt nu een statement toegevoegd waardoor voor ieder element per integratiepunt de volumefractie wordt afgedrukt. Dit statement ziet er als volgt uit:

```
CALL PRIVEC( DVOLIP, NIP, ' DVOLIP' )
```

Hierbij is DVOLIP de volumefractie dat aan een bepaald integratiepunt wordt toegekend en NIP het aantal integratiepunten per element.

Aan het bestand "lv2.f" moet nu nog een statement worden toegevoegd dat er voor zorgt dat er bij de uitvoer van de volumefracties het elementnummer gegeven wordt. Geplaatst in een lus over de elementen zorgt het volgende statement hiervoor:

```
PRINT *, ' ELEMEN',L
```

Hiermee zijn de aanpassingen aan de bestanden compleet. Nu moet nog gezorgd worden dat van de Fortran tekstfile, een objectfile gemaakt wordt zodat DIANA het ook kan lezen. Dit gebeurt met behulp van de zogenaamde "Makefile" die ook in het segment "st22" staat. Deze "Makefile" moet nu gecopieerd worden naar onze eigen directory en aangepast worden. De wijzigingen bestaan uit het omleiden van bepaalde in- en uitvoer. Gezorgd moet worden dat "lv2.f" en "slni.f" gelezen

worden uit onze eigen directory en dat het resultaat van de "Makefile" ook in deze directory wordt gezet. Na het wijzigen worden de objectfiles aangemaakt met het commando 'make'.

Hiermee is nu een eigen versie van het segment "st22 (st22mc)" gemaakt dat gebruikt kan worden door DIANA. Om DIANA nu duidelijk te maken dat deze versie bij het draaien gebruikt moet worden moet in de commandofile "3dim.com" (zie Bijlage G. Programmatuur) onder STREAC het volgende commando opgenomen worden:

```
SEGMENT STRELM/ST22MC
```

Nu wordt dus in STREAC bij het segment STRELM de aangepaste versie (in ons geval ST22MC) van ST22 gebruikt. Hiermee is de aanpassing compleet.

4.3 Algemene elementkeuze

Bij het genereren van de mesh is gekozen voor het gebruik van isoparametrische elementen. Deze elementen bieden enkele voordelen ten opzichte van niet-isoparametrische elementen [2]:

- 1) nauwkeurige representatie van irreguliere domeinen.
- 2) de mogelijkheid voor gekromde elementranden.
- 3) interpolatie-functies zijn makkelijk te bepalen.
- 4) numerieke integratie met behulp van de methode van Gauss-Legendre is handiger.

De gebruikelijke werkwijze in de isoparametrische eindige elementen formulering is om de elementcoördinaten en elementverplaatsingen in de vorm van interpolatie-functies weer te geven door gebruik te maken van het natuurlijke coördinatenstelsel van het element. Voor de verdere uitwerking wordt verwezen naar de literatuur [2], [3] en [4].

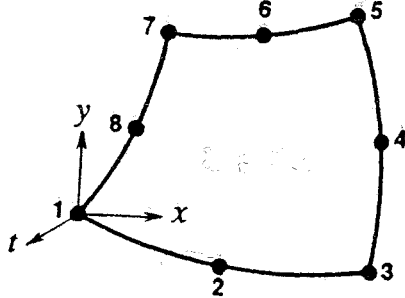
4.4 Het 2-dimensionale element

Bij het beschouwen van de 2-dimensionale situatie wordt men geconfronteerd met het probleem of men een vlakspannings- of vlakrektoestand beschouwd. Vlakbij de inzaging, waar een eventuele breuk zal optreden, heerst een vlakrektoestand terwijl op de rest van het proefstuk een vlakspanningstoestand zal heersen. De spanning-rek relaties voor isotrope materialen worden voor beide gevallen als volgt gedefinieerd:

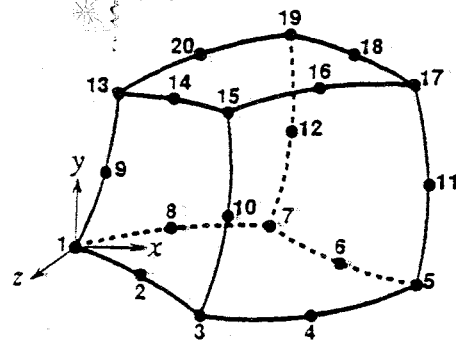
$$1) \text{ vlakspanning: } \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$2) \text{ vlakrek: } \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Omdat het gebied van vlakke rek zo beperkt is in vergelijking met het gebied van vlakspanning, kan men er van uit gaan dat bij het genereren van de meshverdeling volstaan kan worden met het kiezen van een vlakspanningstoestand. Voor deze situatie is er gekozen voor een kwadratisch element met 4 randen en 8 knooppunten. Elk knooppunt heeft twee vrijheidsgraden nl. de verplaatsingen in de globale x- en y-richting. In DIANA [5] heeft dit element de naam CQ16M (waarbij de notatie aangeeft: C = curved, Q = quadrilateral, 16 = aantal vrijheidsgraden, M = membraan). Er is gekozen voor een Gauss 2x2 integratieschema (zie Hoofdstuk 5.4). De coördinaten van de 4 integratiepunten in het natuurlijke assenstelsel zijn: (r,s)= #1: (-0.577,-0.577) #2: (-0.577,0.577) #3: (0.577,-0.577) #4: (0.577,0.577). In Figuur 4.1 is de geometrie van het element weergegeven.



Figuur 4.1: Het CQ16M element.



Figuur 4.2: Het CHX60 element

4.5 Het 3-dimensionale element

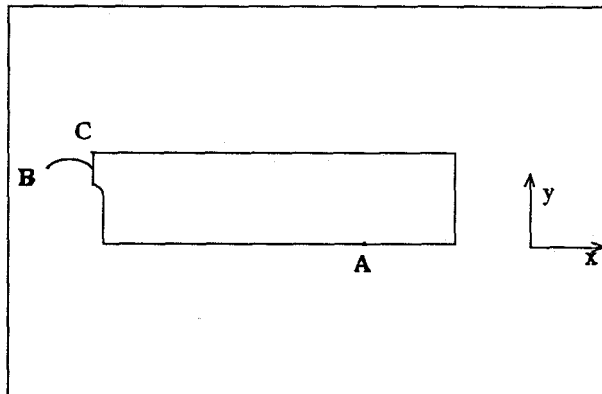
In de 3-dimensionale situatie gelden de volgende relaties tussen de spanningen en de rekken:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix}$$

Als element voor de meshverdeling van de 3-dimensionale situatie is gekozen voor een element met een baksteen vorm. Dit element heeft 20 knooppunten: 1 in elke hoek en 1 in het midden van elke rand. Elk knooppunt heeft drie vrijheidsgraden: de verplaatsingen in de globale x-, y- en z-richting. In DIANA [5] heeft dit element de naam CHX60 (waarbij de notatie aangeeft: C = curved, HX = hexahedron, 60 = aantal vrijheidsgraden). Het meest nauwkeurige integratieschema is een 3x3x3 Gauss integratieschema [4]. Er is, mede uit numerieke overwegingen, gekozen voor een 2x2x2 integratieschema. In Figuur 4.2 is de geometrie van het element weergegeven.

4.6 Randvoorwaarden voor de 2-dimensionale situatie

In de volgende afbeelding is de 2-dimensionale geometrie weergegeven met de randvoorwaarden:



De randvoorwaarden zijn opgedeeld in kinematische en dynamische randvoorwaarden:

1) kinematische randvoorwaarde:

- punt A beperking verplaatsing in y-richting
 beperking verplaatsing in z-richting

lijn B beperking verplaatsing in x-richting
 beperking verplaatsing in z-richting

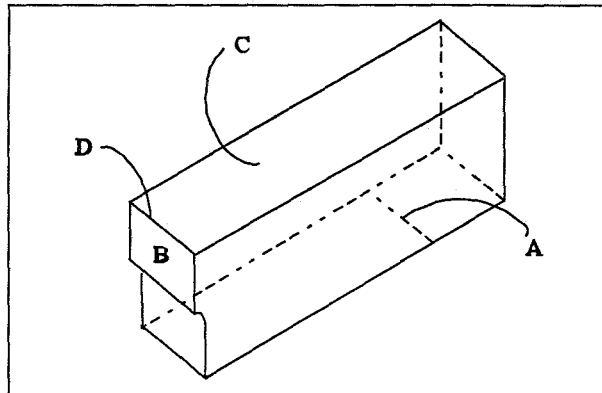
2) dynamische randvoorwaarde:

punt C kracht $\frac{1}{2}F$ in negatieve y-richting

Een aanvullende opmerking: omdat uit symmetrieoverwegingen maar de helft van de balk beschouwd wordt is de kracht die op punt C werkt maar de helft van de werkelijke kracht F die op de gehele balk als randvoorwaarde geldt.

4.7 Randvoorwaarden voor de 3-dimensionale situatie

In de volgende afbeelding is de 3-dimensionale geometrie van $\frac{1}{4}$ deel van de balk weergegeven met de randvoorwaarden:



De randvoorwaarden zijn opgedeeld in kinematische en dynamische randvoorwaarden:

1) kinematische randvoorwaarde:

lijn A beperking verplaatsing in y-richting

vlak B beperking verplaatsing in x-richting

vlak C beperking verplaatsing in z-richting

2) dynamische randvoorwaarde:

rand D verdeelde belasting in negatieve y-richting

Een aanvullende opmerking: omdat uit dubbele symmetrie-overwegingen maar een kwart van de balk beschouwd wordt is de totale kracht die op de knooppunten op rand D werkt maar een vierde van de werkelijke kracht die op de gehele balk als randvoorwaarde geldt. Voor het hoekpunt waar de vier kwarten bij elkaar komen werkt maar de helft van de kracht die op de andere knooppunten

werkt.

4.8 Toelichting bij de programmatuur

In Bijlage H zijn de listings van de meest belangrijke programmas weergegeven. Volledigheidshalve zal nu kort op de functie van de programmas worden ingegaan:

1. 3dim.com

"3dim.com" is een DIANA commando file om met behulp van de datafile (welke verkregen is door de universal file van IDEAS om te zetten) een DIANA output file (met alle relevante uitvoer zoals hoofdspansingen in elk integratiepunt en de volumefractie per integratiepunt) te maken. Deze commando file is speciaal aangepast daar uitvoer met betrekking tot de volumefracties per integratiepunten niet automatisch geleverd wordt.

2. makeml

"makeml" is een programma met unix-commandos om uit de outputfile van DIANA twee matrices te filteren nl.:

- de matrix "mlsig" met als rijen de integratiepunten per element en als kolommen de hoofdspansingen
- de matrix "mlvol" met als rijen de elementen en als kolommen de volumefracties per integratiepunt

3. kans3d.m

"kans3d.m" is een Matlab programma waarin de matrices mlsig en mlvol gebruikt worden om de breukansen in de 3-dimensionale beschouwing te bepalen.

5. De numerieke resultaten

5.1 De 2-dimensionale resultaten

5.1.1 Inleiding

Het primaire doel bij beschouwing van de 2-dimensionale situatie is om een efficiënt integratieschema en een zo grof mogelijke (zo weinig mogelijke elementen) doch nauwkeurige mesh te vinden om berekeningen te kunnen doen voor de geometrieën van de ingezaagde balk. Hiertoe is een representatieve geometrie gekozen, nl. een ½-ingezaagde balk. Bij deze geometrie worden met verschillende meshgroottes en integratieschema's berekeningen gemaakt en aan de hand van de eventuele tendensen in het verloop, een optimale keuze gemaakt. Met behulp van de richtlijnen met betrekking tot de meshgrootte en het integratieschema zullen vervolgens ook berekeningen worden uitgevoerd met de andere geometrieën.

De berekening van de experimentele breukkans gaat als volgt. De experimentele resultaten worden naar rangorde beginnend bij de laagste breukbelasting en eindigend bij de grootste breukbelasting geplaatst. Voor de breukkans geldt:

$$p = \frac{i}{(n+1)} , \quad 0 \leq p \leq 1$$

hierbij is "i" het element van de steekproef en "n" de steekproefgrootte. Nu kunnen de kans p en de kracht worden gecombineerd tot de breukkans.

5.1.2 Invloed van de meshverfijning

Bij een ½-ingezaagde balk werd de afhankelijkheid van de oplossing als functie van de meshgrootte (het aantal elementen van de mesh) bij verschillende waarden van de belasting geanalyseerd. Er is ten eerste gekozen voor het eenvoudigste integratieschema: een 2x2 Gauss integratie. De verfijning van de mesh is afhankelijk van de grootte van de elementen. Deze grootte en tevens de elementdichtheid rond de inzaging zijn in IDEAS instelbaar. Hoe meer elementen er in een mesh zijn, hoe fijner de mesh. Het is tevens duidelijk dat een fijnere mesh een grotere rekencapaciteit vergt. In Tabel C.1 van Bijlage C zijn de resultaten weergegeven. Aan de hand van deze tabel kunnen enkele conclusies getrokken worden:

- de meshgrootte heeft geen grote invloed op het verloop van de breukkans.
- er is met name geen verschil waar te nemen tussen de meshes van 425 elementen en de mesh van 905 elementen bij de P_{MVM} . De verschillen bij P_{DP} liggen in de orde van grootte van 0.1%.
- de mesh van 114 elementen (minst fijne mesh) toont in vergelijking met de fijnere meshes grotere procentuele verschillen.

5.1.3 Afhankelijkheid van het integratieschema

Bij een half-ingezaagde balk werd de afhankelijkheid van de oplossing als functie van het aantal integratiepunten geanalyseerd. De mesh bestaat uit 425 elementen. Als integratieschemas zijn gekozen voor een 2x2 Gauss integratie (4 integratiepunten) en een 3x3 Gauss integratie (9 integratiepunten). In Tabel C.2 van Bijlage C staan de vergelijkende resultaten weergegeven. Aan de hand van deze tabel kunnen enkele conclusies getrokken worden:

- het verschil tussen de twee integratieschemas is voor beide breukansen minder dan 1%.
- hoe groter de belastingskracht F , hoe kleiner de afwijking tussen de integratieschema's.
- de rekentijd is bij een 3x3 Gauss integratie veel groter in vergelijking tot een 2x2 integratie.

5.1.4 Algemene keuze

Als gevolg van deze conclusies is voor verdere berekeningen en simulaties met de verschillende geometrieën op grond van randvoorwaarden als nauwkeurigheid en rekentijd gekozen voor een:

- meshgrootte van ≈ 425 elementen
- 2x2 Gaussisch integratieschema.

Het bewijs voor de juistheid van deze generalisatie naar de andere geometrieën zal hier niet geleverd worden. De mesh voor de $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk is in Figuur D.3 (Bijlage D) weergegeven.

5.1.5 Afhankelijkheid van de Weibull modulus

De waarde van de Weibull modulus wordt met een Maximum Likelihood-schatter bepaald aan de hand van de experimentele resultaten van de niet-ingezaagde balk. De Weibull modulus is tevens een materiaalgrootheid en dus onafhankelijk van de belasting. Om nu te analyseren wat voor invloed een grotere waarde van m heeft op de breukansen zijn ook berekeningen uitgevoerd bij een $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk. In dit geval is m gelijk aan 10. Er kan worden verwacht dat in vergelijking tot de situatie waarbij $m=3.05$, bij constante kracht de breukkans groter zal zijn. Dit wordt ook bewezen in de tabellen C.3 en C.4 van Bijlage C. Hierin kan men zien dat de balkjes bij een veel lagere kracht bezwijken. Voor een 3x3 Gauss integratie is er haast geen verschil tussen een mesh van 425 elementen en een mesh van 905 elementen, terwijl dit voor een 2x2 integratie grotere verschillen oplevert. Opmerkelijk is het verschil in breukkans tussen een 2x2 integratie en een 3x3 integratie, bij dezelfde kracht en meshverfijning. Tevens is het opmerkelijk dat P_{MVM} bij een mesh van 114 elementen voor een 3x3 integratie groter is dan de P_{MVM} bij de fijnere meshes terwijl dit verder nergens geldt.

5.1.6 Invloed van de afwijking in inzaging

Bij de beschouwing van materiaalsterkte als stochastische grootheid en de breukkansberekening is er van uitgegaan dat de diepte van de inzaging voor elk proefstukje identiek is. Uit de waarden van

de inzaging van de tabellen in Bijlage A daarentegen, is te zien dat de inzaging een spreiding heeft (waarbij het verschil tussen de maximale en minimale afwijking ten opzichte van de ideale waarde zelfs tot 34% kan oplopen). De hypothese dat de spreiding in de breukkansen mede veroorzaakt wordt door de spreiding in de inzaging kan onderzocht worden. Dit is voor een $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk gedaan. De breukkansberekeningen zijn voor de maximale afwijking naar onder (0.84mm) en maximale afwijking naar boven (1.09mm) van een $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk gedaan en de resultaten van zijn in tabel C.5 van bijlage C weergegeven. In de figuren D.2.a en D.2.b zijn de resultaten grafisch weergegeven en hierin is te zien dat bijna alle experimentele waarden binnen de band van de maximale en minimale inzaging liggen. Er is duidelijk een verschil te zien tussen de krommen en hieruit kun je concluderen dat de spreiding in de experimentele resultaten mede veroorzaakt wordt door het feit dat niet alle inzagingen identiek zijn.

5.1.7 Niet-ingezaagde balk: vergelijking van de equivalentspanningen bij één-assige spanningstoestand

De niet-ingezaagde balk is een speciale geometrie daar je er nl. van kan uitgaan de spanningstoestand één-assig is. In bijlage B is bewezen dat voor een één-assige spanningstoestand de Modified von Mises en de Drücker-Prager equivalentspanningen aan elkaar gelijk zijn. In Tabel C.6 in Bijlage C en in Figuur D.1.a zijn voor een mesh van 429 elementen bij verschillende krachten en integratieschemas de resultaten weergegeven. De Modified von Mises en Drücker-Prager zijn aan elkaar gelijk en komen exact overeen met de kromme welke aan de hand van de experimentele resultaten gevormd is. De materiaalparameters m , α en σ_0 zijn aan de hand van deze kromme geschat.

5.1.8 Resultaten van de overige geometrieën

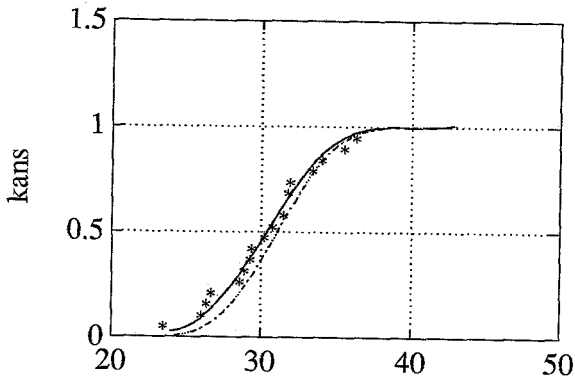
In de tabellen C.7 tot en met C.9 in Bijlage C zijn de numerieke resultaten bij verschillende waarden van de kracht F weergegeven. In de Figuur D.1.b tot en met Figuur D.1.d is dit grafisch weergegeven. Over het algemeen kan men zien dat bij een zelfde kracht de Modified von Mises breukkans is groter dan de Drücker-Prager breukkans. De experimentele resultaten liggen verspreid over de krommen. Bij een $\frac{3}{4}$ -ingezaagde balk is er duidelijk een grote afwijking waarneembaar (zie hoofdstuk 5.4).

5.2 De 3-dimensionale resultaten

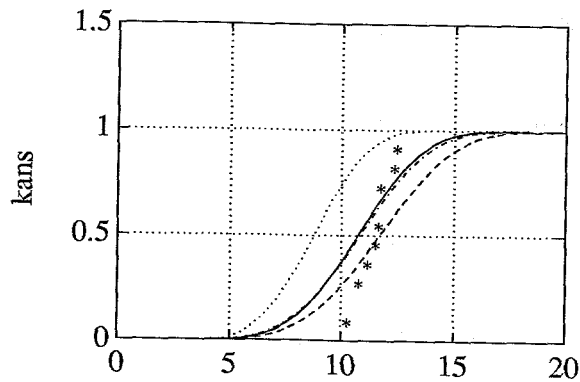
Bij de beschouwing van de 3-dimensionale situatie wordt gebruik gemaakt van de kennis met betrekking tot meshverfijning en integratieschema volgend uit de 2-dimensionale situatie. In Figuur F.2 (Bijlage F) is de gebruikte mesh van de $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk weergegeven. In de tabellen E.1 tot en met E.4 zijn de numerieke resultaten en in figuren F.1.a tot en met F.1.d zijn de resultaten grafisch weergegeven. De algemene tendensen zijn gelijk aan die van het 2-dimensionale geval.

5.3 Vergelijking van de 2-dimensionale en 3-dimensionale resultaten

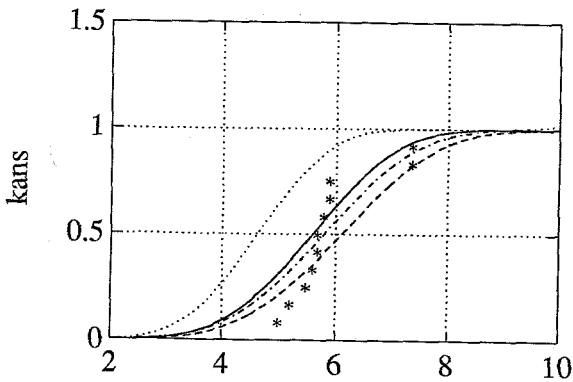
In de figuren 5.1 tot en met 5.4 zijn de resultaten van zowel de 2-dimensionale als de 3-dimensionale beschouwing alsmede de experimentele resultaten als functie van de kracht F weergegeven. Vergelijkingen tussen beide beschouwingen zijn moeilijk te maken. In de 2-dimensionale situatie is er gekozen voor een vlakspanningstoestand voor de gehele constructie maar vlakbij de inzaging is er sprake van een vlakrektoestand. Ideaal zou zijn om een combinatie van beide toestanden te kunnen genereren, maar dit is binnen het 2-dimensionale raamwerk niet mogelijk. In de 3-dimensionale situatie kan het verschil in de resultaten onder andere veroorzaakt zijn door het ingeven van de dynamische randvoorwaarden in IDEAS en DIANA. In werkelijkheid werkt er een verdeelde belasting op het gehele symmetrievlak van de balk. Numeriek gezien wordt dit omgezet naar consistente knooppuntskrachten. Bij een $\frac{3}{4}$ -ingezaagde balk zijn duidelijk grote verschillen tussen numerieke en experimentele resultaten. Dit verschil zal in het volgende hoofdstuk worden verklaard.



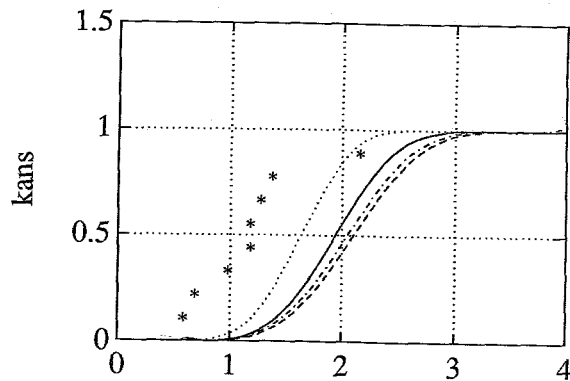
Figuur 5.1



Figuur 5.2



Figuur 5.3



Figuur 5.4

Figuur 5.1: niet-ingezaagde balk

Figuur 5.3: $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk

Figuur 5.2: $\frac{1}{4}$ -ingezaagde balk

Figuur 5.4: $\frac{3}{4}$ -ingezaagde balk

* * * experimentele resultaten
 — Modified von Mises (2d)
 Modified von Mises (3d)

--- Drucker-Prager (2d)
 ._. Drucker-Prager (3d)

5.4 $\frac{3}{4}$ -inzaging nader bekeken

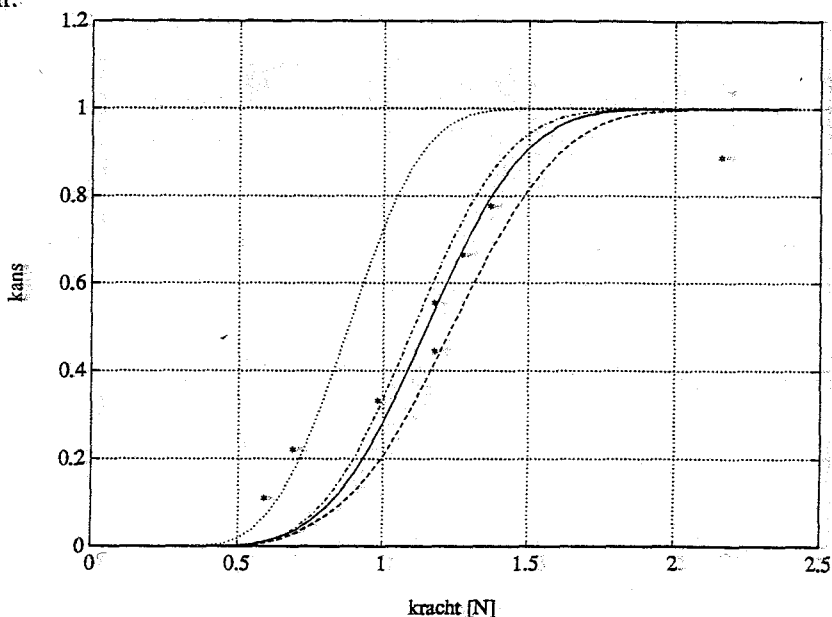
In Figuur 5.4 is duidelijk te zien dat de numerieke resultaten voor zowel de 2-dimensionale als de 3-dimensionale beschouwing een duidelijke afwijking vertonen met de experimentele resultaten.

Bij de voorgaande numerieke simulaties is uitgegaan van een ideale inzaging welke overeen komt met de theoretische inzaging. Deze keuze is te rechtvaardigen daar bij een toename van het aantal proefstukjes het gemiddelde van de inzagingen statistisch gezien naar het theoretisch gemiddelde zal convergeren.

In Tabel 3.2 is al te zien dat de gemiddelde inzaging niet exact overeen komt met de theoretische inzaging. De gemiddelde experimentele inzaging van een $\frac{3}{4}$ -ingezaagde balk' is 1.646 mm. De procentuele afwijking van de gemiddelde experimentele inzaging ten opzichte van de numerieke inzaging is ongeveer 10%. Dit percentage is aanmerkelijk groter dan bij de andere inzagingen (zie Tabel 3.2). In Hoofdstuk 5.1.6 is al bewezen dat de spreiding in de experimentele resultaten mede veroorzaakt wordt door het feit dat niet alle inzagingen identiek zijn. Het vermoeden rijst nu dat de afwijkingen in breukkansen ook door dit fenomeen veroorzaakt zijn.

Om te onderzoeken of de grote verschillen tussen de experimentele en numerieke resultaten veroorzaakt zijn door het verschil in inzaging zijn er ook numerieke simulaties gedaan voor de 2- en 3-dimensionale beschouwing waarbij de inzaging nu overeen komt met de experimenteel gemiddelde inzaging (afgerond op 1.65mm). In Bijlage G zijn de resultaten in tabelvorm weergegeven, terwijl in Figuur 5.5 de resultaten als functie van de kracht F grafisch weergegeven.

Uit de resultaten is te concluderen dat de afwijkingen inderdaad veroorzaakt zijn door het verschil in inzaging omdat nu de theoretische breukkansen goed overeenkomen met de experimentele breukkansen.



Figuur 5.5: inzaging van 1.65 mm

* * * experimentele resultaten

— Modified von Mises (2d)

..... Modified von Mises (3d)

--- Drucker-Prager (2d)

-.- Drucker-Prager (3d)

6. Conclusies en aanbevelingen

6.1 Conclusies

- a) Met de werkwijze welke in dit verslag is voorgesteld is de breukkans bij een bepaalde belasting goed te voorspellen. De Modified von Mises equivalentenspanning levert bij dezelfde belastingskracht een grotere breukkans op dan de Drücker-Prager equivalentenspanning.
- b) Door de beperkte statistische gegevens van de proefstukjes is er in het 2-dimensionale geval geen duidelijke voorkeur te geven tussen beide equivalentenspanningsdefinities. In het 3-dimensionale geval is de Drücker-Prager equivalentenspanning nauwkeuriger in de voorspelling van de breukkans.
- c) Tussen de numerieke en experimentele resultaten is er duidelijk een verschil in steilheid. Dit kan verklaard worden door het feit dat de experimentele Weibull modulus waarschijnlijk groter is dan de numerieke Weibull modulus of dat oppervlakte-effecten bij de inzaging een rol spelen.
- d) De spreiding in de breukkansen wordt niet alleen veroorzaakt door het feit dat breuk een stochastische grootheid is maar ook doordat de inzaging van de proefstukjes niet geheel ideaal is. Er is een spreiding in de inzaging welke soms tot 34% oploopt.
- e) Theoretisch gezien is de 3-dimensionale beschouwing nauwkeuriger daar er in werkelijkheid ook een 3-dimensionale spanningstoestand heerst. De 2-dimensionale resultaten komen daarentegen toch iets beter overeen met de experimentele resultaten.

6.2 Aanbevelingen

- a) Uit onderzoek blijkt dat door toepassing van de oppervlaktehypothese (grootte en en dichtheid van de onvolkomenheden aan het oppervlak zijn veel groter dan in het inwendige van het materiaal en falen wordt altijd ingeleid vanuit het oppervlak) andere waarden met betrekking tot het schatten van de materiaalparameters resulteren. Vervolgonderzoek kan zich richten op het toepassen van de oppervlaktehypothese en vergelijkingen maken met de volumehypothese.
- b) Het toetsen van andere equivalentenspanningsdefinities dan Modified von Mises en Drücker-Prager
- c) Het is gebleken dat de spreiding in de breukkansen ook mede afhankelijk is van de tolerantiegrenzen van de inzaging. Het is aanbevelenswaard om meerdere experimenten te doen met proefbalkjes die een kleinere bereik rond de ideale inzaging hebben. Hiermee zouden de numerieke resultaten beter kunnen vergeleken worden.
- d) De bruikbaarheid van de huidige toepassing om de breukkans van Silux te bepalen zou kunnen worden geanalyseerd door toepassing op andere tandheelkundige composieten.

Literatuurlijst**[1] van der Varst, P.G.T.**

Materiaalsterkte als een stochastische grootheid.
Interne rapportage CE 90-01 Universiteit Nijmegen, 1990.

[2] Bathe, K-J. ,Wilson, E.L.

Numerical methods in finite element analysis.
Prentice-Hall, Inc., 1976.

[3] Bathe, K-J.

Finite-Elementen-Methoden.
Springer-Verlag, 1990.

[4] Zienkiewicz, O.C.

The finite element method.
McGraw-Hill Book Company Limited, 1989.

[5] DIANA- 4.1 User's Manual, Volume 1A, 1991.**[6] van Slagmaat, M.T.P.**

Numerieke bepaling van breukmechanicaparameters voor tandtechnische composieten.
Rapport WFW 91.088 Technische Universiteit Eindhoven, 1991.

[7] Chatfield, C.

Statistics for technology.
Chapman and Hall, 1989.

Bijlage A. Tabellen behorend bij hoofdstuk 3**Tabel A.1:** Experimentele resultaten van de drie-punts buigproeven bij een niet-ingezaagde balk.

Nr.	Breukbelasting [N]
691	28.6
692	31.8
693	35.5
694	36.3
695	26.7
696	23.5
701	28.9
702	26.0
703	31.5
704	34.0
705	29.4
706	30.8
711	29.3
712	26.4
713	31.8
714	30.2
715	33.4
716	31.9

Tabel A.2: Experimentele resultaten van de drie-punts buigproeven bij een $\frac{1}{4}$ -ingezaagde balk.

Nr.	Breukbelasting [N]	a [mm]
751	10.8	0.54
752	12.5	0.47
753	11.7	0.51
754	10.3	0.60
755	10.8	0.60
756	11.6	0.55
763	12.4	0.43
764	11.2	0.50
765	11.8	0.51
766	11.8	0.51

Tabel A.3: Experimentele resultaten van de drie-punts buigproeven bij een $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk.

Nr.	Breukbelasting [N]	a [mm]
761	5.00	1.09
762	5.59	1.04
771	5.69	1.02
772	7.36	0.84
773	5.20	1.08
774	5.49	1.05
775	5.69	1.07
776	5.89	1.01
781	5.89	1.04
782	5.26	1.02
783	7.36	0.96

Tabel A.4: Experimentele resultaten van de drie-punts buigproeven bij een $\frac{3}{4}$ -ingezaagde balk.

Nr.	Breukbelasting [N]	a [mm]
784	1.18	1.62
785	2.16	1.59
786	1.28	1.62
791	1.18	1.57
792	0.98	1.66
793	1.37	1.73
794	0.69	1.74
795	0.59	1.64

Bijlage B. Spanningsequivalentie bij een één-assige spanningstoestand

In deze bijlage wordt bewezen dat bij een één-assige spanningstoestand de equivalente spanningsdefinities volgens Modified von Mises en Drucker-Prager dezelfde waarde opleveren.

We bekijken twee proeven: een trekproef en een drukproef.

1) Trekproef

Voor een één-assige trekproef geldt voor de hoofdspinningen het volgende:

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow J_1 = \sigma, J_2^1 = -\frac{1}{3}\sigma^2$$

Na invulling van de waarden van de hoofdspinningen gaan de equivalente spanningen gaan over in:

$$\sigma_{MvM}(\sigma, 0, 0) = \frac{(k-1)}{2k}\sigma + \frac{1}{2k}\sqrt{(k-1)^2\sigma^2 + 4k\sigma^2} = \frac{(k-1)}{2k}\sigma + \frac{1}{2k}\sqrt{(k+1)^2\sigma^2} = \sigma$$

$$\sigma_{DP}(\sigma, 0, 0) = \frac{(k-1)}{2k}\sigma + \frac{(k+1)}{2k}\sigma = \sigma$$

2) Drukproef

Voor een één-assige drukproef geldt voor de hoofdspinningen het volgende:

$$\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \rightarrow J_1 = -\sigma, J_2^1 = -\frac{1}{3}\sigma^2$$

Na invulling van de waarden van de hoofdspinningen gaan de equivalente spanningen over in:

$$\sigma_{MvM}(-\sigma, 0, 0) = \frac{(-k+1)}{2k}\sigma + \frac{1}{2k}\sqrt{(k-1)^2\sigma^2 + 4k\sigma^2} = \frac{(-k+1)}{2k}\sigma + \frac{(k+1)}{2k}\sigma = \frac{1}{k}\sigma$$

$$\sigma_{DP}(-\sigma, 0, 0) = \frac{(-k+1)}{2k}\sigma + \frac{(k+1)}{2k}\sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{k}\sigma$$

In vergelijking van de trekproef en de drukproef is duidelijk te zien dat deze voor een trekproef een grotere waarde opleveren dan voor de drukproef omdat k groter is dan 1.

Bijlage C. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.1**Tabel C.1:** Invloed van de meshverfijning bij verschillende krachten en een 2x2 Gauss integratieschema bij een ½-ingezaagde balk.

	P_{MVM}			P_{DP}		
F [N]	114	425	905	114	425	905
2.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.0	0.0119	0.0112	0.0112	0.0067	0.0073	0.0074
4.0	0.0936	0.0916	0.0916	0.0585	0.0595	0.0597
5.0	0.3157	0.3117	0.3117	0.2086	0.2104	0.2107
6.0	0.6374	0.6327	0.6327	0.4667	0.4683	0.4686
7.0	0.8879	0.8852	0.8852	0.7442	0.7451	0.7454
8.0	0.9835	0.9829	0.9829	0.9237	0.9240	0.9241
9.0	0.9991	0.9990	0.9990	0.9878	0.9878	0.9878
10.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9991	0.9991

Tabel C.2: Invloed van het soort integratieschema bij verschillende krachten en een meshgrootte van 425 elementen van een ½-ingezaagde balk.

	P_{MvM}		P_{DP}	
F [N]	2x2	3x3	2x2	3x3
2.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3.0	0.0112	0.0114	0.0073	0.0075
4.0	0.0916	0.0922	0.0595	0.0601
5.0	0.3117	0.3127	0.2104	0.2114
6.0	0.6327	0.6337	0.4683	0.4696
7.0	0.8852	0.8858	0.7451	0.7462
8.0	0.9819	0.9830	0.9240	0.9244
9.0	0.9990	0.9990	0.9878	0.9879
10.0	1.0000	1.0000	0.9991	0.9991

Tabel C.3: Invloed van de meshverfijning bij verschillende krachten en een 2x2 Gauss integratieschema bij een ½-ingezaagde balk bij waarde $m=10$.

	P_{MvM}			P_{DP}		
F [N]	114	425	905	114	425	905
2.0	0.0000	0.0008	0.0017	0.0000	0.0001	0.0005
2.1	0.0000	0.0121	0.0215	0.0000	0.0027	0.0078
2.2	0.0002	0.1001	0.1516	0.0001	0.0294	0.0668
2.3	0.0054	0.4659	0.5906	0.0025	0.1888	0.3401
2.4	0.0567	0.9430	0.9781	0.0278	0.6589	0.8521
2.5	0.3299	1.0000	1.0000	0.1798	0.9878	0.9993
2.6	0.8664			0.6374	1.0000	1.0000
2.7	0.9997			0.9839		
2.8	1.0000			1.0000		

Tabel C.4: Invloed van de meshverfijning bij verschillende krachten en een 3x3 Gauss integratieschema bij een ½-ingezaagde balk bij waarde $m=10$.

	P_{MvM}			P_{DP}		
F [N]	114	425	905	114	425	905
2.0	0.0047	0.0053	0.0050	0.0001	0.0017	0.0023
2.1	0.0597	0.0508	0.0460	0.0033	0.0203	0.0246
2.2	0.3785	0.2858	0.2580	0.0402	0.1395	0.1563
2.3	0.9256	0.8049	0.7622	0.2655	0.5491	0.5766
2.4	1.0000	0.9984	0.9965	0.8089	0.9647	0.9695
2.5		1.0000	1.0000	0.9991	1.0000	1.0000
2.6				1.0000		

Tabel C.5: Invloed van de verschil in inzaging bij verschillende krachten en een 2x2 Gauss integratieschema bij een ½-ingezaagde balk.

	P_{MvM}			P_{DP}		
F [N]	½ min 424	½ 425	½ max 426	½ min 424	½ 425	½ max 426
2	0.0000	0.0000	0.0008	0.0000	0.0000	0.0005
3	0.0010	0.0112	0.0356	0.0007	0.0073	0.0232
4	0.0172	0.0916	0.2134	0.0112	0.0595	0.1417
5	0.0847	0.3117	0.5641	0.0550	0.2104	0.4090
6	0.2404	0.6327	0.8748	0.1598	0.4683	0.7323
7	0.4798	0.8852	0.9863	0.3375	0.7451	0.9349
8	0.7309	0.9819	0.9996	0.5624	0.9240	0.9932
9	0.9046	0.9990	1.0000	0.7727	0.9878	0.9998
10	0.9791	1.0000		0.9134	0.9991	1.0000
11	0.9975			0.9776		
12	0.9998			0.9963		
13	1.0000			1.0000		

Tabel C.6: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 429 elementen en een 2x2 Gauss integratie in een niet-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
24.0	0.0263	0.0264
27.0	0.1577	0.1585
30.0	0.4547	0.4570
33.0	0.7909	0.7934
36.0	0.9642	0.9652
39.0	0.9980	0.9981
42.0	1.0000	1.0000
45.0	1.0000	1.0000

Tabel C.7: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 439 elementen en een 2x2 Gauss integratie in een ¼-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
4.0	0.0002	0.0001
6.0	0.0163	0.0107
8.0	0.1182	0.0780
10.0	0.3745	0.2593
12.0	0.7087	0.5452
14.0	0.9285	0.8155
16.0	0.9927	0.9582
18.0	0.9998	0.9956
20.0	1.0000	0.9998

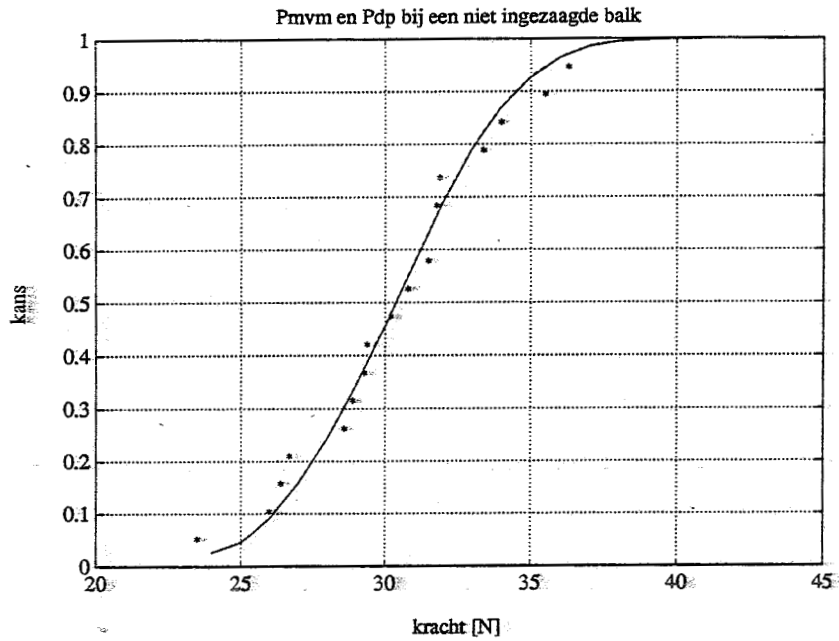
Tabel C.8: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 425 elementen en een 2x2 Gauss integratie in een ½-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
2.0	0.0000	0.0000
3.0	0.0112	0.0073
4.0	0.0916	0.0595
5.0	0.3117	0.2104
6.0	0.6327	0.4683
7.0	0.8852	0.7451
8.0	0.9829	0.9240
9.0	0.9990	0.9878
10.0	1.0000	0.9991

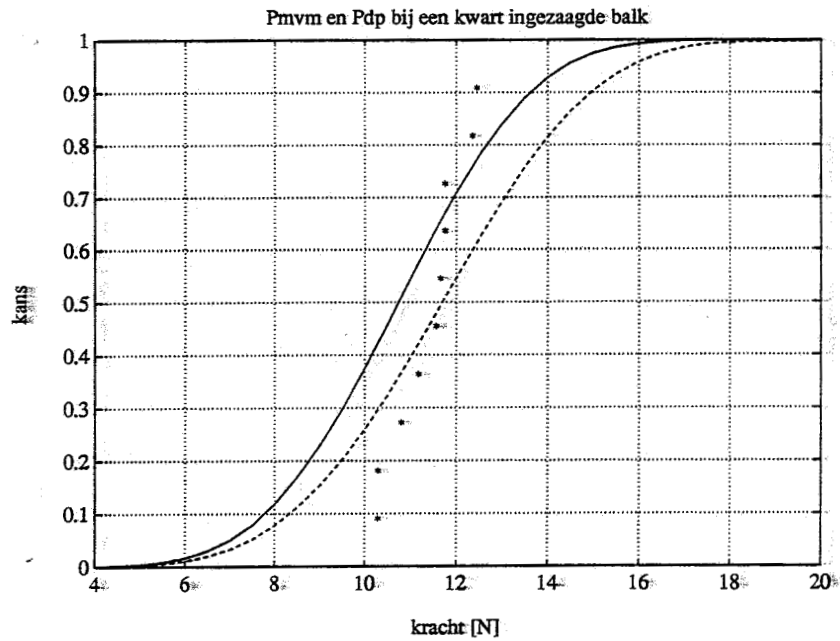
Tabel C.9: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 426 elementen en een 2x2 Gauss integratie in een ¾-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
0.8	0.0010	0.0007
1.2	0.0386	0.0261
1.6	0.2160	0.1502
2.0	0.5538	0.4172
2.4	0.8592	0.7318
2.8	0.9808	0.9305
3.2	0.9991	0.9916
3.6	1.0000	0.9996
4.0		1.0000

Bijlage D. Figuren behorend bij hoofdstuk 5.1



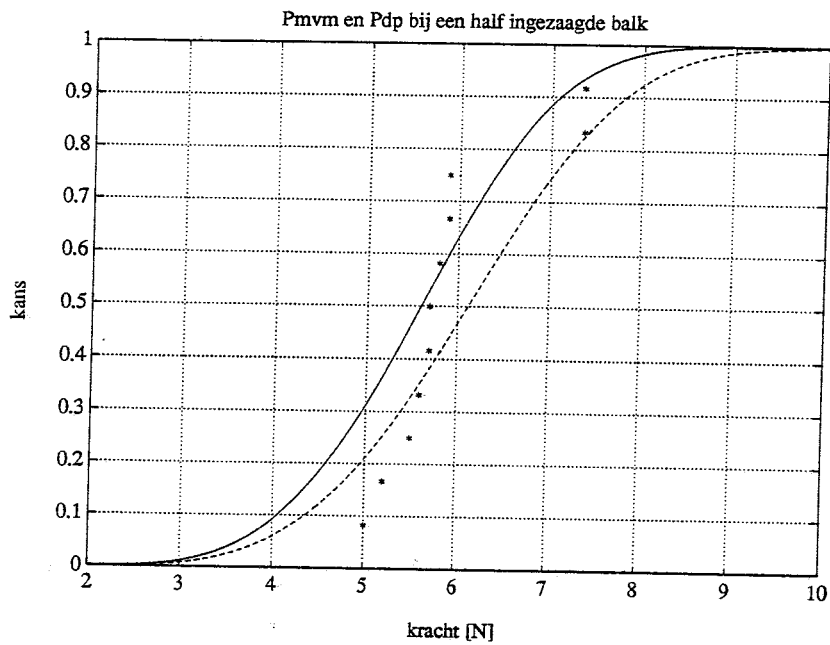
Figuur D.1.a: niet-ingezaagde balk, 429 elementen



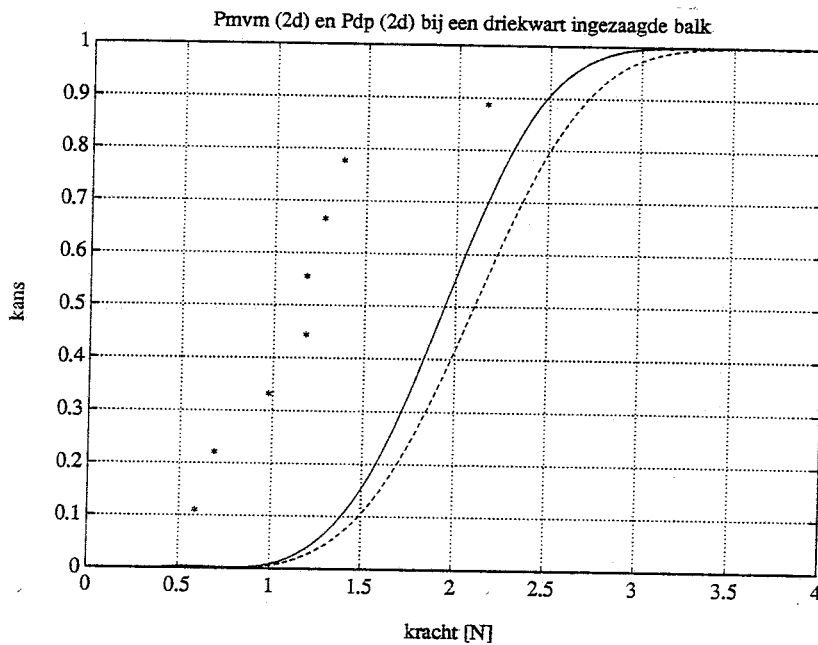
Figuur D.1.b: 1/4-ingezaagde balk, 439 elementen

Figuur D.1.a en D.1.b: Breukkans bij Modified von Mises en Drucker-Prager equivalente spanningsdefinities als functie van de kracht F bij 2×2 Gauss integratie.

- * * * experimentele resultaten
- Modified von Mises
- Drucker-Prager



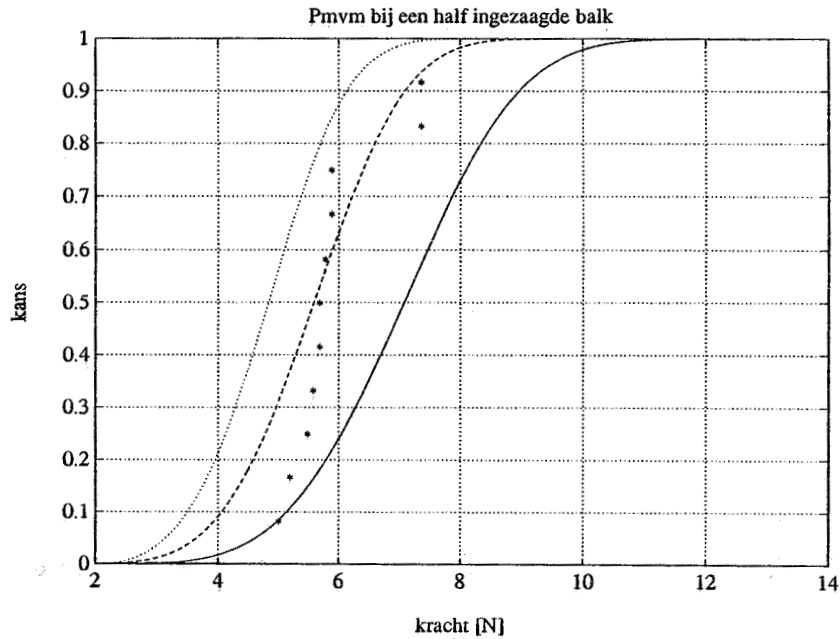
Figuur D.1.c: 1/2-ingezaagde balk, 425 elementen



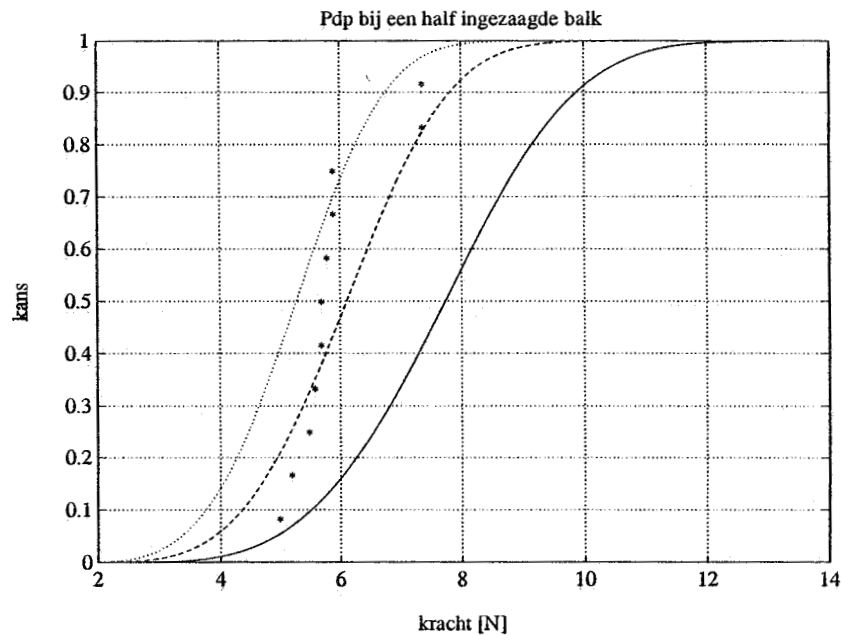
Figuur D.1.d: 3/4-ingezaagde balk, 426 elementen

Figuur D.1.c en D.1.d: Breukkans bij Modified von Mises en Drucker-Prager equivalente spanningsdefinities als functie van de kracht F bij 2×2 Gauss integratie.

- * * * experimentele resultaten
- Modified von Mises
- Drucker-Prager



Figuur D.2.a: Modified von Mises breukkans

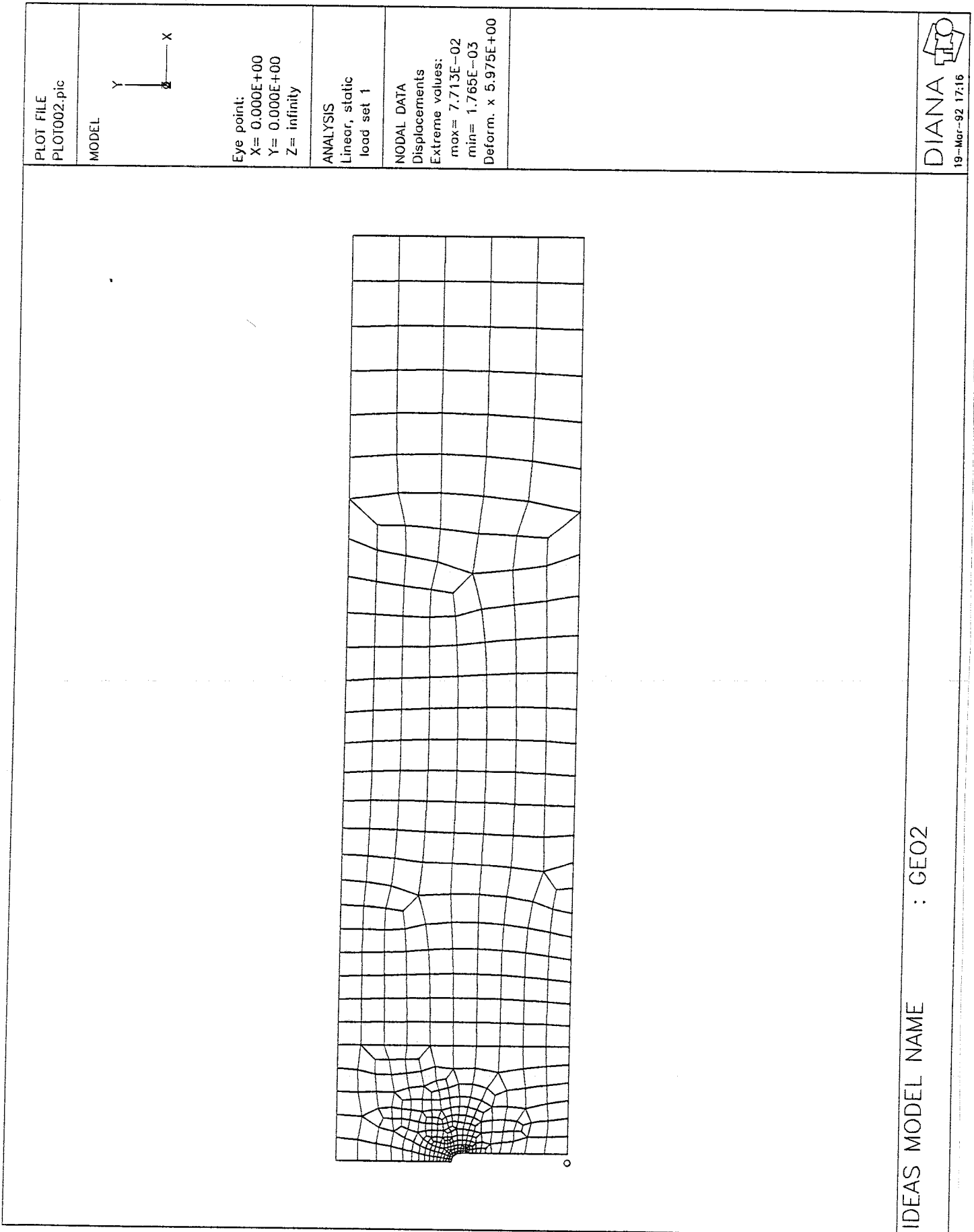


Figuur D.2.b: Drucker-Prager breukkans

Figuur D.2.a en D.2.b: Breukkansen van een $\frac{1}{2}$ -ingezaagde balk en de maximale afwijking naar boven en onder als functie van de kracht F bij 2×2 Gauss integratie en een mesh van 425 elementen.

- **** experimentele resultaten
- minder dan de ideale inzaging: 0.84mm
- ideale inzaging: 1mm
- .- meer dan de ideale inzaging: 1.09mm

Figuur D.3: Mesh van een 1/2-ingezaagde balk in de 2-dimensionale vlakspanningstoestand



Bijlage E. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.2**Tabel E.1:** Modified von Mises en Drücker-Prager breukkansen bij een mesh van 195 elementen en een 2x2x2 Gauss integratie in een niet-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
23.625	0.0021	0.0020
25.200	0.0197	0.0191
26.775	0.0748	0.0733
28.350	0.1866	0.1842
29.925	0.3573	0.3542
31.500	0.5613	0.5581
33.075	0.7520	0.7495
34.650	0.8891	0.8876
36.225	0.9625	0.9619
37.800	0.9909	0.9907
39.375	0.9985	0.9984
40.950	0.9998	0.9998
42.525	1.0000	1.0000

Tabel E.2: Modified von Mises en Drücker-Prager breukkansen bij een mesh van 395 elementen en een 2x2x2 Gauss integratie in een ¼-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
4.0	0.0029	0.0002
6.0	0.0729	0.0203
8.0	0.3450	0.1247
10.0	0.7426	0.3692
12.0	0.9613	0.6872
14.0	0.9985	0.9114
16.0	1.0000	0.9884
18.0		1.0000

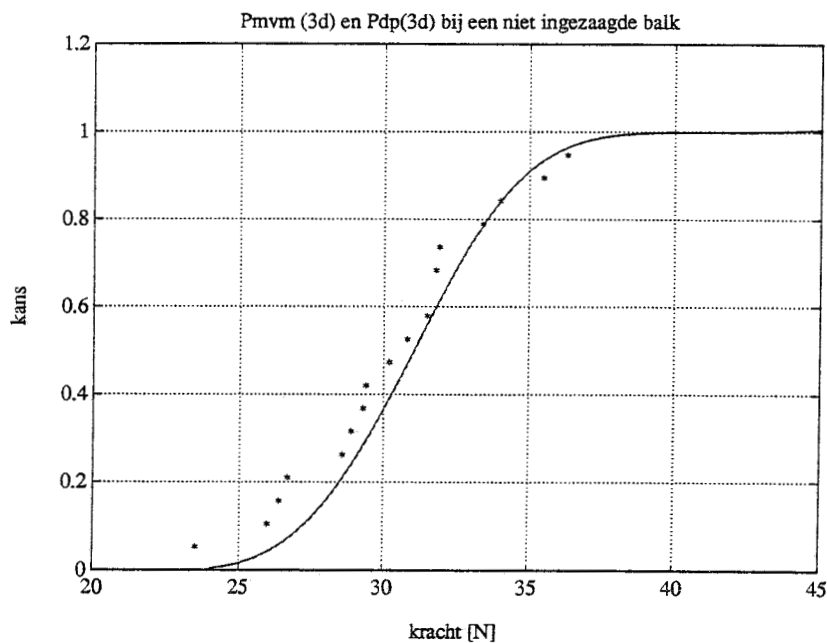
Tabel E.3: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 405 elementen en een 2x2x2 Gauss integratie in een ½-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
1.008	0.0000	0.0000
2.016	0.0014	0.0000
3.024	0.0518	0.0121
4.032	0.2761	0.0871
5.040	0.6578	0.2826
6.048	0.9269	0.5759
7.056	0.9950	0.8365
8.064	0.9999	0.9650
9.072	1.0000	0.9965

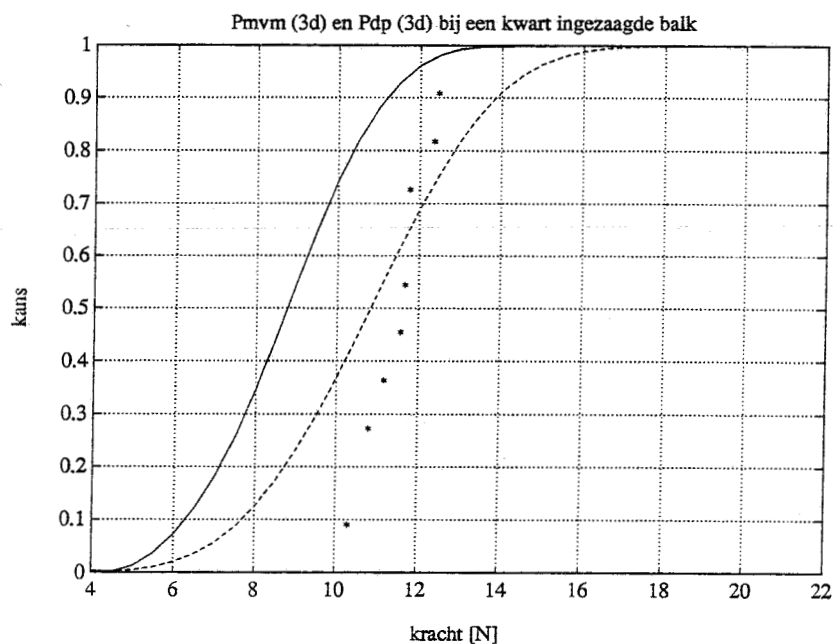
Tabel E.4: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 385 elementen en een 2x2x2 Gauss integratie in een ¾-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
0.42	0.0000	0.0000
0.84	0.0099	0.0014
1.26	0.1518	0.0448
1.68	0.5505	0.2211
2.10	0.9056	0.5444
2.52	0.9952	0.8444
2.94	1.0000	0.9752
3.36		0.9986
3.78		1.0000

Bijlage F. Figuren behorend bij hoofdstuk 5.2



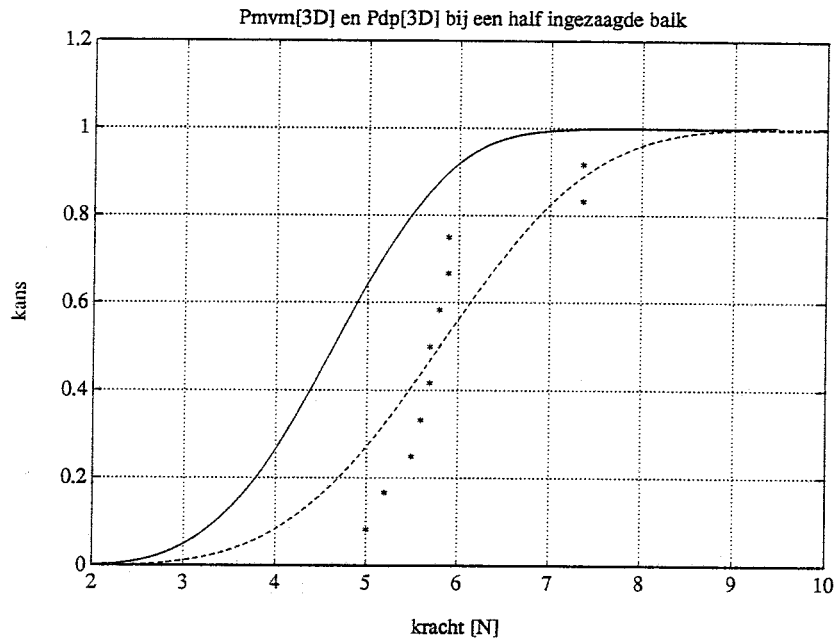
Figuur F.1.a: niet-ingezaagde balk, 424 elementen



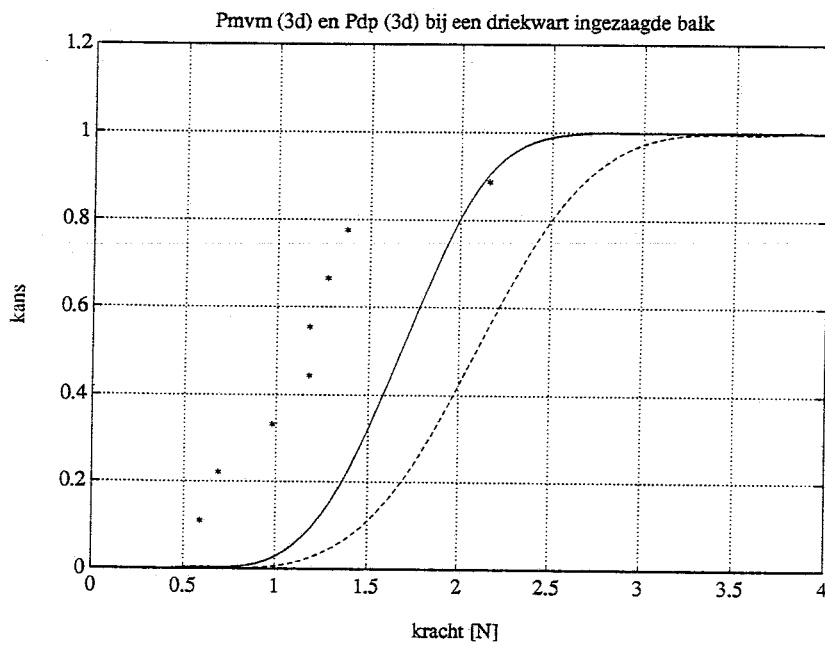
Figuur F.1.b: 1/4-ingezaagde balk, 426 elementen

Figuur F.1.a en F.1.b: Breukkans bij Modified von Mises en Drucker-Prager equivalente spannings-definities als functie van de kracht F bij $2 \times 2 \times 2$ Gauss integratie.

- * * * experimentele resultaten
- Modified von Mises
- Drucker-Prager



Figuur F.1.c: ½-ingezaagde balk, 405 elementen

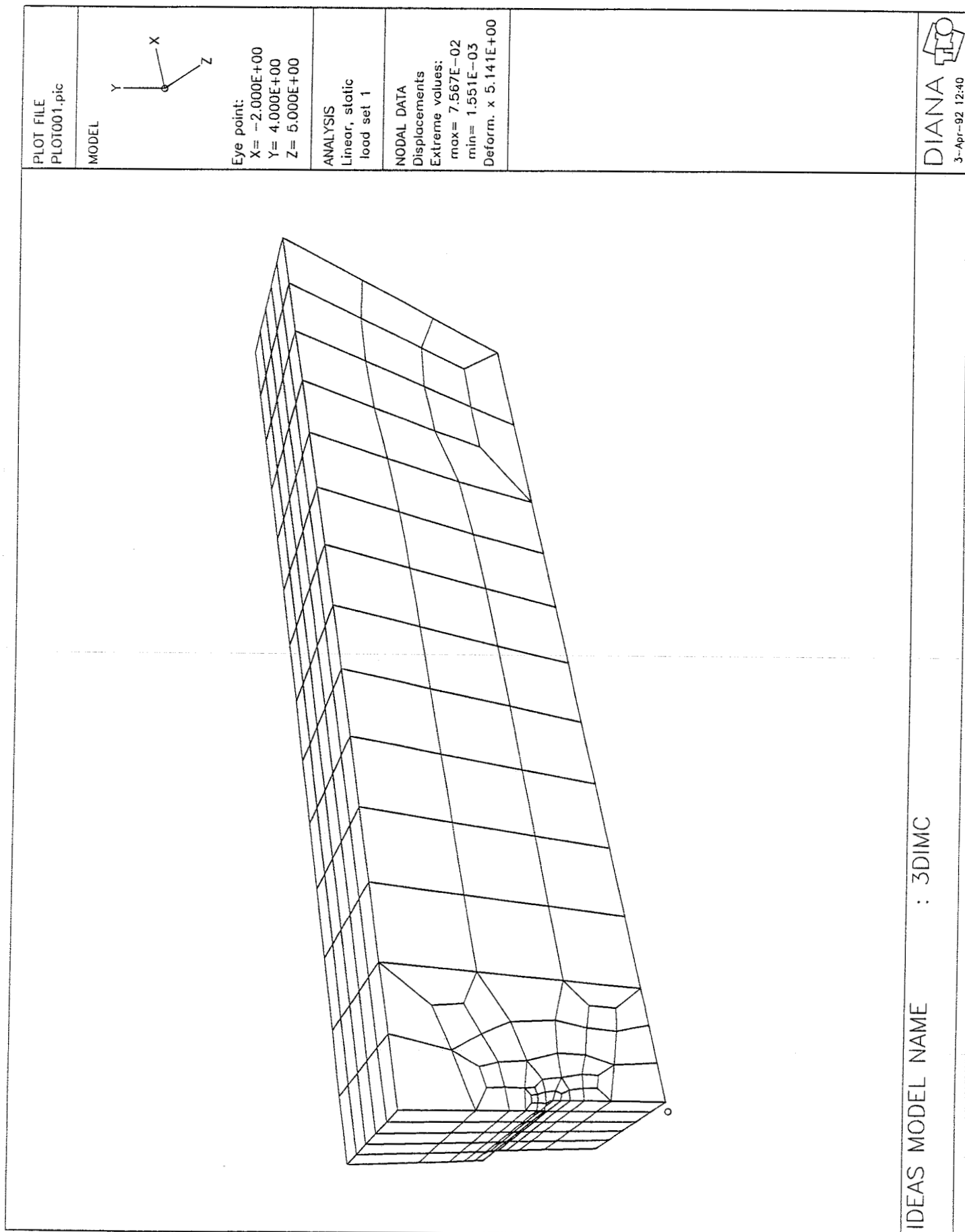


Figuur F.1.d: ¾-ingezaagde balk, 426 elementen

Figuur F.1.c en F.1.d: Breukkans bij Modified von Mises en Drucker-Prager equivalente spanningsdefinities als functie van de kracht F bij $2 \times 2 \times 2$ Gauss integratie.

- * * * experimentele resultaten
- Modified von Mises
- Drucker-Prager

Figuur F.2: Mesh van een 1/2-ingezaagde balk in de 3-dimensionale toestand



Bijlage G. Tabellen behorend bij hoofdstuk 5.4

Tabel G.1: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 426 elementen en een 2x2 Gauss integratie in een 1.65mm-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
0.2	0.0001	0.0000
0.3	0.0121	0.0084
0.4	0.0876	0.0691
0.5	0.2822	0.2065
0.6	0.5703	0.4462
0.7	0.8271	0.7083
0.8	0.9590	0.8948
0.9	0.9950	0.9765
1.0	0.9997	0.9971
1.1	1.0000	0.9998

Tabel G.2: Modified von Mises en Drucker-Prager breukkansen bij een mesh van 500 elementen en een 2x2x2 Gauss integratie in een 1.65mm-ingezaagde balk.

F [N]	P_{MvM}	P_{DP}
0.45	0.0066	0.0002
0.6	0.0740	0.0115
0.75	0.2607	0.0691
0.9	0.5430	0.2034
1.05	0.8041	0.4108
1.2	0.9482	0.6430
1.35	0.9925	0.8329
1.5	0.9995	0.9431
1.65	1.0000	0.9867
1.8		0.9980

Bijlage H. Programmatuur

1. 3dim.com

```
*FILOS
INITIA MA=5500000
*INPUT
*ELASSE
*ELMAT
*LOADS
*ORDER
TOPOLO
SEQUEN NODES.A MF=200
*SOLVE
*STREAC
SEGMENT STRELM/ST22MC
NODES DISPLA REACTI
ELEMEN.P STRESS.P
*OUTPRI
ELEMEN.CP STRESS.P
*END
*END
```

2. makeml

```
fgrep " DVOLIP :" diana.out | awk -F: '{ print $2 }' > mlvol.dat
fgrep "      1      " diana.out | awk '{ print $2, $3, $4 }' > mlsig.dat
```

3. kans3d.m

```
% programma naam: kans3d.m

clear

% invoeren van data uit DIANA
load mlvol.dat
load mlsig.dat
mlsig=mlsig*1e3; % omzetten van DIANA eenheden van mN/mm2 naar N/m2
mlvol=mlvol*1e-9; % omzetten van DIANA eenheden van mm3 naar m3

silux      % invoeren van composiet data

vorm=size(mlvol);

N=vorm(1,1); % N is aantal elementen van de mesh

M=vorm(1,2); % M is aantal integratiepunten per element

mlsig1=mlsig/8;
for z=1:10      % over verschillende krachten sommeren
```

```

mlsig=(z+1)*mlsig1;    % krachtenschaling

% beginwaarden van de kansen

somkansMvM(z)=0;
somkansDP(z)=0;

for j=1:N    % elementnummer
    for i=1:M    % integratiepuntnummer
        sigma1=mlsig(i+M*(j-1),1);
        sigma2=mlsig(i+M*(j-1),2);
        sigma3=mlsig(i+M*(j-1),3);

        % berekenen van spanningsinvarianten J1 en J2

        J1(i)=sigma1+sigma2+sigma3;
        J2(i)=-(((sigma1-sigma2).^2)+((sigma2-sigma3).^2)+((sigma3-sigma1).^2))/6;

        % berekenen van equivalentspanningen in de integratiepunten

        k=8; % k is gedefinieerd als druksterkte/treksterkte

        % Modified von Mises

        sigmaMvM(i)=((k-1)*J1(i)+sqrt(((k-1).^2)*J1(i).^2-12*k*J2(i)))/(2*k);

        % Drucker-Prager

        sigmaDP(i)=((k-1)*J1(i)+(k+1)*sqrt(-3*J2(i)))/(2*k);

        %bepalen heaviside functie

        hMvM(i)=sigmaMvM(i)-sigma0;
        hDP(i)=sigmaDP(i)-sigma0;

        % kansberekenen
        % alleen kanstoenamen als de heaviside functie groter of gelijk nul
        % factor -4 in de somkansberekening ontstaat daar je bij de EEM-analyse maar een kwart
        % van de balk beschouwd hebt

        if hMvM(i)>=0
            somkansMvM(z)=somkansMvM(z)+(-4*alfa*(((sigmaMvM(i)-sigma0).^m)*mlvol(j,i)));
        end
        if hDP(i)>=0
            somkansDP(z)=somkansDP(z)+(-4*alfa*(((sigmaDP(i)-sigma0).^m)*mlvol(j,i)));
        end
    end
end
kansMvM(z)=1-exp(somkansMvM(z))
kansDP(z)=1-exp(somkansDP(z))
end
end

```