Algebra en analyse

algebra en analyse

prof. dr. S.T.M. ACKERMANS en
prof. dr. J.H. van LINT

8e bael

academic service
den haag 1976

2e herziene druk 1976

De 1e druk van dit boek werd in 1970 uitgegeven door Wolters-Noordhoff nv te Groningen.

Uitgegeven door: Academic Service
Postbus 2996
Den Haag
Druk: Krips Repro, Meppel
Bindwerk: Meeuwis, Amsterdam
Omslag ontwerp: Olivier
ISBN 90 6233 014 2

Voorwoord

De geschiedenis van het ontstaan van dit boek zal ongetwijfeld grote gelijkenis vertonen met die van andere leerboeken, voortgekomen als het is uit de wens van de auteurs de inhoud van hun colleges aan hun studenten in een goed toegankelijke vorm ter beschikking te stellen. Het geraamte van de tekst is dan ook stof door ons aan de T.H. Eindhoven gedoceerd aan studenten met hoofdvak wiskunde in de eerste vijf semesters van hun studie. De door ons gegeven colleges vormen echter slechts een gedeelte van het onderwijs voor de wiskundestudenten; een zeer belangrijk deel van hun precandidaatsopleiding bestaat uit een cursus in analyse en lineaire algebra waar de nadruk niet zozeer ligt op strengheid als wel op het hanteren van wiskundige vaardigheden; de door ons verzorgde cursus daarentegen is heel sterk gericht op exactheid en correcte formulering, maar gaat voorbij aan toepassingen en routinevraagstukken. Deze opzet van het onderwijs in Eindhoven heeft tot gevolg, dat een boek dat niet meer zou bevatten dan hetgeen wij doceren niet bruikbaar zou zijn voor lezers die nog geen onderwijs in de meer technische aspecten van de wiskundige analyse hebben ontvangen. Ondermeer door het opnemen van zogenaamde herhalingsparagrafen hebben wij gepoogd dit bezwaar te ondervangen zonder overigens iets af te doen aan onze bedoeling een boek te schrijven niet over de toepassingen, maar over de opbouw van de reële en complexe analyse en over de daarvoor relevante delen van de verzamelingenleer, de algebra en de topologie.

Dit is een leerboek en geen leesboek; vraagstukken vormen een essentieel onderdeel van de tekst. De stijl weerspiegelt het feit, dat we geschreven hebben voor studenten van wie behalve de kennis ook de wiskundige rijpheid geacht wordt toe te nemen. De eerste hoofdstukken zijn zeer uitvoerig gesteld; later wordt de beschrijving bondiger. We raden iedere lezer met klem aan te beginnen met de sectie: handleiding voor de gebruiker.

Wij vermelden in dankbaarheid dat wij bij onze onderwijstaak door velen met adviezen en medewerking zijn bijgestaan; heel wat suggesties hebben bijgedragen tot dit boek. Ook is een gedeelte van de vraagstukken ontleend aan de Eindhovense instructie-collectie, die in de loop der jaren door een team van medewerkers is vergaard. Onze dank gaat ook uit naar diegenen die ons met het klaarmaken van het manuscript hebben geholpen: naar de heer E.J. Balder, wiens kritische opmerkingen tot verschillende verbeteringen aanleiding zijn geweest, naar mevrouw H.K. van der Putten-Bosscher, die het gehele manuscript met zorg heeft getypt, en naar de heer Th.W.J. Kock, die de figuren getekend heeft. Het stemt ons tot vreugde, dat de samenwerking van de uitgever, de firma Wolters-Noordhoff N.V. en de heer drs. H.J. Stomps het mogelijk gemaakt heeft, dat dit boek in een goedkope en toch behoorlijk verzorgde uitgave verkrijgbaar is.

Eindhoven, juni 1970

S.T.M. Ackermans; J.H. van Lint

VOORWOORD BIJ DE TWEEDE DRUK

Als wij, zoals in een voorwoord bij de tweede druk van een boek gebruikelijk is, willen wijzen op verschillen tussen deze editie en de vorige, dan vermelden wij er drie: verbetering van een vrij groot aantal drukfouten en onnauwkeurigheden; uitbreiding met een afdeling "gemengde opgaven" en een verandering van uitgever.

Al degenen die ons op onvolkomenheden in de tekst gewezen hebben zijn wij zeer erkentelijk. Ook zijn wij veel dank verschuldigd aan de stafleden van de Onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool te Eindhoven, die met ons het onderwijs in "Algebra en Analyse" verzorgen. De aan deze drük toegevoegde serie gemengde opgaven, die bijna uitsluitend uit Eindhovense examenopgaven bestaat, is grotendeels hun werk.

Tenslotte geeft het ons grote voldoening dat Academic Service en zijn directeur Drs. H.J. Stomps, die reeds bij het tot stand komen van de eerste druk zo'n belangrijke rol hebben gespeeld, thans de uitgave zelf ter hand hebben genomen.

Eindhoven, april 1976

S.T.M. Ackermans; J.H. van Lint

Inhoudsopgave

Handleiding voor de gebruiker

0.1. Indeling van het boek

Dit boek is bedoeld als een leerboek over de opbouw van de reële en complexe analyse en over de daarvoor relevante delen van de verzamelingenleer, de algebra en de topologie. Het bestaat uit acht hoofdstukken. In de hoofdstukken 1 en 2, geheten verzamelingen en afbeeldingen resp. relaties, wordt de lezer vertrouwd gemaakt met het hedendaagse wiskundige taalgebruik; hierbij moeten wij twee kanttekeningen maken. Hoewel begrippen uit de verzamelingenleer en ook uit de logica overal in dit boek gebruikt zullen worden, gebeurt dit uitsluitend als bouwstenen van de wiskundige taal; aan problemen van wiskundig grondslagenonderzoek zijn wij daarom bewust voorbijgegaan. Een tweede kanttekening is deze: eenieder die poogt de taalmiddelen die hij zal gaan gebruiken volledig te beschrijven, raakt verzeild in het dilemma tussen purisme en souplesse. Ons compromis tussen beide is bepaald door wat heden en naar wij verwachten zeker ook in de nabije toekomst in de wiskundige literatuur gangbaar is. Eén voorbeeld: in 1.17.5 wordt geworsteld met het vrij en gebonden voorkomen van veranderlijken, maar de door Church ingevoerde symboliek die hier volledig helderheid zou brengen wordt niet gebruikt. Hoofdstuk 3 geeft een inleiding in de algebra: (semi)groepen, ringen, lichamen en lineaire algebra. Na al deze voorbereidingen is de lezer in staat de exacte opbouw van het getalbegrip zoals in hoofdstuk 4 beschreven te appreciëren. Het vijfde hoofdstuk bevat een inleiding in een ander van de mathematische basisvakken waar de analyse op rust, namelijk de topologie, in het bijzonder de topologie van de metrische ruimten. Pas in hoofdstuk 6, differentieerbaarheid, komen onderwerpen aan de orde die onder de traditionele naam van de analyse namelijk infinitesimaalrekening vallen. Het differentiëren van complexe functies komt ook in hoofdstuk 6 aan de orde. De laatste twee hoofdstukken behandelen de integraalrekening.

In hoofdstuk 7 wordt de theorie der Riemann-integraal (en die van de Riemann-Stieltjes-integraal) behandeld; Lebesgue-integratie wordt niet besproken. Hoofdstuk 8 gaat over lijnintegralen in het complexe vlak en alles wat daarmede samenhangt. Het boek bevat tevens een eerste kennismaking met tal van min of meer zelfstandige deelgebieden van de analyse (voorbeelden: Fouriertheorie in § 7.8; differentiaalvergelijkingen in § 7.9), terwijl wij ook een aantal nogal ongebruikelijke onderwerpen hebben besproken (voorbeelden: Boole-algebra in § 3.12; de methode van Lehmer-Schur in § 8.5).

0.2. Voorkennis

Van de lezer wordt verwacht dat hij vertrouwd is met de grondbeginselen van de algebra, goniometrie en analytische meetkunde zoals die op de middelbare school onderwezen worden. Dat houdt ondermeer in, dat hij een intuïtief begrip heeft van de verzamelingen der natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen - wij noteren die met resp. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ - en liefst ook van de complexe getallen, $\mathbb{C}$. Nadat de lezer tot en met hoofdstuk 4 in dit boek is doorgedrongen kan hij het intuïtieve begrip van deze getallen vervangen door het dan streng ingevoerde getalbegrip. Men moet er zich wel goed van bewust zijn dat het intuïtieve begrip slechts gebruikt wordt in voorbeelden en *bij de opbouw van hoofdstuk 4* geen wezenlijke rol speelt!
We nemen ook aan dat de lezer vertrouwd is met het rekenen met machten, wortels en logarithmen; dat hij de goniometrische functies sin, cos en tan (waarbij het argument uitgedrukt wordt in radialen) kent; dat hij weet wat de cartesische coördinaten uit de analytische meetkunde zijn en dat hij enigszins vertrouwd is met begrippen als limiet, continuïteit en differentieerbaarheid - thans deel van de stof van het middelbaar onderwijs -, hoewel deze begrippen uiteraard nog uitvoerig aan de orde komen. Hetzelfde geldt voor het begrip *eindige verzameling*.
Zoals we in het voorwoord beschreven, zijn de colleges die voor ons aanleiding tot het schrijven van dit boek geweest zijn, de tweede ronde van een twee-rondensysteem. Toch menen we dat de lezer met slechts middelbare-schoolkennis als voorkennis, dit boek heel goed kan gebruiken om er de opbouw van de analyse, algebra enz. uit te leren. We hebben nl. alle nodige onderwerpen uit een eerste ronde opgenomen in zogenaamde herhalingsparagrafen. Mocht een lezer bij het maken van de vraagstukken uit deze herhalingsparagrafen in ernstige moeilijkheden geraken, dan moeten wij hem adviseren een uitvoeriger boek ter hand te nemen. Zeer geschikt voor dit doel is: G.R. Veldkamp, Inleiding tot de analyse, Wolters-Noordhoff N.V. Groningen

1957. In de bibliografie vermelden wij nog verscheidene andere uitstekende boeken over analyse. De toepassingen van de analyse worden in dit boek niet behandeld. Tenslotte dient een lezer de volgende notaties te kennen: $\mathbb{R}^2$, ($\mathbb{R}^3$) voor de geordende paren (tripels) van reële getallen, zoals gebruikt als coördinaten in de analytische meetkunde; $\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\prod_{\ell=1}^{m} b_\ell$ voor resp. $a_1+a_2+\ldots+a_n$, $b_1 b_2 \cdots b_m$.

0.3. Het bestuderen van één wiskundeboek

Men moet duidelijk twee dingen onderscheiden: het verwerven van wiskundige inzichten en het vastleggen daarvan. Over de wijze van het tot stand komen van wiskundige kennis bestaat weinig zekerheid; het is een studie-object voor psychologen. Een wiskundeboek, ook een leerboek, geeft vastgelegde wiskundige kennis; de gebruiker moet zich zelf de beschreven inzichten eigen maken. De ervaring heeft geleerd, dat het middel bij uitstek om dit te doen is het maken van vraagstukken, waarvan wij er vele honderden, verstrooid tussen de tekst en verzameld in aparte paragrafen hebben opgenomen. Een lezer die alle vraagstukken overslaat, maakt een slecht gebruik van dit boek en zal er niet veel uit leren. Een gebruiker heeft pas de zekerheid dat hij het aangeboden materiaal werkelijk beheerst, indien hij het merendeel der vraagstukken zonder moeite kan maken. Maar meer nog dan als controle op begrip bieden wij de vraagstukken aan als echte oefenstof, d.w.z. dat men nadenkend over de opgaven de er op betrekking hebbende theorie gaat doorzien.
Achter in dit boek vindt men een afdeling met commentaar bij de vraagstukken, waarin over het merendeel van de vraagstukken iets gezegd wordt. Een verstandig gebruik van deze afdeling is het volgende: lukt het maken van een vraagstuk, kijk dan naar het gegeven commentaar ter controle; lukt het niet, kijk dan of het gegeven commentaar een aanwijzing bevat *en probeer het vraagstuk opnieuw*.

0.4. Verwijzingen

Alle items (stellingen, definities, opgaven, enz.) in dit boek hebben drie nummers; verwijzing geschiedt steeds door vermelding van alle drie de nummers. Achter in het boek geven wij in de bibliografie een aantal aanbevolen boeken; verwijzing naar één van deze in de tekst geschiedt door het nummer van de titel tussen vierkante haken, [ ], eventueel gevolgd door het hoofdstuk of de paragraaf van het geciteerde boek.

De lijst van symbolen en het register zijn er voor het gemak van het terugzoeken!

Wij wensen de gebruiker een vruchtbare studie!

Voor alle op- en aanmerkingen houden wij ons ten zeerste aanbevolen.

1 Verzamelingen en afbeeldingen

1.1. Inleiding; definities en bewijzen

1.1.1. Het doel van dit eerste hoofdstuk is de lezer vertrouwd te maken met een aantal begrippen en notaties uit de verzamelingenleer en de symbolische logica. Het is thans algemeen gebruik voor het vastleggen van wiskundige inzichten de terminologie van de verzamelingenleer te benutten. Altijd hebben wiskundigen het als een belangrijk deel van hun taak beschouwd, om hun wiskundige inzichten zo te beschrijven dat de hoogst mogelijke graad van zekerheid en duidelijkheid gewaarborgd wordt. Wât men nu precies de hoogst mogelijke zekerheid noemt, is een filosofische vraag; de waarde die men toekent aan door ervaring verkregen inzichten speelt bij de beantwoording een belangrijke rol. Wij zullen ons met deze vraag niet diepgaand bezighouden. We volstaan met de constatering dat de eigentijdse beantwoording van deze vraag geleid heeft tot het wijdverspreide gebruik van de begrippen en notaties uit dit hoofdstuk.

1.1.2. Eén naieve misvatting moeten we kort nader beschouwen, en wel de misvatting dat men de hoogst mogelijke zekerheid bij het vastleggen van kennis zou kunnen verkrijgen door elke gebruikte uitdrukking te verklaren, elke bewering te bewijzen. Bij nadere beschouwing blijkt dit principieel onmogelijk. Immers om een uitdrukking of begrip te verklaren heeft men andere uitdrukkingen en begrippen nodig die al aan de lezer bekend zijn. Deze moeten dus in een eerder stadium van het betoog verklaard zijn. Maar ook daar waren voor de verklaring van de gebruikte begrippen eerder verklaarde begrippen nodig; enzovoort. Met beweringen is het al net zo gesteld: voor het bewijs van een bewering moet men gebruik maken van eerder bewezen beweringen; enzovoort. De lezer die vertrouwd is met de vlakke meetkunde weet welke vorm men aan een wiskundige theorie geeft om niet in de bovengeschetste nimmer eindigende teruggang van steeds eerder verklaarde begrippen en eerder bewezen beweringen te geraken. Als uitgangspunt neemt men een klein aantal tot de vast te leggen theorie behorende begrippen die onmiddellijk begrijpelijk schijnen (bijv. punt, lijn, evenwijdigheid, ... in de meetkunde). Deze begrippen worden zonder verklaring gebruikt. Men noemt ze de ongedefinieerde of primitieve begrippen (de logici spreken ook wel van "primitieve termen") van de theorie. Tegelijk met het aangeven van de primitieve begrippen aanvaardt men de verplichting van elk ander begrip de betekenis vast te leggen met behulp van de primitieve begrippen en reeds "eerder" in de theorie verklaarde begrippen. De zin die de betekenis van een begrip vastlegt heet de *definitie* van dat begrip. Op soortgelijke wijze gaat men te werk bij beweringen. Een aantal min of meer evident lijkende beweringen over de primitieve begrippen wordt zonder bewijs als waar aangenomen. Men noemt ze *axioma's* of postulaten. Alle andere beweringen moeten bewezen worden met behulp van "eerder" bewezen beweringen en axioma's. Later heeft men ingezien, dat de wiskundige een zekere vrijheid heeft in de keuze van zijn axiomastelsel en dat evidentie zeker niet het enige criterium is. (Zie bijv. 2.6.1.) We zullen ons nu echter niet bezig houden met axiomastelsels. Men begrijpt wel dat men aan een axiomastelsel zekere eisen moet stellen, bijv. dat het geen tegenspraak bevat. De meeste stukken wiskundige theorie vangen niet bij de axioma's en primitieve begrippen aan; ze berusten zelf weer op andere theorieën. Zo gaat aan de analyse de theorie van het reële getal vooraf. De processen die men in de wiskunde op ieder niveau voortdurend bedrijft zijn: definiëren en bewijzen. Men moet zich goed realiseren dat definities en bewijzen een analoge rol spelen bij de opbouw van een wiskundige theorie. Het is gebruikelijk bij het wiskunde-onderwijs veel aandacht te besteden aan het geven van bewijzen. Iedereen weet dat bewijzen volledig dienen te zijn en van het te bewijzene niet verkapt al gebruik mogen maken (vicieuze cirkel bij het bewijzen). Het is goed dat men zich bewust is dat dezelfde eisen voor definities gelden: de definitie moet zijn een volledige verklaring van het te definiëren begrip met behulp van uitdrukkingen waarvan de betekenis onafhankelijk van het te definiëren begrip vastligt. Een vicieuze cirkel bij het definiëren is even ernstig als een vicieuze cirkel in het bewijs van een stelling. Het is van belang dat de zinnen die een nieuw begrip definiëren als zodanig kenbaar zijn. Dit kan gebeuren door ze vooraf te laten gaan door het woord: "definitie", maar ook door het gebruik van zinswendingen als: "we zeggen dat ..."; "een ... heet ..."; "... noemen we ...". Een notatie die we zullen gebruiken indien een gelijkteken gebruikt wordt om een nieuw begrip te definiëren is " := ", waarbij men het nieuw te definiëren begrip aan de kant van de dubbele punt plaatst en de uitdrukking waarvan de betekenis al bekend is aan de andere zijde van het gelijkteken. Zo zou men met $5^{\frac{1}{2}} := \sqrt{5}$ de uitdrukking $5^{\frac{1}{2}}$ definiëren op een moment dat $\sqrt{5}$ al bekend is. (Voor een ruimere opvatting van het begrip definitie zie 1.27.15).

1.2. Verzamelingen

1.2.1. In de verzamelingenleer treden de begrippen "verzameling" en "is element van" op als primitieve begrippen. We moeten dus aannemen dat ze intuïtief aan de lezer bekend zijn. We beperken ons niet tot verzamelingen van wiskundige objecten; niet alleen **N**, **Z**, **Q**, **R** en de verzameling van de punten in het Euclidische vlak zijn voorbeelden van verzamelingen, maar eveneens: de verzameling van de inwoners van Europa, of van de trefwoorden in het Groot Woordenboek der Nederlandse Taal. De grondlegger van de verzamelingenleer Georg Cantor (1845-1918) omschreef een verzameling als: "Eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen." Uit deze formulering kan iemand die nog helemaal niets weet beslist niet leren wat een verzameling is, evenmin als iemand die niet weet wat een punt is veel geholpen wordt door Euclides' begripsbepaling: "een punt is, wat geen deel heeft".
Eén uiterst belangrijk kenmerk van verzamelingen belichten we nadrukkelijk: verzamelingen zijn volkomen gekarakteriseerd door hun elementen en niet door hun beschrijving. Zo is er geen verschil tussen: "de verzameling der getallen 2, 3, 5 en 7" en "de verzameling van de priemgetallen die kleiner dan of gelijk aan 10 zijn". Herhalingen in de opsomming van de elementen zijn voorbeelden van verschillende beschrijvingen van dezelfde verzamelingen: de verzameling bestaande uit 2, 2, 2 en 3 is dezelfde als de verzameling bestaande uit 2 en 3.

1.2.2. De volgende notaties worden overal gebruikt: $a \in V$ voor "a is een element van V"; $a \notin V$ voor "a is niet een element van V". In plaats van: "a is een element van V" zegt men ook wel: "a ligt in V"; "a behoort tot V". Een van de methoden om verzamelingen aan te geven is: tussen accolades alle elementen opschrijven, gescheiden door komma's. Zo stellen $\{1,2,3\} = \{3,1,3,2\}$ en $\{\{1\},1\}$ verzamelingen voor. We zullen verzamelingen vaak met letters aangeven. Bij voorkeur kiezen we hiervoor Latijnse hoofdletters.

1.2.3. Cantor's verzamelingenleer is vanwege een aantal filosofische en logische moeilijkheden die er uitvloeiden aanleiding geweest tot een bijzonder snelle ontwikkeling van het grondslagenonderzoek der wiskunde. In dit boek zullen wij bewust voorbijgaan aan alle vragen van wijsgerige aard. We zullen de grondslagenmoeilijkheden van de verzamelingenleer gewoon negeren, met een vakterm: wij zullen naieve verzamelingenleer bedrijven (zie [11],[12]). Ook op het naieve standpunt zal onze behandeling niet axiomatisch zijn: behalve naief is onze behandeling ook intuïtief.

1.3. Inclusie

1.3.1. DEFINITIE. *Laat* A *en* B *verzamelingen zijn.* A *heet een deelverzameling van* B *(notatie* $A \subset B$; $\subset$ *heet het inclusiesymbool) indien ieder element van* A *ook een element van* B *is.*

In het bijzonder is dus voor iedere verzameling A: $A \subset A$. Is $A \subset B$ en $A \neq B$ dan noemen we A een *echte* deelverzameling van B. A is geen deelverzameling van B noteren we als $A \not\subset B$. Uit $A \not\subset B$ concluderen we dus dat A ten minste één element bevat, dat niet tevens element van B is. $B \supset A$ betekent hetzelfde als $A \subset B$.

1.3.2. Het zal blijken dat veel formules een stuk eenvoudiger worden als we ook beschouwen de verzameling die geen enkel element bevat; deze wordt de *lege verzameling* genoemd; we noteren deze met $\emptyset$.

1.3.3. DEFINITIE. *Is* A *een verzameling dan noemt men de verzameling van alle deelverzamelingen van* A, *de machtsverzameling van* A *(notatie* $P(A)$*).*

We hebben dus: $A \in P(A)$; als $B \subset A$, dan $B \in P(A)$.

1.4. Eigenschappen. We zullen in dit hoofdstuk vele eigenschappen moeten vermelden, die niet de aanduiding stelling verdienen. We geven slechts af en toe bewijzen; de ontbrekende bewijzen zal de lezer zelf zonder veel moeite kunnen geven.

1.4.1. Is $A \subset B$ en $B \subset C$, dan is ook $A \subset C$.
Bewijs. Laat $a \in A$, dan is $a \in B$ omdat $A \subset B$. Verder is dan ook $a \in C$ omdat $a \in B$ en $B \subset C$. Daar $a \in A$ willekeurig is,

geldt bovenstaande redenering voor ieder element van A; dus $A \subset C$.

1.4.2. Is $A \subset B$ en $B \subset A$, dan is $A=B$. Vaak bewijst men dat twee verzamelingen A en B gelijk zijn, door eerst te laten zien dat $A \subset B$ en vervolgens dat $B \subset A$.

1.4.3. Voor iedere verzameling A geldt $\emptyset \subset A$ en dus ook $\emptyset \in P(A)$.

1.4.4. Is U een verzameling, $a \in U$, $A \subset U$, dan is precies één van de beide beweringen $a \in A$ en $a \notin A$ waar.

1.5. Voorbeelden

Wezenlijk voor de verzamelingenleer is het onderscheid tussen verzameling en element. Verwar nooit $\subset$ en $\in$; $\{a\}$ en a. De voorbeelden 1.5.1, 1.5.2 en 1.5.3 illustreren dit onderscheid.

1.5.1. $1 \in \{1,2,3\}$ maar $\{1\} \subset \{1,2,3\}$.

1.5.2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ (denk aan 1.4.3).

1.5.3. Als $F:=\{S,T\}$; $S:=\{a,b,c,d\}$, $T:=\{a,c,e\}$, dan zijn de volgende beweringen waar: $a \in S$; $\{a,c\} \subset S$; $\{a,c\} \subset T$; $\{S\} \subset F$; $S \in F$; $S \not\subset T$; $T \not\subset S$ (F is een "federatie" waarvan de "clubs" S en T "lid" zijn). Niet waar zijn de volgende beweringen: $a \in F$, $\{a,c\} \subset F$; $S \subset F$.

1.5.4. $\{1,2,3\} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ en al deze inclusies zijn echt.

1.5.5. Alle deelverzamelingen van de verzameling $\{B,L,N\}$ zijn: $\emptyset, \{B\}, \{L\}$ $\{N\}, \{L,N\}, \{B,N\}, \{B,L\}, \{B,N,L\}$.

1.6. Opgaven over het begrip verzameling

1.6.1. Welke van de volgende verzamelingen zijn aan elkaar gelijk? $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$.

1.6.2. Heeft iedere verzameling een echte deelverzameling?

1.6.3. Hoeveel elementen heeft de verzameling $\{\emptyset,\{\emptyset\},\emptyset\}$?

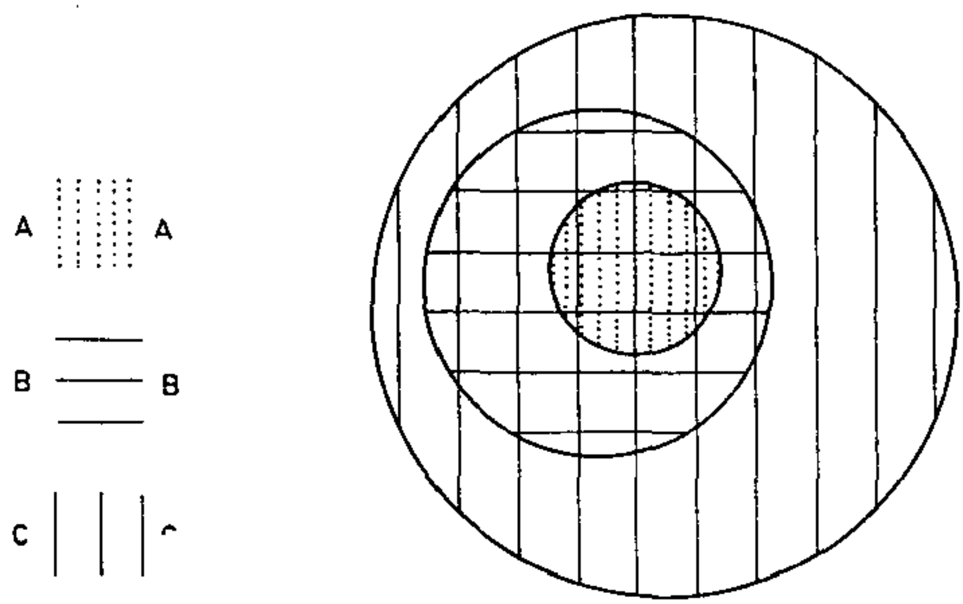
1.6.4. Zij $A:=\{\{1\},\{2,3\}\}$. Ga na welke van de volgende beweringen juist zijn: $1 \in A$; $\{1\} \subset A$; $\{2,3\} \subset A$; $\{\{2,3\}\} \subset A$.

1.6.5. $V:=\{0,\{1,2\}\}$. Bepaal alle deelverzamelingen van V; deze vormen een verzameling W, bepaal alle deelverzamelingen van W.

1.6.6. Hoeveel verschillende deelverzamelingen heeft een verzameling met n elementen?

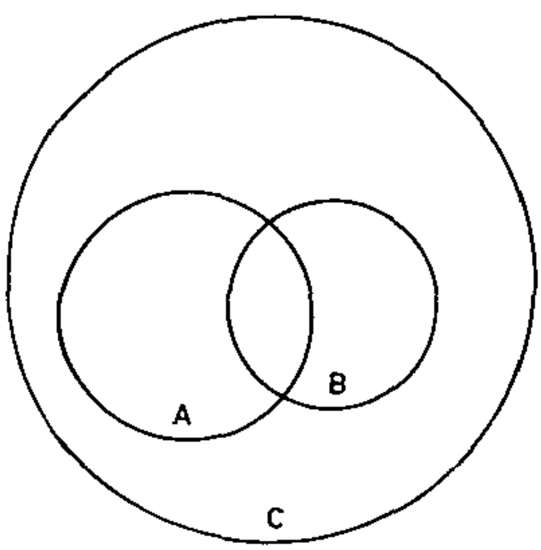
1.7. Venn-diagrammen

Men illustreert verzamelingstheoretische beweringen vaak met z.g. Venn-diagrammen. Dit is een voorstellingswijze waarbij men doet alsof alle optredende verzamelingen deelverzamelingen zijn van het blad papier. Venn-diagrammen zijn geen bewijzen. Bij eigenschap 1.4.1 zou figuur 1 als illustratie kunnen dienen.



Figuur 1

Meestal laat men het merendeel der arceringen weg. A wordt dan voorgesteld door het inwendige van de gesloten kromme waar A bij staat. De bewering: "Als $A \subset C$ en $B \subset C$ dan is $A \subset B$ of $B \subset A$" is niet voor alle verzamelingen A,B,C waar.



Figuur 2

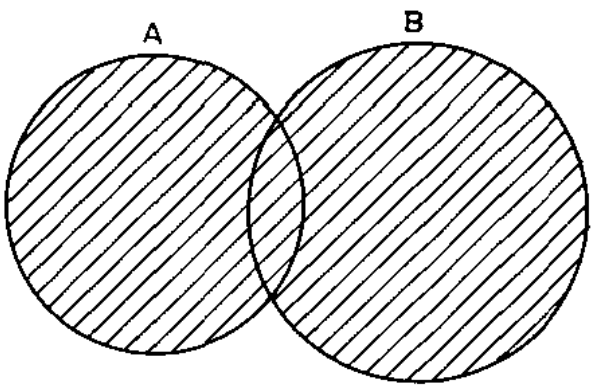
De verzamelingen uit fig.2 stellen een tegenvoorbeeld voor.

Een ander tegenvoorbeeld is: $A:=\{1,2\}$, $B:=\{2,3\}$, $C:=\{1,2,3\}$.

1.8. Vereniging

1.8.1. DEFINITIE. *De vereniging van de verzamelingen van* A *en* B *(notatie* $A\cup B$*) is de verzameling die als elementen heeft de elementen van* A *en de elementen van* B.

In het Venn-diagram van figuur 3 geeft de arcering de vereniging $A\cup B$ aan.



Figuur 3

Voorbeelden van vereniging zijn: $\mathbf{Z}\cup\mathbf{N}=\mathbf{Z}$; $\{1,2,3,4,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$.
De bewering $c\in A\cup B$ betekent dus $c\in A$ *of* $c\in B$. "Of" is hier gebruikt in niet uitsluitende zin: het kan zijn dat c element van A is en tevens element van B. In de omgangstaal gebruikt men "of" zowel in uitsluitende zin ("het kan vriezen of dooien") als in niet-uitsluitende zin ("als het regent of stormt fiets ik niet").

EIGENSCHAPPEN

De lezer tekene Venn-diagrammen.

1.8.2. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $A\subset(A\cup B)$; $B\subset(A\cup B)$.

1.8.3. Als $A\subset B$, dan is $A\cup B=B$.
Bewijs. Wegens 1.8.2 is $B\subset(A\cup B)$. We bewijzen nu $(A\cup B)\subset B$. Laat $c\in A\cup B$, dan is $c\in A$ of $c\in B$. Indien echter $c\in A$ dan is wegens $A\subset B$ ook $c\in B$. In elk geval is dus $c\in B$. Daar c willekeurig is, is $(A\cup B)\subset B$. Wegens 1.4.2 is $A\cup B=B$.

1.8.4. (Bijzonder geval van 1.8.3). Voor elke verzameling A geldt: $A\cup A=A$.

1.8.5. Omdat een verzameling volkomen bepaald is door de elementen die hij bevat geldt voor alle A en B: $A \cup B = B \cup A$ (we noemen deze eigenschap de *commutativiteit* van de verenigingsvorming).

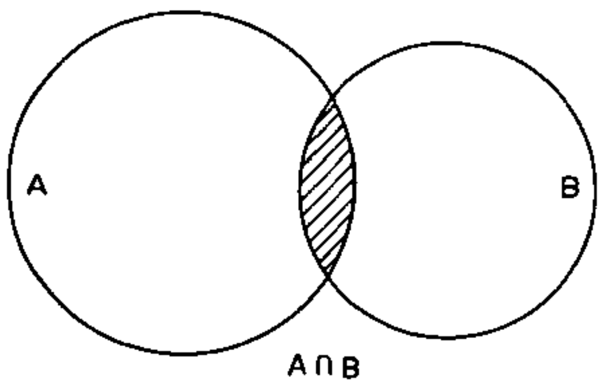
1.8.6. Voor alle A geldt: $A \cup \emptyset = A$.

1.8.7. Voor alle A, B en C geldt: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (dit noemen we de *associativiteit* van de verenigingsvorming). Op grond van de associativiteit kunnen we zonder gevaar voor verwarring definiëren $A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Evenzo $A \cup B \cup C \cup D$, enz.

1.9. Doorsnede

1.9.1. DEFINITIE. *De doorsnede van de verzamelingen* A *en* B (*notatie* $A \cap B$) *is de verzameling bestaande uit de elementen die zowel element van* A *als element van* B *zijn.*

In figuur 4 is de doorsnede van A en B gearceerd.

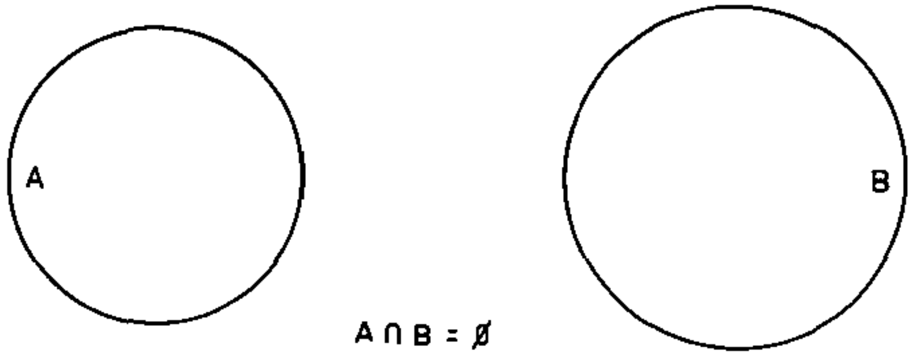


Figuur 4

Voorbeelden van doorsneden zijn: $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}$; $\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\} = \{2,4\}$. De bewering $c \in A \cap B$ betekent dus $c \in A$ én $c \in B$. De invoering van het begrip doorsnede is een voorbeeld van het nut dat het gebruiken van $\emptyset$ heeft. Voor alle verzamelingen A en B is $A \cap B$ een verzameling, ook indien A en B geen elementen gemeenschappelijk hebben. We mogen daarom $A \cap B$ opschrijven zonder vooraf te verifiëren of A en B elementen gemeenschappelijk hebben.

1.9.2. DEFINITIE. *Als* $A \cap B = \emptyset$ *dan zegt men dat* A *en* B *disjunct zijn (zie figuur* 5*).*

EIGENSCHAPPEN
De eigenschappen 1.9.3 - 1.9.8 zijn analoog aan 1.8.2 - 1.8.7.



Figuur 5

1.9.3. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$.

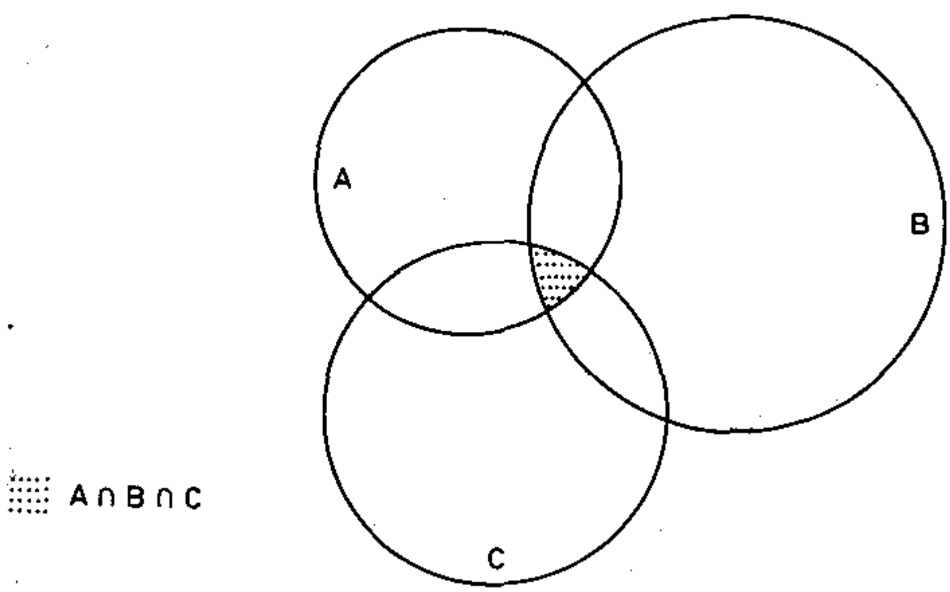
1.9.4. Als $A \subset B$, dan is $A \cap B = A$.

1.9.5. (Bijzonder geval van 1.9.4.) Voor elke verzameling A geldt: $A \cap A = A$.

1.9.6. Doorsnedevorming is commutatief: $A \cap B = B \cap A$ voor alle verzamelingen A en B.

1.9.7. Voor alle A geldt: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.9.8. Doorsnedevorming is associatief: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ voor alle verzamelingen A, B en C. Associativiteit ontneemt het gevaar voor verwarring aan de definitie $A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C$ (zie figuur 6).

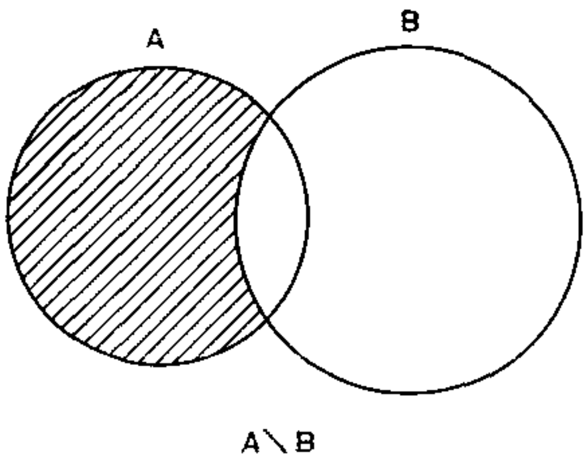


Figuur 6

1.10. Verschil

1.10.1. DEFINITIE. *Het verschil van de verzamelingen* A *en* B (*notatie* A\B) *is de verzameling die als elementen heeft die elementen van* A, *die niet tevens element van* B *zijn.*

In het Venn-diagram van figuur 7 geeft de arcering het verschil A\B aan.



Figuur 7

Voorbeelden van verschilvorming zijn $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ =de verzameling bestaande uit 0 en de negatieve gehele getallen; $\mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}=\emptyset$; $\{1,2,3,4,5\}\setminus\{2,4,6\}=\{1,3,5\}$. De bewering $c\in A\setminus B$ betekent dus $c\in A$ én $c\notin B$. Ook van verschilvorming sommen we een aantal eigenschappen op

EIGENSCHAPPEN

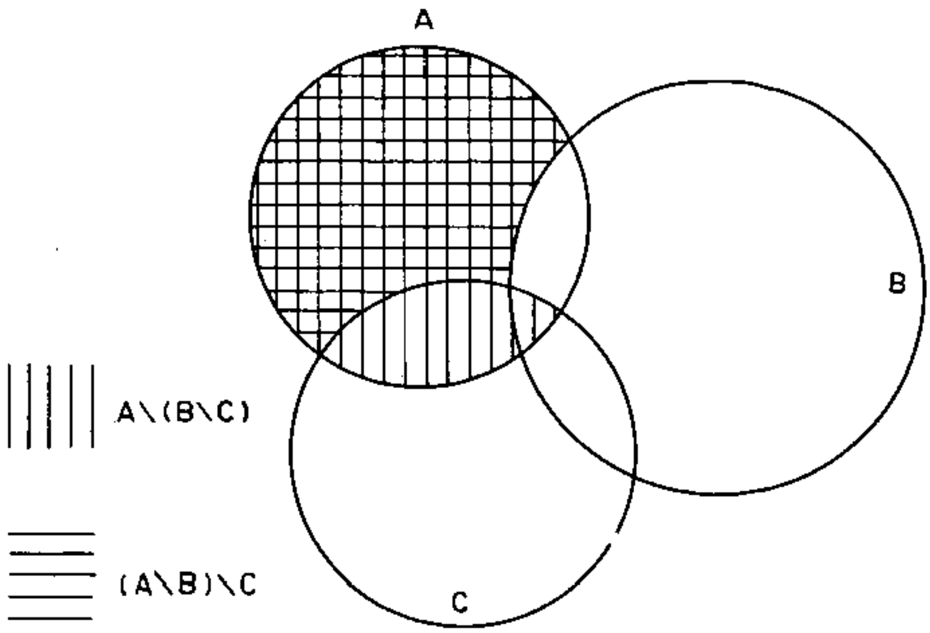
1.10.2. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $(A\setminus B)\subset A$; $(A\setminus B)\cap B=\emptyset$.

1.10.3. Als $A\subset B$ dan is $A\setminus B=\emptyset$.

1.10.4. (Bijzonder geval van 1.10.3.) Voor elke verzameling A geldt: $A\setminus A=\emptyset$.

1.10.5. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $A=(A\setminus B)\cup$ $\cup(A\cap B)$.

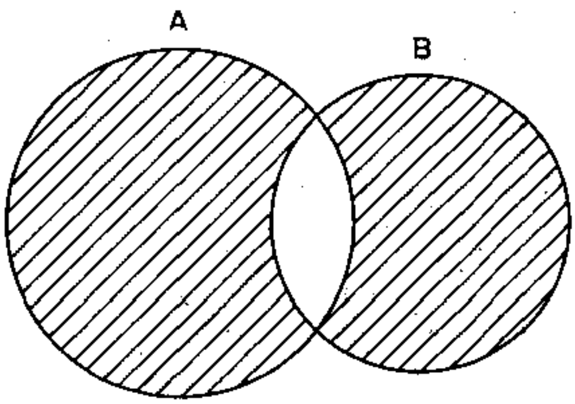
1.10.6. OPMERKING. Verschilvorming is niet associatief; dat wil zeggen dat de verzamelingen $(A\setminus B)\setminus C$ en $A\setminus(B\setminus C)$ in het algemeen niet gelijk zijn. Als voorbeeld nemen we de verzamelingen uit figuur 8. Een ander voorbeeld: $A:=\{0,1,2\}$; $B:=\{-2,-1,0\}$; $C:=\{-1,0,1\}$. Nu $A\setminus B=\{1,2\}$; $(A\setminus B)\setminus C=\{2\}$; $B\setminus C=\{-2\}$; $A\setminus(B\setminus C)=A$.



Figuur 8

1.10.7. DEFINITIE. *Het symmetrisch verschil van de verzamelingen* A *en* B *(notatie* $A \div B$*) is de verzameling die bestaat uit de elementen die wel tot* A *en niet tot* B *behoren en de elementen die wel tot* B *en niet tot* A *behoren.*

In figuur 9 is $A \div B$ gearceerd.



$A \div B$

Figuur 9

Voorbeelden van symmetrische verschillen: $\mathbb{Z} \div \mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\{1,2,3,4,5\} \div \{2,4,6\} = \{1,3,5,6\}$.
Met behulp van het wel uitsluitende "óf" (zie 1.8.1) kan men dus zeggen: $c \in A \div B$ betekent: óf $c \in A$, óf $c \in B$, maar niet beide.

EIGENSCHAPPEN

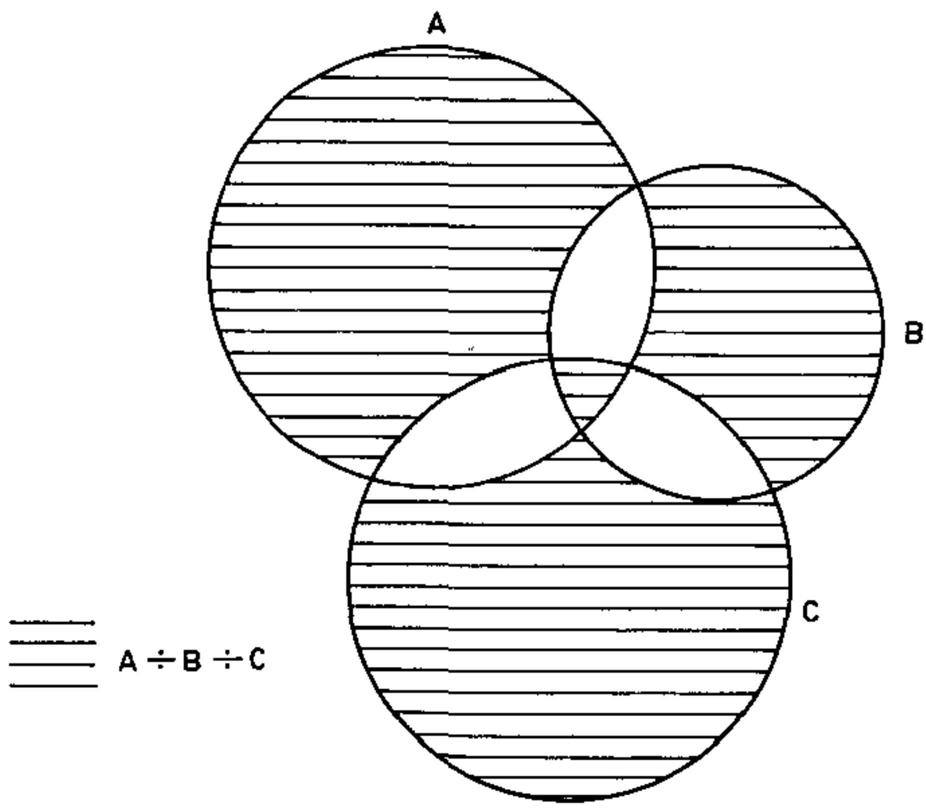
1.10.8. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.10.9. Als $A \subset B$ dan is $A \div B = B \setminus A$.

1.10.10. (Bijzonder geval van 1.10.9.) Voor elke verzameling A geldt: $A \div A = \emptyset$.

1.10.11. Het symmetrische verschil is commutatief: $A \div B = B \div A$ voor alle verzamelingen A en B.

1.10.12. Het symmetrische verschil is associatief: $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$ voor alle verzamelingen A, B en C. We definiëren: $A \div B \div C := (A \div B) \div C$ (zie figuur 10).



Figuur 10

1.11. We vermelden enige eigenschappen, die telkens meerdere van de bewerkingen $\cap$, $\cup$ en $\setminus$ bevatten. Voor alle verzamelingen A, B en C geldt:

1.11.1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

1.11.2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

1.11.3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, 1.11.4. $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

De bekende eigenschap uit de rekenkunde dat voor getallen a, b en c geldt $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ drukt men wel uit door te zeggen dat de bewerking vermenigvuldiging *distributief* is ten opzichte van de bewerking optelling; evenzo verwoordt men 1.11.1 door te zeggen: doorsnedevorming is distributief ten opzichte van verenigingsvorming. Eigenschap 1.11.2 is dan de distributiviteit van de verenigingsvorming ten opzichte van de doorsnedevorming.

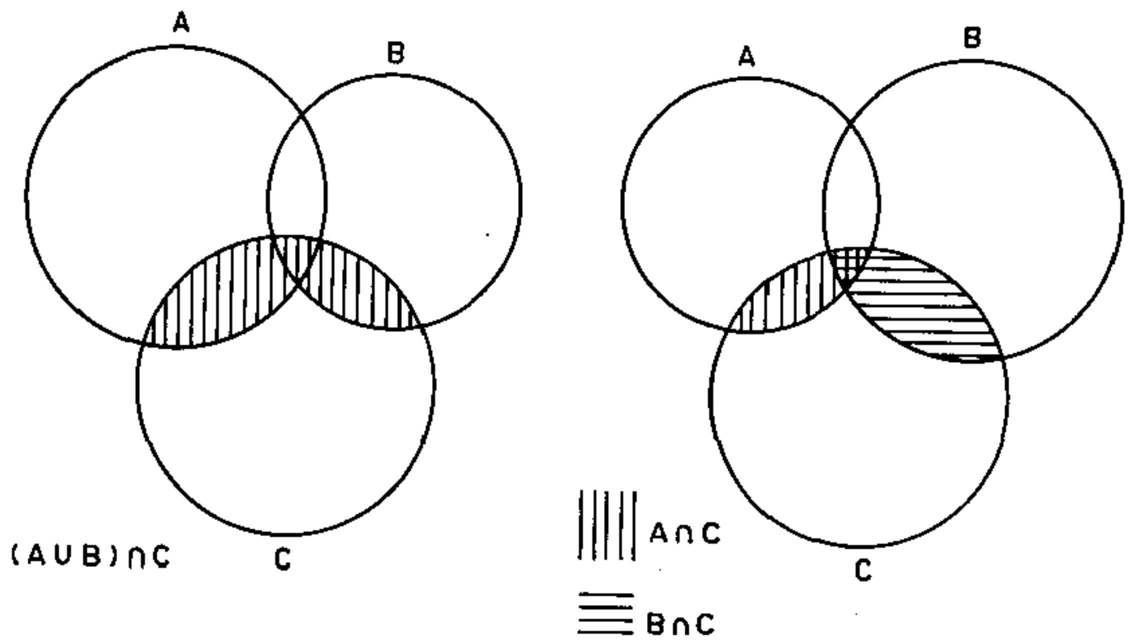
1.11.5. Van het bewijs van 1.11.1 (zie figuur 11) zullen we slechts laten zien dat

(*) $((A\cup B)\cap C) \subset ((A\cap C)\cup(B\cap C))$.

Er ontbreekt dan nog het bewijs van de inclusie

(**) $((A\cap C)\cup(B\cap C)) \subset ((A\cup B)\cap C)$,

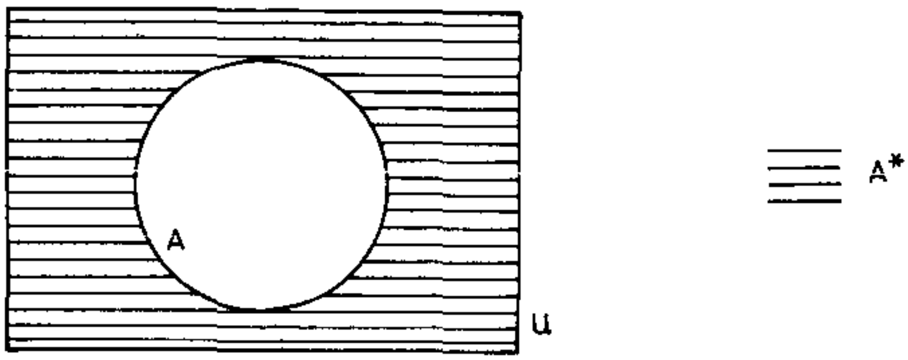
dat we aan de lezer overlaten.



Figuur 11

Bewijs van (*). Laat $a\in(A\cup B)\cap C$, dan is $a\in(A\cup B)$ en $a\in C$. Omdat $a\in(A\cup B)$ is $a\in A$ of $a\in B$; maar omdat tevens $a\in C$ is, is $a\in(A\cap C)$ indien $a\in A$ en $a\in(B\cap C)$ indien $a\in B$. Minstens één van de beide beweringen $a\in(A\cap C)$ en $a\in(B\cap C)$ is dus waar; derhalve $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. Deze redenering geldt voor elk element van $(A\cup B)\cap C$; derhalve is (*) bewezen.
De lezer producere zelf Venn-diagrammen en bewijzen van de overige eigenschappen.

1.11.6. DEFINITIE. *Zijn in een beschouwing alle voorkomende verzamelingen deelverzameling van een vaste verzameling* U *dan noemt men het verschil* $U\backslash A$ *ook wel: het complement van* A *(notatie* A^**) (soms spreekt men ook van het complement van* A *ten opzichte van* U*).* U *noemt men het universum.*



Figuur 12

EIGENSCHAPPEN van complementvorming: (alle verzamelingen zijn deelverzamelingen van U).

1.11.7. Voor elke verzameling A geldt: $A\cup A^*=U$; $A\cap A^*=\emptyset$.

1.11.8. Voor alle verzamelingen B en C geldt: $B\backslash C=B\cap C^*$.

1.11.9. Voor elke verzameling A geldt: $(A^*)^*=A$.

1.11.10. $B\subset C$ dan en slechts dan indien $B^*\supset C^*$.

1.11.11. Voor alle verzamelingen B en C geldt:

$$(B\cup C)^*=B^*\cap C^*,$$

1.11.12. en ook: $(B\cap C)^*=B^*\cup C^*$.

De eigenschappen 1.11.11 en 1.11.12 staan bekend als de dualiteitswetten van de Morgan (1806-1878); ze volgen uit 1.11.3 en 1.11.4 door A=U te nemen; 1.11.10 drukt de dualiteit van $\subset$ en $\supset$ uit. Het door 1.11.9 t/m 1.11.12 uitgedrukte *dualiteitsbeginsel* betekent dat vele eigenschappen van de vorm "voor alle verzamelingen A, B, ... geldt: ..." steeds in paren voorkomen, waarbij de tweede van het paar ontstaat uit de eerste indien men $\subset$ vervangt door $\supset$, $\supset$ door $\subset$, $\cup$ door $\cap$, $\cap$ door $\cup$. Het betekent ook dat de afleiding van de tweede van het paar uit de eerste kan gebeuren door complementvormingen en toepassing van 1.11.9, 1.11.10, 1.11.11 en 1.11.12. We lichten dit toe aan een voorbeeld: 1.8.2 en 1.9.3 zijn duaal. We leiden 1.9.3 - althans de eerste van de beide inclusies - af uit 1.8.2. Laat A en B gegeven verzamelingen zijn. Uit 1.8.2 volgt nu $A^*\subset(A^*\cup B^*)$, immers de inclusie in 1.8.2 geldt voor alle verzamelingen en dus ook voor A^* en B^*. Uit 1.11.10 volgt nu $(A^*)^*\supset(A^*\cup B^*)^*$; met 1.11.9 wordt dit $A\supset(A^*\cup B^*)^*$; dus $A\supset((A^*)^*\cap(B^*)^*)$ wegens 1.11.11; derhalve $A\supset(A\cap B)$ weer op grond van 1.11.9. Daar A en B willekeurig zijn volgt 1.9.3.

1.11.13. EIGENSCHAP. Voor alle A en B geldt: $A\div B=A^*\div B^*$.

1.11.14. WAARSCHUWING. De lezer die een boek over verzamelingenleer raadpleegt, moet er op bedacht zijn dat er geen eensgezindheid bestaat in het gebruik van de verzamelingstheoretische symbolen. Zo ziet men in plaats van $A\cup B$ ook wel $A+B$; in plaats van $A\cap B$ ook wel AB; in plaats van $A\backslash B$ ook wel $A-B$; in plaats van $A\div B$ ook wel $A\Delta B$ of $A+B$; in plaats van A^* ook A', of $\complement(A)$. Soms ook gebruikt men de beide verenigingssymbolen $\cup$ en $+$ naast elkaar in dezelfde betekenis, waarbij men $+$ alleen gebruikt voor de vereniging van verzamelingen waarvan men weet dat ze disjunct zijn.

1.12. Opgaven over de verzamelingstheoretische bewerkingen

1.12.1. Zijn de volgende beweringen waar voor ieder drietal verzamelingen A, B, C; zo neen, geef een tegenvoorbeeld.

(a) $A \subset ((A\cap B)\cup C)$.

(b) $(A\cup B)\cap C = (A\cap B)\cup C$.

(c) $(A\backslash B)\cap C = (A\cap C)\backslash(B\cap C)$.

1.12.2. Zij $A:=\{1,2,3,4\}$; $B:=\{2,3,5,6\}$; $C:=\{3,4,6,7\}$. Schrijf van elk van de volgende verzamelingen alle elementen op.

(a) $C\backslash((A\cup B)\backslash(A\cap B))$.

(b) $C\cap(A\cup B)$.

(c) $(A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C)$.

(d) $A\div B\div C$.

1.12.3. Bewijs de volgende eigenschappen (teken Venndiagrammen).

(a) Als $A\subset B$, dan is $(A\cup C)\subset(B\cup C)$ en $(A\cap C)\subset(B\cap C)$.

(b) Als $A\subset C$ en $B\subset C$, dan is $(A\cup B)\subset C$.

(c) Als $C\subset A$ en $C\subset B$, dan is $C\subset(A\cap B)$.

(d) Als $A\cup B=A\cap B$, dan is $A=B$.

1.12.4. Bewijs dat voor ieder tweetal verzamelingen geldt:

(a) Als $A\cup B=B$, dan is $A\subset B$,

(b) Als $A\cap B=A$, dan is $A\subset B$,

(c) $A\backslash(B\backslash A)=A$,

(d) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$,

(e) $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$,

(f) Als $A\div B=A$, dan is $B=\emptyset$,

(g) Als $A\div B=\emptyset$, dan is $A=B$.

1.12.5. Bewijs dat van de volgende paren eigenschappen de tweede uit de eerste afgeleid kan worden door complementvormingen ten opzichte van een verzameling U waarvan alle voorkomende verzamelingen deel zijn en toepassing van 1.11.9 t/m 1.11.12.

(a) 1.8.3 en 1.9.4.

(b) 1.8.5 en 1.9.6.

(c) 1.8.7 en 1.9.8.

(d) 1.11.1 en 1.11.2.

(e) 1.12.3 (b) en 1.12.3 (c).

1.12.6. Zij $n\in\mathbf{N}$; $A_1,A_2,\ldots,A_n$ een n-tal verzamelingen.

(a) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ bestaat uit alle elementen die element zijn van minstens één van de verzamelingen $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Bewijs dit.

(b) $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$ bestaat uit alle elementen die element zijn van alle verzamelingen $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Bewijs dit.

(c) $A_1\div A_2\div\ldots\div A_n$ bestaat uit alle elementen die element zijn van een oneven aantal van de verzamelingen $A_1,\ldots,A_n$. Bewijs dit.

1.12.7. T is een verzameling van verzamelingen met de eigenschap dat voor alle $A\in T$ en $B\in T$ geldt dat ook $(A\setminus B)\in T$. Bewijs dat uit $A\in T$ en $B\in T$ volgt dat $(A\cap B)\in T$.

1.12.8. Voor deelverzamelingen van een verzameling U definiëren we: $A|B:=A^*\cup B^*$. Bewijs dat $A\cup B=(A|A)|(B|B)$ voor alle $A\subset U$, $B\subset U$. Druk ook de verzamelingstheoretische bewerkingen $\cap$, $\setminus$, $\div$ en $*$ uit met behulp van $|$.

1.12.9. Y is de verzameling van alle deelverzamelingen A van $\mathbf{R}$ waarvoor geldt $(\mathbf{R}\setminus A)\subset\mathbf{Z}$. Bewijs dat uit $A\in Y$ en $B\in Y$ volgt dat $(A\cap B)\in Y$, $(A\cup B)\in Y$ en $(A\setminus B)\notin Y$.

1.13. Het aangeven van verzamelingen

We zullen ons in deze en de volgende paragrafen bezig moeten houden met het wiskundige taalgebruik.

1.13.1. De in 1.2.2 besproken methode om een verzameling

aan te geven door middel van een opsomming van de elementen tussen accolades is natuurlijk alleen bruikbaar bij verzamelingen met een gering aantal elementen. Wil men bijvoorbeeld de verzameling van alle reële getallen die groter dan 1 en kleiner dan 2 zijn aangeven dan lukt die opsomming in het geheel niet. Men neemt in zulke situaties zijn toevlucht tot het gebruik van een veranderlijke en zegt dan bijv.: de verzameling van alle reële x die voldoen aan $1<x<2$. Bekijkt men de zin: $1<x<2$ dan is dat geen bewering (je kunt niet zeggen: "ja, dat is waar", of "nee, dat is onwaar") omdat de letter x zelf geen betekenis heeft. Als we voor x een reëel getal invullen (substitueren) dan gaat de zin $1<x<2$ over in een bewering, bijv. in "$1<\frac{1}{2}\pi<2$" (hetgeen waar is) of "$1<3<2$" (hetgeen onwaar is). Zinnen die een veranderlijke bevatten en die overgaan in beweringen indien men voor die veranderlijke iets substitueert noemen we *beweringsvormen*. In plaats van de naam beweringsvorm gebruikt men meestal "predicaat". We zullen beweringsvormen aanduiden met $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, ... Als men voor x iets invult dan ontstaat er een bewering, die al of niet waar is. Om niet-zinvolle beweringen zoals "driehoek ABC is een positief getal" bij voorbaat uit te sluiten, zullen we ons bij het substitueren beperken tot de elementen van een bepaalde verzameling: de *individuenverzameling*. Zo is: "x is een positief getal" een beweringsvorm met $\mathbb{R}$ als individuenverzameling. "x is een priemgetal" is een beweringsvorm met $\mathbb{N}$ als individuenverzameling; "7 is een priemgetal" is een juiste bewering; "9 is een priemgetal" is een onjuiste bewering. Als door substitutie van a in $P(x)$ een ware bewering ontstaat dan zeggen we dat a aan de beweringsvorm $P(x)$ voldoet.
Zij $P(x)$ een beweringsvorm met individuenverzameling U, dan geeft men de deelverzameling van U bestaande uit de elementen die aan $P(x)$ voldoen aan met:

$$\{x \mid P(x)\}.$$

We zeggen dat $P(x)$ een *definiërende beweringsvorm* is van de verzameling $\{x \mid P(x)\}$. Sommige auteurs gebruiken $\{x: P(x)\}$ of $\{x; P(x)\}$ in plaats van $\{x \mid P(x)\}$.
In de wiskunde zullen we alleen beweringsvormen $P(x)$ gebruiken, die door de verzameling $\{x \mid P(x)\} =: P$ volledig gekarakteriseerd worden, dat wil zeggen dat we alleen zulke $P(x)$ zullen gebruiken dat $P(x)$ steeds door $x \in P$ vervangen kan worden. We laten niet toe beweringsvormen waarin iets over de naam van x gezegd wordt. Een klassiek voorbeeld van een dergelijke beweringsvorm is: het hemellichaam x draagt zijn naam omdat het 's avonds zichtbaar is; (individuenverzameling is de verzameling van de hemellichamen). Korten we deze bewering af met $P(x)$ dan is

$$\{x \mid P(x)\} = \{\text{avondster}\}.$$

Nu is {avondster}={morgenster}={planeet Venus}; en het is onzin te zeggen dat de beweringsvorm $P(x)$ door de verzameling {morgenster} gekarakteriseerd is; men kan $P(x)$ niet door $x\in${morgenster} vervangen. Anderzijds is "x is een priemgetal kleiner dan 10" volledig gekarakteriseerd door de verzameling $V=\{2,3,5,7\}$ omdat alle elementen van V aan de beweringsvorm voldoen, en omdat alle elementen die aan de beweringsvorm voldoen element van V zijn.

1.13.2. VOORBEELDEN. De verzameling van alle reële x die voldoen aan $1<x<2$ noteert men als: $\{x|\ x\in\mathbb{R}$ en $1<x<2\}$ of $\{x|\ x\in\mathbb{R}, 1<x<2\}$. De middelloodlijn van het segment ST in het platte vlak wordt dan genoteerd als {P|P is een punt,PS=PT}. Een verzameling van punten die aan een bepaalde beweringsvorm voldoen heet(te) in de meetkunde vaak meetkundige plaats. Dreigt er geen verwarring dan laat men aanduidingen als "P is een punt"; "$x\in\mathbb{R}$", enz. gewoonlijk weg. Men schrijft ook wel $\{x\in\mathbb{R}|\ 1<x<2\}$.

1.13.3. In de analytische meetkunde kan men de cirkel met straal 1 om de oorsprong aangeven met $\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}$.

1.13.4. Is A een verzameling dan is $x\in A$ een beweringsvorm en $A=\{x|\ x\in A\}$. We nemen steeds aan dat alle in een beschouwing voorkomende verzamelingen deelverzameling zijn *van een universum* U. In $x\in A$ heeft x zo'n U als individuenverzameling.

1.13.5. $\mathbb{N}=\{x|\ x\in\mathbb{Z}, x>0\}$.

1.13.6. We kunnen dus een verzameling aangeven door opsomming van zijn elementen, en met behulp van een definiërende beweringsvorm. Er is nog een derde manier in gebruik die een variant is van de tweede. Deze illustreren we aan enige voorbeelden.
De verzameling K van alle kwadraten van natuurlijke getallen kan met behulp van een definiërende beweringsvorm aangegeven worden als:

$$\{y|\ \text{er is een natuurlijk getal } x \text{ met } y=x^2\}.$$

Deze schrijfwijze is omslachtig; we gebruiken daarom de notatie $K:=\{x^2|\ x\in\mathbb{N}\}$. Deze wijze van noteren komt er dus op neer dat men een met een formule beschrijfbaar deel van een definiërende beweringsvorm in de notatie $\{\ |\ \}$ links van | zet. (Terzijde: welwillende lezers zullen bereid zijn ook in de uitdrukking $\{1,4,9,16,\ldots\}$ een aanduiding van K te zien.)

1.13.7. VOORBEELD. Met behulp van de conventie uit 1.13.6

kan men de cirkel met straal 1 om de oorsprong (zie 1.13.3) in het analytisch meetkundige vlak beschrijven als:

$$\{(\cos\phi,\ \sin\phi) \mid 0 \le \phi < 2\pi\}.$$

Evenzo is $\{(a + r\cos\phi,\ b + r\sin\phi) \mid 0 \le \phi < 2\pi\}$ de cirkel met straal $|r|$ en middelpunt (a,b).
$\{\{(a + r\cos\phi,\ b + r\sin\phi) \mid 0 \le \phi < 2\pi\} \mid a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R},\ r \in \mathbf{R}\}$ is de verzameling van alle cirkels in het vlak.

1.13.8. HERHALING. Voor sommige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ heeft men aparte notaties in gebruik. Naast de genoemde $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Q}$ zullen we met $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ ook de volgende gebruiken.

$[a,b] := \{x \mid a \le x \le b\}$, $[a,\infty) := \{x \mid a \le x\}$,

$[a,b) := \{x \mid a \le x < b\}$, $(a,\infty) := \{x \mid a < x\}$,

$(a,b] := \{x \mid a < x \le b\}$, $(-\infty,b] := \{x \mid x \le b\}$,

$(a,b) := \{x \mid a < x < b\}$, $(-\infty,b) := \{x \mid x < b\}$.

Al deze verzamelingen heten intervallen. De intervallen $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) heten begrensd; de andere heten onbegrensd. (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ heten open; $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ heten gesloten. $[a,b)$ noemt men wel links gesloten, rechts open; eveneens heet $(a,b]$ links open, rechts gesloten. De uitdrukking (a,b) zal nog een heel andere betekenis krijgen (zie 1.21.1); gevaar voor verwarring is echter nauwelijks aanwezig.

OPGAVEN

1.13.9. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn leeg:

(a) $\{x \mid x^2 = 9 \text{ en } 2x = 4\}$, (c) $\{x \mid x+8 = 8\}$,

(b) $\{x \mid x \ne x\}$, (d) $\{x \mid x^2 = 3 \text{ of } x^2 = 1\}$,

(e) $\{x \mid x^2 \ge -1\}$.

1.13.10. Beschrijf met een notatie als ingevoerd in 1.13.1 of 1.13.6 de verzameling bestaande uit

(a) de even getallen,

(b) de cirkels in $\mathbf{R}^2$ (het coördinatenvlak uit de analytische meetkunde) met straal 2,

(c) de rechten in $\mathbf{R}^2$ die evenwijdig zijn aan de Y-as,

(d) alle rechten in $\mathbf{R}^2$,

(e) de natuurlijke getallen die het product zijn van twee verschillende priemgetallen (noem de verzameling van de priemgetallen P),

(f) de niet lege open intervallen in $\mathbb{R}$.

1.14. Nodige en voldoende voorwaarden

1.14.1. De in de titel van deze paragraaf aangegeven algemeen gebruikte wiskundige termen, duiden niet op oorzakelijk verband of iets dergelijks. We leggen hun betekenis vast met behulp van verzamelingen.
Laat $P(x)$ en $Q(x)$ beweringsvormen zijn met individuenverzameling U. $P:=\{x \mid P(x)\}$; $Q:=\{x \mid Q(x)\}$. We zeggen dat $P(x)$ een *nodige voorwaarde* is voor $Q(x)$ als $Q \subset P$, $P(x)$ heet een *voldoende voorwaarde* voor $Q(x)$ indien $P \subset Q$. Als $P=Q$ dan zeggen we dat $P(x)$ een *nodige en voldoende voorwaarde* voor $Q(x)$ is; of ook wel dat $P(x)$ en $Q(x)$ gelijkwaardig zijn. Andere zegswijzen die uitdrukken dat $P=Q$: $P(x)$ geldt dan en slechts dan als $Q(x)$; $P(x)$ dan en dan alleen als $Q(x)$.
Als $P(x)$ een nodige voorwaarde voor $Q(x)$ is dan betekent dit dus dat elk individu dat aan $Q(x)$ voldoet ook aan $P(x)$ voldoet. Is a zo'n individu, d.w.z. dat $Q(a)$ waar is, dan is ook $P(a)$ waar. Evenzo; als $P(x)$ een voldoende voorwaarde voor $Q(x)$ is, en als $P(a)$ waar is, dan is $Q(a)$ waar. De lezer die al vertrouwd was met de uitdrukkingen nodige en voldoende voorwaarde overtuige zich er van dat de betekenis van deze termen inderdaad neerkomt op verzamelingsinclusie.

1.14.2. VOORBEELD. (Als individuenverzameling treedt $\mathbb{R}$ op.)

$x>0$ is een nodige voorwaarde voor $x>1$,

$x>1$ is een voldoende voorwaarde voor $x>0$,

Opdat $x \neq 0$ is nodig en voldoende dat $x^2>0$.

1.14.3. OPGAVE. Ga van de volgende paren beweringsvormen met $\mathbb{N}$ als individuenverzameling na of de eerste een nodige en/of voldoende voorwaarde voor de tweede is.

(a) x is deelbaar door 25; x is deelbaar door 5,

(b) $x \geq 100$; $x>99$,

(c) x is een priemgetal; x is niet deelbaar door 7.

1.15. En, of, niet

We zullen in deze paragraaf enige symbolen uit de logica leren gebruiken.

1.15.1. Uit twee beweringen kan men een nieuwe bewering maken door ze te verbinden met het woordje "en". Uit de beweringen "Eindhoven ligt in Brabant" en "Eindhoven is een stad" ontstaat de bewering: "Eindhoven ligt in Brabant en Eindhoven is een stad". Stelt a een bewering voor en stelt b een bewering voor dan noteert men de bewering "a en b" als $a \wedge b$. Deze laatste bewering is alleen dan waar als a en b beide waar zijn.

1.15.2. Evenzo maakt men uit de beweringen a en b de bewering: "a of b", waarbij "of" in niet-uitsluitende zin gebruikt is (zie 1.8.1). We noteren dit als $a \vee b$. $a \vee b$ is waar in de volgende drie gevallen: a waar en b onwaar; a onwaar en b waar; a waar en b waar.

1.15.3. De ontkenning van een bewering, a, noteert men als: $\neg a$. $\neg a$ is dus een bewering die alleen waar is als a onwaar is.

1.15.4. GEVOLGEN

$\neg(a \wedge b)$ is dan en slechts dan waar als $(\neg a) \vee (\neg b)$ waar is.

$\neg(a \vee b)$ is dan en slechts dan waar als $(\neg a) \wedge (\neg b)$ waar is.

$\neg\neg a$ is dan en slechts dan waar als a waar is.

1.15.5. De notaties $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ gebruikt men ook bij beweringsvormen. Zijn $P(x)$ en $Q(x)$ beweringsvormen en is U de individuenverzameling voor x dan zijn $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$ en $\neg P(x)$ eveneens beweringsvormen. Een element $a \in U$ voldoet aan $P(x) \wedge Q(x)$ als $P(a) \wedge Q(a)$ waar is; a voldoet aan $P(x) \vee Q(x)$ als $P(a) \vee Q(a)$ waar is; a voldoet aan $\neg P(x)$ als $P(a)$ onwaar is.

Is $P := \{x \mid P(x)\}$; $Q := \{x \mid Q(x)\}$ dan is

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \mid P(x), Q(x)\} = P \cap Q,$$

$$\{x \mid P(x) \vee Q(x)\} = P \cup Q,$$

$$\{x \mid \neg P(x)\} = U \setminus P = P^{\star}.$$

1.15.6. WAARSCHUWING. Let op afwijkende notaties zoals $x \geq 0$ voor $(x>0) \vee (x=0)$; $x \neq 1$ voor $\neg(x=1)$; $x \notin A$ voor $\neg(x \in A)$; $0<x<1$ voor $(x>0) \wedge (x<1)$; enz.

OPGAVEN

1.15.7. p is een afkorting voor de bewering: $2 \times 2 = 5$; q is een afkorting voor de bewering: Eindhoven ligt in Brabant; r is een afkorting voor de bewering: bier is vloeibaar.

Ga na welke van de volgende beweringen waar zijn, welke onwaar:

(a) $p\vee(q\wedge r)$, (c) $(\neg(p\wedge r))\wedge(q\vee(\neg r))$,

(b) $(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$, (d) $(r\vee p)\wedge(\neg p)$,

(e) $(\neg(p\vee q))\wedge(\neg(p\vee r))$.

1.15.8. A, B en C zijn deelverzamelingen van U. Druk de volgende verzamelingen uit met behulp van U, A, B, C en de symbolen $\cap$, $\cup$ en $\backslash$. Teken Venn-diagrammen.

(a) $\{x \mid ((x\in A)\wedge(x\in B))\vee(x\in C)\}$,

(b) $\{x \mid (x\in A)\wedge((x\in B)\vee(x\in C))\}$,

(c) $\{x \mid (x\notin A)\vee(x\notin B)\}$,

(d) $\{x \mid (x\notin A)\wedge((x\in B)\vee(x\notin C))\}$.

1.15.9. Schrijf de volgende verzamelingen met behulp van een definiërende beweringsvorm opgebouwd uit $x\in A$, $x\in B$, $x\in C$ en de symbolen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$. Teken Venn-diagrammen.

(a) $(A\backslash B)\cap C$, (c) $(A\backslash C)\cup(B\cap C)$,

(b) $(A\cup B)\cap C$, (d) $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

1.15.10. Schets in $\mathbb{R}^2$ de volgende verzamelingen:

(a) $\{(x,y) \mid (x\geq 1)\vee(y\leq -1)\}$,

(b) $\{(x,y) \mid (x^2+y^2\leq 1)\wedge(x+y\geq 1)\}$,

(c) $\{(x,y) \mid \neg(1<x^2+y^2<2)\}$,

(d) $\{(x,y) \mid \neg[(x\geq 3)\vee(x+y\leq 1)]\}$.

1.16. Implicatie

1.16.1. Opgebouwd uit twee beweringen a en b is ook de bewering: "als a dan b". Notatie hiervoor is: $a\Rightarrow b$; (soms gebruikt men een enkele pijl: $a\rightarrow b$; in de wiskunde heeft de enkele pijl echter al veel verschillende betekenissen; wij nemen daarom $\Rightarrow$ als implicatiesymbool). De betekenis van de implicatie wordt vastgelegd door de afspraak dat $a\Rightarrow b$ waar is in de volgende drie gevallen: a waar en b waar; a onwaar en b waar; a onwaar en b onwaar. $\neg(a\Rightarrow b)$ is dus alleen waar als a waar is en b onwaar. In het dagelijks spraakgebruik denkt men bij als ..., dan ... vaak aan iets als een oorzakelijk verband tussen de eerste bewering en de tweede. De afspraak omtrent de waarheid van $a\Rightarrow b$ kan daarom niet in overeenstemming zijn met wat in de omgangstaal gebruikelijk is. We zullen echter zien dat het voor de opbouw van de wiskunde een verstandige afspraak is.

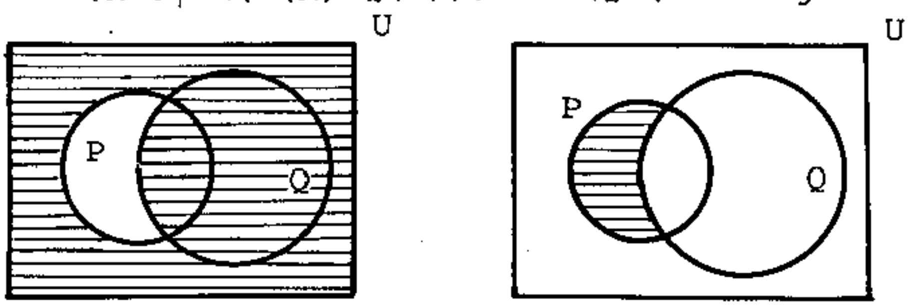
1.16.2. Een van de voorbeelden waar men in de wiskunde gebruik maakt van ware implicaties met onwaar linkerlid (het linkerlid is de uitdrukking die links van $\Rightarrow$ staat) is het zg. *bewijzen uit het ongerijmde*. Stel dat men een bewering a moet bewijzen. Een bewijs van a uit het ongerijmde heeft nu de volgende vorm. Bewijs dat $(\neg a) \Rightarrow b$, waarbij b een bewering is waarvan bekend is dat deze onwaar is bijv. doordat b een contradictie bevat, of in tegenspraak met een van de gegevens is. De conclusie is dan: omdat b onwaar is, maar $(\neg a) \Rightarrow b$ waar, moet $(\neg a)$ onwaar zijn; a moet dus waar zijn.

1.16.3. Laat $P(x)$ en $Q(x)$ beweringsvormen zijn met individuenverzameling U; men kan nu ook de beweringsvorm $P(x) \Rightarrow Q(x)$ vormen. Zij als gebruikelijk $P := \{x \in U \mid P(x)\}$; $Q := \{x \in U \mid Q(x)\}$; uit de afspraken omtrent de waarheid van $P(a) \Rightarrow Q(a)$ volgt nu:

$$\{x \in U \mid P(x) \Rightarrow Q(x)\} = (U \setminus P) \cup Q = (U \setminus P) \cup (P \cap Q).$$

We hebben eveneens

$$\{x \in U \mid \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))\} = P \setminus Q \text{ (zie figuur 13).}$$



$\{x \in U \mid P(x) \Rightarrow Q(x)\}$ $\{x \in U \mid \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))\}$

Figuur 13

Zijn A en B deelverzamelingen van U dan volgt uit de afspraak omtrent het waar zijn van de implicatie dat $A \subset B$ betekent dat $(c \in A) \Rightarrow (c \in B)$ waar is voor elke $c \in U$.

OPMERKINGEN

1.16.4. Voor $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ gebruiken we de kortere notatie $a \Leftrightarrow b$. $a \Leftrightarrow b$ leest men als: "a dan en slechts dan als b". Indien $\Leftrightarrow$ gebruikt wordt in definities dan plaatsen we: aan de kant van de te definiëren beweringsvorm (vergelijk dit met de notatie := ingevoerd in 1.1.2).

1.16.5. Een veel gebruikte redeneerwijze is de volgende: als de bewering p waar is en als eveneens de bewering $p \Rightarrow q$ waar is, dan kan men concluderen dat ook q waar is. (Men noemt deze wijze van gevolgtrekken *modus ponens*.) Het is een veel gemaakte fout deze gevolgtrekking ook

met $p \Rightarrow q$ weer te geven. Het symbool $\Rightarrow$ mag men nooit gebruiken voor derhalve .... . Een goed symbool hiervoor is $\therefore$.
Bovenstaande redenering zou men dus kunnen weergeven met:

$$\begin{cases} p \\ p \Rightarrow q \\ \therefore q \end{cases}$$

OPGAVEN

1.16.6. p is een afkorting van: $2\times 2=4$; q is een afkorting van: $2\times 2=5$. Ga na welke van de volgende beweringen waar zijn, welke onwaar.

(a) $p\Rightarrow(p\Rightarrow q)$, (e) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow p$,

(b) $p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$, (f) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow q$,

(c) $q\Rightarrow(q\Rightarrow p)$, (g) $(q\Rightarrow p)\Rightarrow p$,

(d) $q\Rightarrow(p\Rightarrow q)$, (h) $(q\Rightarrow p)\Rightarrow q$.

1.16.7. Schrijf de verzameling $\{x \in \mathbf{R} \mid (0<x<2)\Rightarrow(1<x<3)\}$ als een vereniging van intervallen.

1.16.8. Schets in $\mathbf{R}^2$ de volgende verzamelingen:

(a) $\{(x,y) \mid (x+y\geq 0)\Rightarrow(x\geq 0)\}$,

(b) $\{(x,y) \mid (x+y\geq 0)\Leftrightarrow(|x+y|\geq 0)\}$,

(c) $\{(x,y) \mid \neg((x\geq y)\Rightarrow(x+2\geq y))\}$.

1.16.9. Voor welk natuurlijk getal n is de volgende bewering waar:

$$\{x \in \mathbf{N} \mid (x>n)\Rightarrow(x\leq n+2)\} = \{1,2,3,4\}.$$

1.17. Het gebruik van veranderlijken

1.17.1. OBJECTSVORMEN. In 1.13.1. definiëerden we: een beweringsvorm is een zin die een veranderlijke bevat, en die overgaat in een al dan niet ware bewering als we de veranderlijke door een element uit een zekere verzameling (de individuenverzameling) vervangen.
Bekijk nu de uitdrukking: "het getal x^2+7". Dit is geen beweringsvorm (als we voor x iets substitueren dan ontstaat er geen bewering). Vervangen we x door een element uit de verzameling der reële getallen dan ontstaat er een object (een grootheid): "het getal 2^2+7". Dergelijke uitdrukkingen noemen we *objectsvormen*. Evenals in het geval van beweringsvormen beperken we ons bij het substitueren in een objectsvorm tot de elementen van een bepaalde verzameling, de individuenverzameling.

Als we van een uitdrukking met een veranderlijke willen uitmaken of het een beweringsvorm dan wel een objectsvorm is, dan substitueren we een individu voor de veranderlijke en we kijken of wat er door deze substitutie ontstaat een bewering (je kunt er van zeggen of hij waar is of onwaar) is dan wel een object (getal, verzameling, of iets dergelijks). Ook grammaticaal zijn beweringsvormen en objectsvormen te onderscheiden. Beweringsvormen zijn zinnen; zij bevatten dus (soms verstopt, bijv. in = of ≥) een werkwoord. Objectsvormen daarentegen zijn geen zinnen. Let op dat men vaak de woorden: "de verzameling van" in de aanduiding van objecten weglaat. Zo is: "de even getallen" één object, nl. $\{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

1.17.2. OPGAVE. De individuenverzameling voor de veranderlijke x in elk van de volgende uitdrukkingen is **N**. Ga na welke uitdrukkingen beweringsvormen zijn en welke objectsvormen zijn.

(a) x is deelbaar door 7,

(b) de verzameling van de delers van x; de delers van x,

(c) de priemgetallen die ≤x zijn,

(d) x is het kwadraat van een natuurlijk getal,

(e) het kleinste kwadraat dat ≤x is,

(f) 100 is het kleinste kwadraat dat ≥x is,

(g) 101 is het kleinste kwadraat dat ≥x is.

1.17.3. MEER VERANDERLIJKEN. In de tot nu beschouwde gevallen trad eigenlijk slechts één veranderlijke op. (In 1.13.3 was dat het veranderlijke punt (x,y).) We zouden ons ook in de toekomst tot slechts één veranderlijke kunnen beperken, doch dit is hoogst gekunsteld. We zullen daarom ook objectsvormen en beweringsvormen beschouwen met meer veranderlijken. Steeds moeten we bij de veranderlijken de individuenverzamelingen aangeven. Zo is voor reële veranderlijken x en y: "x≥y" een beweringsvorm met twee veranderlijken; "7≥y" is een beweringsvorm met één veranderlijke; "7≥4" is een bewering. Evenzo is "x+y" een objectsvorm met twee veranderlijken; "7+y" is een objectsvorm met één veranderlijke; "7+4" is een grootheid.

N.B. Indien in een uitdrukking meer veranderlijken voorkomen dan mogen de individuenverzamelingen van de verschillende veranderlijken verschillen; bijv. "punt x ligt op lijn y" is een beweringsvorm met de veranderlijken x en y waarbij de individuenverzameling van x die van de punten, de individuenverzameling van y die van de lijnen is.

Beweringsvormen met twee veranderlijken noemt men ook wel *relaties*. Vaak laat men de veranderlijken uit de aanduiding weg. Zo spreekt men van de relatie $\geq$ i.p.v. $x \geq y$.

1.17.4. OPGAVE. De individuenverzameling van de veranderlijken x, y en z in elk van de volgende uitdrukkingen is $\mathbf{N}$. Ga na welke uitdrukkingen beweringsvormen zijn en welke objectsvormen.

(a) $x^2+y^2=z^2$, (c) $x+3<y+4$,

(b) $x^2+y^2-z^2$, (d) de delers van xy,

(e) de delers van xy vormen een deelverzameling van de delers van z.

1.17.5. VRIJ EN GEBONDEN VOORKOMENDE VERANDERLIJKEN. Naast de veranderlijken in beweringsvormen en objectsvormen, komen in de wiskunde ook veranderlijken voor, waarvoor in het geheel niets gesubstitueerd kan worden.

Zo is $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ een bewering, hoewel er een veranderlijke x in voorkomt; $\{x \mid (x \in \mathbf{Z}) \wedge (x>0)\}$ is een object (nl. de verzameling $\mathbf{N}$) ongeacht het voorkomen van de letter x. Dergelijke veranderlijken noemt men *gebonden veranderlijken*; om uit te drukken dat het gebonden zijn van een veranderlijke door de context veroorzaakt wordt is het beter om te spreken van gebonden voorkomende veranderlijken. Gebonden betekent hier dat de veranderlijke zo in de uitdrukking voorkomt dat de betekenis van deze uitdrukking vastligt zonder dat voor de veranderlijke iets gesubstitueerd behoeft te worden. $(x \in \mathbf{Z}) \wedge (x>0)$ is wel een beweringsvorm, doch in de uitdrukking $\{x \mid (x \in \mathbf{Z}) \wedge \wedge (x>0)\}$ komt x gebonden voor. Men kan van de bewering

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ zeggen dat deze waar is, zonder eerst voor x iets te substitueren. Substitutie is zelfs niet mogelijk

zonder tot onzin te komen: $\int_0^1 4^2 d4$ is onzin.

In tegenstelling tot gebonden voorkomende veranderlijken noemt men de veranderlijken, die zo in de context voorkomen dat er wel voor gesubstitueerd kan worden *vrije veranderlijken*; deze worden ook wel - en beter - vrij voorkomende veranderlijken genoemd. Om na te gaan of een veranderlijke vrij of gebonden voorkomt moet men dus nagaan of men er iets voor substitueren kan of niet. In beweringen en objecten komen geen vrije veranderlijken voor. Gebonden veranderlijken kan men ook vaak daaraan herkennen dat men ze overal in de uitdrukking waarin ze voorkomen door een ander symbool kan vervangen, zonder dat de betekenis van deze uitdrukking verandert.

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ en $\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$ is dezelfde bewering;

$\{x \mid x^2=4\}$, $\{z \mid z^2=4\}$ en $\{\S \mid \S^2=4\}$ is hetzelfde object (nl. $\{-2,2\}$). Men moet bij het vervangen van gebonden veranderlijken door andere symbolen natuurlijk wel symbolen nemen die binnen de uitdrukking geen betekenis hebben. Dus niet: $\{4 \mid 4^2=4\}$ of $\{\{ \mid \{^2=4\}$ of $\{= \mid =^2=4\}$. We wijzen er nogmaals op dat het van de context afhangt of veranderlijken vrij of gebonden zijn. In $x^2=4$ is x vrij in $\{x \mid x^2=4\}$ is x gebonden. Het is vaak moeilijk om te beslissen of veranderlijken vrij of gebonden voorkomen. Zo zal men x in "sin x" vrij moeten noemen; substitueert men nl. voor x een reëel getal a dan is sin a een object nl. een getal; in de veel gebruikte uitdrukking "de functie sin x" komt x daarentegen gebonden voor; ("de functie sin" is overigens een betere aanduiding van het laatste object; ook acceptabel is:"de x-functie sin x", in welke uitdrukking het gebonden karakter van x duidelijk naar voren komt). In de bewering: "de vergelijking $x^2+1=0$ heeft geen reële wortels" komt x gebonden voor.
We geven nog een tweetal voorbeelden (de individuenverzameling van alle voorkomende veranderlijken is $\mathbb{R}$).

In $\int_0^x t^2 dt$ is t een gebonden veranderlijke, x een vrije veranderlijke; $\int_0^x t^2 dt$ en $\int_0^x y^2 dy$ is dezelfde objectsvorm.
In de beweringsvorm "$x>y$" zijn x en y vrije veranderlijken; in de objectsvorm $\{x \mid x>y\}$ is x een gebonden, y een vrije veranderlijke.

1.17.6. OPGAVE. Onderscheid vrije en gebonden veranderlijken in de volgende uitdrukkingen. Van alle veranderlijken is $\mathbb{R}$ de individuenverzameling. Onderscheid tevens beweringen, objecten, beweringsvormen, objectsvormen.

(a) $\int_0^t x dx > 1$,

(b) $\{t \mid \int_0^t x dx > y\}$,

(c) de parabool met vergelijking $y=x^2$,

(d) de vergelijking $x^2+6x+8=0$ heeft twee verschillende reële wortels.

1.17.7. We wijzen er op dat men een uitdrukking als $x^2+6x+8=0$ vaak opvat als een *vergelijking*, dat is als een opdracht, nl. "bepaal: $\{x| \ x^2+6x+8=0\}$". Aan de formule $x^2+6x+8=0$ kan men niet zien of hier een beweringsvorm bedoeld is of een vergelijking.

1.18. Propositiecalculus

1.18.1. In de propositiecalculus, een onderdeel der symbolische logica, bestudeert men beweringsvormen die slechts opgebouwd zijn uit de logische symbolen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$, haakjes en veranderlijken waarvan de individuenverzameling de verzameling van alle beweringen (proposities) is. Dergelijke beweringsvormen noemen we propositievormen of volzinsvormen, de er in voorkomende veranderlijken: propositieveranderlijken of volzinsveranderlijken. Als propositieveranderlijken gebruiken we de letters p, q, r, ... Substitueert men een bewering voor iedere propositieveranderlijke in een propositievorm dan ontstaat een bewering. In de propositiecalculus gaat men na hoe de waarheidswaarde (waar of onwaar) van een propositievorm afhangt van de waarheidswaarde van de er in voorkomende propositieveranderlijken. Zo is $p\vee(\neg p)$ een propositievorm met één veranderlijke p; deze is steeds waar d.w.z. als voor p een ware bewering gesubstitueerd wordt dan is $p\vee(\neg p)$ een ware bewering en als voor p een onware bewering gesubstitueerd wordt dan is nog steeds $p\vee(\neg p)$ een ware bewering.

1.18.2. Van propositievormen stelt men zg. waarheidstafels op; dat zijn tabellen waarin voor alle mogelijke waarheidswaarden (waar, onwaar) van de te substitueren beweringen aangegeven wordt of de door substitutie ontstane volzin waar of onwaar is. Voor de propositievormen $\neg p$, $p\wedge q$, $p\vee q$, $p\Rightarrow q$ en $p\Leftrightarrow q$ zien de waarheidstafels er aldus uit:

p	$\neg$p
w	0
0	w

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	0	0	w	0	0
0	w	0	w	w	0
0	0	0	0	w	w

Ingewikkelde propositievormen behandelt men door ze in stukken te knippen. In plaats van w(aar) schrijft men gemakshalve vaak 1, i.p.v. o(nwaar) 0.

1.18.3. VOORBEELD. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

1.18.4. VOORBEELD. $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$.

				L			M	
p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$L \Leftrightarrow M$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

N.B. de letters L en M worden hier gebruikt als aanduidingen van de propositievormen $(p \vee q) \wedge r$ resp. $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

1.18.5. De propositievormen uit de voorbeelden 1.18.3 en 1.18.4 gaan bij iedere substitutie voor de veranderlijken over in een ware bewering. Dergelijke propositievormen heten "steeds ware propositievormen". Als L en R propositievormen zijn en als $L \Leftrightarrow R$ een steeds ware propositievorm is, dat heten L en R gelijkwaardig.

1.18.6. Laat P(x), Q(x), R(x), ... beweringsvormen zijn met dezelfde individuenverzameling U. Laat L(x) en M(x) beweringsvormen zijn opgebouwd uit P(x), Q(x), R(x), ..., haakjes, en de symbolen $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$. Vervangt men in L(x) en M(x) de beweringsvorm P(x) door de propositieveranderlijke p, Q(x) door q, R(x) door r, enz. dan ontstaan er propositievormen L en M. We zullen nu een stelling formuleren die het belang aangeeft van de propositiecalculus voor de bestudering van samengestelde beweringsvormen.

1.18.7. STELLING. *Als (in de notatie van 1.18.6)* $L \Rightarrow M$ *een steeds ware propositievorm is, dan is* L(x) *een voldoende voorwaarde voor* M(x).

Bewijs. We moeten laten zien dat $\{x \mid L(x)\} \subset \{x \mid M(x)\}$. Laat $a \in \{x \mid L(x)\}$. L(a) is nu een ware bewering. L(a) is de bewering die ontstaat door in L voor de propositieveranderlijke p de bewering P(a), voor q de bewering Q(a) enz. te substitueren. M(a) is de bewering die door dezelfde substituties uit M ontstaat. $L(a) \Rightarrow M(a)$ is waar, L(a) is waar, dus M(a) is waar. Derhalve $a \in \{x \mid M(x)\}$. Aangezien a willekeurig is geldt $\{x \mid L(x)\} \subset \{x \mid M(x)\}$.

1.18.8. GEVOLG. *Als* L *en* M *gelijkwaardig zijn dan is* L(x) *een nodige en voldoende voorwaarde voor* M(x).

1.18.9. VOORBEELD. Laat A, B, C verzamelingen zijn; neem $x \in A$ voor P(x), $x \in B$ voor Q(x), $x \in C$ voor R(x). Zij L(x) de beweringsvorm $(P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x)$, en M(x) de beweringsvorm $(P(x) \wedge R(x)) \vee (Q(x) \wedge R(x))$. Dan zijn L en M de propositievormen $(p \vee q) \wedge r$ en $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ uit voorbeeld 1.18.4. Anderzijds is $\{x \mid L(x)\} = (A \cup B) \cap C$; $\{x \mid M(x)\} = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Stelling 1.18.7 en de tabel uit voorbeeld 1.18.4 vormen dus samen een bewijs voor eigenschap 1.11.1. Dit voorbeeld laat ons twee dingen zien: het belang van de steeds ware propositievormen en het feit dat er een parallellisme bestaat tussen de verzamelingstheoretische bewerkingen $\cup$ en $\cap$ en de logische symbolen $\vee$ en $\wedge$. Op dit parallellisme komen we terug in de paragraaf over Boole algebra (3.12.13). Soms onderscheidt men in een redenering zg. "logische" stappen van meer specifieke stappen. Deze "logische" stappen zijn steeds invullingen in de zin van 1.18.6 in steeds ware propositievormen.

1.18.10. STELLING. *De volgende propositievormen zijn steeds ware propositievormen.*

$p \vee (\neg p)$

$p \Leftrightarrow (\neg(\neg p))$

$\neg(p \wedge (\neg p))$

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg p)\vee q)$

$(\neg(p\vee q))\Leftrightarrow((\neg p)\wedge(\neg q))$

$(\neg(p\wedge q))\Leftrightarrow((\neg p)\vee(\neg q))$

$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow((\neg q)\Rightarrow(\neg p))$

$(p\wedge(p\Rightarrow q))\Rightarrow q$

$(p\Rightarrow(q\wedge(\neg q)))\Rightarrow(\neg p)$

$((p\vee q)\vee r)\Leftrightarrow(p\vee(q\vee r))$ (associativiteit van $\vee$)

$((p\wedge q)\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge(q\wedge r))$ (associativiteit van $\wedge$)

(wegens deze associativiteiten schrijft men vaak $p\vee q\vee r$ en $p\wedge q\wedge r$ in plaats van $(p\vee q)\vee r$ en $(p\wedge q)\wedge r$)

$$\left.\begin{array}{l}((p\vee q)\wedge r)\Leftrightarrow((p\wedge r)\vee(q\wedge r))\\((p\wedge q)\vee r)\Leftrightarrow((p\vee r)\wedge(q\vee r))\end{array}\right\}\text{(distributiviteiten)}$$

$(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Leftrightarrow((p\wedge q)\Rightarrow r)$.

1.18.11. OPMERKING. Het plaatsen van haakjes in propositievormen sluit iedere dubbelzinnigheid uit. De spreektaal mist deze mogelijkheid. Hoe moeilijk het is in de spreektaal dubbelzinnigheden te vermijden blijkt bijv. indien men probeert onderstaande propositievormen in geschreven nederlands over te brengen.

$[(\neg p)\vee q]\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$, $\qquad (\neg p)\vee[q\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)]$,

$[\neg(p\vee q)]\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$, $\qquad [\neg(p\vee(q\Leftrightarrow p))]\Rightarrow q$.

OPGAVEN

1.18.12. Bewijs stelling 1.18.10. Geef enige van deze bewijzen zonder de waarheidstafels uit te schrijven.

1.18.13. Druk de propositievormen uit opmerking 1.18.11 in geschreven nederlands uit. Welke van deze propositievormen zijn steeds ware propositievormen.

1.18.14. Substitueer zodanige beweringen voor de propositieveranderlijken in de onderstaande propositievormen, dat ware beweringen ontstaan.

(a) $p\vee q$, (d) $(p\vee q)\Leftrightarrow r$,

(b) $(\neg p)\wedge q$, (e) $(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge r)$,

(c) $p\Rightarrow q$, (f) $\neg[p\vee q]$.

Geef ook zodanige substituties dat onware beweringen ontstaan.

1.18.15. Stel de waarheidstafel op van $(\neg p)\vee(\neg q)$. In plaats van $(\neg p)\vee(\neg q)$ zullen we schrijven $p|q$ ($|$ heet het symbool van Scheffer). Nu is $p|p$ gelijkwaardig met $\neg p$.
Geef propositievormen opgebouwd uit p, q, $|$ en haakjes die gelijkwaardig zijn met:

(a) $p\vee q$, (c) $p\Rightarrow q$,

(b) $p\wedge q$, (d) $p\Leftrightarrow q$.

Vergelijk deze opgave met 1.12.8.
(N.B. In $\mathbf{N}$ heeft het symbool "$n|m$" de betekenis: "n is een deler van m".)

1.19. Quantoren

1.19.1. We zullen thans een zeer belangrijke manier leren kennen om veranderlijken in een beweringsvorm te binden. Beschouw de volgende bewering: "Voor alle reële getallen x is $x^2\geq 0$". Deze (ware) bewering is opgebouwd uit twee delen: een beweringsvorm "$x^2\geq 0$", met als individuenverzameling $\mathbf{R}$, en de aanduiding: "voor alle reële getallen x". We kunnen uit een beweringsvorm P(x) een bewering maken door er voor te zetten: "voor alle x uit de verzameling V geldt". Deze V moet dan een deelverzameling van de individuenverzameling van de veranderlijke x uit P(x) zijn. We noteren de zo gevormde bewering aldus:

$$\forall_{x\in V}\,[P(x)];\quad \forall_{x\in\mathbf{R}}\,[x^2\geq 0].$$

In deze beweringen is x een gebonden veranderlijke. Het symbool $\forall_{x\in V}$ heet al-quantor (soms ook universele quantor). De bewering $\forall_{x\in V}\,[P(x)]$ kan waar zijn of onwaar. De beweringen $\forall_{x\in\mathbf{N}}\,[x>0]$ en $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[(x+1)^2=x^2+2x+1]$ zijn waar. De beweringen $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\,[x>0]$ en $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[x^2>0]$ zijn onwaar.

Als de verzameling V maar uit eindig veel elementen bestaat, bijv. $V=\{a,b,c\}$ dan is de bewering $\forall_{x\in V}\,[P(x)]$ dezelfde als $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$.

Is $P:=\{x|\ P(x)\}$ dan is de bewering $\forall_{x\in A}\,[P(x)]$ dezelfde als $A\subset P$. Daarom kan men $A\subset B$ ook schrijven als $\forall_{x\in A}\,[x\in B]$.

Ook in beweringsvormen met meer veranderlijken kan men een of meer van de veranderlijken met al-quantoren binden. Zo is $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[x>y]$ een beweringsvorm met één vrije veranderlijke (nl. y); $\forall_{y\in\mathbf{R}}[\forall_{x\in\mathbf{R}}[x>y]]$ is een (onware) bewering.

1.19.2. Beschouw de bewering: "Er bestaat een reëel getal x waarvoor $x^2=1$". Deze bewering is opgebouwd uit de beweringsvorm $x^2=1$ en de aanduiding: "er bestaat een reëel getal x waarvoor". In symbolen schrijven we:

$$\exists_{x\in\mathbf{R}}[x^2=1];\ \exists_{x\in V}[P(x)].$$

$\exists_{x\in V}$ heet *existentiële quantor*; x is in bovenstaande beweringen een gebonden veranderlijke. Beweringen van de vorm $\exists_{x\in V}[P(x)]$ kunnen waar zijn zoals $\exists_{x\in\mathbf{R}}[x^2\geq 0]$ en $\exists_{x\in\mathbf{N}}[x^2=1]$ of onwaar zoals $\exists_{x\in\mathbf{R}}[x^2<0]$ en $\exists_{x\in\mathbf{N}}[x^2=2]$. Is $V:=\{a,b,c\}$ dan is de bewering $\exists_{x\in V}[P(x)]$ dezelfde als $P(a)\vee P(b)\vee P(c)$.

Zij U de individuenverzameling van x en zij $P:=\{x|\ P(x)\}$, dan is $\exists_{x\in U}[P(x)]$ dezelfde bewering als $P\neq\emptyset$. Is $A\subset U$ dan is $\exists_{x\in A}[P(x)]$ dezelfde bewering als $A\cap P\neq\emptyset$. De bewering $A\neq\emptyset$ kan men dus ook geven in de vorm $\exists_{x\in A}[x\in A]$. Men moet zich goed realiseren dat $\exists_{x\in A}[P(x)]$ alleen waar kan zijn als $A\neq\emptyset$. $\forall_{x\in\emptyset}[P(x)]$ is waar welke beweringsvorm men voor P(x) ook neemt; $\exists_{x\in\emptyset}[P(x)]$ is onwaar.
Bij het construeren van puzzels van de vorm: "zoek de fout in het volgende bewijs ...." is de gevolgtrekking "uit $\forall_{x\in A}[P(x)]$ volgt $\exists_{x\in A}[P(x)]$" waarbij $A=\emptyset$ even vruchtbaar als het veel gebruikte verkapt delen door 0 van beide leden van een gelijkheid.

Ook existentiële quantoren kunnen gebruikt worden bij beweringsvormen met meer dan één veranderlijke. $\exists_{x\in\mathbf{R}}[x>y]$ is een beweringsvorm met één vrije veranderlijke (nl. y).
$\exists_{y\in\mathbf{R}}[\exists_{x\in\mathbf{R}}[x>y]]$ is een (ware) bewering.
$\forall_{y\in\mathbf{R}}[\exists_{x\in\mathbf{R}}[x>y]]$ is eveneens een (ware) bewering.
$\exists_{x\in\mathbf{R}}[\forall_{y\in\mathbf{R}}[x>y]]$ is een onware bewering.

OPMERKINGEN

1.19.3. Gebruikt men meerdere quantoren dan schrijft men deze achter elkaar zonder haken. Zo schrijft men

$\forall_{y \in \mathbf{R}} \exists_{x \in \mathbf{R}} [x>y]$ in plaats van $\forall_{y \in \mathbf{R}} [\exists_{x \in \mathbf{R}} [x>y]]$.
$\forall_{x \in \mathbf{R}} \exists_{y \in \mathbf{R}} \forall_{z \in \mathbf{R}} [x^2+y^2+z^2=t^2]$ moet gelezen worden als $\forall_{x \in \mathbf{R}} [\exists_{y \in \mathbf{R}} [\forall_{z \in \mathbf{R}} [x^2+y^2+z^2=t^2]]]$; het is een beweringsvorm met één vrije veranderlijke, nl. t.

1.19.4. *Indien in een stuk tekst slechts één verzameling* als individuenverzameling optreedt, en alle quantoren op deze individuenverzameling betrekking hebben, dan vermeldt men deze soms niet in de quantoren. Hebben bijv. alle veranderlijken $\mathbf{R}$ als individuenverzameling en hebben alle quantoren ook betrekking op $\mathbf{R}$ dan kan men rustig schrijven: $\forall_x \exists_y \forall_z [x^2+y^2+z^2=t^2]$.

1.19.5. Soms ziet men beweringsvormen of gedeelten van beweringsvormen in quantoren. We geven enige voorbeelden: $\forall_{x \geq 0}$ betekent $\forall_{x \in [0,\infty)}$; $\exists_{n,g.g.d(n,5)=1}$ betekent $\exists_{n \in A}$ waarbij $A := \{n \in \mathbf{N} \mid g.g.d(n,5)=1\}$.
In het algemeen kan men slechts zeggen, dat elke aanduiding acceptabel is, die aan de lezer binnen de context ondubbelzinnig duidelijk maakt op welke verzameling de quantor betrekking heeft.

1.19.6. Het is een slechte doch waarschijnlijk onuitroeibare gewoonte van wiskundigen om al-quantoren weg te laten. Zo spreekt men in de middelbare school-algebra over de stelling: "$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$", terwijl men bedoelt dat "$\forall_{a \in \mathbf{R}} \forall_{b \in \mathbf{R}} [(a+b)^2=a^2+2ab+b^2]$", waar is.
Een wel correcte notatie die men vaak ziet is: $P(x)$ $(x \in V)$ in plaats van $\forall_{x \in V} [P(x)]$. In uitdrukkingen als $R(n,m)$ $(n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N})$ schrijft men in plaats van $(n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N})$ vaak $(n,m \in \mathbf{N})$.

1.19.7. In de literatuur komt men allerlei notatievarianten tegen: zoals (x) en $\bigwedge_x$ in plaats van $\forall_x$; (E_x) en $\bigvee_x$ in plaats van $\exists_x$.

1.19.8. Indien men dat zou wensen kan men door een kunstgreep verkrijgen dat alle quantoren in een beschouwing betrekking hebben op het beschouwde universum. Men gebruikt dan nl. de gelijkwaardigheid van de volgende paren beweringen.

$$\forall_{x \geq 0} [\,|x| = x\,], \qquad \forall_{x \in \mathbf{R}} [(x \geq 0) \Rightarrow (|x| = x)],$$

$$\forall_{x \in A} [P(x)], \qquad \forall_{x \in U} [(x \in A) \Rightarrow P(x)],$$

$$\exists_{x \geq 0} [x^2 > 1], \qquad \exists_{x \in \mathbf{R}} [(x \geq 0) \wedge (x^2 > 1)],$$

$$\exists_{x\in A}[P(x)] \quad , \quad \exists_{x\in U}[(x\in A)\wedge P(x)].$$

1.19.9. We wijzen er nog eens met nadruk op dat de volgorde van de quantoren van wezenlijk belang is voor de betekenis van een uitdrukking: $\forall_{x\in\mathbf{R}}\exists_{y\in\mathbf{R}}[x>y]$ is waar; doch $\exists_{y\in\mathbf{R}}\forall_{x\in\mathbf{R}}[x>y]$ is een onware bewering. Wel mag men twee naast elkaar staande al-quantoren verwisselen en eveneens twee naast elkaar staande existentiële quantoren. Als nl. R(x,y) een relatie is, met X als individuenverzameling voor x, Y voor y dan zijn de volgende beweringen waar:

$$(\forall_{x\in X}\forall_{y\in y}[R(x,y)]) \Leftrightarrow (\forall_{y\in Y}\forall_{x\in X}[R(x,y)]),$$

$$(\exists_{x\in X}\exists_{y\in Y}[R(x,y)]) \Leftrightarrow (\exists_{y\in Y}\exists_{x\in X}[R(x,y)]).$$

OPGAVEN

1.19.10. Ga van de volgende beweringen na of ze waar zijn. De individuenverzameling van x is in alle gevallen **R**.

(a) $\forall_{x\in\mathbf{R}}[x\in\{1,2,3\}]$, (e) $\forall_{x\in\mathbf{N}}[\frac{1}{2}x\in\mathbf{Q}]$,

(b) $\exists_{x\in\mathbf{R}}[x\in\{1,2,3\}]$, (f) $\exists_{x\in\mathbf{Q}}[2x\in\mathbf{N}]$,

(c) $\exists_{x\in\mathbf{R}}[x\in\mathbf{N}]$, (g) $\forall_{x\in\mathbf{N}}[x+4>3]$,

(d) $\forall_{x\in\mathbf{R}}[x\in\mathbf{Q}]$, (h) $\forall_{x\in\mathbf{Q}}[-1<\sin x<1]$.

1.19.11. Ga na welke van de volgende beweringen waar zijn:

(a) $\forall_{x\in\mathbf{R}}\exists_{y\in\mathbf{R}}[x^2>y]$, (c) $\forall_{y\in\mathbf{R}}\exists_{x\in\mathbf{R}}[x^2>y]$,

(b) $\exists_{x\in\mathbf{R}}\forall_{y\in\mathbf{R}}[x^2>y]$, (d) $\exists_{y\in\mathbf{R}}\forall_{x\in\mathbf{R}}[x^2>y]$.

1.19.12. Door plaatsing van één der beide symbolen $\forall_{x\in\mathbf{N}}$, $\exists_{x\in\mathbf{N}}$ en één der beide symbolen $\forall_{y\in\mathbf{N}}$, $\exists_{y\in\mathbf{N}}$ voor de beweringsvorm xy=1 maakt men een bewering. Welke van de acht (denk aan de volgorde!) zo te vormen beweringen zijn waar? Geef deze acht beweringen in geschreven nederlands weer.

1.19.13. Laat P(x), Q(x) beweringsvormen zijn met individuenverzameling U, $P:=\{x|\ P(x)\}$, $Q:=\{x|\ Q(x)\}$. Alle quantoren hebben betrekking op U. Verifiëer de volgende lijst van "vertalingen" van beweringen geformuleerd met P(x) en Q(x) in verzamelingentaal.

$\forall_x\ [P(x)\wedge Q(x)]$ $\quad P=Q=U$,

$\forall_x\ [P(x)\vee Q(x)]$ $\quad P\cup Q=U$,

$\forall_x\ [P(x)\Rightarrow Q(x)]$ $\quad P\subset Q$,

$\forall_x\ [P(x)\Leftrightarrow Q(x)]$ $\quad P=Q$,

$\exists_x\ [P(x)\wedge Q(x)]$ $\quad P\cap Q\neq\emptyset$,

$\exists_x\ [P(x)\vee Q(x)]$ $\quad P\cup Q\neq\emptyset$,

$\exists_x\ [P(x)\Rightarrow Q(x)]$ $\quad P^*\cup Q\neq\emptyset$,

$\exists_x\ [P(x)\Leftrightarrow Q(x)]$ $\quad P\dotdiv Q\neq U$.

Geef een verzamelingsvertaling van de volgende beweringen. Ga na of ze voor iedere keuze van U, P(x) en Q(x) waar zijn; zo neen geef een tegenvoorbeeld

(a) $(\forall_x\ [P(x)\Rightarrow Q(x)]) \Rightarrow ((\forall_x\ [P(x)])\Rightarrow(\forall_x\ [Q(x)]))$,

(b) $(\forall_x\ [P(x)\vee Q(x)]) \Rightarrow ((\forall_x\ [P(x)])\vee(\forall_x\ [Q(x)]))$,

(c) $(\exists_x\ [P(x)\wedge Q(x)]) \Rightarrow ((\exists_x\ [P(x)])\wedge(\exists_x\ [Q(x)]))$,

(d) $(\exists_x\ [P(x)\Rightarrow Q(x)]) \Rightarrow ((\exists_x\ [P(x)])\Rightarrow(\exists_x\ [Q(x)]))$.

1.19.14. Laat R(x,y) een relatie zijn, met X als individuenverzameling voor x, Y voor y. Is de volgende bewering waar?

$$(\exists_{x\in X}\ \forall_{y\in Y}\ [R(x,y)]) \Rightarrow (\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ [R(x,y)]).$$

(vergelijk dit met 1.19.9.)

1.19.15. $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \exists_{y\in\mathbf{R}}\ [(y>0)\wedge(x+y=z)]$ is een beweringsvorm met z als vrije veranderlijke. We korten deze af met P(z). Geef aan uit welke elementen $\{z|\ P(z)\}$ bestaat.

1.19.16. DE ONTKENNING VAN UITDRUKKINGEN MET QUANTOREN. De ontkenning van $\forall_{x\in V}\ [P(x)]$ kan op twee manieren geschreven worden,nl.als $\neg\ \forall_{x\in V}\ [P(x)]$ en als $\exists_{x\in V}\ [\neg P(x)]$. De ontkenning van $\exists_{x\in V}\ [P(x)]$ kan geschreven worden als $\neg\exists_{x\in V}\ [P(x)]$ en als $\forall_{x\in V}\ [\neg P(x)]$. Op deze eigenschappen berust de mogelijkheid tot "mechanische ontkenning" van uitdrukkingen met veel quantoren.

1.19.17. VOORBEELD. Zo is

$$\exists_{a\in\mathbf{R}}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N},\ n>m}\ [\,|(-1)^n-a|<\varepsilon]$$

de ontkenning van

$$\forall_{a\in\mathbf{R}}\ \exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{m\in\mathbf{N}}\ \exists_{n\in\mathbf{N},\ n>m}\ [\,|(-1)^n-a|\geq\varepsilon]$$

De lezer die al enigszins met de analyse vertrouwd is zal herkennen dat de tweede bewering uit dit voorbeeld waar is, en uitdrukt dat de rij (-1,1,-1,1,-1,...) niet convergent is (zie 4.1.8).

OPGAVEN

1.19.18. (a) Geef een oneindige rij reële getallen (a_1, a_2, a_3, ...) aan zó dat de bewering

$$\forall_{m\in\mathbf{N}}\ \exists_{k\in\mathbf{R}}\ \forall_{n\in\mathbf{N},\ n>m}\ [a_n>k]$$

waar is. Geef ook een rij waarvoor deze bewering onwaar is.
Doe hetzelfde in de volgende gevallen.

(b) $\exists_{m\in\mathbf{N}}\ \forall_{k\in\mathbf{R}}\ \exists_{n\in\mathbf{N},\ n>m}\ [a_n>k]$,

(c) $\neg(\exists_{m\in\mathbf{R}}\ \forall_{k\in\mathbf{N}}\ \exists_{n\in\mathbf{N},\ n>k}\ [a_n>m])$.

1.19.19. Geef een eindige deelverzameling $V\subset\mathbf{N}$ aan waarvoor

$$\neg(\forall_{z\in\mathbf{N}}\ \exists_{x\in V}\ \forall_{y\in V}\ [x+y\neq z]).$$

waar is. Geef ook een eindige deelverzameling $V\subset\mathbf{N}$ waarvoor bovenstaande bewering onwaar is.

1.19.20. ANDERE QUANTOREN

Natuurlijk komen er meer quantoren voor dan al-quantoren en existentiële quantoren. We noemen een aantal voorbeelden:
(a) Voor precies één individu,
(b) Voor tenminste twee individuen,
(c) Voor ten hoogste één individu.
Hiervan is alleen het voorbeeld (a) zo belangrijk dat we er een apart symbool voor invoeren, nl. $\exists!$

Zo is $\exists!_{x\in\mathbf{R}}\,[x^2=1]$ onwaar en $\exists!_{x\in\mathbf{R},\ x\geq 0}\,[x^2=1]$ waar.
Men kan de onder (a), (b) en (c) genoemde quantoren (evenals andere niet genoemde) uitdrukken met behulp van $\forall$, $\exists$ en de symbolen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$ en $=$ (en uiteraard velerlei haken).

(a) Een andere uitdrukking voor $\exists!_{x\in V}\,[P(x)]$ is

$$\exists_{x\in V}\,[P(x)\wedge(\forall_{y\in V}\,[P(y)\Rightarrow(x=y)])].$$

(b) *Voor tenminste twee elementen x uit V geldt P(x)* kan men in symbolen bijvoorbeeld weergeven als

$$\exists_{x\in V}\,\exists_{y\in V}\,[P(x)\wedge P(y)\wedge(x\neq y)].$$

(c) Voor ten hoogste één $x\in V$ geldt $P(x)$ wordt dan bijvoorbeeld

$$\forall_{x\in V}\,\forall_{y\in V}\,[(P(x)\wedge P(y))\Rightarrow(x=y)].$$

OPGAVEN

1.19.21. Laat $V\subset\mathbf{R}$. Schrijf $\neg(\exists!_{x\in\mathbf{N}}\,[x\in V])$ op een andere manier. Geef een voorbeeld van een verzameling V waarvoor deze bewering waar is. Geef ook een voorbeeld van een verzameling V waarvoor deze bewering onwaar is.

1.19.22. Geef een voorbeeld van een relatie $R(x,y)$ met reële veranderlijken x en y waarvoor:

$\exists!_{x\in\mathbf{R}}\,\forall_{y\in\mathbf{R}}\,[R(x,y)]$ waar is en

$\forall_{y\in\mathbf{R}}\,\exists!_{x\in\mathbf{R}}\,[R(x,y)]$ onwaar is.

(Vergelijk dit met 1.19.14.)

1.19.23. Geef een voorbeeld van een deelverzameling $V\subset\mathbf{R}$ waarvoor de bewering

$$\forall_{x\in V}\,\exists!_{y\in V}\,[(x>0)\Rightarrow(x=y^2)]$$

waar is; geef ook een voorbeeld van een $V\subset\mathbf{R}$ waarvoor deze bewering onwaar is.

1.19.24. Gegeven is een beweringsvorm P(x); de individuen zijn de natuurlijke getallen. Geef de volgende beweringen in symbolen weer:
(a) ten hoogste twee natuurlijke getallen voldoen aan P(x),
(b) precies twee natuurlijke getallen voldoen aan P(x),
(c) ten minste drie natuurlijke getallen voldoen aan P(x).

1.20. Vereniging en doorsnede van een willekeurige collectie verzamelingen

1.20.1. DEFINITIE. *Is* I *een verzameling en is aan ieder element* $i \in I$ *een* A_i *toegevoegd dan definieert men* $\cup_{i\in I} A_i$ *en* $\cap_{i\in I} A_i$ *door:*

$$\cup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists_{i\in I} [x\in A_i]\},$$

$$\cap_{i\in I} A_i := \{x \mid \forall_{i\in I} [x\in A_i]\}.$$

We noemen I *de indexverzameling.*

OPMERKINGEN

1.20.2. Is I een verzameling met eindig veel elementen dan komen deze definities overeen met die van 1.8.7 en 1.9.8.

1.20.3. In $\cup_{i\in I} A_i$ en $\cap_{i\in I} A_i$ is i een gebonden veranderlijke:

$$\cap_{i\in I} A_i = \cap_{k\in I} A_k.$$

1.20.4. Is I een verzameling van natuurlijke getallen van de vorm $\{k,k+1,k+2,\ldots,m\}$ of $\{k,k+1,k+2,\ldots\}$ dan schrijft men in plaats van $\cup_{i\in I} A_i$: $\cup_{i=k}^{m} A_i$ resp. $\cup_{i=k}^{\infty} A_i$ en evenzo in plaats van $\cap_{i\in I} A_i$: $\cap_{i=k}^{m} A_i$ resp. $\cap_{i=k}^{\infty} A_i$.

EIGENSCHAPPEN. Laat gegeven zijn $A_i \subset W$ $(i\in I)$; laat * complementvorming ten opzichte van W aanduiden. Nu gelden de volgende generalisaties van de dualiteitswetten van de Morgan (1.11.11 en 1.11.12):

1.20.5. $$(\cup_{i\in I} A_i)^* = \cap_{i\in I} A_i^*.$$

1.20.6. $$(\cap_{i\in I} A_i)^* = \cup_{i\in I} A_i^*.$$

OPGAVEN

1.20.7. Voor iedere $r \in \mathbf{R}$ definiëren we:

$$C_r := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=r^2\}.$$

Bewijs:

(a) $\cup_{r\in\mathbf{R}} C_r = \mathbf{R}^2$, (b) $\cap_{r\in\mathbf{R}} C_r = \emptyset$.

1.20.8. $I=\mathbf{N}, A_1, A_2, \ldots$ is een rij verzamelingen. Laat zien dat: $\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{k=m}^{\infty} A_k = \{x \mid x \notin A_i$ voor slechts eindig veel waarden van $i\}$; $\cap_{m=1}^{\infty} \cup_{k=m}^{\infty} A_k = \{x \mid x \in A_i$ voor oneindig veel waarden van $i\}$.

1.20.9. Bewijs de volgende gegeneraliseerde distributieve wetten:

(a) $$B\cap(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} (B\cap A_i),$$

(b) $$B\cup(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} (B\cup A_i).$$

1.20.10. Welke zijn de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$; de notatie is die van 1.13.8.

(a) $\cap_{n\in\mathbf{N}} [n,\infty)$, (d) $\cup_{n\in\mathbf{N}} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$,

(b) $\cup_{n\in\mathbf{N}} [n,\infty)$, (e) $\cap_{n\in\mathbf{N}} [-n,n]$,

(c) $\cap_{n\in\mathbf{N}} [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$, (f) $\cup_{n\in\mathbf{N}} [-n,n]$.

1.21. Cartesische producten

1.21.1. Van nu af zullen we gebruiken het begrip *geordend paar*. Zijn a en b elementen van een zekere verzameling

dan noteren we het geordende paar van a en b als (a,b). In het algemeen is $(a,b)\neq(b,a)$; $(a,b)=(b,a)$ dan en slechts dan als $a=b$.
We wijzen er op, dat door deze afspraak het begrip geordend paar als een ongedefiniëerd begrip ingevoerd is. Dit is echter alleen gemakshalve gebeurd; men kan met behulp van de tot nu toe ingevoerde verzamelingstheoretische begrippen een definitie van geordend paar geven. We verwijzen naar [12] hoofdstuk VI.
Zijn $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ dan beduidt (a,b) zowel het geordende paar als het open interval $\{x\mid a<x<b\}$ (zie 1.13.8). In de praktijk komt uit deze tweeduidigheid geen verwarring voort.

1.21.2. DEFINITIE. *Het cartesisch product van de verzamelingen* A *en* B (*notatie* $A\times B$) *is de verzameling die als elementen heeft de geordende paren* (a,b) *waarbij* $a\in A$, $b\in B$.

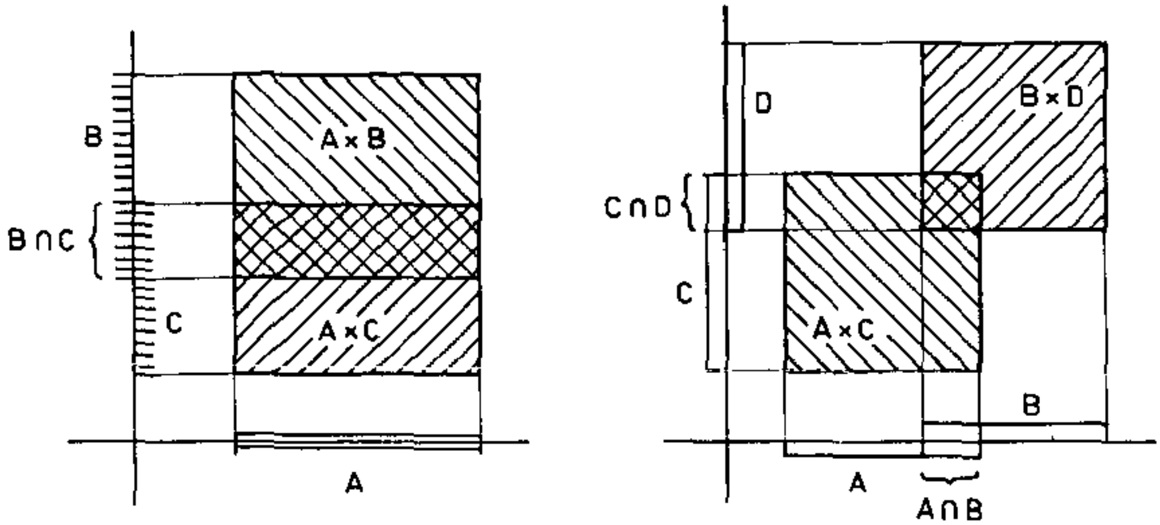
Met de notatie uit 1.13 kunnen we dus schrijven $A\times B = \{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$. Geheel analoog definiëert men $A\times B\times C$ als een verzameling waarvan de elementen geordende tripels zijn: $A\times B\times C := \{(a,b,c)\mid a\in A, b\in B, c\in C\}$.
We hebben hier niet gedefiniëerd wat een tripel is, met gebruikmaking van geordende paren kan men dit wel makkelijk doen (zie 1.22.32). Evenzo voor $A\times B\times C\times D$ enz.
De in 1.17.3 aangeduide kunstgreep om beweringsvormen met meer veranderlijken te vermijden bestaat er nu in een beweringsvorm R(x,y) met X en Y als individuenverzamelingen voor x en y te beschouwen als een beweringsvorm met één veranderlijke die $X\times Y$ als individuenverzameling heeft. Evenzo voor R(x,y,z) enz. Dit is overigens gekunsteld; we zullen het in de regel niet doen.

1.21.3. We gebruiken de volgende notaties:
$A\times A=:A^2$, $A\times A\times A=:A^3$ enz. in het bijzonder is $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=:\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=:\mathbf{R}^3$ enz.

1.21.4. De naam Cartesisch product wijst op de analogie met de door Descartes (=Cartesius) (1596-1650) ingevoerde coördinaten in het platte vlak dat in de analytische meetkunde geïdentificeerd wordt met $\mathbf{R}^2$. De lezer kan sommige beweringen over Cartesische producten illustreren met deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ waarbij de "factoren" deelverzamelingen zijn van de X en Y as. Zie figuur 14. In een willekeurig Cartesisch product $A\times B$ noemt men a, resp. b wel de eerste resp. tweede component van (a,b).

EIGENSCHAPPEN

1.21.5. Het Cartesische product is niet associatief: $(A\times B)\times C$ en $A\times(B\times C)$ zijn in het algemeen verschillende verzamelingen ($A\times B\times C$ is nog een andere verzameling).



$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

Figuur 14

1.21.6. $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$ voor elke verzameling A.

1.21.7. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ voor alle A, B en C.

1.21.8. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ voor alle A, B en C.
1.21.7 en 1.21.8 drukken uit dat het Cartesische product distributief is ten opzichte van doorsnedevorming.

1.21.9. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(A\times D)\cap(B\times C)\cap(B\times D)=$

$$=(A\times C)\cap(B\times D)=(A\times D)\cap(B\times C).$$

1.21.10. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ voor alle A, B en C.

1.21.11. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ voor alle A, B en C. Deze laatste twee eigenschappen geven de distributiviteit van $\times$ ten opzichte van $\cup$ aan.

OPGAVEN

1.21.12. Zij $A:=\{1,2,3\}$; $B:=\{a,b\}$.
(a) Geef alle elementen aan van de volgende verzamelingen: A^2; $A\times B$; $B\times B\times A$.
(b) Geef van elk van de volgende verzamelingen drie elementen aan: $(A\times B)\times A$; $A\times(B\times A)$; $B\times(B\times A)$; $A^2\times B$.

1.21.13. U, V en W zijn verzamelingen; welke van de volgende beweringen zijn waar voor elk drietal verzamelingen U, V en W waarvoor $U=V\cap W$?
(a) $U\times U=(V\times V)\cap(W\times W)$,
(b) $U\times U=(V\times W)\cap(W\times V)$.

1.21.14. A is een verzameling met m elementen, B is een verzameling met n elementen.

(a) Hoeveel elementen heeft $A\times B$?

(b) Hoeveel deelverzamelingen heeft $A\times B$? (vergelijk 1.6.6).

(c) Hoeveel deelverzamelingen van $A\times B$ zijn van de vorm $A_0\times B_0$, waarin $A_0\subset A$ en $B_0\subset B$? (N.B. 1.21.6!)

1.22. Afbeeldingen

1.22.1. We zullen ons in deze paragraaf bezighouden met het begrip afbeelding. Het is gebruikelijk afbeeldingen te introduceren met behulp van het ongedefiniëerde begrip: voorschrift. Men zou dan kunnen zeggen: "onder een afbeelding van een verzameling A in een verzameling B verstaat men één of ander voorschrift waardoor aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd." Naast het woord afbeelding gebruikt men ook wel het woord "functie". Men spreekt dan van een B-waardige functie op A; in het bijzonder: is $B=\mathbf{R}$ dan spreekt men van een reëelwaardige of reële functie op A. Het bezwaar van de bovengegeven begripsbepaling is de vaagheid van de uitdrukking "één of ander voorschrift". Als we denken aan de door middel van tabellen gegeven functies, vermeld in een statistisch jaarboek (het aantal inwoners als functie van de gemeente enz.) weten we dat voorschrift meer omvat dan formule. We kunnen dit bezwaar wegnemen, door het begrip afbeelding te definiëren op de nu volgende manier.

1.22.2. DEFINITIE. *Een afbeelding* F *van een verzameling* A *in een verzameling* B *is een deelverzameling van* $A\times B$ *met de eigenschap*

$$\forall_{a\in A}\ \exists!_{b\in B}\ [(a,b)\in F].$$

We zeggen ook wel dat F is een functie op A met waarden in B. A noemt men wel de definitieverzameling van F. Laten we nagaan wat de definitie inhoudt indien $A=B=\mathbf{R}$. Een reële functie F op $\mathbf{R}$ is dan een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$, met de eigenschap dat er voor elke reële x, precies één $y\in\mathbf{R}$ is met $(x,y)\in F$. Een dergelijke deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ is men gewend een *grafiek* te noemen. In 1.22.2 (definitie) wordt dus geen onderscheid gemaakt tussen functie en grafiek. N.B: de tekening die een schets is van de grafiek als deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ noemt men heel vaak ook weer grafiek.

1.22.3. OPGAVE. Schets de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ en ga na, welke afbeeldingen van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ zijn.

(a) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$, (c) $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(x,y) \mid |x|=|y|\}$, (d) $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,\ y>0\}$.

1.22.4. We gingen er toe over afbeeldingen te definiëren als deelverzamelingen van een Cartesisch product omdat het begrip "voorschrift" niet *voldoende duidelijk leek* om als ongedefiniëerd begrip te gebruiken. Ook kwamen we zo tegemoet aan het streven (dat overigens niet het onze is; zie 1.21.1) het aantal ongedefiniëerde begrippen *zoveel mogelijk te beperken*. De lezer doet er echter goed aan het intuïtieve begrip "voorschrift van toevoeging" te bewaren. De voorstellingswijze in de figuren 15, 17, 18 en 19 gaat ook van dit intuïtieve begrip uit.

OPMERKINGEN

1.22.5. Voor afbeeldingen gebruikt men meestal de letters $F,G,H,\ldots, f,g,h,\ldots\ \phi,\chi,\psi,\ldots$. Een handige notatie om aan te geven dat F een afbeelding van A in B is de volgende: $F:A\to B$.

1.22.6. We gebruiken de symbolen $F:A\to B$ in twee betekenissen:

a. Als aanduiding van: "F is een afbeelding van A in B".

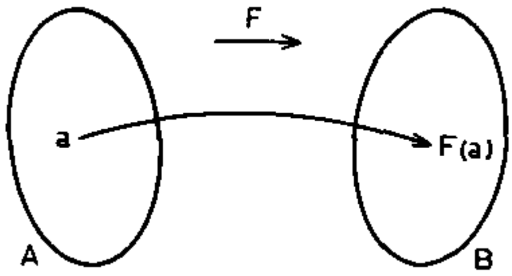
b. Als aanduiding: "F, die een afbeelding van A in B is, ...".

1.22.7. Als B deelverzameling van C is, dan is $A\times B$ het van $A\times C$. Iedere deelverzameling van $A\times B$ is dan ook deelverzameling van $A\times C$. Bij iedere afbeelding van A in B bestaat er dus een afbeelding van A in C die uit dezelfde paren bestaat.

1.22.8. DEFINITIE. *Is* F *een afbeelding van* A *in* B, *en is* $(a,b)\in F$ *dan heet* b *het beeld van* a; *notatie* $b=F(a)$ (*soms ook* $b=Fa$). *Is* $A_0\subset A$ *dan heet* $F(A_0):=\{F(a) \mid a\in A_0\}$ *het beeld van* A_0.

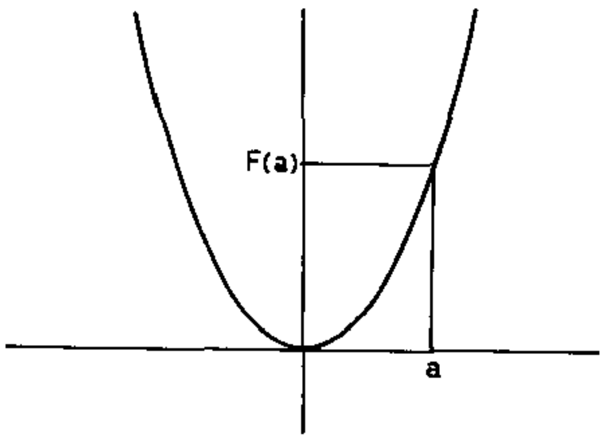
OPMERKINGEN

1.22.9. Is F een afbeelding van A in B dan is $y=F(x)$ een relatie waarbij A de individuenverzameling van x is en B die van y. Een veel gebruikte wijze om afbeeldingen te beschrijven is van ieder element uit A het beeld in B aan te geven; zo kan men de functie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefiniëerd door $F:=\{(x,x^2) \mid x\in\mathbb{R}\}$ ook definiëren door $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,[F(x):=x^2]$.



$F: A \rightarrow B$

Figuur 15



$F: R \rightarrow R$ met $F = \{(x, x^2) \mid x \in R\}$

Figuur 16

1.22.10. Let op het verschil. Is $F{:}A \rightarrow B$, $a \in A$, dan is $F(a) \in B$; $F(\{a\}) = \{F(a)\} \subset B$.

1.22.11. Bij $F{:}A \rightarrow B$ hoort een afbeelding van de verzameling van alle deelverzamelingen van A in de verzameling van alle deelverzamelingen van B gedefiniëerd door

$$\{(A_0, F(A_0)) \mid A_0 \subset A\}.$$

Het dubbele gebruik van het woord beeld in 1.22.8 en het verschil gesignaleerd in 1.22.10 komt voort uit het feit dat we deze afbeelding van $P(A) = \{A_0 \mid A_0 \subset A\}$ in $P(B) = \{B_0 \mid B_0 \subset B\}$ weer met F aangeven.

1.22.12. Voor $F:A\to B$ en de bijbehorende $F:P(A)\to P(B)$ hebben we: is $A_0 \subset A$ dan $F(A_0)=\cup_{a\in A_0} \{F(a)\}$.

1.22.13. Voor elke $F:A\to B$ geldt: $F(\emptyset)=\emptyset$.

1.22.14. DEFINITIE. *Is* $F:A\to B$ *en is* $B_0\subset B$ *dan heet* $F^{\leftarrow}(B_0):=\{a\in A \mid F(a)\in B_0\}$ *het volledig origineel van* B_0.

Een gevolg van deze definitie is dat $F^{\leftarrow}(\{b\})=\{a\in A\mid F(a)=b\}$ $(b\in B)$. Deze laatste verzameling noemt men wel slordig: "het volledig origineel van b". Een verder gevolg: $F^{\leftarrow}(B_0)=\cup_{b\in B_0} F^{\leftarrow}(\{b\})$.

1.22.15. Is $F:A\to B$ dan is $F^{\leftarrow}:P(B)\to P(A)$.

EIGENSCHAPPEN

Voor elke $F:A\to B$, en elke $A_1\subset A$, $A_2\subset A$, $B_1\subset B$, $B_2\subset B$ geldt:

1.22.16. $F(A_1\cup A_2) = F(A_1)\cup F(A_2)$,

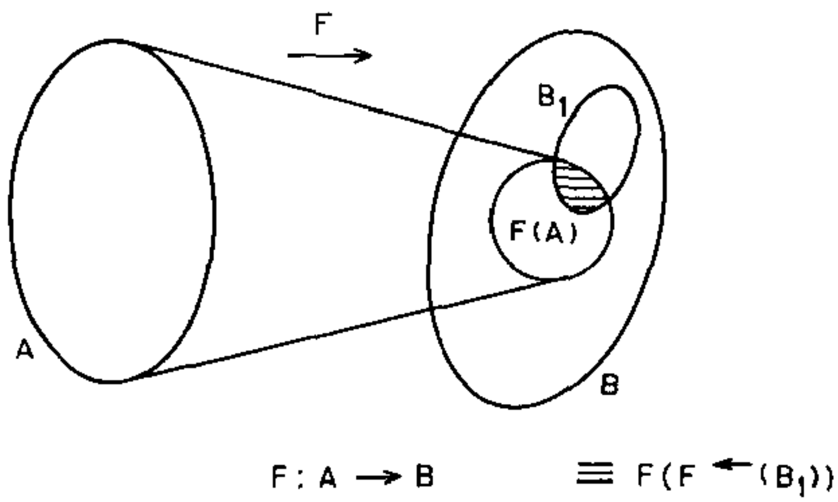
1.22.17. $F(A_1\cap A_2) \subset F(A_1)\cap F(A_2)$,

1.22.18. $F^{\leftarrow}(B_1\cup B_2) = F^{\leftarrow}(B_1)\cup F^{\leftarrow}(B_2)$,

1.22.19. $F^{\leftarrow}(B_1\cap B_2) = F^{\leftarrow}(B_1)\cap F^{\leftarrow}(B_2)$,

1.22.20. $F^{\leftarrow}(F(A_1))\supset A_1$,

1.22.21. $F(F^{\leftarrow}(B_1))\subset B_1$; $F(F^{\leftarrow}(B_1))=B_1\cap F(A)$.



Figuur 17

1.22.22. VOORBEELD. De inclusies in 1.22.17, 1.22.20 en 1.22.21 kunnen echt zijn zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: Zij $F:\{1,2\}\to\{a,b\}$ gedefiniëerd door: $F=\{(1,a),(2,a)\}$; zij $A_1:=\{1\}\subset\{1,2\}=:A$, $A_2:=\{2\}\subset A$, $B_1:=\{b\}\subset\{a,b\}=:B$. Nu is $A_1\cap A_2=\emptyset$, $F(A_1\cap A_2)=\emptyset$ (1.22.13), $F(A_1)=F(A_2)=\{a\}=F(A_1)\cap F(A_2)$; $\overleftarrow{F}(F(A_1))=\overleftarrow{F}(\{a\})=A$; $\overleftarrow{F}(B_1)=\emptyset$, dus $F(\overleftarrow{F}(B_1))=\emptyset$.

OPGAVEN

1.22.23. $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{1,2,3\}$;
$F=\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,2)\}$.

(a) Bewijs dat F een afbeelding van A in B is.

(b) Bepaal $F(A)$.

(c) Bepaal $\overleftarrow{F}(B)$ en $\overleftarrow{F}(\{1\})$.

1.22.24. Bewijs de eigenschappen 1.22.16 t/m 1.22.21.

1.22.25. Beschouw de afbeelding $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefiniëerd door $F:=\{(x,x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}$. Schets (de grafiek van) F. Geef deelverzamelingen A_1, A_2, B van $\mathbb{R}$ waarvoor: $F(A_1\cap A_2)\neq F(A_1)\cap F(A_2)$; $\overleftarrow{F}(F(A_1))\neq A_1$; $F(\overleftarrow{F}(B))\neq B$.

1.22.26. Zij $F:A\to B$, $A_1\subset A$, $A_2\subset A$, $B_1\subset B$, $B_2\subset B$.

(a) Bewijs:

$$F(A_1\backslash A_2)\supset F(A_1)\backslash F(A_2),$$

$$\overleftarrow{F}(B_1\backslash B_2)=\overleftarrow{F}(B_1)\backslash\overleftarrow{F}(B_2).$$

(b) Geef een voorbeeld waarvoor de inclusie in (a) echt is.

1.22.27. Geef een voorbeeld van een afbeelding $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ waarvoor geldt:

$$\forall_{b\in\mathbb{R}}\ \exists_{a_1\in\mathbb{R}}\ \exists_{a_2\in\mathbb{R}}\ [(a_1\neq a_2)\wedge(F(a_1)=F(a_2)=b)].$$

1.22.28. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ is gedefiniëerd door

$$\forall_{(x,y)\in \mathbf{R}^2}\ [f((x,y)):=(x^2,y^2)].$$

Zij $X:=\{(x,1)\mid x\in\mathbf{R}\}$. Bepaal $f^{\leftarrow}(X)$.

1.22.29. Zij $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ gedefiniëerd door $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ [f(x):=(x,x+2)]$; zij $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ gedefiniëerd door $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ [g(x):=(x+2,x)]$; zij $V:\{x\mid 0\le x\le 1\}$. Bepaal $g^{\leftarrow}(f(V))$.

1.22.30. A is een verzameling van m elementen, B is een verzameling met n elementen.
Hoeveel afbeeldingen van A in B zijn er?

We besluiten deze paragraaf met nog enige opmerkingen.

1.22.31. Voor de verzameling van alle afbeeldingen van A in B gebruikt men vaak de notatie: B^A.

1.22.32. Het begrip afbeelding kan dienen om een definitie te geven van het begrip rij, dat we tot nu in voorbeelden en opgaven gebruikt hebben zonder het gedefiniëerd te hebben.

DEFINITIE. *Een rij van elementen uit een verzameling* A *is een afbeelding van* $\mathbf{N}$ *in* A.

Wil men $f:\mathbf{N}\to A$ als rij beschouwen dan schrijft men in plaats van $f=\{(n,f(n))\mid n\in\mathbf{N}\}$ meestal $(f(1),f(2),f(3),\dots)$. Meestal schrijft men in plaats hiervan dan ook nog $(f_1,f_2,f_3,\dots)$. Een andere notatie is $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ of $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ of $(f_n)_n$. Men dient zich goed te realiseren dat de rij van elementen van A, $(f_n)_n$, iets anders is dan $\{f_n\mid n\in\mathbf{N}\}$. Een voorbeeld mag dit verduidelijken: zij $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ gedefiniëerd door $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [f(n):=1]$ dan is $\{f(n)\mid n\in\mathbf{N}\}=f(\mathbf{N})=\{1\}$ terwijl $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de rij $(1,1,1,\dots)$ voorstelt.
Gebruik makend van de notatie afgesproken in 1.22.31 kan men de verzameling van alle rijen reële getallen dus voorstellen door: $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
In het voorafgaande werd alleen over oneindige rijen gesproken; we kunnen dezelfde notationele afspraken ook voor eindige rijen maken. Schrijft men bijvoorbeeld in plaats van de afbeelding $f:\{1,2\}\to A$ gegeven door $f=\{(1,a_1),(2,a_2)\}$ waarbij dus $a_1=f(1)$, $a_2=f(2)$, de eindige rij (a_1,a_2), dan ziet men dat daardoor het onderscheid tussen $A^{\{1,2\}}$ en A^2 komt te vervallen. Evenzo $A^{\{1,2,3\}}$ en A^3 enz. Zo zou men ook kunnen definiëren $A\times B\times C:=$
$:=\{f\mid f:\{1,2,3\}\to A\cup B\cup C,\ f(1)\in A,\ f(2)\in B,\ f(3)\in C\}$.

(Zie 1.21.2.)

1.22.33. OPGAVE. Beschouw de volgende "definitie" die bedoeld is om de in 1.21.1 gesignaleerde moeilijkheid te ondervangen: Het Cartesisch product $A \times B$ van de verzamelingen A en B is de verzameling van al die afbeeldingen f van $\{1,2\}$ in $A \cup B$ waarbij $f(1) \in A$ en $f(2) \in B$. Ga na dat deze definitie en 1.22.2 aanleiding zijn tot een vicieuze cirkel.

1.22.34. RESTRICTIE
Is $F:A \to B$ en is $A_0 \subset A$ dan is $\{(a,b) \in F \mid a \in A_0\}$ een afbeelding van A_0 in B. Deze wordt de restrictie van F tot A_0 genoemd. Meestal noteert men de restrictie weer met F; vaak ook met $F|_{A_0}$.

1.22.35. Is $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dan zegt men ook wel: "F is een reële functie van twee reële veranderlijken", men gebruikt dan meestal de haakjesloze notatie uit 1.22.8 (definitie) dus $F(x,y)$ in plaats van $F((x,y))$. Evenzo voor afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$. Dit gebruik is juist tegenovergesteld aan de conventie gesignaleerd in 1.21.2.

1.22.36. Het is gebruikelijk reële functies aan te geven met behulp van formules, bijv. $f(x)=1/(x^2-1)$. Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld bedoelt men dan steeds dat deze functie beschouwd wordt als een afbeelding van de gehele deelverzameling van $\mathbb{R}$ bestaande uit die reële getallen waarvoor de formule zin heeft. In het voorbeeld is dat $\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$. Wil men restricties aangeven dan dient men dit te vermelden. Zo is $f(x)=1/(x^2-1)$ $(0<x<1)$ de restrictie tot $(0,1)$ van de beschouwde functie.

1.23. Afbeeldingen op; één-éénduidigheid; inversen

1.23.1. $F:A \to B$ *heet een afbeelding van* A *op* B *indien* $F(A)=B$. (Men zegt ook wel: F is een surjectie van A op B; F is surjectief.)
$F:A \to B$ is dus *op* indien ieder element van B beeld is van ten minste één element van A. We kunnen die ook formuleren als $\forall_{b \in B}\ \exists_{a \in A}\ [F(a)=b]$.

1.23.2. DEFINITIE. $F:A \to B$ *heet één-éénduidig indien*

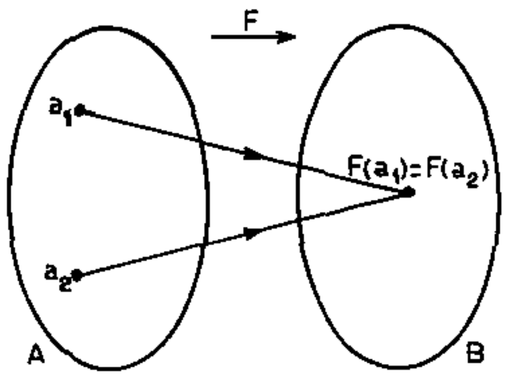
$$\forall_{b \in F(A)}\ \exists!_{a \in A}\ [F(a)=b].$$

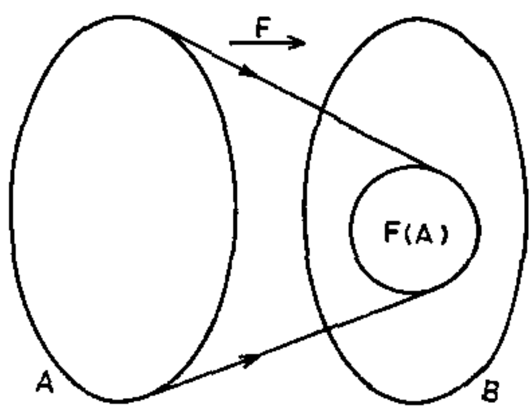
(Men zegt ook wel: F is een injectie van A in B; F is injectief.)

$F:A\to B$ heet dus één-éénduidig indien ieder element van B beeld is van ten hoogste één element van A. We kunnen één-éénduidigheid ook formuleren op een van de volgende manieren:

$$\forall_{a_1\in A}\ \forall_{a_2\in A}\ [(F(a_1)=F(a_2))\Rightarrow(a_1=a_2)],$$

$$\forall_{a_1\in A}\ \forall_{a_2\in A}\ [(a_1\neq a_2)\Rightarrow(F(a_1)\neq F(a_2))].$$





Figuur 18

Een afbeelding kan dus één-éénduidig zijn zonder afbeelding op te zijn en omgekeerd. (Een afbeelding die één-éénduidig en op is heet ook wel bijectief of een bijectie).

1.23.3. STELLING. *Is* $F:A\to B$ *een één-éénduidige afbeelding van* A *op* B *en is* $G:=\{(b,a)\mid (a,b)\in F\}$ *dan is* G *een één-éénduidige afbeelding van* B *op* A.

Bewijs. Omdat $F(A)=B$, en F één-éénduidig is geldt:

$$\forall_{b\in B}\ \exists!_{a\in A}\ [F(a)=b].$$

Krachtens de definitie van G betekent $F(a)=b$ echter $(b,a)\in G$. G is dus een afbeelding van B in A.
Voorts is $G(B)=\{a\mid \exists_{b\in B}\ [(b,a)\in G]\}=A$ dus G is een afbeelding op.
Is $b_1\neq b_2$, $G(b_1)=a_1$, $G(b_2)=a_2$, dan is $b_1=F(a_1)$, $b_2=F(a_2)$ en dus $a_1\neq a_2$ omdat F een afbeelding is; dit betekent echter tevens dat G één-éénduidig is.

1.23.4. DEFINITIE. *Is* $F:A\to B$ *een één-éénduidige afbeelding van* A *op* B, *dan heet de in* 1.23.3 *(stelling) gedefiniëerde afbeelding* $G:B\to A$ *de inverse van* F.

Als notatie van de inverse afbeelding zullen we soms weer gebruiken $F^{\leftarrow}$. Dit gebruik is in overeenstemming met de reeds eerder gemaakte afspraak een afbeelding van A in B en de bijbehorende afbeelding van P(A) in P(B) met hetzelfde symbool aan te geven. Nu spreken we af een bepaalde afbeelding van P(B) in P(A) en de bijbehorende afbeelding - zo deze tenminste bestaat - van B in A met hetzelfde symbool te noteren. Als we opschrijven $F^{\leftarrow}(b)$ dan zit in deze notatie reeds besloten dat F een inverse heeft en dus dat F één-éénduidig en op is. Laat F een inverse hebben en laat $F(a)=b$ dan hebben we dus tevens: $F(\{a\})=\{b\}$, $F^{\leftarrow}(b)=a$, $F^{\leftarrow}(\{b\})=\{a\}$. Veel auteurs zijn hierin zeer slordig: vaak ziet men $F^{\leftarrow}(b)$ nu eens in de door ons afgesproken betekenis en even later in de betekenis van $F^{\leftarrow}(\{b\})$.
Zij F een één-éénduidige afbeelding van A op B en zij $B_0\subset B$. $F^{\leftarrow}(B_0)$ heeft nu ook bij ons twee interpretaties: (i) het beeld van de deelverzameling B_0 bij de afbeelding $F^{\leftarrow}:B\to A$; (ii) het beeld van het element B_0 bij de afbeelding $F^{\leftarrow}:P(B)\to P(A)$. Bij beide interpretaties is $F^{\leftarrow}(B_0)$ evenwel dezelfde deelverzameling van A. Dreigt er geen verwarring dan noteert men de inverse van F ook vaak met F^{-1}. Loopt de lezer echter gevaar de inverse van F en het quotient $1/F(x)$ te verwarren, dan gebruikt men voor de inverse uitsluitend de notatie $F^{\leftarrow}$. Beide wijzen van noteren van inverse afbeeldingen zijn gebruikelijk. De lezer moet bij vluchtig raadplegen van een boek nauwkeurig nagaan welke notatie er gebruikt wordt. Soms heeft $\sin^{-1}$ de betekenis $1/(\sin x)$, soms arcsin x (zie 1.26.15 (herhaling)).
We zullen voorlopig de inverse van F met F^{-1} aangeven.

EIGENSCHAPPEN

1.23.5. Is $G=F^{-1}$ en $F(a)=b$ dan is $G(b)=a$.

1.23.6. Is $G=F^{-1}$ dan is $F=G^{-1}$.

1.23.7. Zijn A en B deelverzameling van $\mathbf{R}$ dan betekent de overgang van (a,b) op (b,a) in $\mathbf{R}^2$ juist spiegeling ten opzichte van de *diagonaal* $:=\{(x,x) \mid x\in\mathbf{R}\}$. Dit betekent dat de gegeven definitie van een inverse afbeelding in overeenstemming is met de gebruikelijke definitie van inverse functie. (Zie ook 1.26.14 (herhaling).)

1.23.8. DEFINITIE. *Is* A *een verzameling dan heet* $I_A:=\{(a,a)\mid a\in A\}$ *de identieke afbeelding van* A *op zichzelf.*

I_A is een één-éénduidige afbeelding van A op A. Er geldt: $\forall_{a\in A}\ [I_A(a)=a]$; $I_A^{-1}=I_A$.

OPGAVEN

1.23.9. A is een verzameling met n elementen.

(a) Hoeveel afbeeldingen van A in A zijn er?

(b) Hoeveel afbeeldingen van A op A zijn er?

(c) Hoeveel één-éénduidige afbeeldingen van A in A zijn er?

1.23.10. A is een verzameling met n elementen; B is een verzameling met m elementen. Hoeveel één-éénduidige afbeeldingen van A in B zijn er?

1.23.11. (Schubfachschlussprinzip, Pigeon hole principle.) Zij A een verzameling met n elementen; zij B een verzameling met m elementen; zij $n>m$. Als $f:A\to B$, dan is f niet één-éénduidig.

1.23.12. $B=\{0,1\}$. Wat zijn alle afbeeldingen van B in B? Welke van deze afbeeldingen zijn één-éénduidig en op?

1.23.13. $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}, 0\le x\le 1\}$.
$F:A\to A$ is gedefiniëerd door: $\forall_{x\in A}\ [F(x):=\sqrt{1-x^2}\,]$.

(a) Is F een afbeelding van A op A?

(b) Heeft F een inverse?

1.23.14. $\mathbf{R}^+:=\{x\in\mathbf{R}\mid x\ge 0\}$; $\mathbf{Q}^+:=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\ge 0\}$.

(a) $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ is gedefiniëerd door $\forall_{x\in\mathbf{R}^+}\ [f(x):=x^2]$.
Is f op, één-éénduidig?

(b) $g:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ is gedefiniëerd door $\forall_{x\in\mathbf{Q}^+}\ [g(x):=x^2]$.
Is g op, één-éénduidig?

1.23.15. $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ is gedefiniëerd door $\forall_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\ [f(x,y):=(x,0)]$.

(a) Is f een afbeelding op; is f één-éénduidig?

(b) Wat is $f^{\leftarrow}(\{(1,0)\})$?

1.23.16. Voor iedere $a \in \mathbf{R}$ wordt een afbeelding $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gedefiniëerd door: $\forall_{x \in \mathbf{R}} [f_a(x) := x+a]$.

(a) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbf{R}$ de afbeelding f_a één-éénduidig en op is.

(b) Bepaal $f_7(f_3^{-1}(8))$.

1.23.17. Geef een één-éénduidige afbeelding van de verzameling der natuurlijke getallen op de verzameling der even natuurlijke getallen.

1.23.18. Geef een één-éénduidige afbeelding van het interval $\{x \in \mathbf{R} \mid 1<x<2\}$ op $\mathbf{R}$.

1.23.19. $\phi : \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^2$ is gedefiniëerd door $\forall_{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}} [\phi(f) := (f(1), f(2))]$.

(a) Is ϕ één-éénduidig, op?

(b) Wat is $\phi^{\leftarrow}(\{(0,0)\})$?

1.23.20. Bewijs dat voor een afbeelding $f : X \to Y$ geldt dat f één-éénduidig is dan en slechts dan als $\forall_{A \in P(X)} \forall_{B \in P(X)} [f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)]$.

1.23.21. Zij $F : A \to B$ één-éénduidig en op; bewijs dat de bijbehorende afbeelding $F : P(A) \to P(B)$ ook één-éénduidig en op is.

1.23.22. $F : P(\mathbf{R}) \to P(\mathbf{R})$ is gedefiniëerd door

$$\forall_{A \in P(\mathbf{R})} [F(A) := \{x \mid (x+1) \in A\}].$$

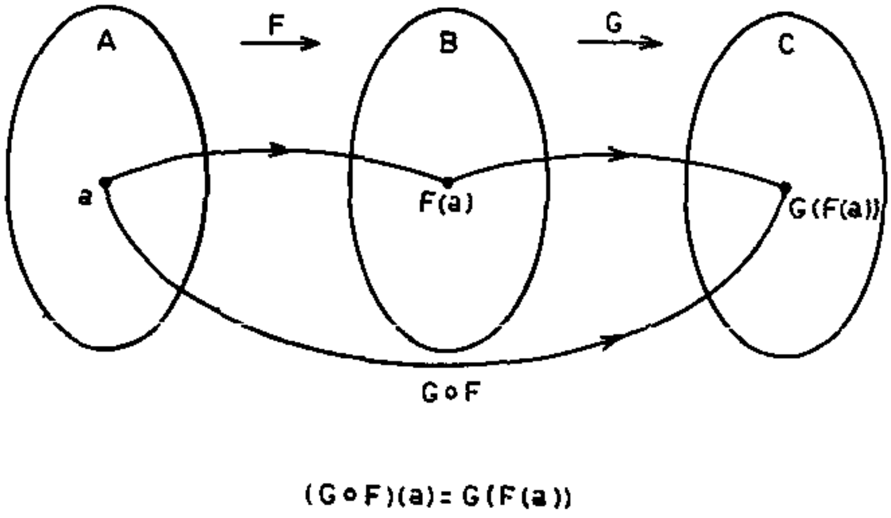
Bewijs dat F één-éénduidig en op is en bepaal de inverse.

1.24. Samengestelde afbeeldingen

1.24.1. DEFINITIE. *Is* $F : A \to B$; $G : B \to C$ *dan is*

$$G \circ F := \{(a, G(b)) \mid a \in A, b = F(a)\}.$$

Nu is $G \circ F$ een afbeelding van A in C. $G \circ F$ heet de *samengestelde afbeelding* van G en F.



Figuur 19

EIGENSCHAPPEN. In elk van de onderstaande eigenschappen is $F:A\to B$; $G:B\to C$; $H:C\to D$.

1.24.2. $\forall_{a\in A}\ [G\circ F(a)=G(F(a))]$.

1.24.3. Is F één-éénduidig en is G één-éénduidig dan is $G\circ F$ één-éénduidig.

1.24.4. Is F een afbeelding van A *op* B en is G een afbeelding van B op C dan is $G\circ F$ een afbeelding van A op C.

1.24.5. Is F een één-éénduidige afbeelding van A op B dan is $F^{-1}\circ F=I_A$; $F\circ F^{-1}=I_B$.

1.24.6. Is F één-éénduidig en op, en is G één-éénduidig en op dan is $G\circ F$ één-éénduidig en op en $(G\circ F)^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}$.

Bewijs. We weten al dat $(G\circ F)^{-1}$ en $F^{-1}\circ G^{-1}$ beide één-éénduidige afbeeldingen van C op A zijn. Laat $c\in C$; zij $F^{-1}\circ G^{-1}(c)=a$, dat wil zeggen $F^{-1}(G^{-1}(c))=a$ wegens 1.24.2.
Nu is $G\circ F(a)=G(F(a))=G(F(F^{-1}(G^{-1}(c))))=G(G^{-1}(c))=c$ wegens 1.24.5. Dus $(G\circ F)^{-1}(c)=a$; dus $(G\circ F)^{-1}(c)=$ $=F^{-1}\circ G^{-1}(c)$.

1.24.7. Is $C_0\subset C$ dan is $(G\circ F)^{\leftarrow}(C_0)=F^{\leftarrow}(G^{\leftarrow}(C_0))$.

1.24.8. Afbeeldingssamenstelling is associatief:

$$H\circ(G\circ F) = (H\circ G)\circ F.$$

Bewijs. Zij $a\in A$, dan is $H\circ(G\circ F)(a)=H(G\circ F(a))=H(G(F(a)))$, terwijl $(H\circ G)\circ F(a)=H\circ G(F(a))=H(G(F(a)))$. Daar a willekeurig is, stemmen de afbeeldingen $H\circ(G\circ F)$ en $(H\circ G)\circ F$ in ieder element van A overeen. We definiëren $H\circ G\circ F:=$ $:=(H\circ G)\circ F$.

1.24.9. Afbeeldingssamenstelling is niet commutatief. In het algemeen zijn $F\circ G$ en $G\circ F$ niet beide gedefiniëerd. Als $A=C$ en $F\circ G$ dus evenals $G\circ F$ gedefiniëerd is, dan is in het algemeen $F\circ G\neq G\circ F$ immers $F\circ G:B\to B$, terwijl $G\circ F:A\to A$. Zelfs indien bovendien $A=B$, dan is in het algemeen nog steeds $F\circ G\neq G\circ F$. We illustreren dit met de afbeeldingen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ en $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefiniëerd door:

$$\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[\,f(x) := \sin x,\ g(x) := 2x^2+1].$$

Nu is $f\circ g(x)=\sin(2x^2+1)$ en $g\circ f(x)=2(\sin x)^2+1$.

1.24.10. GEÏTEREERDE AFBEELDINGEN

Zij $F:X\to X$ dan is $F\circ F:X\to X$; $F\circ F\circ F:X\to X$ enz. We gebruiken de notaties $F_1:=F$; $F_2:=F\circ F$; $F_3:=F\circ F\circ F$; $F_{n+1}:=F\circ F_n=F_n\circ F$ $(n\in\mathbf{N})$. De afbeeldingen F_2, F_3, enz. heten de geïtereerden van F. Men gebruikt ook F^2, F^3, maar daaraan kleven soortgelijke bezwaren als besproken in 1.23.4.

OPGAVEN

1.24.11. Zij $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ gedefiniëerd door $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[F(x):=$ $:=(x+1,2x)]$, zij $G:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $\forall_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}$ $[G((x,y)):=y]$. Bepaal $(G\circ F)^{\leftarrow}(\{x|\ 0\le x\le 2\})$.

1.24.12. Zij $F:X\to X$. Zij A een deelverzameling van X met de eigenschap $F(A)\supset A$.

(a) Voor elke $n\in\mathbf{N}$ geldt $F_{n+1}(A)\supset F_n(A)$. Bewijs dit.

(b) Zij $V:=\cup_{n=1}^{\infty} F_n(A)$; dan is $F(V)=V$. Bewijs dit.

(c) (Voorbeeld) $X:=\mathbf{R}$, $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[F(x):=x^2]$. Bereken V voor $A:=\{x|\ 0\le x\le 1\}$, en voor $A:=\{x|\ 0<x\le 2\}$.

1.24.13. Zij $F:X\to X$. Zij A een deelverzameling van X met $F(A)\subset A$. Geef de beweringen die in deze situatie overeenkomen met 1.24.12 (a) en 1.24.12 (b). Bewijs deze.

1.25. Karakteristieke functies

1.25.1. We beschouwen een vaste verzameling U; $W:=\{0,1\}$. Aan iedere deelverzameling $A\subset U$ voegen we toe de afbeelding $\chi_A:U\to W$ gedefiniëerd door:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 \text{ als } x\in A, \\ 0 \text{ als } x\in U\setminus A=A^*. \end{cases}$$

Met andere woorden: $\chi_A:=\{(x,1)\mid x\in A\}\cup\{(x,0)\mid x\in U\setminus A\}$. $\chi_A(x)$ heet de karakteristieke functie van A. Uit $\overleftarrow{\chi_A}(\{1\})=A$ volgt dat een deelverzameling van U door zijn karakteristieke functie volledig bepaald is. Merk op dat $\forall_{x\in U}\ \forall_{A\in P(U)}[(\chi_A(x))^2=\chi_A(x)]$.

EIGENSCHAPPEN. Voor alle deelverzamelingen A en B van U en voor elke $x\in U$ geldt:

1.25.2. $\chi_{A^*}(x) = 1-\chi_A(x)$;

1.25.3. $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) = \min(\chi_A(x),\chi_B(x))$;

1.25.4. $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\chi_B(x) =$
$= \max(\chi_A(x),\chi_B(x))$;

1.25.5. $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)-\chi_A(x)\chi_B(x)$;

1.25.6. $\chi_{A\div B}(x) = \chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)$.

1.25.7. Onderstaande tabel geeft de waarden van de karakteristieke functies van de verzamelingen $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $A\div B$.

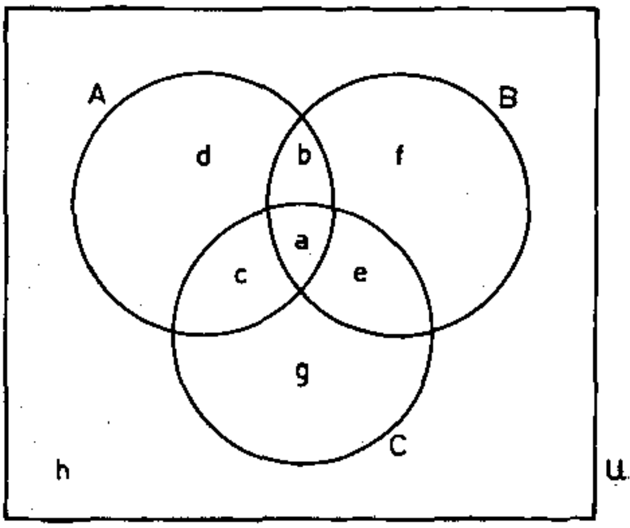
$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_{A\cap B}(x)$	$\chi_{A\cup B}(x)$	$\chi_{A\setminus B}(x)$	$\chi_{A\div B}(x)$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0

1.25.8. VOORBEELD. Als illustratie van het gebruik van karakteristieke functies geven we een ander bewijs van 1.11.1 (eigenschap). Laat A, B, C deelverzamelingen zijn van U.
De karakteristieke functies kunnen de volgende waarden hebben:

*)	χ_A	χ_B	χ_C	$\chi_{A\cup B}$	$\chi_{(A\cup B)\cap C}$	$\chi_{A\cap C}$	$\chi_{B\cap C}$	$\chi_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}$
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	1	0	1	0	0	0	0
c	1	0	1	1	1	1	0	1
d	1	0	0	1	0	0	0	0
e	0	1	1	1	1	0	1	1
f	0	1	0	1	0	0	0	0
g	0	0	1	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0

*) letters corresponderen met het Venn-diagram van figuur 20.

We zien uit deze tabel dat $\chi_{(A\cup B)\cap C}(x)=\chi_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}(x)$ voor alle $x\in U$ en dus $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.



Figuur 20

1.25.9. De lezer vergelijke de tabel uit 1.25.8 met de waarheidstafel in 1.18.4 (voorbeeld) waarvan we in 1.18.9 al hebben laten zien dat hij kon dienen als een bewijs van 1.11.1. We komen op dit verband terug in 3.12.13.

OPGAVEN

1.25.10. Zij $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Bereken de karakteristieke functies van de verzamelingen genoemd in 1.12.2 (a), (b), (c), (d).

1.25.11. Geef de bewijzen gevraagd in 1.12.4 (opgave) met behulp van karakteristieke functies.

1.25.12. Bewijs met behulp van karakteristieke functies dat voor alle deelverzamelingen A, B, C van U geldt:

(a) $A^* \cup (B \cup C)^* = (A \cap B)^* \cap (A \cap C)^*$,

(b) $A^* \div B^* = A \div B$,

(c) $(A \div B)^* = (A \cap B) \cup (A^* \cap B^*)$.

1.26. Enige eigenschappen van reële functies (herhaling)

1.26.1. Zij S een deelverzameling van $\mathbf{R}$ waarvoor geldt: $\forall_{x \in \mathbf{R}} [(x \in S) \Rightarrow ((-x) \in S)]$; we zeggen dan dat *S symmetrisch is ten opzichte van* 0.

1.26.2. DEFINITIE. *Zij* V *een verzameling* $f_1 : V \to \mathbf{R}$, $f_2 : V \to \mathbf{R}$. *Dan is de som* $f_1 + f_2$ *een afbeelding van* V *in* $\mathbf{R}$ *gedefiniëerd door:*

$$\forall_{x \in V} [(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)].$$

Op analoge wijze definiëert men de som van twee afbeeldingen $V \to T$, indien T een verzameling is van objecten waarvoor een optelling gedefiniëerd is (zie 3.3.1).

1.26.3. DEFINITIE. *Zij* S *symmetrisch ten opzichte van* 0. $f : S \to \mathbf{R}$ *heet even indien* $\forall_{x \in S} [f(x) = f(-x)]$. $f : S \to \mathbf{R}$ *heet oneven indien* $\forall_{x \in S} [f(x) = -f(-x)]$.

EIGENSCHAPPEN. S is een deelverzameling van $\mathbf{R}$, symmetrisch ten opzichte 0.

1.26.4. Zij $f:S\to\mathbf{R}$, dan is er precies één even functie $f_1:S\to\mathbf{R}$ en precies één oneven functie $f_2:S\to\mathbf{R}$ zodat $f=f_1+f_2$. Men neme nl. $f_1(x):=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$; $f_2(x):=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ $(x\in S)$.

1.26.5. Zij $f:S\to\mathbf{R}$ even, $g:f(S)\to\mathbf{R}$ dan is $g\circ f$ even.

1.26.6. Zij $f:S\to\mathbf{R}$ oneven, dan is $f(S)$ eveneens symmetrisch ten opzichte van 0. Zij $g:f(S)\to\mathbf{R}$, dan geldt: als g even is dan is $g\circ f$ even; als g oneven is dan is $g\circ f$ oneven.

OPGAVEN

1.26.7. S is symmetrisch ten opzichte van 0; $0\in S$; $f:S\to\mathbf{R}$ is oneven; bewijs $f(0)=0$.

1.26.8. Geef voorbeelden van even en oneven functies op $\mathbf{R}$. Schrijf de volgende functies als een som van een even en een oneven functie: ($a_0, a_1, a_2, \ldots$ zijn vaste reële getallen $(n\in\mathbf{N})$).

(a) $f(x):=a_1x+a_0$ $(x\in\mathbf{R})$,

(b) $f(x):=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ $(x\in\mathbf{R})$,

(c) $f(x):=\sin(x+1)$ $(x\in\mathbf{R})$.

1.26.9. DEFINITIE. *(Monotonie.) Zij* $V\subset\mathbf{R}$; $f:V\to\mathbf{R}$ *heet monotoon stijgend indien*

$$\forall_{x_1\in V}\,\forall_{x_2\in V}\,[(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)<f(x_2))],$$

$f:V\to\mathbf{R}$ *heet monotoon dalend indien*

$$\forall_{x_1\in V}\,\forall_{x_2\in V}\,[(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)>f(x_2))].$$

Naast deze monotonie eigenschappen heeft men ook de volgende:
$f:V\to\mathbf{R}$ *heet monotoon niet dalend (ook wel zwak monotoon stijgend) indien*

$$\forall_{x_1\in V}\,\forall_{x_2\in V}\,[(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)\le f(x_2))],$$

$f:V\to\mathbf{R}$ *heet monotoon niet stijgend (zwak monotoon dalend) indien*

$$\forall_{x_1\in V}\ \forall_{x_2\in V}\ [(x_1<x_2)\Rightarrow(f(x_1)\geq f(x_2))].$$

OPMERKINGEN

1.26.10. Als $V=\mathbf{N}$ dan staat in 1.26.9 (definitie) een definitie van de monotonie eigenschappen van reële rijen (zie 1.22.32).

1.26.11. De naamgeving is niet overal eensluidend; sommige auteurs gebruiken monotoon stijgend in plaats van zwak monotoon stijgend, en sterk monotoon stijgend in plaats van monotoon stijgend. Soms laat men het woord monotoon weg; de uitdrukking monotoon stijgend is inderdaad pleonastisch; wij zullen echter het woord monotoon blijven gebruiken om het taalkundig onderscheid tussen niet monotoon stijgend en monotoon niet stijgend te handhaven.

OPGAVEN

1.26.12. $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zijn monotoon stijgend; $g_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $g_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zijn monotoon dalend. Onderzoek de monotonie van $f_1\circ f_2$; $f_1\circ g_1$; $g_1\circ f_1$; $g_1\circ g_2$.

1.26.13. Is $f:V\to\mathbf{R}$ monotoon (stijgend of dalend), dan is f één-éénduidig en monotoon. Bewijs dit.

1.26.14. Zij $V_1\subset\mathbf{R}$, $V_2\subset\mathbf{R}$; $f:V_1\to V_2$ één-éénduidig en op.
In 1.23.7. merkten we op dat de inverse afbeelding $g:V_2\to V_1$ een grafiek heeft die de gespiegelde is ten opzichte van de diagonaal van de grafiek van f.
We beschouwen enige voorbeelden.
De afbeelding $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ gedefiniëerd door $f(x):=x^2$ $(0\leq x<\infty)$ is één-éénduidig en op. De inverse g is gedefiniëerd door $g(x):=\sqrt{x}\,(0\leq x<\infty)$. De inverse g van $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ met $f(x):=x^3$ $(x\in\mathbf{R})$ is gedefiniëerd door $g(x):=\sqrt[3]{x}$.
$f(x):=10^x\,(x\in\mathbf{R})$ is een één-éénduidige afbeelding van $\mathbf{R}$ op $(0,\infty)$. De inverse afbeelding g van $(0,\infty)$ op $\mathbf{R}$ is gedefiniëerd door $g(x):={}^{10}\log x$ $(0<x<\infty)$ (zie 4.3.32).

1.26.15. CYCLOMETRISCHE FUNCTIES.
$f(x):=\sin x\ (-\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\frac{1}{2}\pi)$ is een één-éénduidige afbeelding van $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ op $[-1,1]$. De inverse afbeelding van $[-1,1]$ op

$[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ heet arcussinus (afgekort *arcsin*). a=arcsin b betekent dus dat $-\frac{1}{2}\pi \leq a \leq \frac{1}{2}\pi$ en b=sin a.
$f(x):=\cos x$ $(0\leq x\leq\pi)$ is een één-éénduidige afbeelding van $[0,\pi]$ op $[-1,1]$. De inverse afbeelding van $[-1,1]$ op $[0,\pi]$ heet arcuscosinus (afgekort *arccos*).
$f(x):=\tan x$ $(-\frac{1}{2}\pi<x<\frac{1}{2}\pi)$ is een één-éénduidige afbeelding van $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ op $\mathbb{R}$. De inverse afbeelding van $\mathbb{R}$ op $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ heet arcustangens (afgekort *arctan*).

OPGAVEN

1.26.16. Teken de grafieken van de functies; arcsin, arccos en arctan.

1.26.17. Bepaal

(a) arcsin $\frac{1}{2}$, (b) arccos $(-\frac{1}{2})$,

(c) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

1.26.18. Teken de grafiek van arcsin $\circ$ sin.

1.27. Volledige inductie (herhaling)

1.27.1. Laat P(n) een beweringsvorm voorstellen met $\mathbb{N}$ als individuenverzameling voor de veranderlijke n. Onder bewijzen met behulp van volledige inductie verstaat men het toepassen van het volgende redeneerschema:
Als de beweringen: P(1)
en

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[P(n)\Rightarrow P(n+1)]$$

waar zijn, dan concludeert men dat ook de bewering

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[P(n)]$$

waar is.

OPGAVEN

1.27.2. Bewijs dat voor ieder natuurlijk getal n geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1.27.3. Zij $h\in(-1,\infty)$; bewijs dat voor ieder natuurlijk getal n geldt: $(1+h)^n \geq 1+nh$.

1.27.4. OPMERKING. De moeilijkheid bij het gebruiken van volledige inductie in bewijzen is het vinden van beweringen die het te bewijzene tot gevolg hebben en die zich voor volledige inductie lenen. Moet men bijvoorbeeld bewijzen dat voor ieder natuurlijk getal n de som $\sum_{k=1}^{n} k^3$ het kwadraat van een natuurlijk getal is, dan kan men niet zonder meer volledige inductie toepassen, omdat de aanname dat $\sum_{k=1}^{n} k^3$ voor zekere n een kwadraat is, niets zegt over $\sum_{k=1}^{n+1} k^3$. Heel gemakkelijk is echter met volledige inductie te bewijzen dat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2]$, en uit deze veel preciezere bewering volgt het gestelde onmiddellijk.

1.27.5. Varianten van het bewijsschema der volledige inductie die wel eens nuttig zijn, zijn de volgende:
Als $P(1)$ en $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[(P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(n))\Rightarrow P(n+1)]$ waar zijn, kan men concluderen:

$$\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[P(n)].$$

Uit $P(k)$ en $\forall_{n\geq k}\,[P(n)\Rightarrow P(n+1)]$ (k zij een vast natuurlijk getal) volgt:

$$\forall_{n\geq k}\,[P(n)].$$

1.27.6. OPGAVE. Laat zien dat de varianten vermeld in 1.27.5 inderdaad varianten zijn van 1.27.1 door 1.27.1 toe te passen voor de beweringsvormen:

$$P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(n),$$

$$(n=1)\vee(n=2)\vee\ldots\vee(n=k-1)\vee P(n).$$

1.27.7. STELLING. Zij $V\subset\mathbf{N}$; $V\neq\emptyset$, dan geldt:

$$\exists!_{n\in V}\,\forall_{k\in V}\,[k\geq n].$$

In spreektaal uitgedrukt is de inhoud van deze stelling: iedere niet lege deelverzameling der natuurlijke getallen heeft precies één kleinste element.

Bewijs. We geven eerst een bewijs uit het ongerijmde van het feit dat V een kleinste element bevat. Stel dat $V \neq \emptyset$ en dat V geen kleinste element bevat. Zij

$$W := \{w \in \mathbf{N} \mid \forall_{v \in V}\, [v \geq w]\}.$$

We zullen nu met volledige inductie bewijzen $\forall_{n \in \mathbf{N}}\, [n \in W]$.

Triviaal is: $1 \in W$. Als voor een natuurlijk getal k geldt $k \in W \cap V$, dan is k kleinst element van V. Zij $n \in W$ dan is $n \notin V$ op grond van de aanname dat V geen kleinste element heeft. Uit $\forall_{v \in V}\, [v \geq n]$ en $n \notin V$, volgt $\forall_{v \in V}\, [v > n]$, dus $\forall_{v \in V}\, [v \geq n+1]$, dus $n+1 \in W$. Derhalve $\forall_{n \in \mathbf{N}}\, [(n \in W) \Rightarrow ((n+1) \in W)]$.
Met volledige inductie volgt nu $W = \mathbf{N}$; maar dit betekent dat $V = \emptyset$, hetgeen in tegenspraak is met de aanname.
Volledigheidshalve moeten we ook nog laten zien dat V slechts één kleinste element bevat.
Zij $n_1 \in V$, $\forall_{v \in V}\, [v \geq n_1]$, $n_2 \in V$, $\forall_{v \in V}\, [v \geq n_2]$.
Door specialisering van de beide al-beweringen voor n_2 resp. n_1 volgt hieruit $n_2 \geq n_1$, $n_1 \geq n_2$; en dus $n_1 = n_2$.

1.27.8. DEFINITIE. *Zij* $n \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n,$$

$$0! := 1,$$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

De uitdrukkingen $\binom{\alpha}{n}$, $\binom{\alpha}{0}$ heten binomiaal coëfficiënten (wegens 1.27.12); men spreekt ze uit als "α over n", "α over nul". $n!$ wordt uitgesproken: "n faculteit".

EIGENSCHAPPEN Zij $m, k \in \mathbf{N}$, $m \geq k$.

1.27.9. $$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!},$$

1.27.10. $$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k},$$

1.27.11. $$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \quad \text{(stelling van Pascal).}$$

1.27.12. STELLING. *Zij* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$. *Voor ieder natuurlijk getal* n *geldt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(binomiaalformule van Newton).

1.27.13. OPGAVE. Bewijs 1.27.12 met behulp van volledige inductie.

1.27.14. TAAK. Verifiëer Uw oplossingen van de opgaven 1.6.6; 1.12.6; 1.21.14; 1.22.30; 1.23.10; 1.23.11; 1.24.12; 1.24.13. Geef bewijzen met volledige inductie van de resultaten.

1.27.15. RECURSIEVE DEFINITIES
Soms wordt een rij objecten $(O_1, O_2, O_3, \ldots)$ als volgt gedefiniëerd. Men definiëert allereerst O_1 met behulp van bekende begrippen, men geeft vervolgens voor iedere $n \in \mathbf{N}$ een definitie van O_{n+1} gebruikmakend van O_n, eventueel van $O_1, \ldots, O_n$. Men zegt dan dat de rij objecten recursief gefiniëerd is. Een voorbeeld van recursieve definitie is de invoering van de rij van de geïtereerden van een functie in 1.24.10. Een ander voorbeeld treft men aan in het bewijs van 2.5.13 (stelling). Een veel voorkomende variant van het schema van een recursieve definitie is de volgende: een eindig aantal van de objecten $O_1, \ldots, O_k$ worden gedefiniëerd met behulp van reeds bekende termen, en voor $n \geq k$ wordt O_{n+1} uitgedrukt in termen van $O_1, \ldots, O_n$. Een voorbeeld van deze variant vindt men in de volgende opgave.

1.27.16. OPGAVE. De getallen van Fibonacci.
We definiëren $a_1 := 1$; $a_2 := 1$; $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ $(n \in \mathbf{N})$. De getallen $a_1, a_2, \ldots$ heten de getallen van Fibonacci. Bewijs met volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbf{N}$ de volgende beweringen over Fibonacci-getallen juist zijn.

(a) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+2} - 1$, (b) a_{3n} is even,

(c) $2a_{n+1} = a_{n+3} - a_n$.

2 Relaties

2.1. Relaties als deelverzamelingen van een Cartesisch product

2.1.1. In 1.17.3 definiëerden we een relatie als een beweringsvorm met twee veranderlijken. Zij $R(x,y)$ een relatie, met X als individuenverzameling voor x en Y als individuenverzameling voor y. We spreken wel over: een relatie tussen de elementen van X en die van Y. Nu is $R:=\{(x,y)\mid R(x,y)\}$ een deelverzameling van $X\times Y$. We zullen wederom slechts beschouwen relaties waarvoor $R(x,y)$ overal door $(x,y)\in R$ vervangen kan worden (zie 1.13.1). Deze beperking houdt in dat alles wat we over relaties zullen zeggen ook geformuleerd kan worden met behulp van deelverzamelingen van een Cartesisch product. Zij $F:X\to Y$ dan stelden we in 1.22.9 reeds vast dat $F(x)=y$ een relatie is. Voor de bijbehorende deelverzameling van $X\times Y$ geldt: $\{(x,y)\mid F(x)=y\}=F$.

2.1.2. Bij de omzetting van uitdrukkingen met relaties in uitdrukkingen met deelverzamelingen van een Cartesisch product zullen we gebruik maken van een tweetal afbeeldingen, die voor elk Cartesisch product op dezelfde wijze gedefiniëerd en genoteerd zullen worden.

DEFINITIE. *Laat* A_1 *en* A_2 *verzamelingen zijn. Voor* $i=1,2$ *definiëren we* $\pi_i:A_1\times A_2\to A_i$ *door:*

$$\forall_{(a_1,a_2)\in A_1\times A_2}\,[\pi_i(a_1,a_2):=a_i].$$

De afbeeldingen π_1, π_2 heten *projecties* op de eerste resp. tweede component. (In bovenstaande definitie is de haakjesloze notatie gebruikt; zie 1.22.8.)

2.1.3. Zij nu $R(x,y)$ een relatie, met X als individuenverzameling van x, Y als individuenverzameling van y, dan kunnen we met behulp van $R:=\{(x,y)\mid R(x,y)\}$ bijvoorbeeld de volgende "vertalingen" geven.

$$\begin{array}{ll}
R(a,b) & (a,b)\in R, \\
\forall_{y\in Y}\, R(a,y) & \overleftarrow{\pi_1}(\{a\})\subset R, \\
\exists_{y\in Y}\, R(a,y) & a\in\pi_1(R) \\
\forall_{x\in X}\,\forall_{y\in Y}\, R(x,y) & X\times Y=R, \\
\forall_{x\in X}\,\exists_{y\in Y}\, R(x,y) & \pi_1(R)=X, \\
\exists_{x\in X}\,\forall_{y\in Y}\, R(x,y) & \pi_1(X\times Y\setminus R)\neq X \\
\exists_{x\in X}\,\exists_{y\in Y}\, R(x,y) & R\neq\emptyset.
\end{array}$$

2.1.4. In plaats van te spreken over de relatie $R(x,y)$ gebruikt men heel vaak een aanduiding die de veranderlijken niet bevat; zoals $\leq$, $\neq$, $\sim$. Als we deze aanduiding weer R noemen, gebruikt men vaak de notatie xRy in plaats van $R(x,y)$. Zo: $x\leq y$, $x\neq y$.

2.1.5. We bespraken de overgang van beweringsvormen met twee veranderlijken op deelverzamelingen van een Cartesisch product. De weg de andere kant op is geheel vanzelfsprekend: is R een deelverzameling van $X\times Y$ dan is $(x,y)\in R$ een relatie.

De lege relatie tussen de elementen van X en die van Y is de relatie waaraan geen enkel paar (x,y) voldoet; het is dus de relatie $(x,y)\in\emptyset$.

Zij $P(x)$ een beweringsvorm met individuenverzameling X. Is $P:\{x\mid P(x)\}$, dan is $P\times Y\subset X\times Y$; $(x,y)\in P\times Y$ is dan een relatie tussen de elementen van X en die van Y.

OPGAVEN

2.1.6. Schets van de volgende relaties waarvoor de individuenverzamelingen voor x en voor y beide $\mathbb{R}$ zijn, de bijbehorende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$.

(a) $x=y+1$,
(b) $x>y$,
(c) $x\neq y$,
(d) $x\leq y<x+2$,
(e) $xy>0$,
(f) $x\geq y$,
(g) $|x-y|<1$,
(h) $x=y$.

2.1.7. Laat $R_1(x,y)$ en $R_2(x,y)$ relaties zijn met dezelfde individuenverzamelingen X en Y.
Laat R_1 en R_2 de korresponderende deelverzamelingen van $X \times Y$ zijn. Welke deelverzamelingen komen overeen met de relaties:

(a) $R_1(x,y) \Rightarrow R_2(x,y)$,

(b) $R_1(x,y) \wedge R_2(x,y)$,

(c) $R_1(x,y) \vee R_2(x,y)$.

Bewijs dat $\forall_{x\in X} \forall_{y\in Y} [(R_1(x,y)\Rightarrow R_2(x,y))]$ vertaald kan worden met $R_1 \subset R_2$.

2.2. Enige bijzondere eigenschappen van relaties

2.2.1. We zullen ons in de rest van hoofdstuk 2 beperken tot relaties xRy waarbij de individuenverzameling van x dezelfde is als die van y. Als deze verzameling V heet, is $R:=\{(x,y) \mid xRy\}$ dus een deelverzameling van V^2. We spreken in dit geval van een relatie in V. We nemen verder in dit hoofdstuk aan dat $V \neq \emptyset$. We zullen nu een naam geven aan een aantal eigenschappen die relaties al of niet kunnen hebben. Steeds duidt R zowel de relatie als de bijbehorende deelverzameling van V^2 aan, waarbij V de individuenverzameling voor x en y is.

2.2.2. DEFINITIE. *De relatie* R *heet reflexief indien* $\forall_{x\in V} [xRx]$.

Met behulp van de deelverzameling $R \subset V^2$ kunnen we dus zeggen: de relatie heet reflexief indien $I_V \subset R$ (zie 1.23.8).

2.2.3. DEFINITIE. *De relatie* R *heet antireflexief indien:*

$$\forall_{x\in V} [\neg(xRx)].$$

In verzamelingentaal: de relatie heet antireflexief indien $I_V \cap R = \emptyset$.

2.2.4. DEFINITIE. *De relatie* R *heet symmetrisch indien:*

$$\forall_{x\in V} \forall_{y\in V} [xRy \Rightarrow yRx].$$

Symmetrie van de relatie R betekent dus dat de verzameling R symmetrisch is ten opzichte van I_V. Dat wil zeggen dat $(a,b)\in R$ dan en slechts dan als $(b,a)\in R$.

2.2.5. DEFINITIE. *De relatie* R *heet antisymmetrisch indien:*

$$\forall_{x\in V}\ \forall_{y\in V}\ [((xRy)\wedge(yRx))\Rightarrow(x=y)].$$

2.2.6. DEFINITIE. *De relatie* R *heet transitief indien:*

$$\forall_{x\in V}\ \forall_{y\in V}\ \forall_{z\in V}\ [((xRy)\wedge(yRz))\Rightarrow(xRz)].$$

2.2.7. VOORBEELDEN EN OPMERKINGEN. We nemen $V=\mathbb{R}$. De relatie $x\le y$ is reflexief; de relatie $x<y$ is antireflexief; de relatie $x=y^2$ is noch reflexief, noch antireflexief. Reflexiviteit en antireflexiviteit sluiten elkaar uit ($V\ne\emptyset$). De relatie $x^2=y^2$ is symmetrisch en niet antisymmetrisch; de relaties $x\le y$ en $x<y$ zijn antisymmetrisch en niet symmetrisch; symmetrie en antisymmetrie sluiten elkaar niet uit: de relatie $x=y$ is zowel symmetrisch als antisymmetrisch; ook de lege relatie heeft deze beide eigenschappen. De relatie $2x>y$ is niet symmetrisch ((3,1) voldoet maar (1,3) voldoet niet) en niet antisymmetrisch ((2,3) en (3,2) voldoen beide en $2\ne3$). De relatie $x\ne y$ is niet transitief; de relatie $x>y$ is wel transitief.

2.2.8. We zullen ons in de volgende paragraaf bezighouden met het uiterst belangrijke geval van relaties die reflexief, symmetrisch en transitief zijn. Deze drie eigenschappen zijn onafhankelijk, in die zin dat uit het gegeven dat een relatie één of twee van deze eigenschappen al of niet bezit niets afgeleid kan worden over het al of niet bezitten van de andere eigenschap(pen). Dit blijkt uit de relaties vermeld in 2.1.6 (opgave) waarbij alle acht mogelijke combinaties van het hebben of niet hebben van deze drie eigenschappen gerealiseerd zijn.

OPGAVEN

2.2.9. Ga van elk van de relaties uit 2.1.6 (opgave) na of deze al of niet reflexief, al of niet symmetrisch, al of niet transitief is.

2.2.10. $R\subset V^2$ is zodanig dat de relatie $(x,y)\in R$ zowel symmetrisch als antisymmetrisch is. Bewijs dat $R\subset I_V$.

2.2.11. Ga van de volgende relaties na of ze reflexief, symmetrisch, transitief zijn; individuen zijn de gehele getallen.

(a) $x-y$ is oneven,

(b) de grootste gemene deler van x en y is gelijk aan 2,

(c) $xy \leq 0$.

2.2.12. Van een relatie R (individuenverzameling V) is gegeven:

(i) $\forall_{x \in V} \exists_{y \in V} [xRy]$,

(ii) R is symmetrisch,

(iii) R is transitief.

Bewijs dat R reflexief is.

2.2.13. U is een verzameling, $U \neq \emptyset$. Ga van de volgende relaties tussen de elementen van $P(U)$ na of ze reflexief, antireflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, of transitief zijn:

(a) $X \cap Y = \emptyset$, (b) $X \cap Y \neq \emptyset$,

(c) $X \cup Y \neq U$, (d) $X \subset Y$,

(e) $X \div Y = \emptyset$, (f) $X \setminus Y = \emptyset$.

2.2.14. Van de relatie xRy in de niet lege verzameling V is gegeven dat deze antireflexief en transitief is. Bewijs dat de deelverzameling $R := \{(x,y) \mid xRy\} \subset V^2$ geen afbeelding van V in V is.

2.2.15. In V zijn de relaties xR_1y en xR_2y beide transitief. Bewijs dat $(xR_1y) \wedge (xR_2y)$ transitief is.

2.2.16. RESTRICTIE VAN EEN RELATIE
Zij V een verzameling, $R \subset V \times V$, $V_0 \subset V$. Als $R_0 := R \cap (V_0 \times V_0)$ dan is $(x,y) \in R_0$ een relatie in V_0. Deze relatie heet de restrictie tot V_0 van de relatie $(x,y) \in R$.
Een eigenschap van een relatie heet erfelijk (hereditair) indien elke restrictie van die relatie ook die eigenschap heeft.

2.2.17. OPGAVE. Bewijs dat de eigenschappen van reflexiviteit, antireflexiviteit, symmetrie, antisymmetrie en transiviteit erfelijk zijn.

2.3. Equivalentierelaties

2.3.1. DEFINITIE. *Een relatie* xRy *met* V *als individuenverzameling voor beide veranderlijken heet een equiva-*

lentierelatie in V *indien* R *reflexief, symmetrisch en transitief is.*

Men gebruikt voor een equivalentierelatie vaak het symbool ~; x~y wordt uitgesproken: "x is equivalent met y".

VOORBEELDEN

2.3.2. In iedere verzameling V is x=y een equivalentierelatie.
Voor een goed begrip van wat equivalentierelaties zijn is dit triviale voorbeeld heel belangrijk. Een van de inzichten die de lezer bij het bestuderen van deze paragraaf moet verwerven is het inzicht dat iedere equivalentierelatie zoiets als een gelijkheid is, een gelijkheid in een zeker opzicht, het gelijk zijn van een zeker aspect.

2.3.3. Laat V zijn de verzameling van de rechten in het platte vlak; de relatie $(x // y) \vee (x=y)$ is een equivalentierelatie. (Twee rechten zijn equivalent als ze dezelfde "richting" hebben.)

2.3.4. In de verzameling der driehoeken in het platte vlak is de relatie: x gelijkvormig y, een equivalentierelatie. (Twee driehoeken zijn equivalent, indien ze dezelfde "vorm" hebben.)

2.3.5. In $\mathbb{Z}$ is de relatie: x-y is een 5-voud, een equivalentierelatie. (Twee getallen zijn equivalent als ze na deling door 5 dezelfde rest - gekozen uit 0, 1, 2, 3, 4 - hebben.)

2.3.6. DEFINITIE. *Zij* V *een verzameling,* R *een equivalentierelatie in* V. *Een deelverzameling* $W \subset V$ *heet een equivalentieklasse (ook wel: equivalentieklasse bij de relatie* R) *indien voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:*

(a) $W \neq \emptyset$,

(b) $\forall_{x \in W} \forall_{y \in W} [xRy]$,

(c) $\forall_{x \in W} \forall_{y \in V \setminus W} [\neg(xRy)]$.

In woorden: een equivalentieklasse is een niet lege deelverzameling W van V met de eigenschap dat elk tweetal elementen uit W equivalent is, en geen element uit W equivalent is met een element dat niet tot W behoort. Ieder element uit een equivalentieklasse heet een *representant* van die klasse.

2.3.7. STELLING. *Zij* R *een equivalentierelatie in* V. *Als* W_1 *en* W_2 *equivalentieklassen bij* R *zijn, dan geldt: òf* $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, *òf* $W_1 = W_2$.

Bewijs. We zullen laten zien dat uit $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ volgt dat $W_1 = W_2$. (Per definitie is $W_1 \neq \emptyset \neq W_2$ zodat $W_1 = W_2$ en $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ zeker niet beide gelden.)
Zij $a \in W_1 \cap W_2$. Zij $x \in W_1$ willekeurig. Nu geldt (daar $a \in W_1$) aRx (2.3.6 (b)). Als $x \in V \setminus W_2$ dan zou (daar $a \in W_2$) gelden $\neg$(aRx) (2.3.6 (c)); tegenspraak. Dus $x \in W_2$. Omdat x willekeurig in W_1 gekozen is geldt: $W_1 \subset W_2$. Geheel analoog bewijst men $W_2 \subset W_1$. Derhalve $W_1 = W_2$.

2.3.8. STELLING. *Zij* R *een equivalentierelatie in* V, $a \in V$. *Dan is* $W(a) := \{x \mid aRx\}$ *een equivalentieklasse.*

Bewijs. We verifiëren de drie eisen van 2.3.6 (definitie).

(a) $W(a) \neq \emptyset$ want $a \in W(a)$ daar R reflexief is.

(b) Zij $x \in W(a)$, $y \in W(a)$ dan geldt aRx, aRy. Omdat R symmetrisch is volgt xRa uit aRx. Wegens transiviteit van R volgt uit xRa en aRy dat xRy.

(c) Zij $x \in W(a)$, $y \in V \setminus W(a)$ dan geldt aRx, $\neg$(aRy). Uit aRx en xRy zou volgen aRy hetgeen niet waar is; dus $\neg$(xRy).

2.3.9. STELLING. *Zij* R *een equivalentierelatie in* V, *dan is* V *de vereniging van alle equivalentieklassen bij* R.

Bewijs. Daar $\forall_{x \in V}\ [x \in W(x)]$ geldt $\cup_{x \in V}\ W(x) = V$.

Bovendien blijkt zonder moeite dat iedere equivalentieklasse ook een W(x) is; zij n.l. W een equivalentieklasse, dan $W \neq \emptyset$, dus er is een $a \in W$. Nu is $a \in W \cap W(a)$, dus $W = W(a)$ (2.3.7 (stelling)).

2.3.10. DEFINITIE. *Een partitie van een verzameling* V *is een verzameling* U *van verzamelingen met de volgende eigenschappen:*

(a) $\forall_{W \in U}\ [W \neq \emptyset]$,

(b) $\cup_{W \in U}\ W = V$,

(c) $\forall_{W_1 \in U}\ \forall_{W_2 \in U}\ [(W_1 = W_2) \vee (W_1 \cap W_2 = \emptyset)]$.

Uit (b) volgt in het bijzonder dat $\forall_{W \in U}\ [W \subset V]$. Enigszins slordig sprekend kunnen we dus zeggen: een partitie van V is een splitsing van V in niet lege paarsgewijze disjuncte delen.

We geven nog enige herformuleringen van de resultaten uit deze paragraaf.

2.3.11. STELLING. *Laat* R *een equivalentierelatie in* V *zijn, dan vormen de equivalentieklassen een partitie van* V.

2.3.12. STELLING. *Laat* R *een equivalentierelatie in* V *zijn, dan bestaat er een partitie* U *van* V *met de eigenschap dat*

$$\forall_{x\in V} \forall_{y\in V} [xRy \Leftrightarrow \exists_{W\in U} [(x\in W)\wedge(y\in W)]].$$

We kunnen nu de vage opmerking in 2.3.2 preciseren: bij iedere equivalentierelatie hoort een partitie; twee elementen zijn precies dan equivalent indien ze in *hetzelfde* element van die partitie liggen. Omgekeerd behoort bij iedere partitie een equivalentierelatie zoals aangegeven in de volgende stelling.

2.3.13. STELLING. *Zij* U *een partitie van* V, *dan is de relatie R gedefinieerd door:*

$$\forall_{x\in V} \forall_{y\in V} [xRy :\Leftrightarrow \exists_{W\in U} [(x\in W)\wedge(y\in W)]]$$

een equivalentierelatie in V. *De equivalentieklassen bij deze equivalentierelatie zijn juist de elementen van* U.

VOORBEELDEN

2.3.14. Is V een verzameling, dan merkten we reeds op dat x=y een equivalentierelatie is (2.3.2). $U=\{\{v\}\mid v\in V\}$ is de bijbehorende partitie bestaande uit equivalentieklassen.

2.3.15. De deelverzamelingen $\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_3,\mathbf{Z}_4$ van $\mathbf{Z}$ zijn gedefiniëerd door: $\mathbf{Z}_0:=\{5x\mid x\in\mathbf{Z}\}$; $\mathbf{Z}_1:=\{5x+1\mid x\in\mathbf{Z}\}$; $\mathbf{Z}_2:=\{5x+2\mid x\in\mathbf{Z}\}$; $\mathbf{Z}_3:=\{5x+3\mid x\in\mathbf{Z}\}$; $\mathbf{Z}_4:=\{5x+4\mid x\in\mathbf{Z}\}$. Nu is $\{\mathbf{Z}_0,\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_3,\mathbf{Z}_4\}$ de partitie behorende bij de equivalentierelatie uit 2.3.5 (voorbeeld).

2.3.16. In $\mathbf{R}^2$ is de relatie ~ gedefiniëerd door:
$\forall_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} \forall_{(u,v)\in\mathbf{R}^2} [((x,y)\sim(u,v) :\Leftrightarrow (x^2+y^2=u^2+v^2)]$
een equivalentierelatie. (Twee punten zijn equivalent indien ze dezelfde afstand tot de oorsprong hebben.) De equivalentieklassen zijn $\{(0,0)\}$ en alle cirkels met middelpunt in de oorsprong.

2.3.17. Zij T een verzameling; $A\subset T$. In $P(T)$ is de relatie $\sim$ gedefiniëerd door:

$$\forall_{X\subset T}\ \forall_{Y\subset T}\ [(X\sim Y):\Leftrightarrow(X\cap A=Y\cap A)]$$

een equivalentierelatie. De bijbehorende partitie is:

$$\{\{X\subset T \mid X\cap A=B\} \mid B\in P(A)\}.$$

2.3.18. Als $F:V\to W$ dan is $F(x)=F(y)$ een equivalentierelatie in V. De bijbehorende partitie is

$$\{F^{\leftarrow}(\{w\}) \mid w\in F(V)\}.$$

2.3.19. De equivalentieklassen bij een equivalentierelatie kunnen "in grootte" zeer verschillen. In $\mathbf{R}$ is $\exists_{a\in\mathbf{R},a\neq 0}[ax=y]$ een equivalentierelatie. Er zijn slechts twee equivalentieklassen: $\{0\}$ en $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

OPGAVEN

2.3.20. Voor reële α zij $V_\alpha:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y=\alpha x\}$. Bewijs dat $\{V_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}$ een partitie is van $V:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0\}$. Bewijs dat dit de partitie is van de equivalentierelatie $\sim$ gedefinieerd in V door:

$$\forall_{(x,y)\in V}\ \forall_{(u,v)\in V}\ [((x,y)\sim(u,v)):\Leftrightarrow(\tfrac{y}{x}=\tfrac{v}{u})].$$

2.3.21. Is $V_0\subset V$ en is U een partitie van V, behorend bij de equivalentierelatie $(x,y)\in R$, dan is $U_0:=\{W\cap V_0 \mid W\in U, W\cap V_0\neq\emptyset\}$ een partitie van V_0 en de bijbehorende equivalentierelatie is

$$(x,y)\in R\cap V_0^2.$$

Een restrictie (2.2.16) van een equivalentierelatie is dus ook een equivalentierelatie. Bewijs dit.

2.3.22. Is U een partitie van V dan is $\{(x,W) \mid W\in U, x\in W\}$ een afbeelding van V op U. Bewijs dit.

2.3.23. Geef alle partities U van $\mathbf{N}$ die de volgende eigenschap hebben:

$$\forall_{W_1 \in U}\ \forall_{W_2 \in U}\ [(W_1 = W_2) \vee [\forall_{x \in W_1}\ \forall_{y \in W_2}\ (\text{g.g.d.}(x,y) = 1)]]$$

(g.g.d.(x,y) is de grootste gemene deler van x en y). Is g.g.d.$(x,y) \neq 1$ een equivalentierelatie?

2.3.24. V stelt het platte vlak voor. O is een vast punt in V. Is de relatie: "er gaat een rechte lijn door de punten O en x en y, een equivalentierelatie in V? In $V \setminus \{O\}$?

2.3.25. In de verzameling van alle afbeeldingen van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definiëren we een relatie $\sim$ door:

$$\forall_{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\ \forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\ [(f \sim g) :\Leftrightarrow (\forall_{x \in \mathbb{Z}}\ [f(x) = g(x)])].$$

Bewijs dat:

(a) de relatie $\sim$ is een equivalentierelatie,

(b) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(\mathbb{Z}) = \{0\}\}$ is een equivalentieklasse.

2.4. Definitie door abstractie

2.4.1. In 2.3.2 wezen we er op dat men er goed aan doet te denken dat een equivalentierelatie het gelijkzijn van een aspect betekent. In 2.3.3 beschouwden we bijvoorbeeld de equivalentierelatie in de verzameling van de rechten in het vlak: $(x /\!/ y) \vee (x = y)$. Het aspect dat twee equivalente *rechten* gelijk hebben, zeiden we, is hun richting. Deze opmerking is natuurlijk alleen illustratief voor de lezer die het begrip "richting van een rechte" kent. In feite gaat men bij de opbouw van de wiskunde vaak in tegenovergestelde richting te werk. Het komt namelijk heel veel voor dat men een nieuw begrip vormt juist door in een bekende verzameling een equivalentierelatie te definiëren en vervolgens de equivalentieklassen als nieuwe objecten te beschouwen. Deze wijze van invoeren van begrippen heet: *definitie door abstractie*. Zo zou men met behulp van de relatie uit 2.3.3 het begrip "richting" in de meetkunde kunnen invoèren. Men begint dan met de equivalentierelatie in de verzameling der rechten: $(x /\!/ y) \vee (x = y)$ (of indien men de term $/\!/$ ook niet gebruiken wil met de gelijkwaardige relatie: "het is niet zo dat x en y precies één punt gemeenschappelijk hebben"). Daarna definiëert men: een richting is een equivalentieklasse van de bovenbeschreven relatie. Correct zou dan zijn de zegswijze: de lijnen l en m *behoren* tot dezelfde richting. Men zegt toch l en m *hebben* dezelfde richting.

We zullen in deze paragraaf enkele voorbeelden van definitie door abstractie schetsen. De resultaten zijn in zoverre niet zo belangwekkend omdat de lezer met de gedefiniëerde objecten al wel vertrouwd zal zijn.

2.4.2. We zullen eerst een voorbeeld bekijken dat ons de betekenis van het woord "abstractie" in de uitdrukking "definitie door abstractie" leert zien. Denken we ons terug in een zeer primitief stadium van de cultuur, nl. naar de ontwikkelingsfase waarin de primitieve mens zich de kunst van het tellen eigen maakt. Het ontwikkelingsproces van het getalbegrip kan men zich als volgt voorstellen. De wereld is vol verzamelingen van stoffelijke dingen: de vrouwen van het stamhoofd A, de geiten van B; de vissen vandaag gevangen. Ook zonder te kunnen tellen komt men er toe zulke verzamelingen wat grootte betreft te vergelijken. Als stamhoofd A aan elk van zijn vrouwen een vis wil geven, dan kan zijn vangst daarvoor onvoldoende, of precies toereikend zijn, of er blijven nog één of meer vissen over na de uitdeling. Nu is het voor A natuurlijk onaangenaam om pas te kunnen vaststellen of zijn vangst voldoende is, nadat hij zijn vrouwen op een rij gezet heeft, en gepoogd heeft de gevangen vissen één-éénduidig aan zijn gades toe te voegen. Gelukkig heeft hij ontdekt dat als hij de vissen één-éénduidig aan de vingers van zijn hand kan toevoegen, de één-éénduidige toevoeging aan zijn vrouwen ook lukt. Met behulp van deze kunstgreep kan hij al op het viswater uitmaken of zijn vangst toereikend is. Om dit anecdotisch verhaal niet voort te zetten: voorafgaande aan het getalbegrip komt het inzicht dat in de verzameling van alle verzamelingen van stoffelijke dingen de relatie: x en y bestaan uit evenveel dingen; - dat wil zeggen de relatie: er bestaat een één-éénduidige afbeelding van x op y - een equivalentierelatie is. De getallen (aantallen) zijn nu de equivalentieklassen bij deze relatie. Vijf is de equivalentieklasse waarvan de verzameling van de vingers van A's linkerhand een representant is. Dit voorbeeld maakt duidelijk waarom dit proces definitie door abstractie heet. Abstractie betekent letterlijk aftrekking. Bij de overgang van de vingers van A's linkerhand en van A's vrouwen naar vijf gaat iets verloren.

2.4.3. GEHELE GETALLEN
We nemen nu aan dat we over de verzameling $\mathbb{N}$ met al zijn eigenschappen beschikken. We zullen bespreken hoe men in de taal van de natuurlijke getallen de gehele getallen kan definiëren. We doen dit slechts schetsmatig; de lezer overwege alle details terdege.
We beginnen met op te merken dat we behoefte hebben aan

een uitbreiding van $\mathbf{N}$, bijvoorbeeld omdat we vergelijkingen $a+x=b$ niet steeds in $\mathbf{N}$ kunnen oplossen. We "weten" dat elk geheel getal het verschil van twee elementen uit $\mathbf{N}$ moet zijn (denk aan winst en verlies of iets dergelijks): $-3=1-4=2-5=\ldots$, en ook $2=4-2=5-3=\ldots$. Zo komt men tot het idee paren van elementen uit $\mathbf{N}$ te beschouwen, waarbij men (a,b) en (c,d) hetzelfde gehele getal laat voorstellen indien $a+d=b+c$. Hier betekent + de reeds bekende optelling van natuurlijke getallen.
Nu de exacte invoering.

Beschouw $\mathbf{N}^2$; definiëer met deze verzameling als individuenverzameling de relatie $(a,b)\sim(c,d)$ door te stellen:

$$\forall_{(a,b)\in\mathbf{N}^2}\ \forall_{(c,d)\in\mathbf{N}^2}\ [((a,b)\sim(c,d) :\Leftrightarrow (a+d=b+c)] .$$

Deze relatie is een equivalentierelatie. De equivalentieklassen (dat zijn deelverzamelingen van $\mathbf{N}^2$) noemt men nu per definitie gehele getallen. Men moet nu voor de verkregen objecten arithmetische operaties (som, product, verschil) en de $\geq$ relatie definiëren. We schetsen dit nu voor de som. Men zou + willen definiëren door:

$$(*)\quad \text{klasse}(a,b) + \text{klasse}(c,d) := \text{klasse}(a+c,\ b+d) \qquad ((a,b),(c,d) \in \mathbf{N}^2).$$

(klasse(a,b) is de equivalentieklasse waarvan (a,b) een representant is). Het + teken in het rechterlid betekent de bekende optelling der natuurlijke getallen; het + teken in het linkerlid duidt de nieuw te definiëren bewerking aan. Dat wil zeggen: men neemt een representant nl. (a,b) van de ene klasse en een representant (i.c. (c,d)) van de andere, telt deze componentsgewijs op en noemt de klasse waartoe het paar $(a+c,\ b+d)$ behoort de somklasse van de beide klassen. Men heeft pas het recht te stellen dat zo een optelling van klassen gedefiniëerd is, nadat men heeft laten zien dat bij de gedefiniëerde optelling, - hoewel deze geformuleerd is met behulp van representanten - de somklasse onafhankelijk is van de keuze van de representanten van de op te tellen klassen. Voordat men $(*)$ als definitie van de optelling van de gehele getallen kan geven moet men dus laten zien dat uit klasse$(a,b)=$ $=$klasse(a',b') en klasse$(c,d)=$klasse(c',d') volgt dat klasse$(a+c,b+d)=$klasse$(a'+c',b'+d')$. Dit tonen we aan. Nu betekent klasse$(a,b)=$klasse(a',b') dat $(a,b)\sim(a',b')$ en dus $a+b'=a'+b$. Hieruit en uit $c+d'=c'+d$ volgt inderdaad $a+b'+c+d'=b+a'+c'+d$ of $(a+c,b+d)\sim(a'+c',b'+d')$. We kunnen $(*)$ dus als definitie van de optelling nemen.

De volgende stap is dat men laat zien dat de gedefiniëerde optelling commutatief en associatief is. Dan moet men vermenigvuldiging definiëren. Deze vermenigvuldiging zal moeten uitdrukken dat $(a-b)(c-d)=ac+bd-(ad+bc)$. Daarom definiëren we:

$$\text{klasse}(a,b)\cdot\text{klasse}(c,d) = \text{klasse}(ac+bd,ad+bc) \qquad ((a,b),(c,d) \in \mathbf{N}^2).$$

In het rechterlid betekent weer ac het bekende product van de natuurlijke getallen a en c, enzovoort. Nu is te verifiëren:

1. De onafhankelijkheid van de representantkeuze.
2. De commutatieve en associatieve eigenschappen van de gedefiniëerde vermenigvuldiging.
3. De distributiviteitseigenschap van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling $(x(y+z)=xy+xz)$.

Een volgende definitie kan zijn: klasse(a,b)>klasse(c,d) dan en slechts dan als $a+d>b+c$ waarbij dit laatste $>$ de bekende groter-relatie van de natuurlijke getallen weergeeft. Wederom moet men de onafhankelijkheid van de representantkeuze en alle eigenschappen verifiëren.
Als dit alles gedaan is, is men nog steeds niet klaar. Men wil immers het systeem van de gehele getallen beschouwen als uitbreiding van dat der natuurlijke getallen. Merk op dat de ingevoerde gehele getallen en de natuurlijke getallen dingen van totaal andere soort zijn. Als men echter aan het natuurlijk getal n toevoegt het gehele getal: klasse(n+1,1) dan corresponderen alle bewerkingen met natuurlijke getallen met de overeenkomstige bewerkingen met de gehele getallen. Zo komt n+m overeen met

$$\text{klasse}(n+m+1,1) = \text{klasse}(n+m+2,2) =$$
$$= \text{klasse}(n+1,1) + \text{klasse}(m+1,1).$$

We maken ook dan geen onderscheid meer tussen het natuurlijk getal n en het gehele getal klasse(n+1,1). Men zegt dan dat men beide identificeert. Dit betekent dat de natuurlijke getallen zoals men die in de eerdere fase van de opbouw van het getalsysteem had, hun dienst gedaan hebben; ze worden nu vervangen door de nieuw gedefiniëerde objecten: klasse(n+1,1). Het enige dat men dan nog te doen heeft is de notatie voor gehele getallen te definiëren: n:=klasse(n+1,1); 0:=klasse(1,1); -n:=klasse(1,n+1) (n notatie van een natuurlijk getal). De eerste van deze drie regels brengt de bovenomschreven identificatie in de notatie tot uitdrukking.

2.4.4. OPGAVE. RATIONALE GETALLEN

Neem aan dat we de beschikking hebben over het systeem der gehele getallen. Beschouw in $\mathbf{Z}^2$ de deelverzameling

$$V := \{(a,b) \mid a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0\}.$$

Voor V als individuenverzameling definiëren we de relatie $(a,b)\sim(c,d)$ door

$$\forall_{(a,b)\in V}\ \forall_{(c,d)\in V}\ [((a,b)\sim(c,d) :\Leftrightarrow (ad=bc)].$$

Deze relatie stelt ons in staat om, op gelijke wijze als in 2.4.3 de gehele getallen ingevoerd zijn, nu de verzameling der gehele getallen uit te breiden tot die der rationale getallen. Geef een schets van deze invoering.

2.4.5. DE GEHELE GETALLEN MODULO M

Zij $m \in \mathbf{Z}$. We beschouwen de equivalentierelatie $\sim$ gedefiniëerd door:

$$\forall_{x\in \mathbf{Z}}\ \forall_{y\in \mathbf{Z}}\ [(x\sim y) :\Leftrightarrow \exists_{k\in \mathbf{Z}}\ [x-y=km]],$$

in woorden: x is equivalent met y indien het verschil x-y een m-voud is. De equivalentieklassen bij deze relatie heten de *gehele getallen mod m* (spreek uit: "modulo m"). We zullen ons bij het beschouwen van gehele getallen mod m beperken tot $m \in \mathbf{N}$. Dit is echter nauwelijks een beperking. Het is immers duidelijk dat de gehele getallen mod m en de gehele getallen mod -m dezelfde zijn, terwijl de verzameling der gehele getallen mod 0 de verzameling $\{\{z\} \mid z \in \mathbf{Z}\}$ is.
Men moet zich realiseren dat de gehele getallen mod m deelverzamelingen van $\mathbf{Z}$ zijn. Is bijvoorbeeld m=5 dan zijn de gehele getallen mod 5 de verzamelingen $\mathbf{Z}_0$, $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_4$ uit 2.3.15 (voorbeeld). (We zullen in het vervolg wél notaties kiezen waaraan te zien is, welke de waarde van m is.) We willen voor de gehele getallen mod m arithmetische bewerkingen definiëren. Evenals in 2.4.3 en 2.4.4 doen we dit door de bewerkingen voor de klassen te definiëren door middel van bewerkingen uitgevoerd met representanten. De definities liggen voor de hand:

$$\text{klasse } a + \text{klasse } b := \text{klasse } (a+b) \qquad (a,b \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{klasse } a \cdot \text{klasse } b := \text{klasse } ab \qquad (a,b \in \mathbf{Z}).$$

In het rechterlid betekent a+b en ab de som en het product van de gehele getallen a en b. We zullen nu eerst moeten verifiëren dat beide definities werkelijk bewerkingen met de equivalentieklassen definiëren. We moeten laten zien dat uit $a \sim a'$, $b \sim b'$ volgt: $a+b \sim a'+b'$, $ab \sim a'b'$. Nu betekent $a \sim a'$, $b \sim b'$ dat $a=a'+k_1m$, $b=b'+k_2m$ voor zekere $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$. Dan is $a+b=a'+b'+(k_1+k_2)m$, $ab=a'b'+(a'k_2+b'k_1+$ $+k_1k_2m)m$ en dus $a+b \sim a'+b'$ en $ab \sim a'b'$. Men noteert klasse a+ + klasse b = klasse c voor de gehele getallen modulo m als "$a+b \equiv c \bmod m$" of "$a+b \equiv c(m)$"; (Men zegt: "a+b congruent c modulo m"). Evenzo schrijft men $ab \equiv c \bmod m$ of $a \cdot b \equiv c \bmod m$ of $a \cdot b \equiv c(m)$ in plaats van klasse a · ·klasse b = klasse c voor de gehele getallen mod m. In deze notatie verraadt dus slechts $\equiv$ mod m dat we met de gehele getallen mod m, dus met deelverzamelingen van $\mathbf{Z}$ werken, en dat a betekent klasse a enz. Iedere formule met de gehele getallen mod m kan men opschrijven met de representanten 0,1,..., m-1. Historisch overgeleverd is het spraakgebruik: "met de gehele getallen rekenen mod m", alsof men weer met de gewone gehele getallen rekent maar op een andere manier. Evenals in 2.4.3 willen we vaststellen dat de ingevoerde optelling en vermenigvuldiging commutatief en associatief zijn en dat de vermenigvuldiging distributief is ten opzichte van de optelling. Met een voor de hand liggende interpretatie van de zoeven afgesproken symboliek betekent dit dat we willen verifiëren dat voor alle a, b, $c \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$ geldt:

$$a+b \equiv b+a \bmod m, \quad ab \equiv ba \bmod m,$$

$$(a+b)+c \equiv a+(b+c) \bmod m, \quad (ab)c \equiv a(bc) \bmod m,$$

$$a(b+c) \equiv ab+ac \bmod m.$$

Het is onmiddelijk duidelijk dat al deze eigenschappen direct volgen uit de overeenkomstige eigenschappen van de bewerkingen in $\mathbf{Z}$.
Als voorbeelden vermelden we $2+3 \equiv 0 \bmod 5$; $2 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 5$; $2+3 \equiv 5 \bmod 6$; $2 \cdot 3 \equiv 0 \cdot 3 \equiv 0 \bmod 6$. Uit het laatste voorbeeld blijkt dat uit $ac \equiv bc \bmod m$ niet volgt dat $a \equiv b \bmod m$ (zie 2.4.7 (opgave)).

OPGAVEN

2.4.6. Zij $a \equiv b \bmod m$. Bewijs dat voor elke $c \in \mathbf{Z}$ geldt: $a+c \equiv b+c \bmod m$; $ac \equiv bc \bmod m$.

2.4.7. (a) Zij $c \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, g.g.d.$(c,m)=1$ (zie 2.3.23), $ac \equiv bc \bmod m$. Bewijs dat $a \equiv b \bmod m$.

(b) Zij p een priemgetal dan volgt uit $ab \equiv 0 \bmod p$ dat $a \equiv 0 \bmod p$ of $b \equiv 0 \bmod p$.

2.4.8. Zij $m \in \mathbf{N}$, zij $a \in \mathbf{Z}$, dan is de verzameling van de gehele getallen mod m:

$$\{\{mx+k \mid x \in \mathbf{Z}\} \mid k=0,1,2,\dots,m-1\}$$

gelijk aan

$$\{\{mx+a+k \mid x \in \mathbf{Z}\} \mid k=0,1,2,\dots,m-1\}.$$

2.4.9. (a) Zij p een priemgetal, zij $k \in \mathbf{N}$, $k<p$. Bewijs dat $\binom{p}{k} \equiv 0 \bmod p$ (zie 1.27.8).

(b) Zij p een priemgetal. Bewijs dat

$$(a+b)^p \equiv a^p+b^p \bmod p \qquad (a,b \in \mathbf{Z}).$$

(Gebruik 1.27.12).

2.4.10. KARAKTERISTIEKE FUNCTIES MET WAARDEN IN DE GEHELE GETALLEN MODULO 2

De verzameling der gehele getallen modulo 2 bestaat uit twee elementen. Als we deze voorstellen met de representanten 0 en 1 dan wordt de rekenkunde beschreven door de regels: $0+0\equiv 0(2)$, $0+1\equiv 1(2)$, $1+1\equiv 0(2)$, $0\cdot 0\equiv 0(2)$, $0\cdot 1\equiv 0(2)$, $1\cdot 1\equiv 1(2)$ en door de eigenschappen van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit. Zij U een vaste verzameling; aan iedere deelverzameling A van U voegt men toe een afbeelding χ'_A van U in de verzameling der gehele getallen modulo 2, gedefinieerd door $\chi'_A(x):=1$ als $x\in A$; $\chi'_A(x):=0$ als $x\in U\backslash A$. De afbeelding χ'_A heet weer karakteristieke functie van A. Het werken met karakteristieke functies met waarden in de gehele getallen modulo 2 is vaak eenvoudiger dan met de in 1.25.1 ingevoerde karakteristieke functies.

Er is voldaan aan de volgende regels:

$$\chi'_{U\setminus A}(x) \equiv 1+\chi'_A(x) \quad (2),$$

$$\chi'_{A\cup B}(x) \equiv \chi'_A(x)+\chi'_B(x)+\chi'_A(x)\cdot\chi'_B(x) \quad (2),$$

$$\chi'_{A\cap B}(x) \equiv \chi'_A(x)\cdot\chi'_B(x) \quad (2),$$

$$\chi'_{A\setminus B}(x) \equiv \chi'_A(x)\cdot(1+\chi'_B(x)) \quad (2),$$

$$\chi'_{A\div B}(x) \equiv \chi'_A(x)+\chi'_B(x) \quad (2).$$

2.4.11. OPGAVE. Maak 1.25.12 (opgave) nogmaals, nu met gebruikmaking van karakteristieke functies met waarden in de gehele getallen modulo 2.

2.5. Aftelbare verzamelingen

2.5.1. DEFINITIE. *De verzamelingen* V *en* W *heten gelijkmachtig indien er een één-éénduidige afbeelding van* V *op* W *bestaat.*

Gelijkmachtigheid is een relatie in de verzameling van alle deelverzamelingen van een universum U. Dit universum U komt in de bovenstaande definitie echter niet voor. We kunnen daarom gelijkmachtigheid definiëren zonder vooraf de in de definitie voorkomende verzamelingen te beperken tot deelverzamelingen van een vaste verzameling U. Nu is de collectie van alle verzamelingen zelf geen verzameling. (Nadere toelichting van deze bewering zou ons met het wiskundige grondslagenonderzoek in contact brengen. In de naieve verzamelingenleer stoort men zich niet aan deze moeilijkheid. De geïnteresseerde lezer wordt verwezen naar de discussie van Russell's paradox bijv. in [6],§5.3.) We mogen wel spreken van de klasse van alle verzamelingen. De uitbreiding van het relatiebegrip tot het geval waar de individuen elementen van een klasse zijn is geen aanleiding tot enige moeilijkheid. Omdat er van naief standpunt geen verschil te zien is tussen klassen en verzamelingen, zullen we niet eens de moeite nemen het begrip klasse te omschrijven. We zullen daarom in het vervolg over gelijkmachtigheid van verzamelingen spreken, zonder ons tot deelverzamelingen van een universum te beperken.

2.5.2. STELLING. *Gelijkmachtigheid is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Omdat voor iedere verzameling V de identieke afbeelding $I_V:V\to V$ één-éénduidig en op is, is de gelijkmachtigheidsrelatie reflexief. De symmetrie volgt uit het feit dat als $F:V\to W$ één-éénduidig en op is, de inverse afbeelding $\overleftarrow{F}:W\to V$ eveneens één-éénduidig en op is. Tenslotte is de transiviteit een gevolg van het feit dat de samengestelde afbeelding $G\circ F:V\to X$ van twee afbeeldingen $F:V\to W$ en $G:W\to X$ die beide één-éénduidig en op zijn, zelf één-éénduidig en op is (zie 1.24.6).

We zullen ons in deze paragraaf bezighouden met enkele van de equivalentieklassen behorende bij de gelijkmachtigheidsrelatie. Voor eindige verzamelingen V en W betekent gelijkmachtigheid dat V en W evenveel elementen hebben. We zullen eindigheid nog precies definiëren in 2.5.9.

2.5.3. ENKELE NOTATIES
V gelijkmachtig met W zullen we noteren als: $V\sim W$.

$$\mathbf{N}_n := \{1,2,\dots,n\}=\{k\in\mathbf{N} \mid k\leq n\} \quad (n\in\mathbf{N}).$$

OPGAVEN

2.5.4. Bewijs dat voor alle $n,m\in\mathbf{N}$ uit $\mathbf{N}_n\sim\mathbf{N}_m$ volgt dat $n=m$.

2.5.5. Bewijs dat $\mathbf{N}$ en $\mathbf{Z}$ gelijkmachtig zijn.

2.5.6. Laat A en B verzamelingen zijn; bewijs dat $A\times B$ en $B\times A$ gelijkmachtig zijn.

2.5.7. Laat zien dat de verzamelingen I en C_1 gelijkmachtig zijn, waarbij

$$I := \{x\in\mathbf{R} \mid 0\leq x<1\},$$

$$C_1 := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}.$$

2.5.8. Bewijs dat $\mathbf{R}$ en $\{x\in\mathbf{R} \mid 0<x<1\}$ gelijkmachtig zijn.

2.5.9. DEFINITIE. *Een verzameling* V *heet eindig indien* $V=\emptyset$ *of indien er een* $n\in\mathbf{N}$ *is met* $V\sim\mathbf{N}_n$.

2.5.10. DEFINITIE. *Een verzameling* V *heet oneindig indien* V *niet eindig is.*

2.5.11. DEFINITIE. *Een verzameling* V *heet aftelbaar indien* $V\sim\mathbf{N}$. *Een één-éénduidige afbeelding van* $\mathbf{N}$ op V *heet een aftelling van* V.

2.5.12. DEFINITIE. *Een verzameling* V *heet overaftelbaar indien* V *niet eindig en niet aftelbaar is.*

Er komen nogal verschillen voor in de nomenclatuur. Soms noemt men bijv. de eindige verzamelingen ook aftelbaar. De elementen uit $\{V|\ V\sim\mathbf{N}\}$ heten dan aftelbaar oneindig.

2.5.13. STELLING. *Iedere oneindige verzameling bevat een aftelbare deelverzameling.*

Bewijs. Zij V oneindig, dan is $V\neq\emptyset$, V bevat dus een element a_1. Nu is $V\backslash\{a_1\}$ niet leeg, anders was immers $V=\{a_1\}$ en derhalve eindig. Er is dus een element $a_2\in V\backslash\{a_1\}$. In het bijzonder is $a_2\neq a_1$. $V\backslash\{a_1,a_2\}\neq\emptyset$ anders was $V=\{a_1,a_2\}$ en derhalve eindig. Zij $a_3\in V\backslash\{a_1, a_2\}$; in het bijzonder is dan $a_3\neq a_1$, $a_3\neq a_2$. We gaan zo door: $a_4\in V\backslash\{a_1,a_2,a_3\}$; $a_{n+1}\in V\backslash\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ $(n\geq 4)$.

De rij $a_1,a_2,a_3,\ldots$ is door de hier beschreven procedure recursief gedefinieerd (zie 1.27.15). De verzameling $V_1=\{a_1,a_2,\ldots\}$ is aftelbaar en $V_1\subset V$.

De aftelbare verzamelingen spelen een belangrijke rol; ze zijn weliswaar oneindig maar toch nog overzichtelijk op te schrijven: als f een aftelling van V is dan is $V=\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\}$ en alle elementen van V worden in de schrijfwijze $\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\}$ precies éénmaal vermeld. Vaak schrijft men f_1 in plaats van $f(1)$, enz.

2.5.14. STELLING. *Als er een afbeelding* $f:\mathbf{N}\to V$ *bestaat die een afbeelding van* $\mathbf{N}$ *op* V *is, dan is* V *eindig of aftelbaar.*

Bewijs. $V=f(\mathbf{N})=\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots\}$. Schrap in de rij $(f(1),\ f(2),\ \ldots)$ van links naar rechtsgaande ieder element dat men al eerder is tegengekomen. Wat er na dit proces overblijft is een eindige of oneindige rij $(f(n_1),\ f(n_2),\ f(n_3),\ \ldots)$ waarvan alle elementen verschillend zijn. (N.B. $n_1=1$.) Is deze rij eindig dan is V eindig; is deze rij oneindig dan is $f^*:\ \mathbf{N}\to V$ gedefinieerd door: $\forall_{k\in\mathbf{N}}\ [f^*(k):=f(n_k)]$ een aftelling van V.

2.5.15. STELLING. *Is* V *aftelbaar en* $V_0\subset V$ *dan is* V_0 *eindig of aftelbaar.*

Bewijs. Zij $f:\mathbf{N}\to V$ een aftelling van V. Is $V_0=\emptyset$ dan is V_0 eindig en er is niets te bewijzen. Is $V_0\neq\emptyset$ dan is er een $k\in\mathbf{N}$ met $f(k)\in V_0$. Nu is $g:\mathbf{N}\to V_0$ gedefinieerd door: $g(n):=f(k)$ indien $f(n)\notin V_0$ en $g(n):=f(n)$ indien $f(n)\in V_0$ $(n\in\mathbf{N})$, een afbeelding van $\mathbf{N}$ op V_0. Uit 2.5.14 (stelling) volgt nu het gestelde.

In 2.5.5 (opgave) zagen we dat een oneindige verzameling (i.c. $\mathbf{Z}$) gelijkmachtig kan zijn met een echte deelverzameling (i.c. $\mathbf{N}$). Deze eigenschap is karakteristiek voor oneindige verzamelingen zoals blijkt uit de volgende stelling.

2.5.16. STELLING. *Een verzameling* V *is dan en slechts dan oneindig als* V *gelijkmachtig is met een echte deelverzameling van* V.

Bewijs. (i) Zij V oneindig; V_0 een aftelbare deelverzameling van V (2.5.13); $f:\mathbf{N}\to V_0$ een aftelling van V_0. Laat $O:=\{2n-1 \mid n\in\mathbf{N}\}$. We definiëren $g:V\to V\setminus f(O)$ door: $g(x):=x$ als $x\in V\setminus V_0$; $g(f(n)):=f(2n)$ $(n\in\mathbf{N})$. Nu is g één-éénduidig en op.
(ii) Is anderzijds $V\sim\mathbf{N}_k$ voor zekere $k\in\mathbf{N}$, dan heeft een echte deelverzameling V_0 van V ten hoogste k-1 elementen. V is dan niet gelijkmachtig met V_0 (1.23.11 (opgave)). De enige deelverzameling van $\emptyset$ is $\emptyset$ en deze inclusie is niet echt.

We hebben van sommige verzamelingen aangetoond dat ze aftelbaar zijn. We hebben echter nog geen overaftelbare verzameling aangegeven.

2.5.17. $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *is overaftelbaar.*

Bewijs. Ieder element van $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ is een rij nullen en enen. Zij $F:\mathbf{N}\to\{0,1\}^{\mathbf{N}}$; we zullen laten zien dat F *niet* op kan zijn. Voor iedere $n\in\mathbf{N}$ is F(n) een rij nullen en enen; zij $F(n)_j$: het j^{de} cijfer uit de rij F(n). We construeren een element van $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dat niet in $F(\mathbf{N})$ is. We nemen $a_j:=1-F(j)_j$ $(j\in\mathbf{N})$. De rij $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ komt niet in $F(\mathbf{N})$ voor daar iedere rij uit $F(\mathbf{N})$ in tenminste één component van $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ verschilt; door de constructie van $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ hebben we immers bereikt dat a_n *ongelijk is aan de* n^{de} *component van* F(n) $(n\in\mathbf{N})$.

De in dit bewijs gebruikte methode heet het *diagonaalprocédé van Cantor*. Stel dat de er in voorkomende aftelling F zo is dat:

$$F(1) = (\underline{0}, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots),$$
$$F(2) = (1, \underline{1}, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots),$$
$$F(3) = (0, 1, \underline{0}, 1, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$F(4) = (0, 0, 0, \underline{1}, 0, 0, 0, \ldots),$$

Voor de constructie van de rij $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ beschouwen we nu de elementen, voorkomende op de diagonaalplaatsen in het bovenstaande schema, i.c. de onderstreepte getallen. In dit geval zou $a_1=1$ (want $F(1)_1=0$), $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=0$, ... Een belangrijke toepassing van het diagonaalprocédé van Cantor is de volgende stelling (zie opmerking na 4.1.6).

2.5.18. STELLING. $\mathbb{R}$ *is overaftelbaar.*

Bewijs. Het is voldoende om te laten zien dat $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}=:E$ overaftelbaar is (zie 2.5.8). Zij $F:\mathbb{N}\to E$; we zullen laten zien dat F niet op is. Laat voor iedere n het getal $F(n)$ als een oneindige decimale breuk geschreven zijn: $F(n)=0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots$; de cijfers a_{nj} zijn elementen van $\{0,1,\ldots,9\}$ $(n\in\mathbb{N},\ j\in\mathbb{N})$. We geven nu aan een decimale breuk $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ voorstellende een element van E dat niet tot $F(\mathbb{N})$ behoort. We nemen $b_n:=4$ als $a_{nn}\neq 4$ en $b_n:=5$ als $a_{nn}=4$ $(n\in\mathbb{N})$. Nu is $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ een decimale ontwikkeling van een getal in E; dit getal is zó dat $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ zijn enige decimale voorstelling is. (De lezer houde voor ogen dat decimale ontwikkelingen niet éénduidig bepaald zijn, $0{,}100000\ldots$ en $0{,}0999\ldots$ zijn voorstellingen van hetzelfde getal (zie 4.5.23).) $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ verschilt van de gekozen voorstellingen van alle elementen van $F(\mathbb{N})$. Omdat het getal $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ geen andere voorstellingswijze heeft (dit bereikten we immers door de keuze van de b's te beperken tot de cijfers 4 en 5) mogen we concluderen dat het niet tot $F(\mathbb{N})$ behoort.

De volgende stellingen zijn vaak nuttig bij aftelbaarheidsbewijzen.

2.5.19. STELLING. *De vereniging van twee aftelbare verzamelingen is aftelbaar.*

Bewijs. Laat V_1 en V_2 aftelbaar zijn en $F_1:\mathbb{N}\to V_1$, $F_2:\mathbb{N}\to V_2$ aftellingen van V_1 resp. V_2. Nu is $G:\mathbb{N}\to V_1\cup V_2$ gedefinieerd door $G(2n-1):=F_1(n)$; $G(2n):=F_2(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ een afbeelding van $\mathbb{N}$ op $V_1\cup V_2$. Wegens 2.5.14 is nu $V_1\cup V_2$ eindig of aftelbaar; maar $V_1\cup V_2$ heeft een oneindige deelverzameling nl. V_1 dus $V_1\cup V_2$ is aftelbaar.

Men kan het bovenstaande bewijs als volgt voorstellen: $V_1=\{F_1(1),\ F_1(2),\ \ldots\}$, $V_2=\{F_2(1),\ F_2(2),\ \ldots\}$; nu is: $V_1\cup V_2=\{F_1(1),\ F_2(1),\ F_1(2),\ F_2(2),\ \ldots\}$. G is de afbeelding die aan n toevoegt het n^{de} element uit de rij $(F_1(1),\ F_2(1),\ F_1(2),\ F_2(2),\ \ldots)$.

2.5.20. GEVOLG. *De vereniging van eindig veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar.*

2.5.21. STELLING. *De vereniging van een aftelbare collectie aftelbare verzamelingen is aftelbaar.*

Bewijs. Voor elke $n \in \mathbf{N}$ zij W_n een aftelbare verzameling. We moeten laten zien dat $\cup_{n \in \mathbf{N}} W_n$ aftelbaar is. Laat van elke W_n een aftelling gegeven zijn door:

$$\begin{array}{l} W_1 = \{w_1(1), w_1(2), w_1(3), \ldots\} \\ W_2 = \{w_2(1), w_2(2), w_2(3), \ldots\} \\ W_3 = \{w_3(1), w_3(2), w_3(3), \ldots\} \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

d.w.z. dat $w_n : \mathbf{N} \to W_n$ voor elke $n \in \mathbf{N}$ een één-éénduidige afbeelding van $\mathbf{N}$ op W_n is. Nu is

$$\cup_{n \in \mathbf{N}} W_n = \{w_1(1), w_1(2), w_2(1), w_1(3), w_2(2), w_3(1), \ldots\}.$$

In de laatste opsomming komt eerst het element $w_n(k)$ met $n+k=2$, dan de elementen met $n+k=3$, dan die met $n+k=4$, enz. Definiëren we nu: $\mathbf{N} \to \cup_{n \in \mathbf{N}} W_n$ door $w_1(1) =: \phi(1)$, $w_1(2) =: \phi(2)$, $w_2(1) =: \phi(3)$, $w_1(3) =: \phi(4)$, $w_2(2) =: \phi(5)$ enz., dus $\phi(n) :=$ het n^{de} element uit de rij $(w_1(1), w_1(2), w_2(1), \ldots)$, dan is ϕ een afbeelding van $\mathbf{N}$ op $\cup_{n \in \mathbf{N}} W_n$. De laatste verzameling is niet eindig en dus aftelbaar.

We maken nog een drietal opmerkingen over het bewijs van 2.5.21 (stelling): (i) We hadden aangenomen dat de aftelbare collectie verzamelingen geïndiceerd was met $\mathbf{N}$. Dit betekende geen verlies van algemeenheid. Is immers $I = \{i_1, i_2, i_3, \ldots\}$ een aftelbare verzameling en is voor ieder element i_k van I een aftelbare verzameling V_{i_k} $(k \in \mathbf{N})$ gegeven dan definiëren we $W_n := V_{i_n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Nu is

$$\cup_{i \in I} V_i = \cup_{n \in \mathbf{N}} W_n.$$

(ii) We gebruikten in het bewijs niet dat de verzamelingen $W_n (n \in \mathbf{N})$ alle verschillend zijn.

(iii) Het in het bewijs gebruikte proces heet het *diagonaalprocédé van Cauchy.* We noemden de elementen uit het tweezijdig oneindige schema van de $w_n(k)$ $(n, k \in \mathbf{N})$ zo op dat we regelmatig aan beide zijden van de diagonaal (dus naar rechts en naar beneden) elementen namen. Op die manier bereikten we dat ieder element aan de beurt kwam, d.w.z. een eindig rangnummer in de rij kreeg. Er zijn vele varianten mogelijk. We noemen er slechts één. Neem eerst de $w_n(k)$ met $\max(n,k)=1$, dan die met $\max(n,k)=2$, die met $\max(n,k)=3$ enz. Dan krijgen we bijv. de rij: $(w_1(1), w_1(2), w_2(2), w_2(1), w_1(3), w_2(3), w_3(3), w_3(2), w_3(1), \ldots)$.

2.5.22. STELLING. $\mathbf{Q}$ *is aftelbaar.*

Bewijs. Definieer voor elke $n \in \mathbf{N}$ de verzameling $W_n := \{\frac{g}{n} \mid g \in \mathbf{Z}\}$. Dan is $W_n \sim \mathbf{Z}$ en dus aftelbaar ($n \in \mathbf{N}$). Voorts is $\mathbf{Q} = \cup_{n \in \mathbf{N}} W_n$. Dus $\mathbf{Q}$ is aftelbaar op grond van 2.5.21 (stelling).

We zullen ook enige stellingen bespreken over de aftelbaarheid van Cartesische producten.

2.5.23. STELLING. *Is* V *aftelbaar en* W *aftelbaar dan is* $V \times W$ *aftelbaar.*

Bewijs. Laat $f: \mathbf{N} \to V$, $g: \mathbf{N} \to W$ aftellingen zijn. Nu is $V \times W = \cup_{n \in \mathbf{N}} \{(f(k), g(n)) \mid k \in \mathbf{N}\}$, zodat het bewijs volgt uit 2.5.21 (stelling).

2.5.24. STELLING. *Is* V *aftelbaar dan is* V^n *aftelbaar voor elke* $n \in \mathbf{N}$.

Bewijs. We passen volledige inductie toe. $V^1 (=V)$ is aftelbaar. We merken op dat voor elke $n \in \mathbf{N}$ $V^{n+1} \sim V^n \times V$ want $\phi: V^{n+1} \to V^n \times V$ gedefinieerd door $\phi(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) := ((v_1, v_2, \ldots, v_n), v_{n+1})$ $(v_1, \ldots, v_{n+1} \in V)$ is één-éénduidig en op. Als V^n aftelbaar is volgt dat V^{n+1} aftelbaar is omdat $V^n \times V$ dan wegens 2.5.23 aftelbaar is.

De volgende stelling geeft een opmerkelijk verschil aan tussen de aftelbaarheidseigenschappen van verenigingen en van Cartesische producten.

2.5.25. STELLING. *Is* V *een verzameling dan is* $V^{\mathbf{N}}$ *niet aftelbaar.*

Bewijs. Als $V=\emptyset$ of als V uit één element bestaat is $V^{\mathbf{N}}$ eindig (nl. leeg resp. bestaande uit één element). Als V tenminste twee elementen, zeg a en b heeft, dan is $V^{\mathbf{N}} \supset \{a,b\}^{\mathbf{N}}$, terwijl $\{a,b\}^{\mathbf{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ en deze verzameling is overaftelbaar (2.5.17).

OPGAVEN

2.5.26. Bewijs dat de volgende verzamelingen aftelbaar zijn:

(a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \in \mathbf{Q}\}$,

(b) $\{x \in \mathbf{R} \mid \sin x \in \mathbf{Q}\}$,

(c) $\{x \in \mathbf{R} \mid \tan x \in \mathbf{Z}\}$.

2.5.27. Bewijs dat de vereniging van een aftelbare collectie eindige verzamelingen eindig of aftelbaar is. Geef van elk van beide mogelijkheden een voorbeeld.

2.5.28. We definiëren een deelverzameling W van $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ door:

$$W := \{f \in \{0,1\}^{\mathbf{N}} \mid \exists_{n \in \mathbf{N}} \forall_{m \in \mathbf{N},\ m>n} [f(m)=0]\}.$$

Bewijs dat W aftelbaar is.

2.5.29. V is een aftelbare verzameling; W is de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van V. Bewijs dat W aftelbaar is.

2.5.30. Bewijs dat $P(\mathbf{N})$ overaftelbaar is.

2.5.31. OPMERKING. We hebben ons in deze paragraaf voornamelijk beziggehouden met de equivalentieklasse $\{V \mid V \sim \mathbf{N}\}$. Een belangrijk gedeelte van de verzamelingenleer van Cantor bestaat uit de bestudering van alle equivalentieklassen van de gelijkmachtigheidsrelatie. Deze equivalentieklassen heten kardinaalgetallen. De geïnteresseerde lezer zij bijv. verwezen naar [6], [12] of [18].

2.6. Ordeningsrelaties

2.6.1. DEFINITIE. *Een relatie* R *in een verzameling* V *heet een ordeningsrelatie in* V *indien* R *voldoet aan de volgende beide eisen:*

(O1) R *is transitief,*

(O2) R *is antireflexief.*

In plaats van ordeningsrelaties gebruikt men ook wel de namen: ordening, partiële ordening (ter onderscheiding van de lineaire ordeningsrelaties die we in 2.6.15 zullen definiëren) of orderelatie.
Is R een ordening in V dan heet het paar (V,R) *een geordende verzameling* (partieel geordende verzameling).
Vaak spreekt men over de geordende verzameling V in plaats van over (V,R), doch dit is slordig taalgebruik dat men beter kan vermijden. Voor ordeningsrelaties gebruikt men vaak symbolen lijkend op het kleinerteken < uit de rekenkunde, dus <, $<_\circ$, $<_\bullet$, of iets dergelijks.
We zeggen vaak ook: x is kleiner, eerder, minder dan y, gaat vooraf aan y. De geordende verzameling noteert men dan $(V,<_\circ)$, $(V,<_\bullet)$ enz. Is $V \subset \mathbf{R}$ dan duidt < steeds de gewone "kleiner dan" relatie voor reële getallen aan.
Men noemt (O1) en (O2) wel de axioma's voor een geordende verzameling. In deze uitdrukking is "axioma" in een andere zin gebruikt dan in "de axioma's van de Euclidische meetkunde" (zie 1.1.2).

VOORBEELDEN

2.6.2. In $V \subset \mathbf{R}$ zijn de relaties $x<y$ en $x>y$ ordeningsrelaties.

2.6.3. In de verzameling van alle mannen is de relatie: "x is een voorvader van y" een ordening.

2.6.4. In $\mathbf{N}$ is de relatie: $\exists_{n\in\mathbf{N},\ n>1}\,[y=nx]$, (in woorden: "x is een echte deler van y") een ordening. (In deze terminologie is 1 een echte deler van elk getal n>1.)

2.6.5. In iedere verzameling is de lege relatie (2.1.5) een ordening.

2.6.6. Zij W een verzameling. In P(W) is de relatie: $(X\subset Y)\wedge(X\neq Y)$ (in woorden: X is een echte deelverzameling van Y) een ordening. We noteren deze ordening met $\subset_\circ$.

2.6.7. Zij W een verzameling. In $\mathbf{R}^W$ definiëren we een ordening $<_\circ$ door

$$\forall_{f\in\mathbf{R}^W}\ \forall_{g\in\mathbf{R}^W}\ [(f<_\circ g):\Leftrightarrow \forall_{x\in W}\ [f(x)<g(x)]]$$

(zoals afgesproken in 2.6.1 beduidt < de gewone ordening in $\mathbf{R}$).

2.6.8. In $\mathbf{R}^2$ definieert men een ordening $<_\bullet$ door:

$$((a_1,a_2) <\cdot (b_1,b_2)) :\Leftrightarrow \{(a_1<b_1) \vee ((a_1=b_1) \wedge (a_2<b_2))\}$$

$$((a_1,a_2),\ (b_1,b_2) \in \mathbf{R}^2).$$

Een dergelijke ordening heet *lexicografische ordening.*

2.6.9. In $\mathbf{N}$ is de relatie $<_\circ$ gedefinieerd door

$$(x <_\circ y) :\Leftrightarrow \{(x-y \equiv 1(2) \text{ en } x \text{ is even}) \vee ((x-y \equiv 0(2)) \wedge (x<y))\}$$

$$(x,y \in \mathbf{N})$$

een ordening die we kunnen voorstellen door: $2 <_\circ 4 <_\circ 6 <_\circ$ $<_\circ \ldots <_\circ 1 <_\circ 3 \ldots$.

2.6.10. In $\mathbf{Z}$ is de relatie κ een ordening indien

$$(x \kappa y) :\Leftrightarrow \{(|x|<|y|) \vee ((|x|=|y|) \wedge (x<y))\} \quad (x,y \in \mathbf{Z}).$$

Deze ordening kan voorgesteld worden door: $0 \kappa -1 \kappa 1 \kappa -2 \kappa 2 \kappa$ $\kappa -3 \ldots$

2.6.11. EIGENSCHAP. Is R een ordening in V dan is $\overleftarrow{R}$ gegedefinieerd door

$$\forall_{x \in V} \forall_{y \in V} [(x\overleftarrow{R}y) :\Leftrightarrow (yRx)]$$

eveneens een ordening.

2.6.12. GEÏNDUCEERDE ORDENING
Is (V,R) een geordende verzameling, $V_0 \subset V$, dan is de restrictie van R tot V_0 (2.2.16) een ordening in V_0. Deze heet de door R geïnduceerde ordening in V_0.

2.6.13. STELLING. *Is* (V,R) *een geordende verzameling,* $a \in V$, $b \in V$, *dan is ten hoogste één van de beweringen* aRb, bRa, a=b *waar.*

Bewijs. Als a=b waar is, is wegens (O2) aRb onwaar en bRa ook. Als aRb waar is, geldt $a \neq b$ wegens (O2). Ook bRa is dan onwaar want wegens (O1) zou uit aRb en bRa volgen aRa in tegenspraak met (O2). Als bRa waar is, volgt geheel analoog dat aRb en a=b onwaar zijn.

2.6.14. DEFINITIE. *Zij* (V,R) *een geordende verzameling. Twee elementen* $a \in V$, $b \in V$ *heten vergelijkbaar indien*

$$(aRb) \vee (bRa) \vee (a=b).$$

Twee verschillende elementen a en b van een geordende verzameling zijn dus vergelijkbaar als a voorafgaat aan b of b voorafgaat aan a.

2.6.15. DEFINITIE. *Een geordende verzameling* (V,R) *heet lineair (ook wel: totaal) geordend indien ieder tweetal elementen vergelijkbaar is; dat wil dus zeggen dat* R *voldoet aan:*

(O3) $$\forall_{x \in V}\ \forall_{y \in V}\ [(xRy) \vee (yRx) \vee (x=y)].$$

De ordeningsrelatie in een lineair geordende verzameling heet lineaire ordening.

2.6.16. VOORBEELDEN. De ordeningen in de voorbeelden 2.6.2, 2.6.8, 2.6.9 en 2.6.10 zijn lineair; de ordeningen in 2.6.6 en 2.6.7 zijn lineair als W ten hoogste een element bevat, ze zijn niet lineair als W meer dan één element bevat. De lege relatie in een verzameling V is alleen een lineaire ordening indien V ten hoogste een element bevat. De ordeningen in 2.6.3 en 2.6.4 zijn niet lineair.

OPGAVEN

2.6.17. (a) Definieer de lexicografische ordening in $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ en in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

(b) Zij $(V, \lessdot)$ een lineair geordende verzameling; definieer de lexicografische ordening in V^n $(n \in \mathbf{N})$ en laat zien dat deze lineair is.

2.6.18. Zij $(V, \lessdot)$ een geordende verzameling, W een verzameling. Definieer een ordening in V^W analoog aan 2.6.7 (voorbeeld).

2.6.19. Zij (V,R) een geordende verzameling. Bewijs dat R dan en slechts dan lineair is als $\overleftarrow{R}$ lineair is.

2.6.20. (a) Laat zien dat voor de ordening uit 2.6.4 (voorbeeld) de relatie "x vergelijkbaar y" geen equivalentierelatie in $\mathbf{N}$ is.

(b) Geef een voorbeeld van een niet-lineair geordende verzameling waarin de bijbehorende vergelijkbaarheidsrelatie een equivalentierelatie is.

(c) Zij (V,R) een geordende verzameling waarvoor de vergelijkbaarheidsrelatie een equivalentierelatie is. Bewijs dat een deelverzameling $V_0 \subset V$ een equivalentieklasse bij de vergelijkbaarheidsrelatie is dan en slechts dan als V_0 voldoet aan de beide volgende eisen:

(i) de geïnduceerde ordening (2.2.16) in V_0 is lineair;

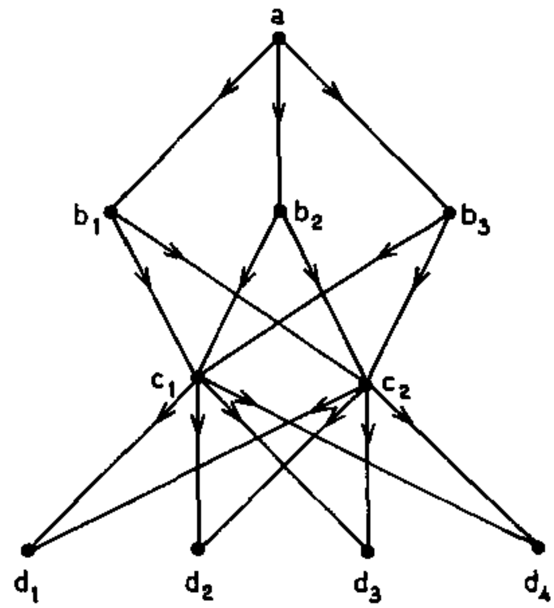
(ii) als $V_0 \subset V_1$ en als de geïnduceerde ordening in V_1 lineair is, dan is $V_0 = V_1$.

2.6.21. We bekijken een wijze waarop een ordening gedefinieerd kan zijn. Zij (W,R) een geordende verzameling, V een verzameling; zij $\phi: V \to W$. Nu is de relatie R_ϕ gegedefinieerd door:

$$\forall_{x \in V} \forall_{y \in V} [(xR_\phi y) :\Leftrightarrow (\phi(x) R \phi(y))]$$

een *ordening in* V.
Is (W,R) een lineair geordende verzameling, dan is de relatie $\neg((xR_\phi y) \vee (yR_\phi x))$ een equivalentierelatie, waarvoor $\{\{\overset{\leftarrow}{\phi}(\{w\})\} \mid w \in \phi(V)\}$ de bijbehorende partitie van V in equivalentieklassen is (zie 2.3.18 (voorbeeld) en ook 2.6.22).

2.6.22. Heeft men een ordeningsrelatie in een eindige verzameling dan kan men de relatie soms voorstellen in een punten en pijlen diagram (gerichte graaf) waarbij "x gaat vooraf aan y" aangeduid wordt doordat er een reeks pijlen loopt van het punt dat x voorstelt naar het punt dat y voorstelt. We zullen dit aan een voorbeeld toelichten. Stel dat $V = \{a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3, d_4\}$ de verzameling is van de personen in een zekere hiërarchische organisatie; één van deze personen, a, heeft de rang van "aanvoerder", b_1, b_2 en b_3 hebben de rang "baas", c_1 en c_2 hebben de rang "chef" en tenslotte d_1, d_2, d_3 en d_4 hebben de rang "dienaar".
De rangen zijn lineair geordend door de afspraken: aanvoerder is hoger dan baas, chef en dienaar; baas is hoger dan chef en dienaar, chef is hoger dan dienaar.
We beschouwen in V de ordeningsrelatie: "x is hoger in rang dan y". Deze relatie kan voorgesteld worden door het diagram van figuur 21.
Zij W de verzameling van de rangen: aanvoerder, baas, chef en dienaar met bovenomschreven ordening. Is $\phi: V \to W$ gedefinieerd door: $\forall_{x \in V} [\phi(x) := \text{rang van } x]$ dan is de beschouwde ordening in V te verkrijgen op de wijze beschreven in 2.6.21.



Figuur 21

We merken nog op: $\{x \in V \mid x$ vergelijkbaar met $b_3\} = \{a, b_3, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3, d_4\}$; $\{x \in V \mid x$ vergelijkbaar met $b_1\} = \{a, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Uit het feit dat deze twee verzamelingen noch disjunct, noch gelijk zijn, ziet men dat de vergelijkbaarheidsrelatie geen equivalentierelatie is (vergelijk 2.6.20).

2.6.23. Het zal aan de lezer bekend zijn dat we bij het bestuderen van de ordeningsstructuur in **R** zeer vaak gebruikmaken van de relatie $x \leq y$ in plaats van de relatie $x < y$. Voor een willekeurige geordende verzameling is dit eveneens mogelijk.

2.6.24. DEFINITIE. *Is* R *een ordeningsrelatie in* V *dan definieert men de relatie* $\underline{R}$ *door:*

$$\forall_{x \in V} \forall_{y \in V} [(x\underline{R}y) :\Leftrightarrow ((xRy) \vee (x=y))].$$

2.6.25. STELLING. *Is* R *een ordeningsrelatie in* V*, dan is* $\underline{R}$ *reflexief, antisymmetrisch en transitief.*

Bewijs. Toepassing van de definities, de distributiviteit van $\wedge$ ten opzichte van $\vee$ (1.18.9) en 2.6.13 (stelling).

2.6.26. We hadden ook een reflexieve, antisymmetrische en transitieve relatie als uitgangspunt van deze paragraaf kunnen nemen (sommige auteurs doen dit ook). De gelijkwaardigheid van beide uitgangspunten volgt uit de volgende omkering van 2.6.25 (stelling).

2.6.27. STELLING. *Is de relatie* R *reflexief, antisymmetrisch en transitief in* V *dan is* R^* *gedefinieerd door*

$$\forall_{x\in V}\ \forall_{y\in V}\ [(xR^*y):\Leftrightarrow((xRy)\wedge(x\neq y))]$$

een ordening in V.

Bewijs. Toepassing van definities.

Als we een ordening moeten aangeven kunnen we dus ook aangeven welke elementenparen aan de relatie $x\underline{R}y$ voldoen.

2.6.28. DEFINITIE. *Ordeningsisomorfie. De geordende verzamelingen* (V,R) *en* (V_1,R_1) *heten ordeningsisomorf indien er een één-éénduidige afbeelding,* ϕ*, van* V *op* V_1 *bestaat die voldoet aan:*

$$\forall_{x\in V}\ \forall_{y\in V}\ [(xRy)\Leftrightarrow(\phi(x)R_1\phi(y))].$$

Een dergelijke afbeelding ϕ heet een ordeningsisomorfisme van (V,R) en (V_1,R_1). Men bewijst gemakkelijk dat ordeningsisomorfie in de klasse van alle geordende verzamelingen een equivalentierelatie is. Dat twee geordende verzamelingen ordeningsisomorf zijn betekent grof gezegd dat ze wat betreft hun ordening hetzelfde zijn. Als men ordeningsrelaties bestudeert interesseert men er zich vaak in het geheel niet voor wat de elementen van V nu wel voor dingen zijn; slechts de door de ordening aanwezige structuur wordt dan van belang geacht. Precieser gezegd betekent dit dat men een equivalentieklasse van onderling ordeningsisomorfe geordende verzamelingen bestudeert. We zullen in hoofdstuk 3 zien dat iedere "abstracte structuur" zijn bijpassend isomorfiebegrip heeft.

VOORBEELDEN

2.6.29. Zij V een aftelbare verzameling en $f:\mathbf{N}\to V$ een aftelling van V, dan is R gedefinieerd door $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \forall_{m\in\mathbf{N}}$ $[(f(n)Rf(m):\Leftrightarrow(n<m)]$ een lineaire ordening in V en (V,R) is ordeningsisomorf met $(\mathbf{N},<)$

2.6.30. Zij W een willekeurige verzameling, $W\neq\emptyset$. In $\{0,1\}^W$ definiëren we de ordening $<_0$ door:

$$(f <_{\circ} g) \;:\Leftrightarrow\; \{(f \neq g) \wedge \forall_{x \in W}\, [f(x) \leq g(x)]\}$$

$$(f, g \in \{0,1\}^W).$$

Bewijs dat $(P(W), \subset_{\circ})$ en $(\{0,1\}^W, <_{\circ})$ ordeningsisomorf zijn. (Als deelresultaat moet men dus ook bewijzen dat $P(W)$ en $\{0,1\}^W$ gelijkmachtig zijn.)

OPGAVEN

2.6.31. (V,R) en (V_1,R_1) zijn geordende verzamelingen; $\phi: V \to V_1$ is een één-éénduidige afbeelding van V op V_1. Bewijs dat ϕ dan en slechts dan een ordeningsisomorfisme van (V,R) op (V_1,R_1) is indien:

$$\forall_{x \in V}\, \forall_{y \in V}\, [(x\underline{R}y) \Leftrightarrow (\phi(x)\underline{R}_1\phi(y))].$$

2.6.32. Geef een ordeningsisomorfisme van $(\mathbf{N},<)$ op de geordende verzameling uit 2.6.10 (voorbeeld).

2.6.33. Bewijs dat $(\mathbf{N},<)$ en $(\mathbf{Z},<)$ niet ordeningsisomorf zijn.

2.7. Kleinste elementen, minimale elementen, ondergrenzen

2.7.1. We zullen beschouwen een geordende verzameling (V,R). Ter ondersteuning van onze intuïtie zullen we R voorstellen door $<_{\circ}$. De relaties $\underline{R}$, $\overleftarrow{R}$ en $\underline{\overleftarrow{R}}$ worden voorgesteld door: $\leq_{\circ}$, $_{\circ}\!>$ en $_{\circ}\!\geq$. We wijzen op de dualiteit tussen $<_{\circ}$ en $_{\circ}\!>$; als gevolg hiervan komen alle begrippen en stellingen uit deze paragraaf voor in paren. We kunnen er mee volstaan slechts één uit elk paar nauwkeurig te bestuderen; de andere zal steeds uit de beschouwde ontstaan door verwisseling van $<_{\circ}$ en $_{\circ}\!>$.

2.7.2. DEFINITIE. *Zij* $(V, <_{\circ})$ *een geordende verzameling,* $V_0 \subset V$.

(i) *Een element* $a \in V_0$ *heet het eerste (kleinste) element van* V_0 *bij de ordening* $<_{\circ}$ *indien* $\forall_{x \in V_0}\, [a \leq_{\circ} x]$.

(ii) *Een element* $b \in V_0$ *heet het laatste (grootste) element van* V_0 *bij de ordening* $<_{\circ}$ *indien* $\forall_{x \in V_0}\, [b \,_{\circ}\!\geq x]$.

Vaak zullen we het eerste resp. laatste element van V_0 noteren als $\min V_0$ resp. $\max V_0$. Als V_0 geen kleinste element heeft zeggen we wel: "$\min V_0$ bestaat niet".

2.7.3. STELLING. *Zij* $(V,<^\circ)$ *een geordende verzameling;* $V_0 \subset V$.
(i) V_0 *heeft ten hoogste één eerste element,*
(ii) V_0 *heeft ten hoogste één laatste element.*

Bewijs. (i) Stel dat a_1 en a_2 eerste element van V_0 zijn. Dan is $\forall_{x \in V_0}\ [a_1 \leq^\circ x]$ dus in het bijzonder $a_1 \leq^\circ a_2$ en $\forall_{x \in V_0}\ [a_2 \leq^\circ x]$ dus in het bijzonder $a_2 \leq^\circ a_1$. Hieruit volgt $a_1 = a_2$ wegens 2.6.25 (stelling).

2.7.4. VOORBEELDEN. In al onze voorbeelden is $V_0 = V$. We spreken dan van het eerste element van de geordende verzameling. De geordende verzameling uit 2.6.2 heeft geen eerste element. Volgens het verhaal van het boek Genesis is Adam het eerste element uit de geordende verzameling uit 2.6.3. Het getal 1 is het eerste element van $\mathbf{N}$ met de ordening uit 2.6.4. Van $(P(W),\subset^\circ)$ is $\emptyset$ het eerste element (2.6.6). De geordende verzamelingen uit 2.6.7 (met $W \neq \emptyset$) en 2.6.8 hebben geen kleinste element. In de voorbeelden 2.6.9 en 2.6.10 zijn 2 resp. 0 het kleinste element. Van de geordende verzameling uit 2.6.22 is a het eerste element.

2.7.5. DEFINITIE. *Zij* $(V,<^\circ)$ *een geordende verzameling;* $V_0 \subset V$.
(i) *Een element* $a \in V_0$ *heet een minimaal element van* V_0 *bij de ordening* $<^\circ$ *indien* $\forall_{x \in V_0}\ [(x \leq^\circ a) \Rightarrow (x = a)]$,
(ii) *Een element* $b \in V_0$ *heet een maximaal element van* V_0 *bij de ordening* $<^\circ$ *indien* $\forall_{x \in V_0}\ [(x \geq^\circ b) \Rightarrow (x = b)]$.

Een element $a \in V_0$ heet dus een minimaal element indien het voorafgaat aan *alle met* a *vergelijkbare* van a verschillende elementen van V_0; het is het kleinste element indien het voorafgaat aan *alle* van a verschillende elementen van V_0. Het verschil tussen de begrippen minimale element en kleinste element komt ook tot uitdrukking in de volgende eigenschappen.

EIGENSCHAPPEN

2.7.6. Zij $(V,<^\circ)$ een geordende verzameling; $V_0 \subset V$. Als V_0 een eerste element heeft bij $<^\circ$, dan is dit het enige minimale element.
Bewijs. Zij $a = \min V_0$ dan is $\forall_{x \in V_0}\ [a \leq^\circ x]$; tevens is dan $\forall_{x \in V_0}\ [(x \leq^\circ a) \Rightarrow (x = a)]$. Dus is a minimaal. Zij bovendien a_1 een minimaal element van V_0. Uit het feit dat a het eerste element is volgt: $a \leq^\circ a_1$. Uit het feit dat a minimaal is volgt $(a \leq^\circ a_1) \Rightarrow (a = a_1)$. Conclusie: $a = a_1$ (zie 1.16.5).

2.7.7. Zij $(V,<_\circ)$ een geordende verzameling, $V_0 \subset V$. Als de geïnduceerde ordening in V_0 lineair is dan heeft V_0 ten hoogste één minimaal element; als er een minimaal element is, dan is dat tevens het eerste element.
Bewijs. Zij $(V_0,<_\circ)$ lineair geordend, zij a een minimaal element van V_0; we zullen laten zien dat a het eerste element van V_0 is, uit 2.7.6 volgt dan tevens dat a het enige minimale element is. We hebben nu:

$$\forall_{x\in V_0}\ [(x\leq_\circ a)\Rightarrow(x=a)],$$

$$\forall_{x\in V_0}\ [(x\leq_\circ a)\vee(a\leq_\circ x)].$$

Uit beide regels volgt:

$$\forall_{x\in V_0}\ [a\leq_\circ x].$$

Bij de eigenschappen 2.7.6 en 2.7.7 zal de lezer zonder moeite de duale beweringen voor maximale en laatste elementen kunnen formuleren. Merk ook dat de kleinste en minimale elementen bij de ordening $<_\circ$ overeenkomen met de grootste en maximale elementen bij $\overleftarrow{<_\circ}$, die we als $>_\circ$ genoteerd hebben.

VOORBEELDEN

2.7.8. Beschouw $\mathbf{N}$ met de ordening uit 2.6.4 ("x is een echte deler van y"). Van de verzameling $\mathbf{N}\backslash\{1\}$ zijn alle priemgetallen minimale elementen.

2.7.9. Beschouw $(P(W),\subset_\circ)$ (zie 2.6.6) voor $W\neq\emptyset$. Van $P(W)\backslash\{\emptyset\}$ zijn alle deelverzamelingen van W die uit slechts één element bestaan minimale elementen.

2.7.10. Bij de ordening uit 2.6.22 zijn d_1,d_2,d_3,d_4 maximale elementen.

2.7.11. Het is mogelijk dat een geordende verzameling precies één minimaal element maar geen eerste element heeft (vergelijk met 2.7.6). In $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ definiëren we een ordening door:

$$(x<_\circ y)\ :\Leftrightarrow\ \{(xy>0)\wedge(x<y)\}\quad (x,y\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}).$$

Nu is 1 het enige minimale element van $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ doch er is geen eerste element. De beschouwde ordening induceert in $\mathbf{N}$

en in $-\mathbf{N}:=\{x \in \mathbf{Z} \mid x<0\}$ de gewone ordening naar grootte, doch de elementen van $\mathbf{N}$ zijn onvergelijkbaar met die van $-\mathbf{N}$.

2.7.12. DEFINITIE. *Zij* $(V,<\circ)$ *een geordende verzameling;* $V_0 \subset V$.
(i) *Een element* $a \in V$ *heet een ondergrens van* V_0 *bij de ordening* $<\circ$ *indien:*

$$\forall_{x \in V_0} [a \leq\circ x].$$

(ii) *Een element* $b \in V$ *heet een bovengrens van* V_0 *bij de ordening* $<\circ$ *indien:*

$$\forall_{x \in V_0} [x \leq\circ b].$$

We zullen de verzameling van alle ondergrenzen resp. bovengrenzen van V_0 noteren met $O(V_0)$ resp. $B(V_0)$. Het is natuurlijk heel goed mogelijk dat $O(V_0)=\emptyset$ of $B(V_0)=\emptyset$. Let op dat noch van een ondergrens noch van een bovengrens van V_0 geëist wordt dat deze element van V_0 is. We hebben:

2.7.13. EIGENSCHAP. Zij $(V,<\circ)$ een geordende verzameling; $V_0 \subset V$; $a \in V_0$. Nu is $a \in O(V_0)$ dan en slechts dan als $a = \min V_0$.

2.7.14. DEFINITIE. *Zij* $(V,<\circ)$ *een geordende verzameling.* $V_0 \subset V$ *heet naar onder begrensd indien:* $O(V_0) \neq \emptyset$. $V_0 \subset V$ *heet naar boven begrensd indien:* $B(V_0) \neq \emptyset$. V_0 *heet begrensd indien:* $O(V_0) \neq \emptyset \neq B(V_0)$.

Heeft $(V,<\circ)$ een eerste element dan is $(\min V) \in O(V_0)$ voor elke $V_0 \subset V$; heeft $(V,<\circ)$ een eerste element dan is elke $V_0 \subset V$ naar onder begrensd.

VOORBEELDEN

2.7.15. We beschouwen $(\mathbf{R},<)$. Zij $U:=\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $V:=\{x \in \mathbf{R} \mid 0<x<1\}$ dan is

$$O(U) = O(V) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\} =: \mathbf{R}^-$$

$$B(U) = B(V) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 1\}.$$

Merk op: $O(\mathbf{R}^-) = \emptyset$.

2.7.16. In $\mathbf{R}^2$ beschouwen we de lexicografische ordening (zie 2.6.8). Zij

$$C := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\},$$
$$D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\},$$
$$E := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (0<x<1)\wedge(0<y<1)\},$$
$$F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (0\le x\le 1)\wedge(0<y\le 1)\}.$$

We hebben nu:

$$O(C) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\le -1\},$$
$$O(D) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x<-1\}\cup\{(-1,y) \mid y\le 0\},$$
$$O(E) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x\le 0\},$$
$$O(F) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x<0\}\cup\{(0,y) \mid y\le 0\}.$$

2.7.17. In $\mathbf{R}^2$ beschouwen een ordening gedefinieerd door:

$$((x,y) \lessdot (u,v)) :\Leftrightarrow ((x\le u)\wedge(y\le v))$$

$$((x,y),(u,v) \in \mathbf{R}^2).$$

We bepalen bij deze ordening de ondergrenzen van de verzamelingen C, D, E en F uit 2.7.16.

$$O(C) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x\le -1)\wedge(y\le -1)\},$$
$$O(D) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x<-1)\wedge(y<-1)\},$$
$$O(E) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x\le 0)\wedge(y\le 0)\},$$
$$O(F) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x<0)\wedge(y\le 0)\}.$$

(N.B. Beschouwen we $\mathbf{R}^2$ als $\mathbf{R}^{\{1,2\}}$ dan is de in dit voorbeeld beschouwde ordening de in 2.6.7 (voorbeeld) gedefinieerde.)

2.7.18. DEFINITIE. *Zij* $(V,\lessdot)$ *een geordende verzameling;* $V_0\subset V$.

(a) *Als* $O(V_0)$ *een laatste element bevat dan heet dit het infimum van* V_0 *(notatie:* $\inf V_0$*) dus*

$$\inf V_0 := \max O(V_0),$$

(b) *Als* $B(V_0)$ *een eerste element bevat dan heet dit het supremum van* V_0 *(notatie:* $\sup V_0$*) dus*

$$\sup V_0 := \min B(V_0).$$

Men noemt het infimum resp. supremum ook wel de "grootste ondergrens" resp. "kleinste bovengrens" van V_0.

EIGENSCHAPPEN

2.7.19. Als inf $V_0 \in V_0$ dan is inf V_0 = min V_0.

2.7.20. Iedere deelverzameling van een geordende verzameling heeft ten hoogste één infimum en ten hoogste één supremum.

2.7.21. Zij $(V, <_\circ)$ een geordende verzameling; $V_0 \subset V$. Nu geldt w = inf V_0 dan en slechts dan indien aan de beide volgende voorwaarden voldaan is:

(a) $\forall_{x \in V_0} [w \leq_\circ x]$,

(b) $\forall_{v \in V} [\{\forall_{x \in V_0} [v \leq_\circ x]\} \Rightarrow (v \leq_\circ w)]$.

De karakterisering van het infimum in 2.7.21 laat zien dat de volgende omkering van 2.7.19 ook geldt.

2.7.22. Zij $(V, <_\circ)$ een geordende verzameling; $V_0 \subset V$. Indien min V_0 bestaat dan is min V_0 = inf V_0.

2.7.23. Zij $(V, <_\circ)$ een geordende verzameling; inf V bestaat dan en slechts dan als V een eerste element heeft en inf V = min V. Evenzo sup V = max V.

VOORBEELDEN

2.7.24. In 2.7.15 geldt: inf V = inf U = min U = 0.

2.7.25. In 2.7.16 geldt: inf C bestaat niet. C is dus een naar onder begrensde deelverzameling van een lineair geordende verzameling die geen infimum heeft. Voorts: inf $D = (-1,0)$ = min D; inf E bestaat niet; inf $F = (0,0)$ en min F bestaat niet.

2.7.26. In 2.7.17 geldt: inf C bestaat niet; alle elementen van $\{(-1,y) \mid y \leq -1\} \cup \{(x,-1) \mid x \leq -1\}$ zijn maximale elementen van $O(C)$. Voorts: inf D bestaat niet; inf E bestaat niet; inf F bestaat niet.

2.7.27. Zij W een verzameling. Nu is $(P(W), \subset_\circ)$ een geordende verzameling met de fraaie eigenschap dat voor elke deelverzameling $U \subset P(W)$, inf U en sup U beide bestaan. We hebben nl.

$$\inf U = \cap_{W_0 \in U} W_0,$$

$$\sup U = \cup_{W_0 \in U} W_0.$$

De lezer overtuige zich van de juistheid van deze beweringen door toepassing van de karakterisering uit 2.7.21 en de duale van deze karakterisering voor suprema.

OPGAVEN

2.7.28. V is een verzameling; $f: V \to \mathbf{N}$. We definiëren:

$$(v_1 \lessdot\!\!* \, v_2) \;:\Leftrightarrow\; (f(v_1) < f(v_2)) \qquad (v_1, v_2 \in V).$$

(De ordening $\lessdot\!\!*$ is de ordening in V die door f en $(\mathbf{N}, <)$ volgens 2.6.21 wordt voortgebracht.) Beschrijf de minimale elementen van $(V, \lessdot\!\!*)$. Bewijs dat $(V, \lessdot\!\!*)$ dan en slechts dan lineair geordend is als f één-éénduidig is.

2.7.29. Zij $V := \mathbf{N} \setminus \{1\}$. We definiëren een afbeelding η van V in $\mathbf{N}$ door te stellen: voor alle $n \in V$ is $\eta(n) :=$ aantal priemfactoren (geteld met multipliciteit) van n; (dus $\eta(2) = \eta(3) = 1$; $\eta(4) = \eta(6) = 2$; $\eta(12) = 3$ enz.). In V definiëren we een ordening $\cdot\!<$ door te stellen:

$$\forall_{n \in V} \forall_{m \in V} \{(n \cdot\!< m) :\Leftrightarrow (\eta(n) < \eta(m))\}.$$

Zij $X := \{15, 30\}$; $Y := \{15, 30, 35\}$.
Bepaal $O(X)$, $O(Y)$. Bepaal zo mogelijk inf X, inf Y, sup X, sup Y.

2.7.30. In $P(\mathbf{N})$ definiëren we de relatie $<\!\cdot$ door te stellen:

$$(A <\!\cdot B) \;:\Leftrightarrow\; \exists_{a \in A} \forall_{b \in B} [a < b] \qquad (A, B \subset \mathbf{N})$$

(a) Is $(P(\mathbf{N}), <\!\cdot)$ een geordende verzameling?

(b) Heeft $(P(\mathbf{N}), <\!\cdot)$ een grootste element?

(c) Heeft $(P(\mathbf{N}), <\!\cdot)$ minimale elementen?

2.7.31. We beschouwen een aantal ordeningen in $\mathbf{R}^2$. Onderzoek bij elk van deze ordeningen of de verzamelingen C, D, E en F uit 2.7.16 (voorbeeld):

(i) een kleinste element hebben;

(ii) minimale elementen hebben;

(iii) een infimum hebben.

(iv) Bepaal O(C), O(D), O(E) en O(F).

De ordeningen worden gedefinieerd door:

(a) $((x,y) \leq^{\circ} (u,v)) :\Leftrightarrow (x<u) \quad ((x,y),(u,v) \in \mathbf{R}^2)$,

(b) $((x,y) \leq^{\circ} (u,v)) :\Leftrightarrow ((x=u) \wedge (y<v)) \, ((x,y),(u,v) \in \mathbf{R}^2)$,

(c) $((x,y) \leq^{\circ} (u,v)) :\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{u^2+v^2})$

$((x,y),(u,v) \in \mathbf{R}^2)$.

2.8. Tralies

2.8.1. In deze paragraaf zullen we de lezer oppervlakkig in kennis brengen met een speciale klasse van geordende verzamelingen, nl. met de klasse der tralies (engels: lattices, duits: Verbände). Deze zijn onder andere van groot belang voor de theorie der electrische schakelingen, en voor gedeelten van de zgn. discrete (= eindige) wiskunde. We zullen ze ook van een ander gezichtspunt beschouwen in § 3.12.

2.8.2. DEFINITIE. *Een tralie is een geordende verzameling waarin iedere deelverzameling van twee elementen een infimum en een supremum heeft.*

VOORBEELDEN

2.8.3. $(P(W), \subset^{\circ})$ is een tralie.

2.8.4. Iedere lineair geordende verzameling is een tralie.

2.8.5. De geordende verzameling uit 2.6.22 is géén tralie. Bijvoorbeeld $\sup\{d_1,d_2\}$ bestaat niet.

2.8.6. Stelt $<\cdot$ in $\mathbf{N}$ de relatie "is een echte deler van" voor uit 2.6.4, dan is $(\mathbf{N}, <\cdot)$ een tralie. We hebben:

$$\inf\{n,m\} = \text{g.g.d.}(n,m),$$

$$\sup\{n,m\} = \text{k.g.v.}[n,m] \qquad (n,m \in \mathbf{N}).$$

(k.g.v.[n,m] stelt het kleinste gemene veelvoud van n en m voor).

EIGENSCHAPPEN

2.8.7. Zij $(V,\leq_\circ)$ een tralie dan geldt voor alle x, y en z uit V: $\inf\{x,x\}=x$; $\sup\{x,x\}=x$.

2.8.8. $\inf\{x,\sup\{x,y\}\}=x$; $\sup\{x,\inf\{x,y\}\}=x$.

2.8.9. $\inf\{x,\inf\{y,z\}\}=\inf\{\inf\{x,y\},z\}$;

$$\sup\{x,\sup\{y,z\}\}=\sup\{\sup\{x,y\},z\}.$$

Bewijs. Zij $v:=\inf\{y,z\}$, $w:=\inf\{x,v\}$; dan is volgens 2.7.21: $w\leq_\circ x$, $w\leq_\circ v$, dus $w\leq_\circ y$, $w\leq_\circ z$, dus ook $w\leq_\circ \inf\{x,y\}$ en dus ook $w\leq_\circ \inf\{\inf\{x,y\},z\}$. Op dezelfde wijze bewijst men dat $\inf\{\inf\{x,y\},z\}\leq_\circ \inf\{x,\inf\{y,z\}\}$.

OPGAVEN

2.8.10. Bewijs de eigenschappen 2.8.7 en 2.8.8.

2.8.11. Bewijs dat voor iedere eindige verzameling $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ $(k\in\mathbb{N})$ van elementen uit een tralie $(V,\leq_\circ)$ $\inf\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ bestaat. Laat $v_n:=\inf\{x_1,\ldots,x_n\}$ $(n\leq k)$; bewijs dat $v_n=\inf\{v_{n-1},x_n\}$ $(2\leq n\leq k)$. (Wegens 2.8.9 kunnen we de elementen ook op elke andere wijze tot paren samennemen om v_k te vinden.)

2.8.12. Zij $(V,\leq_\circ)$ een eindig tralie. Bewijs dat V een eerste en een laatste element heeft.

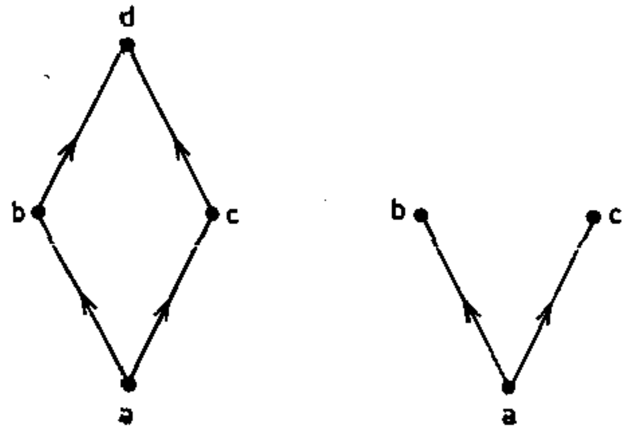
2.8.13. DEFINITIE. *Een tralie* $(V,\leq_\circ)$ *heet volledig indien iedere deelverzameling een supremum en een infimum heeft.*

2.8.14. VOORBEELDEN. $(P(W),\subseteq_\circ)$ is volledig. Ieder eindig tralie is volledig. $(\mathbb{N},<\cdot)$ (zie 2.8.6) is niet volledig want sup $\mathbb{N}$ bestaat niet.

2.8.15. Iedere deelverzameling van een geordende verzameling is, zoals we in 2.6.12 vaststelden, met de geïnduceerde ordening zelf een geordende verzameling. Voor tralies is dit niet waar, zoals blijkt uit het volgende eenvoudige voorbeeld. Zij $V=\{a,b,c,d\}$. De ordening $<$ in V wordt bepaald door:

$$a<b,\ a<c,\ a<d,\ b<d,\ c<d.$$

Nu is $(\{a,b,c\},<)$ geen tralie. De diagrammen als besproken in 2.6.22 vormen figuur 22.



Figuur 22

2.8.16. DEFINITIE. *Een tralie* $(V,\lessdot)$ *heet distributief indien*

$$\inf\{x,\sup\{y,z\}\} = \sup\{\inf\{x,y\},\inf\{x,z\}\} \quad (x,y,z\in V).$$

2.8.17. STELLING. *Een tralie* $(V,\lessdot)$ *is dan en slechts dan distributief indien voor alle* $x,y,z\in V$ *geldt:*

$$(*)\ \sup\{x,\inf\{y,z\}\} = \inf\{\sup\{x,y\},\sup\{x,z\}\}.$$

Bewijs. (i) Zij $(V,\lessdot)$ distributief. We zullen laten zien dat $(*)$ volgt uit de distributiviteit. Daartoe berekenen we

$$w := \inf\{\sup\{x,y\},\sup\{x,z\}\}.$$

Door in de definitie van distributiviteit gelijktijdig x door $\sup\{x,y\}$ en y door x te vervangen zien we:

$$w = \sup\{\inf\{\sup\{x,y\},x\},\inf\{\sup\{x,y\},z\}\}.$$

Wegens 2.8.8 geldt dan:

$$w = \sup\{x,\inf\{\sup\{x,y\},z\}\} = \sup\{x,\inf\{z,\sup\{x,y\}\}\}.$$

Passen we nogmaals de distributiviteit toe dan vinden we:

$$w = \sup\{x,\sup\{\inf\{z,x\},\inf\{z,y\}\}\}.$$

Wegens 2.8.9 is dan echter:

$$w = \sup\{\sup\{x,\inf\{z,x\}\},\inf\{z,y\}\}.$$

Wegens 2.8.8 is $\sup\{x,\inf\{z,x\}\}=x$ zodat $w=\sup\{x,\inf\{y,z\}\}$ waarmede (*) bewezen is.

(ii) Zie 2.8.18.

2.8.18. OPGAVE. Voltooi het bewijs van 2.8.17. Bewijs dat een tralie $(V,\preccurlyeq)$ dan en slechts dan distributief is indien voor alle $x,y,z\in V$ geldt:

$$\sup\{\inf\{x,y\},\ \inf\{y,z\},\ \inf\{z,x\}\} =$$

$$= \inf\{\sup\{x,y\},\ \sup\{y,z\},\ \sup\{z,x\}\}.$$

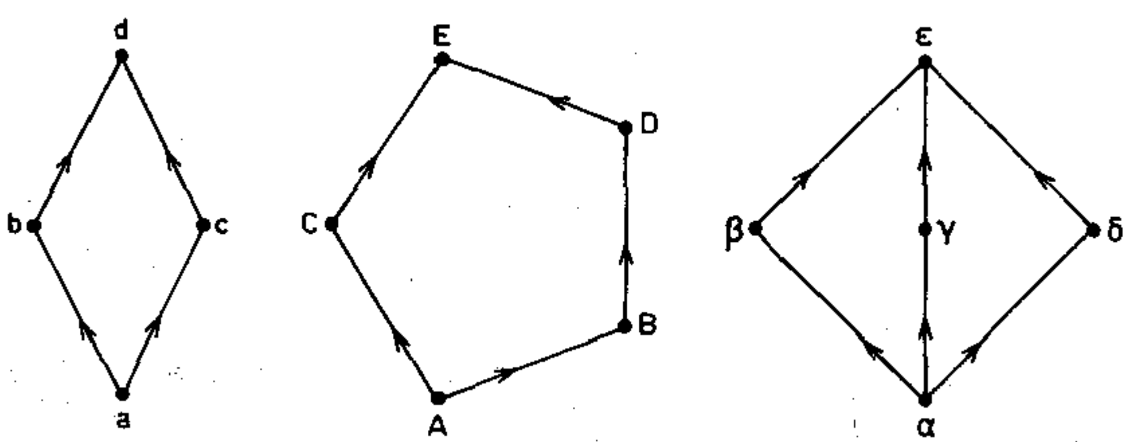
VOORBEELDEN

2.8.19. $(P(W),\subseteq)$ is een distributief tralie. Daar $\inf\{A,B\}=A\cap B$, $\sup\{A,B\}=A\cup B$ $(A,B\in P(W))$ luidt de eis van distributiviteit van het tralie:

$$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z) \qquad (X,Y,Z\in P(W)).$$

Deze distributieve wet bespraken we reeds in 1.11.1.

2.8.20. In de verzamelingen $V_1=\{a,b,c,d\}$; $V_2:=\{A,B,C,D,E\}$ en $V_3:=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ worden ordeningen, $<$, gedefinieerd zoals uitgedrukt door de diagrammen uit figuur 23.



Figuur 23

Alle drie geordende verzamelingen zijn tralies. $(V_1,<)$ is distributief. $(V_2,<)$ is niet distributief, immers: $\sup\{C,B\}=E$; $\inf\{D,\sup\{C,B\}\}=D$; $\inf\{D,C\}=A$; $\inf\{D,B\}=B$; en dus $\sup\{\inf\{D,C\},\inf\{D,B\}\}=\sup\{A,B\}=B\neq\inf\{D,\sup\{C,B\}\}=$ $=D$. Merk op dat $D>B$ (zie 2.8.21). $(V_3,<)$ is evenmin distributief, immers:

$$\inf\{\beta,\sup\{\gamma,\delta\}\} = \beta;\ \sup\{\inf\{\beta,\gamma\},\inf\{\beta,\delta\}\} = \alpha.$$

2.8.21. Naar aanleiding van het laatste voorbeeld merken we nog op dat men in de tralietheorie ook beschouwt zgn. *modulaire tralies*. Een tralie $(V,<^{\circ})$ heet modulair indien voor alle $x,y,z\in V$ geldt:

$$(x \mathrel{^{\circ}\!\!\geq} z) \Rightarrow [\inf\{x,\sup\{y,z\}\} = \sup\{\inf\{x,y\},\inf\{x,z\}\}].$$

Het is duidelijk dat ieder distributief tralie ook modulair is. Het omgekeerde geldt niet, want $(V_3,<)$ uit 2.8.20 is modulair. $(V_2,<)$ is niet modulair, zoals blijkt uit de gegeven berekening.

OPGAVEN

2.8.22. Bewijs dat iedere lineair geordende verzameling een distributief tralie is.

2.8.23. Ga na of $(\mathbf{N},<^{\bullet})$ (zie 2.8.6) distributief is.

2.8.24. Bewijs dat $(V_3,<)$ uit 2.8.20 modulair is.

2.8.25. STELLING. *Zij* $(V,<^{\circ})$ *een distributief tralie. Indien* $\inf\{a,b\}=\inf\{a,b'\}$ *en* $\sup\{a,b\}=\sup\{a,b'\}$, *dan is* $b=b'\,(a,b,b'\in V)$.

Bewijs. Laat gegeven zijn dat a, b en b' aan de beide voorwaarden voldoen. We hebben nu:

$$\begin{aligned} b &= \inf\{b,\sup\{a,b\}\}= \\ &= \inf\{b,\sup\{a,b'\}\}= \\ &= \sup\{\inf\{b,a\},\inf\{b,b'\}\}= \\ &= \sup\{\inf\{a,b'\},\inf\{b,b'\}\}= \\ &= \inf\{b',\sup\{a,b\}\}= \\ &= \inf\{b',\sup\{a,b'\}\}=b'. \end{aligned}$$

De gelijktekens in deze berekening berusten achtereenvolgens op 2.8.8, het gegeven, de distributiviteit, het gegeven, de distributiviteit, het gegeven en 2.8.8.

2.8.26. DEFINITIE. *Een tralie* $(V,\leq)$ *heet een Boole tralie indien voldaan is aan de volgende drie eisen:*

(a) $(V,\leq)$ *is distributief,*

(b) max V *en* min V *bestaan,*

(c) $\forall_{x\in V}\ \exists_{y\in V}\ [\sup\{x,y\} = \max V,\ \inf\{x,y\} = \min V]$.

Uit 2.8.25 volgt dat in een Boole tralie bij gegeven x de y uit eis (c) één-éénduidig bepaald is; een element y_* dat aan (c) voldoet heet complement van x, notatie: x^*. Boole tralies ontlenen hun naam aan George Boole (1815-1864) één van de grondleggers van de logica en van de waarschijnlijkheidstheorie.

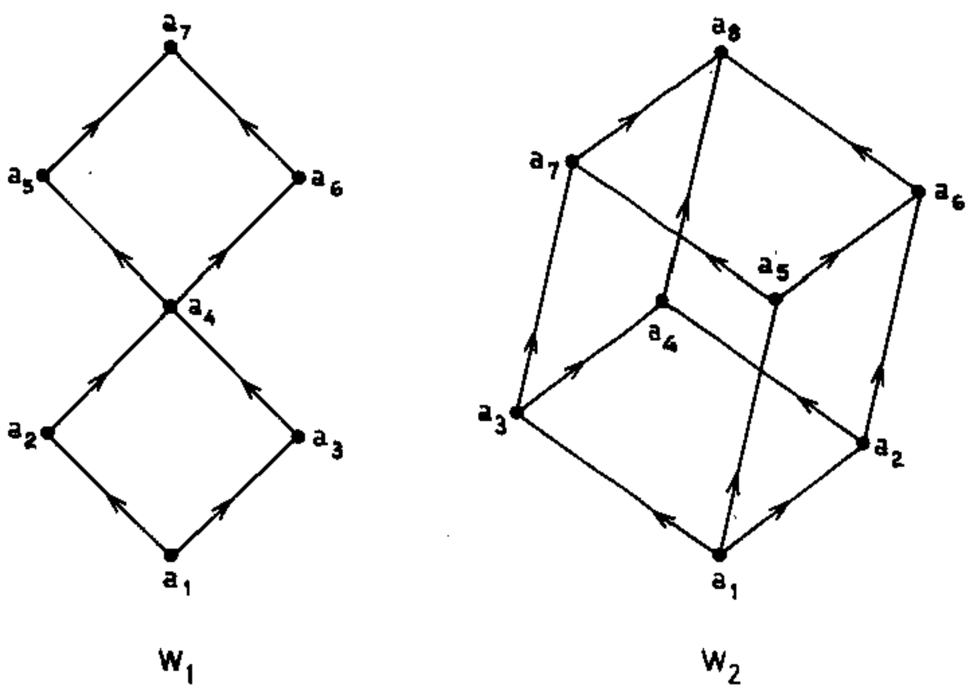
VOORBEELDEN

2.8.27. $(P(W),\subseteq)$ is een Boole tralie.

2.8.28. $(V_1,<)$ uit 2.8.20 is een Boole tralie.

OPGAVEN

2.8.29. Een lineair geordende verzameling $(V,\leq)$ is dan en slechts dan een Boole tralie als V ten hoogste twee elementen heeft.



Figuur 24

2.8.30. Verifieer de voorbeelden 2.8.27 en 2.8.28.

2.8.31. Laat zien dat $(V_3,<)$ uit 2.8.20 wel aan de eisen (b) en (c) uit 2.8.26 voldoet, doch dat het complement niet voor ieder element éénduidig bepaald is. Laat zien dat $(V_2,<)$ uit 2.8.20 niet aan eis (c) uit 2.8.26 voldoet.

2.8.32. Door de diagrammen uit figuur 24 zijn geordende verzamelingen gegeven.

Bewijs dat W_1 en W_2 met de gegeven ordening $<$ distributieve tralies zijn. Bewijs dat $(W_1,<)$ geen, $(W_2,<)$ wel een Boole tralie is.

3 Algebra

3.1. Inleiding

In dit hoofdstuk treft men een bespreking aan van een aantal op het eerste gezicht nogal uiteenlopende wiskundige structuren. We zullen geen moeite doen een algemene omschrijving te geven van wat een wiskundige structuur is. De lezer zal in veel van de besproken structuren, - zoals ook in de structuur: geordende verzameling (zie § 2.6) - het volgende patroon herkennen:

(i) Er is steeds sprake van een verzameling, V, waarvan men de aard van de elementen in het midden laat;

(ii) Er worden één of meer beweringsvormen (zoals xRy uit paragraaf 2.6) met individuenverzameling V beschouwd, van welke beweringsvorm(en) een aantal eigenschappen gepostuleerd worden (zoals (O1), (O2), (O3) uit paragraaf 2.6).

In voorbeelden is V steeds een bepaalde verzameling doch we interesseren ons in wezen steeds voor de door de beweringsvorm gedefinieerde verbanden (door meerdere beweringsvormen met $\wedge$ aan elkaar te koppelen kunnen we inderdaad zonder verlies aan algemeenheid aannemen dat er slechts één beweringsvorm in de definitie van de structuur voorkomt).
In elk van de beschouwde gevallen is er dan ook een zgn. isomorfiebeginsel dat uitdrukt dat twee voorbeelden "in wezen" hetzelfde zijn.
Wat de verzameltitel "algebra" rechtvaardigt, is dat in alle voorkomende gevallen een deel van de beweringsvormen een bewerking (algebraïsche bewerking) definieert. Een definitie van wat een bewerking - we zullen over productoperatie spreken - is, vindt men in paragraaf 3.3. De daaropvolgende paragrafen maken de lezer bekend met de structuren die sinds het verschijnen (1936) van het inmiddels klassieke boek van B.L. van der Waerden [27] de basis van iedere inleiding in de algebra vormen: groepen

(§§ 3.4 tot en met 3.6), ringen, lichamen (§§ 3.7 tot en met 3.10). In § 3.11 bestuderen we lichamen waarin bovendien een lineaire ordening aanwezig is. In de paragraaf over Boole algebra (§ 3.12) zullen we op verschillende onderwerpen uit de hoofdstukken 1 en 2 terugkomen. Daarna geven we een inleiding in de lineaire algebra (§§ 3.14 tot en met 3.21). De lezer zal opmerken dat de structuren, die het voorwerp zijn van de lineaire algebra, de zgn. vectorruimten of lineaire ruimten, een ingewikkelder patroon hebben dan beschreven in (i) en (ii). We beginnen het hoofdstuk met een paragraaf waarin de lezer een aantal resultaten vindt uit de getallentheorie. Hoewel dit hoofdstuk in eerste instantie de algebraïsche begrippen wil aanleren die later bij de opbouw van het getalbegrip en de analyse gebruikt worden, hebben we gepoogd de lezer enige algemene kennis van abstracte algebra bij te brengen. Dit hoofdstuk heeft echter niet de pretentie een leerboek over algebra zoals [8] of [27] te vervangen.

3.2. Getallentheorie

3.2.1. NOTATIES
Als geen verwarring dreigt schrijven we voor $n,m \in \mathbf{N}$:

$$\text{g.g.d.}(n,m) =: (n,m),$$
$$\text{k.g.v.}[n,m] =: [n,m],$$
$$n \text{ is een deler van } m \ : \ n|m.$$

De gehele getallen modulo m (zie 2.4.5) noteren we: $\mathbf{Z}(\text{mod } m)$.
Het element $\mathbf{Z}(\text{mod } m)$ waarvan $a \in \mathbf{Z}$ een representant is duiden we meestal aan met $\underline{a}$.

3.2.2. $n|m$ betekent $\exists_{k \in \mathbf{N}}\,[m=kn]$, (2.6.4).

3.2.3. $(n,m)|n$; $(n,m)|m$. Als $d|n$ en $d|m$, dan $d|(n,m)$ (2.8.6). (Dit is de definitie van de grootste gemene deler, zoals men die in de rekenkunde geeft.)

3.2.4. $n|[n,m]$, $m|[n,m]$. Als $n|d$ en $m|d$, dan $[n,m]|d$, (2.8.6).

3.2.5. STELLING. *Voor alle* $n,m \in \mathbf{N}$ *bestaan* $x,y \in \mathbf{Z}$ *zo dat* $nx+my=(n,m)$.

Bewijs. Het kleinste natuurlijke getal in de verzameling $G:=\{nx+my \mid x,y \in \mathbf{Z}\}$ is gelijk aan (n,m). Immers als d dit kleinste natuurlijke getal is, dan is $d=nx_0+my_0$ voor zekere x_0 en y_0 en $d \le n$. Er zijn eenduidig bepaalde gehele getallen q en r met $n=qd+r$; $q \ge 0$; $0 \le r < d$. Nu is $r=n(1-qx_0)-mqy_0$ en dus $r\in G$. Uit $r\in G$ en $0\le r<d$ volgt $r=0$ dus $d|n$. Evenzo $d|m$. Iedere gemeenschappelijke deler van n en m is uiteraard een deler van d.

3.2.6. Een bekende methode om (n,m) te bepalen is de *algoritme van Euclides*. Zij $a,b\in\mathbf{N}$, $a>b$ dan bestaat er een eenduidig bepaald geheel getal r met $0\le r<b$ zó dat $a=qb+r$ voor zekere $q\ge 0$. Laten we dit noteren als $r(a,b)$. Laat $k,m\in\mathbf{N}$ gegeven zijn, $k\ge m$; de bepaling van (k,m) gaat nu als volgt. Bepaal $r(k,m)=:r_1$. Als $r_1=0$, dan $m=(k,m)$. Als $r_1>0$, bepaal $r(m,r_1)=:r_2$. Als $r_2=0$, dan $r_1=(k,m)$. Als $r_2>0$, bepaal $r(r_1,r_2)=:r_3$. Als $r_3=0$, dan $r_2=(k,m)$; bepaal anders $r_4:=r(r_2,r_3)$. Na eindig veel stappen vinden we: $r_n:=r(r_{n-2},r_{n-1})\neq 0$, $r_{n+1}:=r(r_{n-1},r_n)=0$. Nu is $r_n=(k,m)$.

3.2.7. In $\mathbf{Z}$ definieert men $(a|b):\Leftrightarrow\exists_{x\in\mathbf{Z}}\,[ax=b]$ $(a,b\in\mathbf{Z})$. Zijn $n,m\in\mathbf{Z}$ en bestaat er een getal d met: $d>0$; $d|n$; $d|m$; als $k|n$ en $k|m$ dan $k|d$, dan heet d weer grootste gemene deler van n en m; notatie: (n,m). We zien dat (n,m) bestaat tenzij $n=m=0$. De lezer verifiëre dat ook voor $n,m\in\mathbf{Z}$ geldt $(n,m)=\min(\mathbf{N}\cap\{nx+my\mid x,y\in\mathbf{Z}\})$.

3.2.8. OPGAVE. Bewijs dat er bij elk paar gehele getallen n,m, met $|n|\ge|m|>0$ te vinden zijn q en $r\in\mathbf{Z}$ zó dat $n=qm+r$; $0\le r<|m|$. Formuleer en verifieer de algoritme van Euclides voor de bepaling van (n,m) indien $n,m\in\mathbf{Z}$.

3.2.9. Als we de priemgetallen nummeren naar toenemende grootte: $p_1:=2$; $p_2:=3$; $p_3:=5$; $p_4:=7$; ..., dan is ieder natuurlijk getal n éénduidig te schrijven als $n=\Pi_{i=1}^{\infty}p_i^{\alpha_i}$, waarbij $\alpha_i\in\mathbf{Z}$, $\alpha_i\ge 0\,(i\in\mathbf{N})$ en $\alpha_i>0$ voor slechts eindig veel waarden van i. We veronderstellen dat deze ontbinding in priemfactoren aan de lezer bekend is.

OPGAVEN

3.2.10. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

3.2.11. Zij $n=\Pi_{i=1}^{\infty}p_i^{\alpha_i}$, $m=\Pi_i^{\infty}p_i^{\beta_i}$. Bewijs dat:

(a) $$(n,m)=\prod_{i=1}^{\infty}p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}},$$

(b) $[n,m] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}$,

(c) $(n,m)[n,m] = nm$.

3.2.12. Een stelsel $a_1,a_2,\ldots,a_m \in \mathbf{Z}$ $(m \in \mathbf{N})$ heet een *volledig restsysteem modulo* m, indien de verzameling van de klassen van $a_1,\ldots,a_m$ gelijk is aan $\mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ m)$. Een voorbeeld is $0,1,\ldots,m-1$. In 2.4.8 is uitgedrukt dat ieder m-tal opvolgende getallen een volledig restsysteem modulo m is.

3.2.13. STELLING. *(Fermat). Als* p *een priemgetal is,* $a \in \mathbf{N}$ *en* $\neg(p|a)$, *dan is*

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Bewijs. Wegens 2.4.7 (a) is het voldoende te bewijzen dat voor ieder natuurlijk getal a geldt $a^p \equiv a(\mathrm{mod}\ p)$. Dit bewijzen we met volledige inductie: $1^p \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. En uit $a^p - a \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ volgt op grond van 2.4.9 en 2.4.6: $(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

3.2.14. OPGAVE. Zij $a_1,a_2,\ldots,a_m$ een volledig restsysteem modulo m; zij $(k,m)=1$. Bewijs dat $ka_1,ka_2,\ldots,ka_m$ een volledig restsysteem modulo m is.

3.2.15. Het bijvoeglijk naamwoord "volledig" hebben we gebruikt omdat we vaak in restsystemen geïnteresseerd zijn die niet uit representanten van alle klassen bestaan maar alleen de representanten bevatten van restklassen modulo m waarvan de elementen n de eigenschap $(n,m)=1$ hebben. Zo'n systeem mod 12 is 1, 5, 7, 11. We noemen dit een *gereduceerd restsysteem*.

3.2.16. DEFINITIE. *Het aantal elementen van een gereduceerd restsysteem* mod m *wordt aangegeven met* $\phi(m)$. *Deze functie* $\phi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ *heet de functie van Euler*.

We zien onmiddelijk dat $\phi(m)$ het aantal elementen is van $\{n \in \mathbf{N} | \ n \le m,\ (n,m)=1\}$.

OPGAVEN

3.2.17. Zij $a_1,a_2,\ldots,a_{\phi(m)}$ een gereduceerd restsysteem mod m en zij $(k,m)=1$. Bewijs dat $ka_1, ka_2, \ldots, ka_{\phi(m)}$ een gereduceerd restsysteem mod m is.

3.2.18. Zij $(m,n)=1$; bewijs dan dat $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$. (Aanwijzing. Laat $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(m)}$ een gereduceerd restsysteem mod m zijn en $b_1, b_2, \ldots, b_{\phi(n)}$ een gereduceerd restsysteem mod n. Bewijs dan dat na_i+mb_j $(i=1,\ldots,\phi(m),\ j=1,\ldots,\phi(n))$ een gereduceerd restsysteem modulo mn vormen.)

3.2.19. Laat $n=p_a^{\alpha}\, p_b^{\beta} \cdots p_k^{\kappa}$ de ontbinding van n in priemfactoren zijn ($\alpha,\beta,\ldots,\kappa$ alle ongelijk 0). Bewijs dat $\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_a})(1-\frac{1}{p_b})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$.

Met behulp van de gereduceerde restsystemen bewijzen we nu de volgende stelling van *Euler* die een uitbreiding is van 3.2.13.

3.2.20. STELLING. *(Euler). Als* $(a,m)=1$, *dan is* $a^{\phi(m)} \equiv$ $\equiv 1 \pmod m$.

Bewijs. Zij $c_1,\ldots,c_{\phi(m)}$ een gereduceerd restsysteem mod m. Dan is ook $ac_1,\ldots,ac_{\phi(m)}$ een gereduceerd restsysteem (3.2.17).
Nu is

$$ac_1 \cdot ac_2 \cdot ac_3 \cdots ac_{\phi(m)} \equiv c_1 c_2 \cdots c_{\phi(m)} \pmod m,$$

(uit $x\equiv u \pmod m$ en $y\equiv v \pmod m$ volgt immers $xy\equiv uv \pmod m$). Dus $a^{\phi(m)}\ \Pi_{i=1}^{m}\ c_i \equiv \Pi_{i=1}^{m}\ c_i \pmod m$; omdat $(\Pi_{i=1}^{m} c_i, m)=1$, is $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

3.3. Productoperaties

3.3.1. DEFINITIE. *Zij* V *een verzameling. Een productoperatie in* V *is een afbeelding* $\phi: V\times V \to V$.

Aan ieder geordend paar (a,b) van elementen uit V is dus toegevoegd een element uit V nl. $\phi(a,b)$. In de terminologie van § 3.1 (ii) is de beweringsvorm er een met drie veranderlijken: $\phi(x,y)=z$.

VOORBEELDEN

3.3.2. In $\mathbb{R}$ is $\phi(a,b):=a+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$ een productoperatie.

3.3.3. In $\mathbb{R}$ is $\phi(a,b):=ab$ $(a,b\in\mathbb{R})$ een productoperatie.

3.3.4. In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ is $\phi(f,g):=f\circ g$ $(f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$ een productoperatie (zie 1.22.31 en § 1.24).

3.3.5. In $\mathbb{R}$ is $\phi(a,b):=\frac{1}{2}(a+b)$ $(a,b\in\mathbb{R})$ een productoperatie.

3.3.6. In $\mathbb{R}^{-}:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$ is $\phi(a,b):=ab$ *geen* productoperatie.

3.3.7. DEFINITIE. *Een productoperatie* ϕ *in* V *heet commutatief indien:*

$$\forall_{(a,b)\in V^2}\ [\phi(a,b)=\phi(b,a)].$$

De productoperaties in de voorbeelden 3.3.2, 3.3.3 en 3.3.5 zijn commutatief; de productoperatie in 3.3.4 is niet commutatief (zie 1.24.9).
Men noemt $\phi(a,b)$ het product van a en b en noteert het meestal met ab; soms ook $a\cdot b$, $a\times b$, $a\circ b$, $a*b$ of $a+b$. Om aan te geven welke productnotatie men heeft, geven we in deze gevallen de verzameling met productoperatie aan met $(V,\ )$, $(V,\cdot)$, $(V,\times)$, $(V,\circ)$, $(V,*)$ of $(V,+)$.
Slordig spreekt men soms over de verzameling mét productoperatie V. Is $V\subset\mathbb{R}$, dan betekent $(V,\ )$ resp. $(V,+)$ steeds V met de gewone vermenigvuldiging en gewone optelling.

3.3.8. DEFINITIE. *De productoperatie in* $(V,\ )$ *heet associatief indien:*

$$\forall_{a\in V}\ \forall_{b\in V}\ \forall_{c\in V}\ [(ab)c=a(bc)].$$

De productoperaties in 3.3.2, 3.3.3 en 3.3.4 zijn associatief (zie 1.24.8), die in 3.3.5 is niet associatief.
Een verzameling $(V,\ )$ met een associatieve productoperatie heet *semigroep*. Is de productoperatie bovendien commutatief dan spreekt men van een commutatieve semigroep of ook wel van een *abelse* semigroep. (N.H. Abel (1802-1829) is een van de grondleggers van de groepentheorie).
Merk op dat een deelverzameling V_0 van een semigroep $(V,\ )$, met de restrictie van de productoperatie in het algemeen geen semigroep is. Zo is $(\mathbb{R}^{-},\ )$ geen semigroep en $(\mathbb{R},\ )$ wel (3.3.6, 3.3.3). Is $(V_0,\ )$ echter een ver-

zameling met productoperatie, dan is het ook een semigroep.
In een semigroep geldt in het algemeen niet dat uit $ac=bc$ volgt dat $a=b$. In $(\mathbb{R},\ )$ volgt uit $ac=bc$ niet $a=b$ (neem $c=0$). In een semigroep $(V,*)$ gebruikt men vaak de machtnotatie: in plaats van $a*a$ schrijft men a^2 $(a\in V)$; $a^3:=(a*a)*a$ enz. Wordt de productoperatie voorgesteld door een op + lijkend symbool, dan schrijft men ook $2a:=a+a$, $3a:=(a+a)+a$ enz.

3.3.9. DEFINITIE. *Een element* $e_l\in V$ *heet linker eenheidselement van de verzameling met productoperatie* $(V,\ )$ *indien:*

$$\forall_{a\in V}\ [e_l a=a],$$

$e_r\in V$ *heet rechter eenheidselement indien:*

$$\forall_{a\in V}\ [a e_r=a],$$

$e\in V$ *heet eenheidselement indien:*

$$\forall_{a\in V}\ [ae=ea=a].$$

3.3.10. STELLING. *Als de verzameling met productoperatie* $(V,\ )$ *een linker- en een rechtereenheidselement* e_l *resp.* e_r *heeft dan is* $e_l=e_r$.

Bewijs. Daar $\forall_{a\in V}\ [e_l a=a]$, is in het bijzonder: $e_l e_r=e_r$. Daar $\forall_{a\in V}\ [a e_r=a]$, is in het bijzonder $e_l e_r=e_l$. Dus $e_r=e_l$.

3.3.11. GEVOLG. *Een verzameling met een productoperatie heeft ten hoogste één eenheidselement.*

We spreken van "het" eenheidselement van de verzameling met productoperatie.

3.3.12. VOORBEELD. In $(\mathbb{R},+)$ is 0 het eenheidselement (3.3.2); in $(\mathbb{R},\ )$ is 1 het eenheidselement (3.3.3); in $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\circ)$ is $I_{\mathbb{R}}$ het eenheidselement (3.3.4); in voorbeeld 3.3.5 is er geen eenheidselement.

3.3.13. DEFINITIE. *Zij* $(V,\ )$ *een verzameling met een productoperatie die een eenheidselement* e *heeft. Zij* $a\in V$, *de elementen* $b_l, b_r, b\in V$ *heten resp. een linkerinverse, rechterinverse, inverse van* a *indien resp.:*

$$b_l a = e,$$

$$ab_r = e,$$

$$ab = ba = e.$$

3.3.14. STELLING. *Zij* $(V,\ )$ *een semigroep met eenheidselement; als* $a\in V$ *een linkerinverse* b_l *en een rechterinverse* b_r *heeft, dan is* $b_l=b_r$.

Bewijs. Wegens de associativiteit is $(b_l a)b_r=b_l(ab_r)$. $(b_l a)b_r=eb_r=b_r$; $b_l(ab_r)=b_l e=b_l$; dus $b_l=b_r$.

3.3.15. GEVOLG. *In een semigroep met eenheidselement heeft ieder element ten hoogste één inverse.*

3.3.16. VOORBEELDEN. In $(\mathbf{R},+)$ heeft ieder element a een inverse en wel $-a$; in $(\mathbf{R},\ )$ hebben alleen de elementen $a\neq 0$ een inverse en wel $\frac{1}{a}$; in $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\circ)$ hebben alleen de één-éénduidige afbeeldingen f van $\mathbf{R}$ op $\mathbf{R}$ een inverse en wel $f^{\leftarrow}$.

3.3.17. Als in een verzameling met productoperatie $(V,\ )$, die een eenheidselement heeft, b de inverse is van a, dan is a de inverse van b. Voor de inverse van a gebruikt men vaak de notatie a^{-1}. (De lezer verifiëre dat hier in $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\circ)$ geen notationele moeilijkheden door ontstaan; alleen die elementen hebben een inverse in de productoperatiezin die ook een inverse als afbeelding hebben en f^{-1} (in de productzin) is $f^{\leftarrow}$.) Is $(V,\ )$ een semigroep dan gebruikt men een uitbreiding van de machtnotatie uit 3.3.8 nl. $a^{-n}:=(a^{-1})^n$, $a^0:=e$. Men bewijst nu gemakkelijk dat $a^{-n}=(a^n)^{-1}$ en dat $a^{g_1}a^{g_2}=a^{g_1+g_2}$ $(g_1,g_2\in\mathbf{Z})$. In additief geschreven (met + symbool) semigroepen schrijft men meestal $-a$ in plaats van a^{-1}, $-na:=n(-a)$, $0a:=e$; te verifiëren is nu: $-na=-(na)$ en $g_1a+g_2a=(g_1+g_2)a$ $(g_1,g_2\in\mathbf{Z})$ (in deze laatste formule is de eerste + het symbool van de productoperatie uit de semigroep, de tweede is de optelling in $\mathbf{Z}$).

3.3.18. *Laat* $(V,\cdot)$ *en* $(V^*,*)$ *verzamelingen zijn met een productoperatie. Een één-éénduidige afbeelding* ψ *van* V *op* V^* *heet een isomorfisme van* $(V,\cdot)$ *op* $(V^*,*)$ *indien:*

$$\forall_{a\in V}\ \forall_{b\in V}\ [\psi(a\cdot b)=\psi(a)*\psi(b)].$$

$(V,\cdot)$ *en* $(V^*,*)$ *heten isomorf indien er een isomorfisme van* $(V,\cdot)$ *op* $(V^*,*)$ *bestaat.*

3.3.19. VOORBEELD. Zij $\mathbf{P}:=\{x\in\mathbf{R}|\ x>0\}$ dan zijn $(\mathbf{P},\ )$ en $(\mathbf{R},+)$ isomorf en log is een isomorfisme van $(\mathbf{P},\ )$ op $(\mathbf{R},+)$ (4.3.33 (ii)).

3.3.20. STELLING

(i) *Isomorfie is een equivalentierelatie in de klasse van alle verzamelingen met een productoperatie.*

Zij voorts $(V,\cdot)$ *en* $(V^*,*)$ *isomorf en zij* ψ *een isomorfisme van* $(V,\cdot)$ *op* $(V^*,*)$ *dan geldt:*

(ii) $(V,\cdot)$ *is commutatief dan en slechts dan als* $(V^*,*)$ *commutatief is;*

(iii) $(V,\cdot)$ *is een semigroep dan en slechts dan als* $(V^*,*)$ *een semigroep is;*

(iv) *Als* e *het eenheidselement van* $(V,\cdot)$ *is, dan is* $\psi(e)$ *het eenheidselement van* $(V^*,*)$;

(v) *Als* b *in* $(V,\cdot)$ *de inverse is van* a, *dan is* $\psi(b)$ *in* $(V^*,*)$ *de inverse van* $\psi(a)$.

Bewijs. Eenvoudige verificatie. Voor (iv) merken we op dat voor alle $a\in V$ geldt: $\psi(a)=\psi(a\cdot e)=\psi(a)*\psi(e)$, $\psi(a)=$ $=\psi(e\cdot a)=\psi(e)*\psi(a)$ en dat $\psi(V)=V^*$. Voor (v) gebruike men:

$$\psi(a)*\psi(b) = \psi(a\cdot b) = \psi(e) = \psi(b\cdot a) =$$

$$= \psi(b)*\psi(a).$$

Als $(V,\cdot)$ en $(V^*,*)$ isomorf zijn, dan zeggen we ook wel dat $(V,\cdot)$ dezelfde verzameling met productoperatie is als $(V^*,*)$ *op isomorfie na.*

OPGAVEN

3.3.21. Zij V een verzameling. In P(V) beschouwen we achtereenvolgens de productoperaties:

(a) $\cap$; (b) $\cup$; (c) $\backslash$; (d) $\div$.

Ga na welke van deze operaties commutatief zijn, welke associatief. Ga na in welke gevallen er een eenheidselement is, en welke elementen in deze gevallen een inverse hebben.

Bewijs dat $\psi:P(V)\to P(V)$ gedefinieerd door $\forall_{A\subset V}\,[\psi(A):=$ $:=V\setminus A]$ een isomorfisme is van $(P(V),\cap)$ op $(P(V),\cup)$ en eveneens van $(P(V),\cup)$ op $(P(V),\cap)$.

3.3.22. In $\mathbf{N}$ beschouwen we de productoperatie $k:\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}$ gedefinieerd door:

$$k(n,m) := \text{k.g.v.}[n,m] \qquad (n,m\in\mathbf{N}).$$

(a) Is k commutatief?

(b) Is k associatief?

(c) *Heeft* $(\mathbf{N},k)$ *een eenheidselement?*

(d) Bepaal alle elementen die een inverse bezitten.

3.3.23. De productoperatie ϕ in $\mathbf{R}$ is gedefinieerd door:

$$\forall_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\,[\phi(x,y):=x+y-xy].$$

(a) Is ϕ commutatief?

(b) Is ϕ associatief?

(c) Zoek het eenheidselement.

(d) Geef aan welke elementen een inverse bezitten.

(e) Bewijs dat $(\mathbf{R},\ )$ en $(\mathbf{R},\phi)$ isomorf zijn.

3.3.24. In een eindige verzameling V kan men een productoperatie beschrijven door een zogenaamde producttafel. Dit is een vierkant schema waar langs de linkerzijde en langs de bovenzijde de elementen van V staan, terwijl in het vakje in de rij rechts van a en in de kolom onder b het product ab, d.i. het beeld van (a,b), staat. Als *voorbeeld* beschouwe men de volgende tabel die de gewone vermenigvuldiging in de verzameling $\{-1,1\}$ beschrijft.

rechterfactor / linkerfactor	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Een ander voorbeeld: zij $E:=\{2n\mid n\in\mathbf{N}\}$, $O:=\{2n-1\mid n\in\mathbf{N}\}$, zij $V:=\{\emptyset,E,O,\mathbf{N}\}$, dan zijn de producttafels van $\{V,\div\}$ en $\{V,\setminus\}$:

÷	Ø	E	O	N
Ø	Ø	E	O	N
E	E	Ø	N	O
O	O	N	Ø	E
N	N	O	E	Ø

\	Ø	E	O	N
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
E	E	Ø	E	Ø
O	O	O	Ø	Ø
N	N	O	E	Ø

3.3.25. OPGAVE. In de verzameling {e,a,b} wordt een productoperatie gedefinieerd door de producttafel:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

Is deze productoperatie associatief?

3.4. Groepen

3.4.1. DEFINITIE. *Een verzameling met productoperatie heet een groep indien voldaan is aan de volgende drie eisen:*
(G1) *De productoperatie is associatief;*
(G2) *Er is een eenheidselement;*
(G3) *Ieder element heeft een inverse.*

Is de productoperatie van de groep (G,) commutatief, dan spreekt men van een *commutatieve* of *abelse groep*.

3.4.2. VOORBEELDEN. Bekende groepen zijn: $(\mathbf{Z},+)$, $(\mathbf{Q},+)$, $(\mathbf{R},+)$ geheten de additieve groepen der gehele, rationale, reële getallen; $(\mathbf{P},\ )$ (3.3.19) en $(\mathbf{Q}\cap\mathbf{P},\ )$ geheten de multiplicatieve groepen der positieve reële getallen en der positieve rationale getallen. Voorts $(\mathbf{R}\backslash\{0\},\ )$, $(\mathbf{Q}\backslash\{0\},\ )$. Al deze groepen zijn abels.

3.4.3. VOORBEELD. Zij W een niet lege verzameling. Met S(W) duiden we aan de verzameling van alle één-éénduidige afbeeldingen van W op W, (dus $S(W)\subset W^W$). De elementen van S(W) heten ook wel *permutaties van W*. S(W) is een groep indien afbeeldingssamenstelling als productoperatie genomen wordt. $(S(W),\circ)$ heet de *permutatiegroep van de elementen van W*. Indien W meer dan twee elementen bevat is $(S(W),\circ)$ niet abels. Zij

nl. $W'=\{w_1,w_2,w_3\}$ een deelverzameling van W met drie elementen. We definiëren nu elementen $f,g\in S(W)$ door: $f(w_1):=w_2$, $f(w_2):=w_1$, $f(w_3):=w_3$, $g(w_1):=w_1$, $g(w_2):=w_3$, $g(w_3):=w_2$, $f(w):=w=:g(w)$ $(w\in W\backslash W')$. Nu is $f\circ g\neq g\circ f$; bijv. $(f\circ g)(w_1)=w_2$, $(g\circ f)(w_1)=w_3$.
Is er een één-éénduidige afbeelding g van V op W, dan zijn $(S(V),\circ)$ en $(S(W),\circ)$ isomorf. Als $G:S(V)\to S(W)$ gedefinieerd is door: $\forall_{f\in S(V)}\ [G(f):=g\circ f\circ g^{-1}]$ dan is G een isomorfisme van $(S(V),\circ)$ op $(S(W),\circ)$.
Gevolg: de permutatiegroep van een verzameling van n elementen is isomorf met de permutatiegroep van $\{1,2,\dots,n\}$. Deze laatste heet symmetrische groep van n elementen (notatie: S_n). (Zie 3.4.19.)

3.4.4. VOORBEELD. Zij $\mathbf{Z}(\text{mod } m)$ de verzameling van de gehele getallen modulo m (zie 2.4.5). In $\mathbf{Z}(\text{mod } m)$ duidt + de optelling uit 2.4.5 en $\cdot$ de vermenigvuldiging uit 2.4.5 aan. We noteren de klasse van a in $\mathbf{Z}(\text{mod } m)$ als $\underline{a}$; dus $\underline{a}:=\{a+km \mid k\in\mathbf{Z}\}$.
$(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+)$ is een abelse groep met m elementen.
$(\mathbf{Z}(\text{mod } m)\backslash\{\underline{0}\},\cdot)$ is een groep dan en slechts dan als m een priemgetal is; (denk aan 2.4.7, 3.2.13).

OPGAVEN

3.4.5. Ga na welke van de volgende verzamelingen met een productoperatie groepen zijn.

(a) $(\{x+y\sqrt{2} \mid x\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{Q}\},+)$,

(b) $(\{x+y\sqrt{2} \mid x\in\mathbf{Q},\ y\in\mathbf{Q},\ (x,y)\neq(0,0)\},\ )$,

(c) $(\{x \mid x^2\in\mathbf{Q},\ x\neq 0\},\ )$,

(d) $(\{\underline{n}\in\mathbf{Z}(\text{mod } m) \mid (n,m)=1\},\cdot)$ (zie 3.2.15).

3.4.6. (a) Kies in het platte vlak een vast punt O. Beschouw voor een positief reëel getal r: D_r de draaiïng in het vlak om O over een hoek van r radialen; is $r>0$, dan is de draaiïng in positieve zin, d.w.z. tegen de klokrichting in. We beschouwen $D_0=D_{2\pi}=\dots$ als de identieke afbeelding. In de verzameling der draaiïngen beduidt $\circ$ afbeeldingssamenstelling.
Bewijs dat $(\{D_k \mid k=\frac{2\pi}{m},\frac{4\pi}{m},\dots,2\pi\},\circ)$ een groep is die isomorf is met $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+)$.

(b) Als $D:=D_{2\pi/m}$, dan zien we dat de beschouwde groep van draaiïngen ook geschreven kan worden als $D,D^2,D^3,\dots,D^m=D_0$. Een groep die bestaat uit de "machten" van een van zijn elementen heet een cyclische groep. Een element a zodat $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = G$ heet een *voortbrenger* van (G,). Zo is $(\mathbf{Z},+)$ een oneindige cyclische groep omdat deze bestaat uit alle "veelvouden" van 1. Bewijs dat $(\mathbf{Z}(\text{mod } 7)\backslash\{\underline{0}\},\cdot)$ een cyclische groep is.

(c) Als $(G_1,\cdot)$ en $(G_2,*)$ cyclische groepen zijn met m elementen dan zijn $(G_1,\cdot)$ en $(G_2,*)$ isomorf. In het bijzonder is iedere cyclische groep met m elementen isomorf met $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+)$.

3.4.7. Bewijs dat de monotoon stijgende continue functies f op $[0,1]$ met $f(0)=0$ en $f(1)=1$ een groep vormen met functiesamenstelling als productoperatie. (Zo nodig zie 4.3.24.)

3.4.8. Zij ϕ een één-éénduidige afbeelding van $\mathbf{R}$ op $\mathbf{R}$; zij de productoperatie $*$ gedefinieerd door:

$$\forall_{x \in \mathbf{R}} \forall_{y \in \mathbf{R}} [x*y := \overleftarrow{\phi}(\phi(x)+\phi(y))].$$

Bewijs dat $(\mathbf{R},*)$ een groep is. Geef een isomorfisme van $(\mathbf{R},+)$ op $(\mathbf{R},*)$.

3.4.9. In P(V) (V is een niet lege verzameling) definiëren we:

$$A \dotplus B = (A^* \cap B^*) \cup (A \cap B) \quad (A,B \in P(V)).$$

Bewijs dat $(P(V),\dotplus)$ een groep is. Geef een isomorfisme van $(P(V),\dotplus)$ op $(P(V),\div)$

3.4.10. (a) Karakteristieke functies. Zij W een verzameling; in $V:=\{0,1\}^W$ definiëren we een productoperatie + door:

$$\forall_{x \in W} [(f+g)(x) :\equiv f(x)+g(x) \pmod 2] \quad (f,g \in V).$$

Bewijs dat $(V,+)$ een groep is, die isomorf is met $(P(W),\div)$ (zie 1.26.2, 2.4.10, 2.6.30).

(b) Zij $(X,\preccurlyeq)$ een niet leeg Boole tralie (zie 2.8.26). Het complement van x noteren we x^*. In X definiëren we een productoperatie $\oplus$ door

$$\forall_{x\in X}\ \forall_{y\in X}\ [x\oplus y:=\sup\{\inf\{x,y^*\},\inf\{x^*,y\}\}].$$

Bewijs dat $(X,\oplus)$ een abelse groep is.

We zullen nu een aantal eigenschappen van groepen leren kennen.

3.4.11. STELLING. *In een groep* (G,) *zijn de vergelijkingen* $ax=b$ *en* $xa=b$ *voor alle* a *en* b *éénduidig oplosbaar.*

Bewijs. Het element $a^{-1}b$ is een oplossing van $ax=b$ want $aa^{-1}b=eb=b$. De vergelijking is dus oplosbaar. Zij c een oplossing, dus $ac=b$, dan is $a^{-1}ac=a^{-1}b$; maar $a^{-1}ac=ec=c$ dus $c=a^{-1}b$. $a^{-1}b$ is dus de enige oplossing. De vergelijking $xa=b$ heeft als enige oplossing ba^{-1}.

3.4.12. GEVOLG. *In een groep* (G,) *volgt voor alle* $a\in G$ *uit* $ax=ax'$ *en eveneens uit* $xa=x'a$ *dat* $x=x'$.

Men kan de axioma's (G2) en (G3) nagenoeg vervangen door de eisen van éénduidige oplosbaarheid van de vergelijkingen $ax=b$ en $xa=b$. Men moet dan alleen nog er bij eisen dat G niet leeg is. Dit is de inhoud van 3.4.13.

3.4.13. STELLING. *Is* (G,) *een niet lege verzameling met een associatieve productoperatie waarvoor de vergelijkingen* $ax=b$ *en* $xa=b$ *voor alle* $a,b\in G$ *éénduidig oplosbaar zijn, dan is* (G,) *een groep.*

Bewijs. We laten eerst zien dat er een eenheidselement in (G,) is. G is niet leeg, dus $a\in G$. De vergelijking $ax=a$ heeft nu één oplossing: e_a. Daar e_ab en b beide oplossingen zijn van de vergelijking $ax=ab$, volgt $\forall_{b\in G}\ [e_ab=b]$. Evenzo laat men zien dat de enige oplossing van $xa=a$ rechtereenheidselement is. Uit 3.3.10 volgt nu dat $e:=e_a$ het eenheidselement van (G,) is.

Het bestaan van inversen is nu eenvoudig. Neem $c\in G$; $cx=e$ heeft nu één oplossing d. Dan is echter ook $dc=e$, want dc en e zijn oplossingen van $xd=d$, immers $(dc)d=$ $=d(cd)=de=d$.

3.4.14. DEFINITIE. *Een groep* (G,) *waarbij* G *een eindige verzameling is heet een eindige groep. Het aantal elementen van* G *heet de orde van de groep.*

De orde van de groep is steeds een natuurlijk getal (dus >0). Bij ieder natuurlijk getal n is $(\mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ m),+)$ een groep van de orde m, zodat er bij ieder natuurlijk getal m tenminste één groep van de orde m bestaat.

3.4.15. STELLING. *In de producttafel van een eindige groep staan in elke rij en elke kolom alle elementen van de groep precies één keer.*

Bewijs. Pas 3.4.12 toe.

De bovenstaande stelling drukt uit dat de producttafel van een eindige groep een zogenaamd *latijns vierkant* is. (Een latijns vierkant is een vierkant schema waar over de n^2 plaatsen n verschillende objecten zo verdeeld zijn dat in elke rij en elke kolom alle n objecten voorkomen.)

3.4.16. VOORBEELD. Er zijn (op isomorfie na) twee groepen van de orde vier. We geven beide producttafels.

I

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

II

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Indien men probeert latijnse vierkanten van de orde 4 (d.w.z. 4 rijen en 4 kolommen) op te stellen dan blijkt dat elke poging door een hernoemen van de objecten en verwisselen van rijen en kolommen in een van beide bovenstaande producttafels overgaat. (De lezer puzzele dit uit.) Er zijn dus ten hoogste twee groepen van de orde 4. Dat de producttafel een latijns vierkant is garandeert niet dat de productoperatie ook associatief is. Is hij dat wel dan is de verzameling met productoperatie volgens 3.4.13 een groep. Men gaat gemakkelijk na dat beide bovenstaande producttafels inderdaad groepen definiëren; men kan bijv. laten zien dat $(\mathbf{Z}(\text{mod } 4),+)$ isomorf is met $(\{e,a,b,c\},\text{I})$ en dat $(\{f_1,f_2,f_3,f_4\},\circ)$ isomorf is met $(\{e,a,b,c\},\text{II})$, waarin $f_i:\mathbf{R}\backslash\{0\}\to\mathbf{R}\backslash\{0\}$ $(i=1,2,3,4)$ gedefinieerd worden door $f_1(x):=x$, $f_2(x):=1/x$, $f_3(x):=-x$, $f_4(x):=-1/x\,(x\neq 0)$. Merk op dat blijkbaar beide groepen abels zijn.
Als men afspreekt in de producttafels het eenheidselement steeds op de eerste plaats te zetten, kan men gevoeglijk de randen (de letters links van en boven de dikke streep) weglaten; we zullen dit voortaan ook doen.

3.4.17. Voorbeeld 3.4.16 toont aan dat iedere groep van de orde 4 isomorf is met ({e,a,b,c},I) of ({e,a,b,c},II). Men noemt een klasse van onderlinge isomorfe groepen ook wel een *abstracte groep* (vergelijk § 2.3). Iedere representant uit zo'n klasse heet dan een *model* van de abstracte groep. Zo zegt men dat ({e,a,b,c},I) *de* cyclische groep van de orde 4 is. (**Z**(mod 4),+) heet dan een model van de cyclische groep van de orde 4; of slordiger: een cyclische groep van de orde 4. De groep ({e,a,b,c},II) staat bekend als de *viergroep van Klein*. Ook ieder model van deze groep noemt men dan slordigerwijze weer viergroep van Klein.
In het algemeen noemt men ieder wiskundig object dat aan zekere axioma's voldoet een model van de door die axioma's gedefinieerde structuur. Het nederlandse woord "model" heeft twee betekenissen die gezien vanuit de tegenstelling abstract-concreet elkaars tegendeel zijn. Voor de wiskundige is het model (bijv. (**Z**(mod 4),+)) het concrete. De structuur waarvan het model een realisering is (in ons geval ({e,a,b,c},I)) is het abstracte. Als de fysicus spreekt over het atoommodel van Bohr, dan duidt hij op een abstracte gedachtenconstructie die een beschrijving probeert te zijn van de concrete atomen. Ook in het niet wetenschappelijke taalgebruik bestaat deze tegenstelling: scheepsmodellen zijn geen echte boten; fotomodellen zijn wel echte dames.

3.4.18. We wijzen er op dat de manier waarop wij in 3.4.16 gevonden hadden dat er twee groepen van de orde vier bestaan, nl. door latijnse vierkanten van de orde 4 op te zoeken, voor hogere ordes onbruikbaar is. De lezer kan een idee krijgen over de zwaarte van de eis van de associativiteit door het volgende tabelletje waarin o duidt op de orde; l het aantal onderling niet isomorfe latijnse vierkanten (we laten in het midden wat isomorf hier betekent); g het aantal onderling niet isomorfe groepen; a het aantal onderling niet isomorfe abelse groepen.

o	1	2	3	4	5	6	7	8
l	1	1	1	2	2	12	147	>250.000
g	1	1	1	2	1	2	1	5
a	1	1	1	2	1	1	1	3

De groepen van de ordes 1, 2, 3, 5, 7 zijn cyclische groepen (en dus abels). De groepen van de orde 4 zijn de cyclische groep en de viergroep van Klein; die van de orde 6: de cyclische groep en S_3 (zie 3.4.3; merk op dat we de naam S_3 nu gebruiken voor de abstracte groep). We geven nu de beide latijnse vierkanten van de orde 5.

e	a	b	c	d
a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c

e	a	b	c	d
a	b	e	d	c
b	d	c	e	a
c	e	d	a	b
d	c	a	b	e

De eerste producttafel is die van de cyclische groep van de orde 5. De tweede definieert een niet associatief product: $(ab)c=ec=c$; $a(bc)=ae=a$.

3.4.19. Vanwege het grote belang van permutatiegroepen (zie 3.5.10) zullen we ons thans bezighouden met permutaties van eindige verzamelingen. We merken op dat de orde van S_n gelijk is aan $n!$. We zullen thans aan de hand van voorbeelden verschillende notaties voor permutaties leren kennen. Zij $W:=\{1,2,3,4,5\}$.

(i) Een element f van $S(W)$ kan dan geschreven worden als:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \end{pmatrix}$$

Zo betekent: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ dat

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=2$.

Is $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dan is

$$f\circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) De permutatie f uit (i) heeft de mooie eigenschap dat

$$\{1,\ f(1),\ f(f(1)),\ f(f(f(1))),\ f(f(f(f(1))))\} = W.$$

We noemen zulke permutaties *cyclisch*. We kunnen f voorstellen door de rij $(1,f(1),f(f(1)),f_3(1),f_4(1))$ (zie 1.24.10), dus door $(1,3,4,5,2)$. We kunnen f evengoed voorstellen door $(3,f(3),f_2(3),f_3(3),f_4(3))=(3,4,5,2,1)$. Ook permutaties die niet cylcisch zijn, zoals g, kan men gemakkelijker noteren dan in (i) gebeurd is. We nemen een element van W, schrijven daarachter het beeld onder g, daarachter het beeld onder g_2 enz.; zodra we een element verkregen hebben dat door g op het eerste element wordt afgebeeld, zetten we de verkregen rij tussen haakjes. Daarna doen we hetzelfde met een van de eventueel overgebleven elementen van W, enzovoort tot we alle elementen van W gehad hebben.
Zo wordt $g=(1,4,2,5)(3)$ of ook wel $(3)(5,1,4,2)$. We zeggen dat we g geschreven hebben als "product van twee *cykels*". Cykels van één element, zoals (3) in g, kan men ook weglaten. Merk op dat de restrictie van g tot $W_0:=$ $:=\{1,2,4,5\}$ wel cyclisch is met cykel $(1,4,2,5)=(4,2,5,1)$; evenzo de restrictie van g tot $\{3\}$. Merk verder op dat de verschillende cykels in een permutatie geen elementen gemeen hebben, en dat de permutatie onafhankelijk is van de volgorde van de cykels. Men ziet zonder veel moeite dat iedere permutatie eenduidig bepaald wordt door cykels met verschillende elementen. De vermenigvuldiging van cykels wordt gedefinieerd als de vertaling van de samenstelling van de er door bepaalde permutaties. Zo is

$$f\circ g = (1,3,4,5,2)(1,4,2,5) = (1,5,3,4).$$

Men ziet gemakkelijk dat dit als volgt in zijn werk gaat: g beeldt 1 af op 4, f beeld 4 af op 5 dus een cykel van $f\circ g$ kan beginnen met $(1,5\ldots)$. We gaan nu door: $g(5)=1$, $f(1)=3$, dus we schrijven $(1,5,3,\ldots)$; $g(3)=3$ (de één-elementscykel (3) schreven we niet) $f(3)=4$, dus $(1,5,3,4,\ldots)$; $g(4)=2$, $f(2)=1$, dus $(1,5,3,4)$.
Om $f\circ g$ volledig te maken, merken we op dat $f\circ g$ ook nog de cykel (2) (want $g(2)=5$, $f(5)=2$) bevat die we niet opschrijven.
$(1,3,5)(2,4)$ kan men nu opvatten als $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&2&1\end{pmatrix}$
en evengoed als de samenstelling van $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}$ en
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$, doch het resultaat is in beide gevallen hetzelfde. In wat we noemden: "het schrijven van een permutatie als een product van cykels", is dus product inderdaad als vermenigvuldiging te interpreteren.

OPGAVEN

3.4.20. (a) De groep S_3 heeft 6 elementen die we met de notatie uit 3.4.19 (ii) kunnen aangeven als: (1); (1,2,3); (1,3,2); (1,2); (1,3); (2,3). Stel de producttafel van S_3 op.

(b) Bewijs dat de groep $(\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\},\circ)$ van afbeeldingen van $\mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ in zichzelf met afbeeldingssamenstelling als productoperatie isomorf is met S_3 als

$f_1(x):=x$, $f_2(x):=x^{-1}$, $f_3(x):=1-x$, $f_4(x):=$ $:=x(x-1)^{-1}$, $f_5(x):=(1-x)^{-1}$, $f_6(x):=(x-1)x^{-1}$

$(x\in\mathbf{R}\backslash\{0,1\})$.

3.4.21. Bewijs dat $(\{(1),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\},$ $\circ)$ een viergroep van Klein is.

3.4.22. Bewijs dat elk element van S_n $(n\geq 2)$ geschreven kan worden als een product van cykels met twee elementen (zgn. verwisselingen). Bewijs ook dat elk element van S_n geschreven kan worden als product van cykels uit de verzameling $\{(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\}$. (Bij deze schrijfwijze kunnen sommige getallen in meer dan een cykel voorkomen.)

3.4.23. We eindigen deze paragraaf met enige begrippen die we later zullen gebruiken. Een functie van n variabelen, $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (we denken ons maar $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ doch dat is niet essentieel) heet *invariant onder de permutatie* $g\in S_n$ indien:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F(x_{g(1)},x_{g(2)},\ldots,x_{g(n)}).$$

$F(x_1,\ldots,x_n)$ heet symmetrisch indien F invariant is onder elk element van S_n. Zo is $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+$ $+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$ een symmetrische functie.

3.4.24. OPGAVE. Zij $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$; $g_1\in S_n$; $g_2\in S_n$; F invariant onder g_1 en onder g_2. Bewijs dat F invariant is onder $g_1\circ g_2$.

3.5. Ondergroepen

3.5.1. Bij geordende verzamelingen $(V,<)$ is het zó dat de ordening $<$ iedere deelverzameling $W\subset V$ tot een geordende verzameling $(W,<)$ maakt. Dit is met groepen natuurlijk niet zo (zie onder 3.3.8). Zij $(G,\cdot)$ een groep, $H\subset G$, $H\neq\emptyset$. $((\emptyset,\cdot)$ is zeker géén groep.) Nu is $(H,\cdot)$ in het algemeen niet een verzameling met een productoperatie. Voorbeeld: $(G,\cdot):=(\mathbf{R}\backslash\{0\},\ )$; $H:=\{x\mid x<0\}$. Als $(H,\cdot)$ een verzameling met productoperatie is, dus als $\forall_{h_1\in H}\ \forall_{h_2\in H}\ [h_1\cdot h_2\in H]$, is de productoperatie automatisch associatief. De semigroep $(H,\cdot)$ hoeft geen eenheidselement te hebben. Voorbeeld: $(G,\cdot):=(\mathbf{Z},+)$; $H:=\mathbf{N}$. Als de semigroep $(H,\cdot)$ ook nog een eenheidselement heeft hoeft het nog geen groep te zijn omdat inversen kunnen ontbreken. Voorbeeld: $(\mathbf{N},\ )$ in $(\mathbf{R}\backslash\{0\},\ )$.

3.5.2. DEFINITIE. *Zij* $(G,\cdot)$ *een groep*, $H\subset G$. $(H,\cdot)$ *heet een ondergroep van* $(G,\cdot)$ *indien* $(H,\cdot)$ *zelf een groep is.*

Zo is $(\mathbf{Z},+)$ een ondergroep van $(\mathbf{Q},+)$ die op zijn beurt ondergroep van $(\mathbf{R},+)$ is. $(\mathbf{Q}\backslash\{0\},\ )$ is een ondergroep van $(\mathbf{R}\backslash\{0\},\ )$.
$(\{(1),(1,2,3),(1,3,2)\},\circ)$ is een ondergroep van S_3.
Volgens 3.4.21 heeft S_4 een ondergroep die viergroep van Klein is. Uit de discussie in 3.5.1 volgt onmiddellijk dat de volgende drie eisen tezamen nodig en voldoende zijn opdat $(H,\cdot)$ een ondergroep van $(G,\cdot)$ is (e is het eenheidselement van $(G,\cdot)$):

(i) $e\in H$,

(ii) $\forall_{h_1\in H}\ \forall_{h_2\in H}\ [h_1\cdot h_2\in H]$,

(iii) $\forall_{h\in H}\ [h^{-1}\in H]$.

Als $H\neq\emptyset$ dan volgt (i) uit (ii) en (iii) immers, als $h_0\in H$, is volgens (iii) $h_0^{-1}\in H$ en dan is volgens (ii) $h_0\cdot h_0^{-1}= =e\in H$.
Het aangeven van alle ondergroepen van een gegeven groep behoort tot de belangrijkste taken van de groepentheorie (zie 3.5.10).

3.5.3. STELLING. *Zij* $(G,\cdot)$ *een groep*, $H\subset G$, $H\neq\emptyset$. $(H,\cdot)$ *is dan en slechts dan een ondergroep van* $(G,\cdot)$ *indien*

(iv) $\forall_{h_1\in H}\ \forall_{h_2\in H}\ [h_1\cdot h_2^{-1}\in H]$.

Bewijs. Dat (iv) nodig is opdat $(H,\cdot)$ een ondergroep is, is evident. Is anderzijds aan (iv) voldaan dan is daar $H\neq\emptyset$ voor $h_0\in H$, $h_0\cdot h_0^{-1}=e\in H$. Dus is aan (i) voldaan. Als $h\in H$ is, dan is ook $h^{-1}=e\cdot h^{-1}\in H$ dus geldt (iii). Is

$h_1 \in H$, $h_2 \in H$ dan is ook $h_2^{-1} \in H$ en dus $h_1 \cdot h_2 = h_1 \cdot (h_2^{-1})^{-1} \in H$. Dit is (ii).

OPGAVEN

3.5.4. Zoek alle ondergroepen van:

(a) de optelgroep van de gehele getallen mod 4;

(b) de viergroep van Klein;

(c) S_3; merk op dat alle ondergroepen van S_3 abels zijn.

3.5.5. $(G, \ )$ en $(R, \cdot)$ zijn groepen.
In $G\times R$ definiëren we een productoperatie $*$ door: $(a,b)*(c,d) := (ac, b\cdot d)$ voor alle $(a,b) \in G\times R$, $(c,d) \in G\times R$.

(a) Bewijs dat $(G\times R, *)$ een groep is.

(b) Als $G_1 := \{(a,e_r) \mid a \in G,\ e_r$ eenheidselement van $(R,\cdot)\}$, dan is $(G_1, *)$ een ondergroep van $(G\times R, *)$ die isomorf is met $(G, \ )$. Bewijs dit.

3.5.6. (a) Als $a \in W$; $A := \{f \mid f \in S(W),\ f(a) = a\}$, dan is $(A, \circ)$ een ondergroep van $(S(W), \circ)$. Bewijs dit.

(b) Als $U \subset W$; $B := \{f \mid f \in S(W),\ f(U) = U\}$, dan is $(B, \circ)$ een ondergroep van $(S(W), \circ)$. Bewijs dit.

3.5.7. Bewijs dat de monotoon stijgende functies (1.26.9) uit $S(\mathbf{R})$ een ondergroep van $(S(\mathbf{R}), \circ)$ vormen.

3.5.8. VOORBEELD. Is $(G, \ )$ een groep, $a \in G$ dan is $(\{a^n \mid n \in \mathbf{Z}\}, \ )$ een ondergroep van $(G, \ )$. Deze heet de door a voortgebrachte cyclische ondergroep. De orde van deze ondergroep heet de *orde van a*. Men ziet gemakkelijk in dat de cyclische ondergroep voortgebracht door a, als $m \in \mathbf{N}$ de orde van a is, precies bestaat uit de elementen $a, a^2, \ldots, a^m = e$ (het eenheidselement van $(G, \ )$). De orde van a is derhalve gelijk aan $\min\{n \in \mathbf{N} \mid a^n = e\}$. We kunnen dit voorbeeld ook uitbreiden tot ondergroepen voortgebracht door meer dan één element. Is nl. $G_0 \subset G$, $G_0 \neq \emptyset$ dan vormt de verzameling $\{a_1 a_2 \cdots a_k \mid k \in \mathbf{N},$

$\forall_{i \in \{1,\ldots,k\}} [(a_i \in G_0) \vee (a_i^{-1} \in G_0)]\}$ een ondergroep van $(G, \ )$ die G_0 omvat. Deze ondergroep heet de door G_0 *voortgebrachte ondergroep*; deze is bevat in elke ondergroep van $(G, \ )$ die G_0 bevat. De verzameling G_0 heet een verzameling van *voortbrengenden*.

3.5.9. ONDERGROEPEN VAN PERMUTATIEGROEPEN
Behalve de in 3.5.6 besproken wijze, zullen we nog een andere manier bekijken om ondergroepen van S_n te verkrijgen. Zij $F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en zij $I(F) := \{f \in S_n \mid F$ invariant onder $f\}$ dan is $(I(F),\circ)$ een ondergroep van S_n. (De lezer verifiëre dit.) Een bijzonder belangrijke ondergroep van S_n verkrijgen we indien

$$F(x_1,\ldots,x_n) := \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) := (x_1-x_2)\ (x_1-x_3)\cdots$$

$$\cdots(x_1-x_n)\ (x_2-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_n).$$

De ondergroep van S_n die deze functie invariant laat heet de alternerende groep van n elementen; notatie: A_n. De elementen van A_n heten *even* permutaties; de elementen van $S_n \backslash A_n$ heten *oneven* permutaties.
Het grote belang van ondergroepen van permutatiegroepen komt tot uitdrukking in de volgende stelling.

3.5.10. STELLING. *(Cayley). Iedere groep* (G,) *is isomorf met een ondergroep van de permutatiegroep* $(S(G),\circ)$.

Bewijs. De afbeelding $l_g: G \to G$ gedefinieerd door $\forall_{x\in G}\ [\,l_g(x) := gx]$ is voor iedere $g\in G$ een element van $S(G)$. Het is niet moeilijk in te zien dat $(\{l_g \mid g\in G\},\circ)$ een ondergroep van $(S(G),\circ)$ is en dat de afbeelding $\psi: G\to\{l_g \mid g\in G\}$ gedefinieerd door $\forall_{g\in G}\ [\,\psi(g) := l_g]$ een isomorfisme is.

We hadden in plaats van de permutaties l_g ook kunnen gebruiken: $r_{g^{-1}}$ gedefinieerd door $\forall_{x\in G}\ [\,r_g(x) := xg]$ $(g\in G)$.

3.5.11. Enkele notaties. Zij (G,) een groep $H_1 \subset G$, $H_2 \subset G$, $a \in G$.

$$aH_1 := \{ah \mid h\in H_1\},$$

$$H_1a := \{ha \mid h\in H_1\},$$

$$H_1H_2 := \{h_1h_2 \mid h_1\in H_1,\ h_2\in H_2\},$$

$$H_1^{-1} := \{h^{-1} \mid h\in H_1\}.$$

Op grond van (G1) kunnen we ingewikkelde uitdrukkingen opschrijven zoals aH_1bH_2cd. Hoe men het ook opvat deze verzameling is steeds gelijk aan $\{ah_1bh_2cd \mid h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\}$.

Is H een ondergroep dan geldt $H^{-1}=H=HH$.

3.5.12. STELLING. *Zij* (G,) *een groep,* (H,) *een ondergroep, dan is de relatie* R *in* G *gedefinieerd door*

$$xRy :\Leftrightarrow xy^{-1} \in H \quad (x,y \in G)$$

een equivalentierelatie. De equivalentieklasse die $a \in G$ *bevat is* Ha.

Bewijs. De reflexiviteit, symmetrie, en transiviteit van R volgen achtereenvolgens uit 3.5.2 (i), (iii) ($(xy^{-1})^{-1}=yx^{-1}$), en (ii). Is ha een element van Ha dan geldt aRha want $a(ha)^{-1}=a(a^{-1}h^{-1})=eh^{-1} \in H$. Dus alle elementen van Ha behoren tot de equivalentieklasse van a. Geldt anderzijds aRb en dus ook bRa dan is $ba^{-1}=h \in H$ voor zekere $h \in H$ en dus $b=ha \in Ha$.

De equivalentieklassen van R heten de *rechternevenklassen van H*. Alle rechternevenklassen zijn gelijkmachtig want $r_{a^{-1}b}$ beeldt Ha één-éénduidig af op Hb.

Voor eindige groepen heeft 3.4.13 een aantal belangrijke gevolgen waarvan we er enige opsommen.

3.5.13. *De orde van iedere ondergroep van een eindige groep* (G,) *is een deler van de orde van* (G,).

3.5.14. *De orde van ieder element in een eindige groep is een deler van de orde van de groep.*

3.5.15. *Iedere groep waarvan de orde een priemgetal is, is cyclisch.*

3.5.16. *Is* (H,) *een ondergroep van een eindige groep* (G,)*, dan heet het aantal rechternevenklassen van* H *de index van* (H,).

Men ziet gemakkelijk dat voor iedere ondergroep van (G,) geldt dat het product van index en orde gelijk is aan de orde van de groep.

3.5.17. DEFINITIE. *Is* (G,) *een groep,* $g \in G$, *dan definiëren we* $i_g : G \to G$ *door*

$$\forall_{x \in G}\ [i_g(x) := gxg^{-1}].$$

Voor iedere g is i_g een isomorfisme van (G,) op zichzelf; i_g heet het *inwendige automorfisme* voortgebracht door g. (Automorfisme is een naam voor een isomorfisme van een groep op zichzelf.)

3.5.18. Geheel analoog aan 3.5.12 laat men ook zien dat $xLy :\Leftrightarrow y^{-1}x \in H$ $(x,y \in G)$ een equivalentierelatie is. De equivalentieklassen van deze relatie heten *linkernevenklassen van H*. De linkernevenklasse die a bevat, is aH. De nevenklassen aH en Ha zijn gelijkmachtig want i_a beeldt Ha één-éénduidig af op aH. In een abelse groep zijn de linker- en rechternevenklassen van iedere ondergroep H dezelfde verzamelingen. In het algemeen is dat niet zo. We geven een voorbeeld. In S_3 beschouwen we de ondergroep $H := \{(1),(1,2)\}$; linkernevenklassen van H zijn nu: $\{(1),(1,2)\}$; $\{(1,3),(1,2,3)\}$; $\{(2,3),(1,3,2)\}$, terwijl de rechternevenklassen zijn $\{(1),(1,2)\}$; $\{(1,3),(1,3,2)\}$; $\{(2,3),(1,2,3)\}$.

3.5.19. DEFINITIE. *Een ondergroep* (H,) *van een groep* (G,) *heet een normale ondergroep (ook: normaaldeler of invariante ondergroep) indien iedere linkernevenklasse van* H *ook een rechternevenklasse is.*

Uit deze definitie volgt dat als aH=Hb is, ook aH=Ha is, want als ae=a∈Hb is aRb en derhalve Ha=Hb.

3.5.20. STELLING. *Een ondergroep* (H,) *van* (G,) *is dan en slechts dan normaal indien aan één van de volgende voorwaarden voldaan is:*

(a) $\forall_{g \in G}\ [gH = Hg]$,

(b) $\forall_{g \in G}\ [i_g(H) \subset H]$.

Bewijs. Verificatie.

Het belang van de normale ondergroepen komt aan het licht in de volgende discussie. We zouden graag voor de rechternevenklassen van een ondergroep H een productoperatie definiëren door te zeggen: het product van de nevenklassen Ha en Hb is de nevenklasse met representant ab, dus Hab. (Vergelijk 2.4.3, 2.4.4 en 2.4.5.) We zullen echter laten zien dat dit alleen mogelijk is indien H normaal is.

3.5.21. STELLING. *Zij* (G,) *een groep,* (H,) *ondergroep. Dan geldt*

$$\forall_{a\in G}\ \forall_{b\in G}\ [\,HaHb=Hab\,]$$

dan en slechts dan als H *normaal is.*

Bewijs.
(i) Zij H normaal. Nu is $HaHb=aHHb=aHb=Hab$.
(ii) Door specialisatie van het gegeven volgt dat voor elke $a\in G$ $HaHa^{-1}=H$. Voor alle $h_1,h_2\in H$ geldt derhalve $h_1ah_2a^{-1}\in H$, en dus is voor alle $a\in G$: $i_a(H)\subset H$. Zij $h\in H$, dan is $h=a(a^{-1}ha)a^{-1}$ en omdat $a^{-1}ha\in H$ (daar $i_{a^{-1}}(H)\subset H$), volgt $h\in i_a(H)$. Dus $i_a(H)=H$ voor alle $a\in G$. Pas 3.5.20 (b) toe.

Gebruikmakend van 3.5.21 bewijst men zonder enige moeite:

3.5.22. STELLING. *Is* (N,) *een normale ondergroep van* (G,) *dan vormen de nevenklassen van* N *met de boveningevoerde productoperatie een groep.*

Deze groep van nevenklassen heet de *factorgroep* van G naar N; notatie G/N.

OPGAVEN

3.5.23. (a) Bewijs dat iedere ondergroep van een cyclische groep, cyclisch is.

(b) Bepaal alle ondergroepen van ($\mathbf{Z}$(mod 18),+).

3.5.24. Zij $a\in G$, (G,) een groep. Bewijs dat $H_a:=\{x\in G \mid xa=ax\}$ een ondergroep vormt. Is dit een normale ondergroep? Bewijs dat $\bigcap_{a\in G} H_a$ een normale ondergroep vormt. (Deze heet het *centrum* van G.)

3.5.25. Bewijs dat iedere ondergroep met index 2 een normale ondergroep is. Bewijs dat de index van A_n in S_n twee is. Wat is de factorgroep S_n/A_n?

3.5.26. Zij (G,) een groep, (H,) een ondergroep en $(N_1,)$, $(N_2,)$ normale ondergroepen. Bewijs dat HN_1 een ondergroep vormt en dat N_1N_2 en $N_1\cap N_2$ normale ondergroepen vormen.

3.5.27. Bepaal achtereenvolgens de ondergroepen van S_4 bestaande uit de elementen die
(a) het element 4 invariant laten,
(b) de elementen 2 en 4 invariant laten,
(c) de uitdrukking $x_1x_2+x_3x_4$ invariant laten,
(d) de uitdrukking $x_1x_2+x_3+x_4$ invariant laten.

3.5.28.
(a) Bepaal de linker- en rechternevenklassen van S_3 in S_4.
(b) Bewijs dat de viergroep van Klein: $V_4:=(\{(1),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\},\circ)$ een normale ondergroep van S_4 is.
(c) Bewijs dat S_4/V_4 isomorf is met S_3.

3.5.29. Zij $m\in\mathbf{N}$; dan vormt $m\mathbf{Z}:=\{mx \mid x\in\mathbf{Z}\}$ een normale ondergroep van $(\mathbf{Z},+)$. Bewijs dat de factorgroep van $(\mathbf{Z},+)$ naar deze ondergroep, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, isomorf is met $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+)$.

3.5.30. Zij (G,) een groep en (H,) een ondergroep van (G,). (G×G,) is een groep met de gebruikelijke vermenigvuldiging:

$$\forall_{(g_1,g_2)\in G\times G}\ \forall_{(g_3,g_4)\in G\times G}[(g_1,g_2)(g_3,g_4):=(g_1g_3,g_2g_4)].$$

We definiëren:

$$D := \{(h,h)\in G\times G \mid h\in H\}.$$

a) Bewijs dat (D,) een ondergroep is van (G×G,).
b) Als H bevat is in het centrum van G (zie 3.5.24), dan is (D,) een normale ondergroep van (G×G,). Bewijs dit.

3.5.31. Zie 3.5.5. Bewijs dat $(G_1,*)$ een normale ondergroep is van $(G\times R,*)$. Bewijs dat de factorgroep $(G\times R)/G_1$ isomorf is met (R,). Vergelijk dit met 3.5.30.

3.6. Homomorfie; directe producten van groepen

3.6.1. DEFINITIE. *Zij (G,) een groep; $(G^*,*)$ een verzaling met productoperatie. Een afbeelding $\psi:G\to G^*$ heet een homomorfisme van (G,) in $(G^*,*)$ indien:*

$$\forall_{x\in G}\ \forall_{y\in G}\ [\psi(xy)=\psi(x)*\psi(y)].$$

3.6.2. STELLING. *Is ψ een homomorfisme van de groep (G,) in $(G^*,*)$ dan is $(\psi(G),*)$ een groep. Het eenheidselement van deze groep is $\psi(e)$, waarbij e het eenheidselement van (G,) is. De inverse van $\psi(a)$ is $\psi(a^{-1})$.*

Bewijs. Het is triviaal dat $*$ associatief is in $\psi(G)$. De rest van het bewijs is analoog aan 3.3.20.

Op grond van deze stelling kunnen wij ons bij de bestudering beperken tot homomorfismen van een groep (G,) op een groep $(G^*,*)$.

3.6.3. VOORBEELD. Zij (G,) een groep, (N,) een normale ondergroep. De afbeelding $\psi:G\to G/N$ gedefinieerd door $\psi(a):=aN(a\in G)$ is een homomorfisme van de groep (G,) op de factorgroep van G naar N.

Dit voorbeeld karakteriseert homomorfismen zoals blijkt uit de volgende stelling.

3.6.4. STELLING. *Zij* ψ *een homomorfisme van een groep* (G,) *op* $(G^*,*)$. *Dan is* $N:=\psi^{\leftarrow}(\{\psi(e)\})$ *een normale ondergroep van* (G,) *en* $(G^*,*)$ *is isomorf met* G/N.

Bewijs. Als $\psi(e)=:e^*$, $\psi(h_1)=e^*$, $\psi(h_2)=e^*$ dan is ook $\psi(h_1h_2^{-1})=e^**(e^*)^{-1}=e^**e^*=e^*$. Wegens 3.5.3 is $\psi^{\leftarrow}(\{e^*\})$ een ondergroep van (G,). Voor iedere a is $aNa^{-1}\subset N$ omdat $\psi(aNa^{-1})=\psi(a)*\psi(N)*\psi(a^{-1})=\psi(a)*e^**(\psi(a))^{-1}=e^*$. Dus is ook: $a^{-1}Na\subset N$; $a(a^{-1}Na)a^{-1}\subset aNa^{-1}$; $N\subset aNa^{-1}$; $aNa^{-1}=N$; N is een normale ondergroep (3.5.20 (b)). Nu betekent $\psi(a)=\psi(b)$ dat $\psi(ab^{-1})=\psi(a)*(\psi(b))^{-1}=e^*$, dus $ab^{-1}\in N$. Hieruit volgt dat voor elke $x^*\in G^*$ de verzameling $\psi^{\leftarrow}(\{x^*\})$ juist één nevenklasse van N is. $\psi^{\leftarrow}$ is dus een één-éénduidige afbeelding van G^* op G/N. Bovendien is $\psi^{\leftarrow}$ een homomorfisme van G^* op G/N. Het is dus een isomorfisme.

De normale ondergroep N heet de *kern* van het homomorisme ψ.

OPGAVEN

3.6.5. *Eerste isomorfiestelling*. Zij (G,) een groep, (N,) een normale ondergroep, (H,) een ondergroep, dan vormt N een normale ondergroep in HN; $H\cap N$ vormt een normale ondergroep in H. Bovendien zijn HN/N en $H/H\cap N$ isomorf. Bewijs dit (zie 3.5.26).

3.6.6. *Tweede isomorfiestelling*. Zij (G,) een groep, (N,) en (H,) normale ondergroepen van (G,). Dan is HN/N een normale ondergroep van G/N en G/HN is isomorf met (G/N)/(HN/N).

3.6.7. Bewijs met behulp van de eerste isomorfiestelling dat in iedere ondergroep van S_n de even permutaties een normale ondergroep met index 1 of 2 vormen.

3.6.8. We zullen nu een begrip leren kennen, dat we voor groepen in dit boek niet zullen gebruiken, maar waarvan we wel een analogie zullen zien (3.14.41).

DEFINITIE. *Zij* (G,) *een groep met eenheidselement* e. *Laat* G_1 *en* G_2 *ondergroepen vormen.* G *heet het directe product van de ondergroepen* G_1 *en* G_2 *(notatie:* $G=G_1 \otimes G_2$) *indien*

(o) $\forall_{g_1 \in G_1} \forall_{g_2 \in G_2} [g_1 g_2 = g_2 g_1]$,

(i) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$,

(ii) $G = G_1 G_2$.

Aan de eis (o) is automatisch voldaan als G abels is. We merken op dat voor elk element $g \in G$ de schrijfwijze $g=g_1 g_2$ met $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ eenduidig is. Als immers $g_1 g_2 = h_1 h_2$ is, dan volgt dat $h_1^{-1} g_1 = h_2 g_2^{-1}$ is, maar $h_1^{-1} g_1 \in G_1$, $h_2 g_2^{-1} \in G_2$ dus $h_1^{-1} g_1 = e = h_2 g_2^{-1}$ en dit betekent $h_1 = g_1$, $h_2 = g_2$.

OPGAVEN

3.6.9. Zij $G=G_1 \otimes G_2$. Bewijs dat $(G_1,)$ en $(G_2,)$ normale ondergroepen van (G,) zijn. Bewijs dat G/G_1 isomorf is met G_2 en G/G_2 met G_1.

3.6.10. Bewijs dat de viergroep van Klein het directe product is van twee cyclische ondergroepen van de orde 2.

3.6.11. OPMERKING. In 3.5.5 gingen we uit van twee groepen (G,) en $(R,\cdot)$. We verkregen een groep $(G\times R,*)$, waarvan $G_1=\{(g,e_r) \mid g\in G,\ e_r$ eenheidselement van $R\}$ en $R_1=\{(e_g,r) \mid r\in R,\ e_g$ eenheidselement van $G\}$ normale ondergroepen vormen (zie 3.5.31). In deze situatie is $(G\times R,*)=G_1 \otimes R_1$. Bovendien is $(G_1,*)$ isomorf met (G,), $(R_1,*)$ isomorf met $(R,\cdot)$. Men noemt nu ook $(G\times R,*)$ wel direct product van G en R en schrijft: $(G\times R,*)=G\otimes R$, d.w.z. men identificeert (G,) en $(G_1,*)$ en ook $(R,\cdot)$ en $(R_1,*)$.

3.7. Ringen en lichamen

3.7.1. We zullen nu bestuderen verzamelingen, R, waarin een tweetal productoperaties $\phi_1,\phi_2:R\times R\to R$ gedefinieerd zijn. We zullen meestal $\phi_1(a,b)$ als a+b, $\phi_2(a,b)$ als ab noteren; in overeenstemming met het gebruik van § 3.3 noteren we de verzameling R met beide productoperaties als (R,+,). Als $R\subset\mathbf{R}$, betekenen a+b en ab steeds de gewone som en het gewone product van de reële getallen a en b.

3.7.2. DEFINITIE. (R,+,) *heet een ring als voldaan is aan de volgende drie eisen.*

(R1) (R,+) *is een commutatieve groep.*

(R2) (R,) *is een semigroep, d.w.z. de productoperatie in* (R,) *is associatief.*

(R3) $$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ \forall_{c\in R}\ [\,(a+b)c=ac+bc,\ c(a+b)=ca+cb]$$

(distributieve wetten).

3.7.3. DEFINITIE. *De ring* (R,+,) *heet commutatief indien*

$$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ [ab=ba].$$

Men noemt (R,+) de additieve groep van de ring. Het eenheidselement van deze groep wordt het nulelement van de ring genoemd. We schrijven het ook als 0. De inverse van a in (R,+) wordt met -a aangegeven. We gebruiken ook de verdere notatieafspraken uit 3.3.17.

3.7.4. VOORBEELDEN. $(\mathbf{R},+,\ )$, $(\mathbf{Q},+,\ )$, $(\mathbf{Z},+,\ )$ en $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+,\cdot)$ (zie 2.4.5) zijn commutatieve ringen.

3.7.5. De lezer zal geen moeilijkheden hebben alle voorkomende rekenregels in een ring te bewijzen. Zo bewijst men gemakkelijk dat:

$$\left.\begin{aligned} a(b_1+b_2+\ldots+b_n) &= ab_1+ab_2+\ldots+ab_n \\ (b_1+b_2+\ldots+b_n)a &= b_1a+b_2a+\ldots+b_na \end{aligned}\right\}\ (a,b_1,\ldots,b_n\in R),$$

$$a(b-c)=ab-ac \text{ want } a(b-c)+ac=a(b-c+c)=ab \quad (a,b,c\in R).$$

De laatste regel heeft tot gevolg dat a0=0; uit (b-c)a= =ba-ca volgt 0a=0.

3.7.6. DEFINITIE. *Als* $(R,+,\ )$ *een ring is*, $a\in R$, $b\in R$, $a\neq 0\neq b$, *en* $ab=0$ *dan heten* a *en* b *nuldelers;* a *heet een linker nuldeler en* b *een rechter nuldeler.*

Voorbeeld: in $(\mathbf{Z}(\text{mod } 6),+,\cdot)$ zijn $\underline{2}$ en $\underline{3}$ linker en rechter nuldeler want $\underline{2}\cdot\underline{3}=\underline{3}\cdot\underline{2}=\underline{0}$ $(2\cdot 3\equiv 0(\text{mod } 6))$.

3.7.7. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring. Een element* e *heet het eenheidselement van de ring als* e *het eenheidselement van de semigroep* $(R,\ )$ *is.*

We zeggen dus dat e het eenheidselement is (uit 3.3.11 volgt dat er ten hoogste één eenheidselement is) indien $\forall_{a\in R}\,[ae=ea=a]$. In alle voorbeelden van 3.7.4 heeft de ring een eenheidselement. Een voorbeeld van een ring zonder eenheidselement krijgt men aldus: zij $(G,+)$ een abelse groep van orde >1 en met groeps-eenheidselement 0. We definiëren een productoperatie door te zeggen: $\forall_{g\in G}\,\forall_{h\in G}\,[g\cdot h=0]$. Nu is $(G,+,\cdot)$ een ring zonder eenheidselement. Ook $(2\mathbf{Z},+,\ )$ is een ring zonder eenheidselement. Als $(R,+,\ )$ een ring is met eenheidselement e, dan is $e\neq 0$ tenzij $R=\{0\}$. Als nl. $a\neq 0$, $a\in R$ dan geldt $a0=0$, $ae=a$ dus $0\neq e$. De ring $\{0\}$ is niet bijzonder interessant; we zullen deze wel als uitzondering bij sommige beweringen moeten vermelden.

3.7.8. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring met eenheidselement; een element* $a\in R$ *heet regulier als* a *in* $(R,\ )$ *een inverse heeft.*

Is U de verzameling van de reguliere elementen, dan ziet men zonder veel moeite dat $0\notin U$ en dat $(U,\ )$ een groep is, mits de ring uit tenminste twee elementen bestaat.

3.7.9. VOORBEELDEN. In $(\mathbf{R},+,\ )$ en $(\mathbf{Q},+,\ )$ zijn alle elementen die ongelijk aan 0 zijn regulier. In $(\mathbf{Z},+,\ )$ zijn alleen 1 en -1 regulier. In deze drie ringen zijn er geen nuldelers. In $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+,\ )$ zijn regulier alle elementen $\underline{k}$ met $(k,m)=1$.

3.7.10. VOORBEELD. Zij V een niet lege verzameling. Voor elementen van $\mathbf{R}^V$ definiëren we:

$$\forall_{f\in\mathbf{R}^V}\,\forall_{g\in\mathbf{R}^V}\,\forall_{x\in V}\,[(f+g)(x):=f(x)+g(x),$$

$$(fg)(x):=f(x)g(x)].$$

Nu is $(\mathbf{R}^V,+,\ )$ een commutatieve ring (zie 1.26.2). Deze heeft als eenheidselement de afbeelding i met $\forall_{x\in V}\ [i(x):=1]$.
Een afbeelding $f:V\to\mathbf{R}$ is dan en slechts dan regulier indien $\forall_{x\in V}\ [f(x)\neq 0]$. Een element is een nuldeler indien $\exists_{x\in V}\ [f(x)=0]$ en $\exists_{x\in V}\ [f(x)\neq 0]$.

OPGAVEN

3.7.11. Zij W een niet lege verzameling. Dan is $(P(W),\div,\cap)$ een commutatieve ring. Bewijs dit. Zijn er in deze ring nuldelers, een eenheidselement, reguliere elementen?

3.7.12. Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring. Een element $a\in R$ heet *quasiregulier* indien er een $a'\in R$ bestaat met $a+a'-aa'=0$. Zij Q de verzameling der quasireguliere elementen. Laat $\circ$ gedefinieerd zijn door $\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}$ $[a\circ b:=a+b-ab]$. Bewijs dat $(Q,\circ)$ een groep is.

3.7.13. DEFINITIE. *Een ring* $(R,+,\ )$, $R\neq\{0\}$, *met eenheidselement heet een lichaam indien elk element uit* $R\setminus\{0\}$ *regulier is.*

Is de ring bovendien commutatief dan spreekt men van een *commutatief lichaam.* $(\mathbf{R},+,\ )$ en $(\mathbf{Q},+,\ )$ zijn lichamen. $(\mathbf{Z}(\text{mod } m),+,\cdot)$ is alleen dan een lichaam indien m priem is (3.4.4). Men ziet onmiddellijk dat een lichaam geen nuldelers heeft. $(\mathbf{Z},+,\ )$ is geen lichaam (zie ook 3.7.19). $(R\setminus\{0\},\ )$ is een groep en heet de multiplicatieve groep van het lichaam. Vaak wordt onder een lichaam een commutatief lichaam verstaan en spreekt men van een *scheef* lichaam als niet commutatief bedoeld wordt.

3.7.14. DEFINITIE. *De ringen* $(R,+,\ )$ *en* $(R^*,\oplus,\star)$ *heten isomorf indien er een één-éénduidige afbeelding,* ψ, *(geheten isomorfisme) van* R *op* R^* *bestaat zo dat*

$$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ [\psi(a+b)=\psi(a)\oplus\psi(b),\psi(ab)=\psi(a)\star\psi(b)].$$

3.7.15. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring,* $S\subset R$. *Als* $(S,+,\ )$ *een ring is dan heet* $(S,+,\ )$ *een deelring van* $(R,+,\ )$.

Het begrip deelring is analoog aan het begrip ondergroep uit § 3.5. Een deellichaam van een lichaam is een deelring die een lichaam is.

3.7.16. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring en zij* $S\subset R$, $S\neq\emptyset$. $(S,+,\ )$ *is dan en slechts dan een deelring van* $(R,+,\ )$ *indien*

$$\forall_{a\in S}\ \forall_{b\in S}\ [a-b\in S,\ ab\in S].$$

Bewijs. Pas 3.5.3 toe.

3.7.17. OPGAVE. Zij $(R,\dot{+},\cdot)$ een ring. In $\mathbf{Z}\times R$ definiëren we voor alle (m,a) en (n,b) uit $\mathbf{Z}\times R$:

$$(m,a)\oplus(n,b):=(m+n,a\dot{+}b),\quad (m,a)\star(n,b):=mn,mb\dot{+}na\dot{+}a\cdot b.$$

Bewijs dat $(\mathbf{Z}\times R,\oplus,\star)$ een ring met eenheidselement is. Zij $W:=\{(0,a)\mid a\in R\}$. Bewijs dat $(W,\oplus,\star)$ een deelring is van $(\mathbf{Z}\times R,\oplus,\star)$, die isomorf is met $(R,\dot{+},\cdot)$. Op de hier beschreven wijze kan men iedere ring in een ring met eenheidselement inbedden.

3.7.18. DEFINITIE. *Een commutatieve ring met eenheidselement en zonder nuldelers heet een integriteitsgebied.*

Uit wat we reeds weten volgt dat $(\mathbf{Z},+,\ )$ een integriteitsgebied is. In 2.4.4 (opgave) beschreven we de constructie van een lichaam $(\mathbf{Q},+,\ )$ waarin we het integriteitsgebied $(\mathbf{Z},+,\ )$ isomorf konden inbedden. Een analoge constructie is mogelijk in ieder integriteitsgebied (dat niet bestaat uit 0 alleen!). Het geconstrueerde lichaam heet het *quotiëntenlichaam* van het integriteitsgebied. We beschrijven nu deze constructie; de lezer verifiëre alle details.

3.7.19. CONSTRUCTIE VAN HET QUOTIËNTENLICHAAM VAN EEN INTEGRITEITSGEBIED

Zij $(R,+,\ )$ een integriteitsgebied; het eenheidselement zij e. Zij $V:=\{(a,b)\mid a\in R,\ b\in R,\ b\neq 0\}$.
We definiëren voor alle $(a,b)\in V$, $(c,d)\in V$:

$$((a,b)\sim(c,d)) :\Leftrightarrow (ad=bc).$$

Het is niet lastig te verifiëren dat deze relatie een equivalentierelatie in V is. We noteren de equivalentieklasse waartoe (a,b) behoort als $\frac{a}{b}$. In de verzameling, Q, der equivalentieklassen definiëren we nu productoperaties $\oplus$ en $\star$ door:

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd};\ \frac{a}{b}\star\frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}\quad ((a,b),(c,d)\in V).$$

We moeten nagaan dat deze definities zinvol zijn, door te laten zien dat ze onafhankelijk zijn van de gekozen representanten van de elementen van Q (vergelijk § 2.4). We laten deze verificatie aan de lezer over evenals die van alle volgende stappen. Nu is $(Q,\oplus)$ een commutatieve groep; het eenheidselement is $\frac{0}{e}$; de inverse van $\frac{a}{b}$ is $\frac{-a}{b}$. Voorts kan men laten zien dat $(Q\setminus\{\frac{0}{e}\},*)$ een commutatieve groep is; het eenheidselement is $\frac{e}{e}$; de inverse van $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$; (uit $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{e}$ volgt $a\neq 0$). De volgende stap is dat we laten zien dat $(Q,\oplus,*)$ een lichaam is, doordat we verifiëren dat aan de distributieve wetten (R3) voldaan is. $(Q,\oplus,*)$ heet het *quotiëntenlichaam* van $(R,+,\ )$.

Zij $\bar{R}:=\{\frac{ae}{e}\mid a\in R\}$; men moet nog laten zien dat $(\bar{R},\oplus,*)$ een deelring is van $(Q,\oplus,*)$ die isomorf is met $(R,+,\ )$. We kunnen desgewenst $(R,+,\ )$ en $(\bar{R},\oplus,*)$ identificeren. We merken nog op dat de constructie van het quotiëntenlichaam zo zuinig mogelijk is, in die zin dat ieder lichaam dat een deelring bevat die isomorf is met $(R,+,\ )$ ook een deellichaam bevat dat isomorf is met $(Q,\oplus,*)$. Uit deze opmerking trekken we nog een belangrijke conclusie.

3.7.20. STELLING. *Laat* $(R,+,\ )$ *een lichaam zijn waarvan het eenheidselement* e *voldoet aan* $\forall_{n\in\mathbf{N}}[ne\neq 0]$. *Dan bevat* $(R,+,\ )$ *een deellichaam dat isomorf is met* $(\mathbf{Q},+,\ )$.

Bewijs. $(\{ne\mid n\in\mathbf{Z}\},+,\ )$ is isomorf met $(\mathbf{Z},+,\ )$.

OPGAVEN

3.7.21. Ga na dat de in 3.7.19 beschreven constructie ook mogelijk is voor een commutatieve ring zonder nuldelers, maar zonder eenheidselement. Vervang daartoe overal in 3.7.19 e door een willekeurig element r uit de ring met $r\neq 0$.

3.7.22. Als het integriteitsgebied $(R,+,\ )$ een lichaam is dan levert de constructie van 3.7.19 (een lichaam isomorf met) $(R,+,\ )$. Ga dit na.

3.7.23. Bewijs dat ieder eindig integriteitsgebied een lichaam is.

3.7.24. Bewijs dat in een commutatieve ring de binomiaalformule van Newton

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

geldig is (zie 1.27.12).

3.8. Idealen; homomorfie van ringen

Zoals het begrip deelring analoog is aan het begrip ondergroep, zo spelen de thans te definiëren idealen in de theorie van de ringen de rol van de normale ondergroepen in de groepentheorie.

3.8.1. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring. Een deelring* $(S,+,\ )$ *heet een ideaal indien*

$$\forall_{a\in S}\ \forall_{r\in R}\ [ar\in S,\ ra\in S].$$

Indien in plaats van de laatste voorwaarde slechts geldt: $\forall_{a\in S}\ \forall_{r\in R}\ [ra\in S]$ dan spreken we van een *linksideaal*; analoog is het begrip *rechtsideaal*. Is $S\neq R$ dan spreken we van een *echt* ideaal.
In iedere ring $(R,+,\ )$ is $(\{0\},+,\ )$ een ideaal: het *nulideaal*.

3.8.2. VOORBEELDEN. In $(\mathbf{Q},+,\ )$ is $(\mathbf{Z},+,\ )$ een deelring die *geen* ideaal is. In $(\mathbf{Z},+,\ )$ is $(m\mathbf{Z},+,\ )$ een ideaal $(m\in\mathbf{N})$.
Zij V een niet lege verzameling, V_0 niet-lege deelverzameling van V, dan vormt $I(V_0):=\{f\in\mathbf{R}^V \mid f(V_0)=\{0\}\}$ een ideaal in $(\mathbf{R}^V,+,\ )$.
Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring, $a\in R$, dan vormt $\{na+ra \mid n\in\mathbf{Z},\ r\in R\}$ een ideaal. Het heet het door a voortgebrachte *hoofdideaal*. Men gaat zonder moeite na dat het door a voortgebrachte hoofdideaal het kleinste (in de zin van inclusie) ideaal is dat a bevat; we kunnen dit "kleinste" ook formuleren door op te merken dat het hoofdideaal de doorsnede is van alle idealen die a bevatten. We merken ook nog op dat indien de commutatieve ring $(R,+,\ )$ een eenheidselement heeft, het door a voortgebrachte hoofdideaal geschreven kan worden als $\{ra \mid r\in R\}$. Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring met eenheidselement. Zij $R_0\subset R$, $R_0\neq\emptyset$ dan vormt $\{r_1a_1+\ldots+r_ka_k \mid k\in\mathbf{N};\ a_1,\ldots,a_k\in R_0;\ r_1,\ldots,r_k\in R\}$ een ideaal, *het door* (de elementen van) R_0 *voortgebrachte ideaal*; notatie: (R_0). Hoofdidealen zijn dus juist de idealen die door één element worden voortgebracht.

3.8.3. STELLING. *Van een lichaam* $(R,+,\ )$ *is het nulideaal het enige echte ideaal.*

Bewijs. Stel dat een ideaal S een element a, $a\neq 0$ bevat. Dan is daar $a^{-1}\in R$, ook $aa^{-1}=e\in S$ en dus is $\{re \mid r\in R\}=R\subset S$. Dus $R=S$.

We zullen van nu af aan veronderstellen dat de beschouwde ringen commutatief zijn en een eenheidselement bezitten. De lezer die geïnteresseerd is in abstracte algebra, doet er goed aan voor zichzelf de theorie ook voor niet commutatieve ringen voort te zetten. Binnen het bestek van dit boek zullen we slechts enkele keren niet commutatieve ringen ontmoeten (nl. in 3.15.17 en 3.16.4), waarvan we de ringeigenschappen echter nauwelijks zullen benutten.
De nu volgende theorie heeft grote gelijkenis met een deel van § 3.5.

3.8.4. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatieve ring met eenheidselement, zij* $(S,+,\ )$ *een echt ideaal; we definiëren:*

$$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ [(a\equiv b \pmod S) :\Leftrightarrow (a-b\in S)].$$

We noemen deze relatie: *congruentie modulo het ideaal S.* Men verifieert onmiddellijk dat dit een equivalentierelatie is. (Dit is zelfs het geval indien S slechts een deelring en geen ideaal vormt.) We noemen de equivalentieklassen: *restklassen modulo S.* De verzameling van de restklassen noteren we R(mod S) of soms ook R/S. (In deze terminologie zouden we in plaats van $\mathbf{Z} \pmod m$ moeten zeggen $\mathbf{Z} \pmod{m\mathbf{Z}}$.) We willen nu van de verzameling van de restklassen een commutatieve ring met eenheidselement maken. Het gehele proces is volledig analoog aan 2.4.5. We voeren een notatie voor de restklassen in: $\underline{a}:=a+S:=$ $:=\{a+s \mid s\in S\}$.
We definiëren nu: $\underline{a}+\underline{b}:=\underline{a+b}$, $\underline{a}\cdot\underline{b}:=\underline{ab}$ $(a,b\in R)$.
Indien $a\equiv a' \pmod S$, $b\equiv b' \pmod S$ dan is $a+b\equiv a'+b' \pmod S$ en $ab\equiv a'b' \pmod S$ daar $ab-a'b'=(a-a')b+(b-b')a'$. Dit betekent dat de bovenstaande regels inderdaad productoperaties in R(mod S) definiëren.

3.8.5. STELLING. *Met bovenstaande notaties is* $(R \pmod S),+,\cdot)$ *een commutatieve ring met eenheidselement.*

Bewijs. Verificatie analoog aan 2.4.3.

De ring $(R \pmod S),+,\cdot)$ heet de *restklassenring* van R naar het ideaal S. Evenals factorgroepen te voorschijn kwamen bij homomorfismen van groepen, zo komen restklassenringen naar voren bij homomorfismen van ringen.

3.8.6. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatieve ring (met eenheidselement* e*);* $(R^*,\dot{+},*)$ *een commutatieve ring (met eenheidselement* e^**). Een afbeelding* $\psi:R\to R^*$ *van* R *op* R^* *heet een homomorfisme indien:*

$$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ [\ \psi(a+b)=\psi(a)\dot{+}\psi(b);\ \ \psi(ab)=\psi(a)*\psi(b)].$$

Uit deze definitie volgt op analoge wijze als voorheen: $\psi(e)=e^*$; $\psi(0)=0^*$; $\psi(-a)=-\psi(a)$ voor alle $a\in R$ (vergelijk 3.6.2).

3.8.7. VOORBEELD. Is $(S,+,\ )$ een ideaal in $(R,+,\ )$ dan is $\psi:R\to R(\mathrm{mod}\ S)$ gedefinieerd door $\forall_{a\in R}\ [\psi(a):=\underline{a}]$ een homomorfisme van $(R,+,\ )$ op $(R(\mathrm{mod}\ S),+,\cdot)$.

De lezer zal de nu volgende stelling die uitspreekt dat dit voorbeeld homomorfismen karakteriseert al wel verwachten.

3.8.8. STELLING. *Zij* ψ *een homomorfisme van* $(R,+,\ )$ *op* $(R^*,\dot{+},*)$*, dan vormt* $S:=\psi^{\leftarrow}(\{0^*\})$ *een ideaal in* $(R,+,\ )$ *en* $(R^*,\dot{+},*)$ *is isomorf met* $(R(\mathrm{mod}\ S),+,\ )$.

Het bewijs van deze stelling is van dezelfde soort als dat van 3.6.4 zij het iets langer. We laten het aan de lezer over dit bewijs te formuleren. Het ideaal $\psi^{\leftarrow}(\{0^*\})$ heet de *kern* van het homomorfisme ψ.

3.8.9. We hebben reeds een aantal idealen in $(\mathbf{Z},+,\ )$ leren kennen nl. de hoofdidealen $(m\mathbf{Z},+,\ )$ $(m\in\mathbf{N})$. Hierbij valt het op dat sommige van de restklassenringen $(\mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ m),+,\cdot)$ lichamen zijn, nl. indien m priem is, en dat de restklassenringen voor samengestelde m geen lichaam zijn. Deze opmerking is de motivering voor de nu volgende beschouwingen.

3.8.10. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatieve ring met eenheidselement. Een echt ideaal* $(S,+,\ )$ *heet een maximaal ideaal indien voor ieder echt ideaal* $(S_0,+,\ )$ *uit* $S\subset S_0$ *volgt* $S=S_0$.

We merken op dat de echte idealen in een ring met echte inclusie als ordeningsrelatie een partieel geordende verzameling vormen en dat een maximaal ideaal een maximaal element van deze geordende verzameling is (zie 2.7.5).

3.8.11. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatieve ring met eenheidselement,* $(S,+,\ )$ *een ideaal in* $(R,+,\ )$, *dan vormt* S *dan en slechts dan een maximaal ideaal indien voor elke* $a\notin S$ *het door* $\{a\}\cup S$ *voortgebrachte ideaal* R *is.*

Bewijs.
(i) Als $(\{a\}\cup S)$ een echt ideaal is, is S niet maximaal daar $S\subset(\{a\}\cup S)\subset R$, $S\neq(\{a\}\cup S)$.
(ii) Als S niet maximaal is, dan is er een echt ideaal S_0 met $S\subset S_0$, $S\neq S_0$. Neem $a\in S_0\backslash S$, dan is $S\subset(\{a\}\cup S)\subset$ $\subset S_0\neq R$.

3.8.12. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatieve ring met eenheidselement;* $(S,+,\ )$ *een ideaal in* $(R,+,\ )$.
$(R(\text{mod } S),+,\ )$ *is een lichaam dan en slechts dan indien* $(S,+,\ )$ *een maximaal ideaal is.*

Bewijs.
(i) Zij $(S,+,\ )$ een maximaal ideaal. We zullen laten zien dat $(R(\text{mod } S)\backslash\{\underline{0}\},\cdot)$ een commutatieve groep is. $\underline{e}=e+S$ is eenheidselement; we tonen nu aan dat voor iedere $a\notin S$ er een b in R is zó dat $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{e}$
Uit $a\notin S$ volgt dat $(\{a\}\cup S)=R$. Dus $e=ab+s$ voor zekere $b\in R$ en $s\in S$, maar dit betekent: $\underline{e}=\underline{ab}=\underline{a}\cdot\underline{b}$.
(ii) Neem aan dat $(R(\text{mod } S),+,\ )$ een lichaam is, en stel dat er een ideaal $(S_0,+,\ )$ is met $S\neq S_0$, $S\subset S_0$. Als $a\in S_0\backslash S$, dan is $\underline{a}\neq\underline{0}$ in $R(\text{mod } S)$. Voor iedere $c\in R$ is dus $\underline{a}\cdot\underline{x}=\underline{c}$ oplosbaar (3.4.11, 3.7.5), d.w.z. voor iedere $c\in R$ is er een $b\in R$ met $ab-c\in S$, dus $ab-c\in S_0$, dus $c\in S_0$, dus $S_0=R$, dus $(S,+,\ )$ is maximaal ideaal.

OPGAVEN

3.8.13. Bewijs dat $(m\mathbb{Z},+,\ )$ $(m>1)$ dan en slechts dan maximaal ideaal is indien m priem is.

3.8.14. Bewijs dat een echt ideaal geen reguliere elementen bevat.

3.8.15. Zij $(S,+,\ )$ een maximaal ideaal in de commutatieve ring met eenheidselement $(R,+,\ )$.
Bewijs dat uit $ab\in S$ volgt $(a\in S)\vee(b\in S)$.
Een ideaal met de eigenschap dat uit $ab\in S$ volgt $(a\in S)\vee(b\in S)$ heet een *priemideaal.*

3.8.16. Beschouw de ring uit 3.7.10. Bewijs dat voor elk element $v\in V$ de verzameling $I(\{v\}):=\{f\in \mathbf{R}^V \mid f(v)=0\}$ een maximaal ideaal vormt. Bewijs dat $(\mathbf{R}^V(\text{mod } I(\{v\})),+,\cdot)$ isomorf is met $(\mathbf{R},+,\ )$ voor elke $v\in V$.

3.8.17. Bepaal alle echte idealen en alle maximale idealen in de ringen $(\mathbf{Z},+,\ )$ en $(\mathbf{Z}(\text{mod }18),+,\ )$.

3.9. Enige bijzondere ringen

3.9.1. POLYNOOMRINGEN

Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring met eenheidselement. We beschouwen uitdrukkingen van de vorm $a_0x^0+a_1x^1+\ldots+$ $+a_nx^n$ waarbij $a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$ zijn en $x^0,\ldots,x^n$ een rij symbolen is; dergelijke uitdrukkingen noemen we polynomen of veeltermen; is $a_n\neq 0$ dan heet n de graad van het polynoom; $a_0,\ldots,a_n$ heten de coëfficiënten. De verzameling van deze polynomen geven we aan met $R[x]$. We definiëren een optelling en vermenigvuldiging voor veeltermen door:

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^k + \sum_{k=0}^{n} b_kx^k := \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)x^k,$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_kx^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_lx^l\right) := \sum_{p=0}^{m+n} c_px^p \text{ waarin}$$

$$c_p = \sum_{k+l=p} a_kb_l.$$

(De laatste som is de som van alle producten a_kb_l waarvoor $k+l=p$ is.) De vermenigvuldiging komt dus overeen met de bekende vermenigvuldiging van veeltermen met reële coëfficiënten. Met deze definities is $(R[x],+,\ )$ een ring.

Een manier om de polynoomringen in te voeren die niet gebruik maakt van de rij symbolen $x^0,\ldots,x^n,\ldots$ is de volgende. Zij $\mathbf{Z}^+=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geq 0\}$. We beschouwen

$$V := \{f\in R^{\mathbf{Z}^+} \mid \exists_{m\in\mathbf{Z}^+}\ \forall_{n>m}\ [f(n)=0]\}.$$

We definiëren voor alle $f,g\in V$:

$$\forall_{n \in \mathbf{Z}^+} [(f+g)(n) := f(n)+g(n); \ (fg)(n) :=$$

$$:= \sum_{k+l=n} f(k)g(l)] .$$

Dan is (V,+,) een ring, die isomorf is met (R[x],+,).

De polynomen van de vorm a_0x^0 vormen een deelring die isomorf is met (R,+,). We identificeren daarom a_0x^0 met a_0, d.w.z. we bedden (R,+,) in (R[x],+,) in.

OPGAVEN

3.9.2. Bewijs dat als (R,+,) een integriteitsgebied is ook (R[x],+,) een integriteitsgebied is.

3.9.3. Bewijs dat het hoofdideaal ({x}) in ($\mathbf{Z}$[x],+,) een priemideaal is, maar geen maximaal ideaal is (zie 3.8.15).

3.9.4. Bewijs dat $(\{1+x^2\})$ een maximaal ideaal is in ($\mathbf{R}$[x],+,). Definieer in $\mathbf{R}^2$ de bewerkingen + en * door:

$$\forall_{(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2} \ \forall_{(b_1,b_2) \in \mathbf{R}^2} \ [(a_1,a_2)+(b_1,b_2):=(a_1+a_2,b_1+b_2),$$

$$(a_1,a_2)*(b_1,b_2):=(a_1b_1-a_2b_2, \ a_1b_2+a_2b_1)] .$$

Bewijs dat $(\mathbf{R}^2,+,*)$ een lichaam is dat isomorf is met $(\mathbf{R}[x](\mathrm{mod}(\{1+x^2\})),+,)$.
(Alleen voor lezers die de complexe getallen kennen (zie § 4.4): bewijs dat $(\mathbf{R}^2,+,*)$ en dus $(\mathbf{R}[x](\mathrm{mod}(\{1+x^2\})),+,)$ isomorf is met ($\mathbf{C}$,+,)).

3.9.5. DEFINITIE. *Een integriteitsgebied* (R,+,) *waarin ieder ideaal hoofdideaal is (d.w.z. voortgebracht wordt door een enkel element) heet hoofdideaalring.*

3.9.6. VOORBEELD. ($\mathbf{Z}$,+,) is een hoofdideaalring. Laat S een ideaal in ($\mathbf{Z}$,+,) vormen. Als $S \neq \{0\}$ dan wordt (S,+,) voortgebracht door $\min(S \cap \mathbf{N}) =: s$. Zou er nl. $b \in S$ zijn die geen veelvoud van s is dan kunnen we schrijven $b=qs+r$ met $0<r<s$ (3.2.8), maar dan is $r=b-qs \in S$ in tegenspraak met het feit dat s het kleinste positieve getal in S is.

3.9.7. DEFINITIE. *Een integriteitsgebied* (R,+,) *heet een Euclidische ring indien er een afbeelding* $\nu : R\backslash\{0\} \to \mathbf{Z}^+$ *bestaat met de volgende eigenschappen:*

(i) $\forall_{a\in R\setminus\{0\}}\ \forall_{b\in R\setminus\{0\}}\ [\nu(ab)\geq\nu(a)]$,

(ii) $\forall_{a\in R\setminus\{0\}}\ \forall_{b\in R}\ \exists_{q\in R}\ \exists_{r\in R}\ [b=qa+r,$

$((r=0)\vee(\nu(r)<\nu(a)))]$.

VOORBEELDEN

3.9.8. $(\mathbf{Z},+,\ )$ is een Euclidische ring; we nemen $\nu(n):=|n|\ (n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\})$.

3.9.9. Als K een lichaam is dan is K[x] een Euclidische ring. De functie ν is hier de functie die aan ieder polynoom zijn graad toevoegt.

3.9.10. STELLING. *Iedere Euclidische ring is een hoofdideaalring.*

Bewijs. Vormt S een ideaal ongelijk aan het nulideaal, dan bevat S een element $s\neq 0$ waarvoor $\nu(s)$ minimaal is. Volgens (ii) geldt nu voor ieder element $b\in S$ dat b te schrijven is als $b=qs+r$ met $r=0$ of $\nu(r)<\nu(s)$, tevens is $r=b-qs\in S$. Daar $\nu(s)$ minimaal is, volgt $r=0$ en dan ook $S=(\{s\})$.

3.9.11. GEVOLG. *Als* K *een lichaam is, is* K[x] *hoofdideaalring.*

3.9.12. Zij $(R,+,\ )$ een integriteitsgebied. We zeggen a *is een deler van* b (notatie: $a|b$), indien $\exists_{r\in R}\ [ra=b]$ $(a,b\in R)$.
Als er een element c bestaat zó dat $c|a$, $c|b$ en uit $d|a$ en $d|b$ volgt $d|c$ dan zeggen we dat c een grootste gemene deler van a en b is. We merken op dat volgens de bovenstaande definitie de grootste gemene deler niet eenduidig bepaald is. Is u een regulier element van $(R,+,\ )$ en is c een g.g.d. van a en b, dan is ook cu een g.g.d. van a en b; omgekeerd zijn c_1 en c_2 beide g.g.d. van a en b, dan is er een regulier element u met $c_1=c_2u$.

3.9.13. OPGAVE. Bewijs dat in een hoofdideaalring $(R,+,\ )$ elk tweetal elementen, a en b, niet beide gelijk aan 0 een g.g.d., c, heeft waarvoor geldt: $c=d_1a+d_2b$ voor zekere $d_1,d_2\in R$.

3.9.14. OPGAVE. Formuleer en verifieer de algoritme van Euclides ter bepaling van een eventuele grootste gemene deler van twee elementen in een willekeurige Euclidische ring (zie 3.2.6).

3.9.15. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een integriteitsgebied;* $a \in R$. *Een element* $b \in R$ *heet geassocieerd met* a *indien* $b=au$, *met* u *regulier. Een deler van* a *die niet regulier is, en niet geassocieerd met* a *heet een echte deler van* a.
Een element $p \neq 0$, *dat niet regulier is en geen echte delers heeft heet een priemelement, of irreducibel element.*

Uitgaande van deze definities kan men in integriteitsgebieden een ontbindingstheorie ontwikkelen. We zeggen dat een integriteitsgebied een *factorontbindingsring* is indien elk niet regulier element dat ongelijk aan 0 is, te schrijven is als een product van priemelementen, en als deze schrijfwijze eenduidig is op de volgorde der factoren en op reguliere factoren na. Het belangrijkste resultaat van de ontbindingstheorie is de stelling dat iedere hoofdideaalring een factorontbindingsring is. We verwijzen de geïnteresseerde lezer naar [27] (§ 22).

3.10. Lichamen

3.10.1. Zij $(R,+,\ )$ een lichaam (zie 3.7.13). De doorsnede van een willekeurig aantal deellichamen (3.7.15) van $(R,+,\ )$ is weer een deellichaam. We beschouwen de doorsnede van alle deellichamen van het lichaam $(R,+,\ )$; dit is het kleinste (in de zin van inclusie) lichaam dat in $(R,+,\ )$ bevat is. We noemen het het *priemlichaam* van $(R,+,\ )$. Als $(P,+,\ )$ dit priemlichaam is dan zijn zeker $0 \in P$ en $e \in P$.

3.10.2. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een lichaam;* $(P,+,\ )$ *zijn priemlichaam. Nu geldt: òf er is een priemgetal* p *zodat* $(P,+,\ )$ *isomorf is met* $(\mathbf{Z}(\text{mod } p),+,\cdot)$, *òf* $(P,+,\ )$ *is isomorf met* $(\mathbf{Q},+,\ )$.

Bewijs. Zij $Z := \{ne \mid n \in \mathbf{Z}\}$ dan is $Z \subset P$. $(Z,+,\ )$ is een commutatieve ring, $(ne+me=(n+m)e,\ (ne)(me)=(nm)e)$ met eenheidselement, en de afbeelding $\psi : \mathbf{Z} \to Z$ gedefinieerd door $\psi(n) := ne\ (n \in \mathbf{Z})$ is een ringhomomorfisme van $(\mathbf{Z},+,\ )$ op $(Z,+,\ )$. Volgens 3.8.8 is $(Z,+,\ )$ dus isomorf met een restklassenring van $(\mathbf{Z},+,\ )$ naar een ideaal, de kern van het homomorfisme. Volgens 3.9.6 is dit ideaal een hoofdideaal: het is van de vorm $k\mathbf{Z}$ met $k \in \mathbf{Z}^+$. We onderzoeken nu welke waarden k kan hebben.
Het is mogelijk dat $k=0$ (d.w.z. uit $n \neq m$ volgt $ne \neq me$), dan is $(Z,+,\ )$ isomorf met $(\mathbf{Z},+,\ )$ en dus een integriteitsgebied. In dit geval leert 3.7.20 dat $(P,+,\ )$ isomorf is met $(\mathbf{Q},+,\ )$.
Het is niet mogelijk dat $k=1$; dan zou immers $0=e$. Het is evenmin mogelijk dat k niet priem is, want als $k=nm$ met $n<k$ en $m<k$, dan zou in Z en in R dus ook gel-

den $(ne)(me)=0$, terwijl $ne \neq 0$, $me \neq 0$, maar een lichaam bezit geen nuldelers. Tenslotte merken we op dat als k wel een priemgetal is $(\mathbf{Z}(\text{mod } k),+,\ )$ zelf een lichaam is. Het is dan ook isomorf met $(P,+,\ )$.

Uit deze stelling volgt dus in het bijzonder dat het priemlichaam van ieder lichaam commutatief is.

3.10.3. DEFINITIE. *Het getal* k *uit het bewijs van* 3.10.2 *heet de karakteristiek van het lichaam* $(R,+,\ )$.

Het rekenen in lichamen van karakteristiek $\neq 0$, zal enige moeilijkheden voor de beginner met zich mee brengen.

3.10.4. OPGAVE. Zij $(R,+,\ )$ een commutatief lichaam met karakteristiek p, $p>0$.

(a) Bewijs dat uit $na=ma$ voor zekere $n,m \in \mathbf{Z}$, $a \in R$, $a \neq 0$ volgt dat $n \equiv m (\text{mod } p)$.

(b) Bewijs dat $\forall_{a \in R}\ \forall_{b \in R}\ [(a+b)^p = a^p + b^p]$.

3.10.5. Zij $(R,+,\ )$ een lichaam; $(S,+,\ )$ een echt deellichaam, dan noemt men $(R,+,\ )$ een *uitbreiding* van $(S,+,\ )$. Zij $S_0 \subset R \backslash S$, dan is de doorsnede van alle deellichamen die $S \cup S_0$ bevatten het kleinste lichaam dat $S \cup S_0$ bevat; we noteren dit kleinste lichaam $(S(S_0),+,\ )$. Dit lichaam is een uitbreiding van $(S,+,\ )$, we zeggen dat het uit $(S,+,\ )$ ontstaat door *adjunctie* (of *lichaamsadjunctie*) van de elementen van S_0. In de theorie der lichamen en in die der algebraïsche vergelijkingen speelt lichaamsadjunctie een belangrijke rol. We onderscheiden *algebraïsche uitbreidingen* en *transcendente uitbreidingen*. $(S(S_0),+,\ )$ heet algebraïsch t.o.v. $(S,+,\ )$ als ieder element s_0 van S_0 algebraïsch t.o.v. S is, d.w.z. dat er een polynoom $p(x)$ in $S[x]$ bestaat zó dat $p(s_0)=0$. Is de uitbreiding niet algebraïsch dan noemen we deze transcendent. Als voorbeelden vermelden we dat $(\mathbf{Q}(\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}),+,\ )$ een algebraïsche uitbreiding van $(\mathbf{Q},+,\ )$ is en $(\mathbf{Q}(\{\pi,\sqrt{2}\}),+,\ )$ een transcendente uitbreiding. We bekijken nu alleen het geval dat S_0 bestaat uit één enkel element; in dat geval spreken we van een *enkelvoudige uitbreiding*. Bovendien nemen we aan dat alle lichamen commutatief zijn. Het bewijs van de volgende stelling heeft zekere gelijkenis met dat van 3.10.2; ieder lichaam is immers een uitbreiding van zijn priemlichaam (zie ook 3.20.1 en volgende).

3.10.6. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatief lichaam,* $(S,+,\ )$ *een echt deellichaam;* $s \in R \backslash S$. *Nu geldt: òf er is in* $S[x]$ *een onontbindbare veelterm* $k(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$,

$a_0 \in S, \ldots, a_n \in S$, $a_n \neq 0$, *waarvoor geldt* $k(s)=0$ *en* $(S(\{s\}),+,\ )$ *is isomorf met* $(S[x](\mathrm{mod}(\{k(x)\})),+,\cdot)$ *òf voor elk polynoom* $f(x)$ *in* $S[x]$ *is* $f(s)\neq 0$. *In het laatste geval bestaat* $S(\{s\})$ *uit alle uitdrukkingen* $f(s)(g(s))^{-1}$, *waarbij* $f(x)$ *en* $g(x)$ *elementen van* $S[x]$ *zijn en waarmee gerekend wordt als met rationale functies.*

Bewijs. (Vergelijk 3.10.2.) $S(s):=\{a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n \mid n \in \mathbf{Z}^+, a_0 \in S, \ldots, a_n \in S\}$ is zeker bevat in $S(\{s\})$. $(S(s),+,\ )$ is een commutatieve ring met eenheidselement. De afbeelding $\psi: S[x] \to S(s)$ gedefinieerd door $\psi(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n):=a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n$ is een ringhomomorfisme van het integriteitsgebied $(S[x],+,\ )$ op $(S(s),+,\ )$. De kern van dit homomorfisme is een ideaal in $S[x]$. Volgens 3.9.11 is dit ideaal in $S[x]$ een hoofdideaal; het is dus van de vorm $k(x)S[x]$. We onderzoeken nu wat $k(x)$ zijn kan. Het is mogelijk dat $k(x)=0(=0+0x+\ldots+0x^n)$, dan is $a_0+a_1s+\ldots+a_ns^n$ alleen gelijk aan 0 indien $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$. $(S(s),+,\ )$ is dan isomorf met het integriteitsgebied $(S[x],+,\ )$. In dit geval leert 3.7.19 dat $(S(\{s\}),+,\ )$ isomorf is met het quotiëntenlichaam van $(S[x],+,\ )$. We hebben te maken met een enkelvoudige transcedente uitbreiding. Het is nu zeer eenvoudig in te zien dat elk element van $S(\{s\})$ inderdaad geschreven kan worden als $f(s)(g(s))^{-1}$. Het is niet mogelijk dat $k(x)S[x]=S[x]$ dus dat $k(x)=a_0\neq 0$, want dan zou $\psi(e)=0$ hetgeen onmogelijk is. Het is evenmin mogelijk dat $k(x)$ ontbindbaar is in twee polynomen van lagere doch positieve graad, want als $k(x)=m(x)n(x)$, $0 <$ graad $m(x) <$ graad $k(x)$, $0 <$ graad $n(x) <$ graad $k(x)$ dan zou in R: $m(s)n(s)=0$, $m(s)\neq 0$, $n(s)\neq 0$, hetgeen onmogelijk is. Tenslotte merken we op dat als $k(x)$ wel een onontbindbaar polynoom is $(S[x](\mathrm{mod}(\{k(x)\})),+,\cdot)$ zelf een lichaam is en derhalve isomorf met $(S(\{s\}),+,\ )$.

In het laatste geval hebben we te maken met een enkelvoudige algebraïsche uitbreiding; $k(x)=0$ heet een definiërende vergelijking van deze uitbreiding.

3.10.7. VOORBEELD. $(\mathbf{C},+,\ )$ is een enkelvoudige algebraische uitbreiding van $(\mathbf{R},+,\ )$ met definiërende vergelijking $x^2+1=0$ (zie 3.9.4).

3.10.8. OPGAVE

(a) Bewijs dat in het geval van een enkelvoudige algebraïsche uitbreiding, $(S(\{s\}),+,\ )$, de in 3.10.6

gevonden veelterm $p(x)$ een polynoom is van de laagste graad waarvoor $p(s)=0$. Laat de graad van $p(x)$ gelijk n zijn; n heet dan ook de graad van de uitbreiding.

(b) Bewijs dat ieder element van $S(\{s\})$ eenduidig te schrijven is als $a_0+a_1s+\ldots+a_{n-1}s^{n-1}$ met $a_0\in S$, ..., $a_{n-1}\in S$ (zie 3.20.2).

(c) Zij $f(x)$ een veelterm in $S[x]$ waarvoor geldt $f(s)=0$. Bewijs dat $f(x)$ in $S(\{s\})[x]$ deelbaar is door $(x-s)$.

3.10.9. De voorafgaande beschouwing ging er van uit dat we een element van een lichaam $(R,+,\ )$ aan een deellichaam $(S,+,\ )$ adjungeerden; in de praktijk wil men echter een proces toepassen, dat het lichaam $(S,+,\ )$ uitbreidt zonder dat we van te voren weten dat we binnen een lichaam $(R,+,\ )$ blijven. Uit het bovenstaande blijkt dat we dat kunnen doen door de restklassenring van $(S[x],+,\ )$ naar een maximaal ideaal (dus voortgebracht door een irreducibel polynoom van positieve graad) te beschouwen, of door het quotiëntenlichaam van $(S[x],+,\ )$ te nemen. Het is mogelijk beide gevallen te beschrijven als verkregen door *symbolische adjunctie* van één enkel element.

OPGAVEN

3.10.10. Bewijs dat $(\mathbf{Q}(\{\sqrt{2}\}),+,\ )$ isomorf is met $(\mathbf{Q}(\{-\sqrt{2}\}),+,\ )$.

3.10.11. Bewijs dat $(\mathbf{R}[x](\mathrm{mod}(\{x^2+x+1\})),+,\ )$ een enkelvoudige algebraïsche uitbreiding is van $(\mathbf{R},+,\ )$. Geef een element $s\in\mathbf{C}$ zodanig dat $(\mathbf{R}(\{s\}),+,\ )$ isomorf is met dit lichaam.

3.10.12. We besluiten deze paragraaf met enige opmerkingen over eindige lichamen. Men kan bewijzen (maar wij op dit moment niet) dat alle eindige lichamen commutatief zijn. Men noemt een eindig lichaam ook wel Galois lichaam, (in het engels: Galois Field, afkorting GF).
Het priemlichaam van een eindig lichaam is uiteraard eindig, dus een eindig lichaam heeft positieve karakteristiek. Zij de karakteristiek: p; in 3.20.5 zullen we zien dat er dan een $n\in\mathbf{N}$ en elementen $a_1,\ldots,a_n$ bestaan zodanig dat ieder element d van het eindige lichaam eenduidig geschreven kan worden als: $d=c_1a_1+\ldots+c_na_n$ waarbij $c_1,\ldots,c_n$ elementen zijn van het priemlichaam dat isomorf is met $GF(p):=(\mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ p),+,\cdot)$. Hieruit volgt:

3.10.13. STELLING. *Het aantal elementen van een eindig lichaam is een macht van de karakteristiek.*

3.10.14. We vermelden zonder bewijs nog een tweetal eigenschappen van eindige lichamen (de geïnteresseerde lezer zij verwezen naar [27] (§ 40)).

(i) Alle lichamen met n elementen zijn isomorf. Als er een eindig lichaam is met n elementen noteren we dit met GF(n).

(ii) Alle elementen $\neq 0$ van GF(n) (indien dit bestaat) zijn machten van éénzelfde element, geheten primitief element, d.w.z. de multiplicatieve groep van GF(n) is cyclisch (van de orde n-1).

3.10.15. VOORBEELD. Als f(x) een irreducibel polynoom is van de graad m in GF(p)[x], dan is (GF(p)[x](mod ({f(x)})),+,) een lichaam met p^m elementen, dus GF(p^m). Zo krijgt men GF(2^4) als de restklassenring van GF(2)[x] naar het ideaal voortgebracht door x^4+x+1 (de lezer verifiëre dat dit polynoom in GF(2)[x] onontbindbaar is). Ook kunnen we volgens 3.10.9 GF(2^4) verkrijgen door symbolische adjunctie van een element (we noemen het maar weer x) dat voldoet aan $x^4+x+1=0$. In dit geval blijkt x het primitieve element uit 3.10.14 en $x^{15}=1$. Zo vinden we als elementen van GF(2^4):

$0,\ x^0=1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4=x+1,\ x^5=x^2+x,\ x^6=x^3+x^2,$

$x^7=x^3+x+1,\ x^8=x^2+1,\ x^9=x^3+x,\ x^{10}=x^2+x+1,\ x^{11}=x^3+x^2+x,$

$x^{12}=x^3+x^2+x+1,\ x^{13}=x^3+x^2+1,\ x^{14}=x^3+1.$

Als nevenresultaat zien we dat in GF(2)[x] ieder irreducibel polynoom van de graad 4 (of n) deler is van $x^{15}+1$ (of $x^{2^n-1}+1$).
Merk verder op dat elk irreducibel polynoom p van de graad 4 in GF(2)[x] in het lichaam GF(2^4)[x] te ontbinden is in 4 factoren van de eerste graad.

OPGAVEN

3.10.16. Toon aan dat x^2+1 in GF(3)[x] irreducibel is. We nemen (GF(3)[x](mod({x^2+1})),+,) als model van GF(9). Bepaal in dit geval een primitief element α van GF(9). Toon aan dat in GF(3)[x] het polynoom x^4+1 product is van twee irreducibele polynomen en dat α nulpunt is van één van deze polynomen.

3.10.17. Zij α primitief element van GF(27). Bewijs dat $(x-\alpha^2)(x-\alpha^6)(x-\alpha^{18})$ een polynoom is in GF(3)[x] en dat dit polynoom een irreducibele factor van $1+x+x^2+\ldots+x^{12}$ is.

3.10.18. Bepaal een uitbreiding van GF(2) waarin het polynoom x^5+x^2+1 vijf nulpunten heeft.

3.11. Lineair geordende commutatieve lichamen

De fundering van het getalbegrip *in hoofdstuk* 4 zal gebruik maken van commutatieve lichamen, die tevens lineair geordende verzamelingen zijn. We definiëren ordening in lichamen door aan te geven wat "positieve" elementen zijn.

3.11.1. DEFINITIE. *Een commutatief lichaam* $(R,+,\ )$ *heet geordend als er een deelverzameling* $P\subset R$ *is aangewezen met de volgende eigenschappen:*

$(O1^*)$ $\qquad \forall_{x\in P}\ \forall_{y\in P}\ [x+y\in P]$,

$(O2^*)$ $\qquad \forall_{x\in P}\ \forall_{y\in P}\ [xy\in P]$,

$(O3^*)$ $\qquad \forall_{x\in R}\ [(x\in P)\Rightarrow(-x\notin P)]$,

$(O4^*)$ $\qquad \forall_{x\in R}\ [(x=0)\vee(x\in P)\vee(-x\in P)]$.

De elementen van P heten positief. We zien dat steeds $e\in P$ is. We definiëren de relatie $<$ door:

$$\forall_{x\in R}\ \forall_{y\in R}\ [(x<y):\Leftrightarrow(y-x)\in P].$$

Nu geldt:

3.11.2. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een geordend lichaam, dan is* $(R,<)$ *een lineair geordende verzameling.*

Bewijs. We verifiëren (O1), (O2) en (O3) uit § 2.6. De transitiviteit van de relatie $<$ volgt uit $(O1^*)$. De antireflexiviteit volgt uit $(O3^*)$ waaruit we immers meteen concluderen $0\notin P$. Uit $(O4^*)$ volgt (O3) zonder moeite.

3.11.3. VOORBEELDEN. $(\mathbf{R},+,\ ,<)$ en $(\mathbf{Q},+,\ ,<)$ zijn (lineair) geordende (commutatieve) lichamen. We zullen ze voortaan aanduiden met $\mathbf{R}$ en $\mathbf{Q}$ en de rest weglaten.

3.11.4. We merkten reeds op dat $e\in P$, dus $e+e\in P$ enz., daar $0\notin P$ betekent dit dat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [ne\neq 0]$. Volgens 3.7.20 bevat ieder geordend lichaam dus $(\mathbf{Q},+,\ )$ als deellichaam (op isomorfie na). Men gaat gemakkelijk na dat $\mathbf{Q}$ ook ordeningsisomorf in ieder geordend lichaam ingebed is. (Merk op dat ook het integriteitsgebied $(\mathbf{Z},+,\ )$ isomorf in $(R,+,\ )$ ingebed is.) Op grond van deze inbedding kunnen we notaties als $\frac{1}{n}e$ gebruiken.

3.11.5. In ieder geordend lichaam heeft men het begrip *interval*.

$(a,b) := \{x\in R \mid a<x<b\}$, $(a,b] := \{x\in R \mid a<x\leq b\}$, enz.

3.11.6. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ ,<)$ *een geordend lichaam*, P *de verzameling der positieve elementen. De absolute waarde*, $|\ |$, *is een afbeelding van* R *in* $P\cup\{0\}$ *zodat:*

$$|a| := \begin{cases} a \text{ als } a\in P, \\ -a \text{ als } a\notin P. \end{cases}$$

3.11.7. OPGAVE. Zij $(R,+,\ ,<)$ een geordend lichaam. Bewijs voor alle $a,b,c\in R$.

(i) $|a| = |-a|$,

(ii) $|ab| = |a||b|$,

(iii) als $a<c<b$, dan $|c|<\max\{|a|,|b|\}$,

(iv) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (driehoeksongelijkheid),

(v) $|a+b|=|a|+|b|$ dan en slechts dan als $(a=0)\vee(b=0)\vee(ab>0)$.

3.11.8. DEFINITIE. *Het geordende lichaam* $(R,+,\ ,<)$ *heet archimedisch geordend indien:*

$$\forall_{a\in R}\ \exists_{n\in \mathbf{N}}\ [ne>a].$$

Gevolgen: $\forall_{a\in R}\ \exists_{n\in\mathbf{N}}\ [-ne<a]$,

$$\forall_{a\in R,a>0}\ \exists_{n\in\mathbf{N}}\ [\tfrac{1}{n}e<a].$$

Als voorbeelden noemen we $\mathbf{R}$ en $\mathbf{Q}$. Is een lichaam niet archimedisch geordend dan zijn er elementen die groter dan ieder element $re\,(r\in\mathbf{Q})$ zijn, en ook elementen die groter dan 0 zijn maar kleiner dan alle $re\,(r\in\mathbf{Q},r>0)$.

3.12. Boole algebra

3.12.1. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een ring (niet noodzakelijk commutatief). Een element* $a\in R$ *heet idempotent indien* $a^2=a$.

Als de ring een eenheidselement heeft is dit een idempotent element; 0 is idempotent. In $(P(V),\div,\cap)$ is elk element idempotent; in $(\mathbf{Z},+,\ )$ zijn alleen 0 en 1 idempotent.

3.12.2. DEFINITIE. *Een Boole ring is een ring met eenheidselement waarvan elk element idempotent is.*

Een voorbeeld van een Boole ring is $(P(V),\div,\cap)$ (we nemen steeds $V\neq\emptyset$) (zie 3.7.11); een ander voorbeeld is GF(2).

3.12.3. VOORBEELD. Indien we in $(GF(2))^V$ definiëren (n.b. $V\neq\emptyset$):

$$\forall_{x\in V}\ [\,(f+g)(x):\equiv f(x)+g(x)\ (\mathrm{mod}\ 2);$$
$$(f\cdot g)(x):\equiv f(x)\cdot g(x)\ (\mathrm{mod}\ 2)\,]$$

voor alle $f,g\in(GF(2))^V$ dan is $((GF(2))^V,+,\cdot)$ een Boole ring die isomorf is met $(P(V),\div,\cap)$, (vergelijk § 1.25, 2.4.10, 2.6.30, 3.4.10, 3.7.11).

EIGENSCHAPPEN

3.12.4. Zij $(R,+,\ )$ een Boole ring; dan geldt voor iedere $a\in R$: $a+a=0$.

Bewijs. $a+a=(a+a)^2=a^2+a^2+a^2+a^2=a+a+a+a$. Dus $a+a=0$.

3.12.5. Iedere Boole ring is commutatief.

Bewijs. Laat a, b elementen van een Boole ring zijn. Dan is $a+b=(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b$. Dus $ab+ba=0$. Wegens 3.12.4 is ook $ab+ab=0$; derhalve $ab=ba$.

3.12.6. We zullen nu definiëren wat men onder een Boole algebra verstaat; het zal blijken dat iedere Boole algebra op eenvoudige wijze in een Boole ring getransformeerd kan worden en omgekeerd.

DEFINITIE. *Een Boole algebra is een verzameling* B *waarin aangegeven zijn twee elementen* 0 *en* e, *twee productoperaties* $\wedge$ *en* $\vee$ *en een afbeelding* $\phi:B\to B$ *geheten complementering (we noteren* $\phi(b)=:b^*$) *zodat voor alle* $a,b,c\in B$ *voldaan is aan:*

(1) $0^*=e$ $\qquad e^*=0$

(2) $a\wedge 0=0$ $\qquad a\vee e=e$
(0 *heet nulelement van* $\wedge$, e *heet nulelement van* $\vee$)

(3) $a\wedge e=a$ $\qquad a\vee 0=a$
(e *is eenheidselement van* $\wedge$, 0 *is eenheidselement van* $\vee$)

(4) $a\wedge a^*=0$ $\qquad a\vee a^*=e$

(5) $(a^*)^*=a$

(dualiteit: (4), (5) *en* (6) *samen)*

(6) $(a\wedge b)^*=a^*\vee b^*$ $\qquad$ $(a\vee b)^*=a^*\wedge b^*$ *(dualiteit)*

(7) $a\wedge a=a$ $\qquad$ $a\vee a=a$ *(idempotentie)*

(8) $a\wedge b=b\wedge a$ $\qquad$ $a\vee b=b\vee a$ *(commutativiteit)*

(9) $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ $\qquad$ $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$ *(associativiteit)*

(10) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ $\qquad$ $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ *(distributiviteit)*

Men kan met een veel kleinere collectie eisen volstaan en de overige daaruit afleiden, maar dat is voor ons thans van geen belang.

3.12.7. VOORBEELD. Als $V\neq\emptyset$, dan is $(P(V),\cup,\cap,^*)$ een Boole algebra met $e:=V$, $0:=\emptyset$.

Het gemak van het werken met Boole algebra's in plaats van met Boole ringen is het dualiteitsbeginsel (zie § 1.11). Vanuit het standpunt van de algebra zijn de ringen simpeler zoals een enkele blik op de definities al doet zien. De lezer denke steeds aan het voorbeeld $(P(V),\cup,\cap,^*,\emptyset,V)$.

3.12.8. STELLING. *Zij* $(B,\vee,\wedge,^*,0,e)$ *een Boole algebra. We definiëren* $a+b:=(a\wedge b^*)\vee(b\wedge a^*)$ $(a,b\in B)$. *Dan is* $(B,+,\wedge)$ *een Boole ring met* 0 *als nulelement en* e *als eenheidselement.*

Bewijs. Verificatie. De lezer zal merken dat + analoog is aan het symmetrische verschil van verzamelingen. Hij kan dus desgewenst zijn bewijs dat $(P(V),\div,\cap)$ een Boole ring is copiëren. Ook het bewijs van de volgende stelling is geduldige verificatie.

3.12.9. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een Boole ring met eenheidselement* e. *We definiëren voor alle* $a,b\in R$:

$$a\wedge b:=ab;\qquad a\vee b:=a+b+ab;\qquad a^*:=e+a.$$

Dan is $(R,\vee,\wedge,^*,0,e)$ *een Boole algebra.*

In § 2.8 hebben we, als toepassing van partieel geordende verzamelingen, tralies bekeken. We laten de verificatie van de beide volgende stellingen die uitspreken dat elk Boole tralie tot een Boole algebra gemaakt kan worden en omgekeerd aan de lezer over. (Vergelijk ook 3.4.10.)

3.12.10. STELLING. *Zij* $(X,\leq)$ *een Boole tralie (zie* 2.8.26). *We definiëren voor alle* $x,y\in X$:

$x\vee y:=\sup\{x,y\}$, $\qquad$ x^*: *het complement van* x,

$x\wedge y:=\inf\{x,y\}$, $\qquad$ $0:=\min X$,

$$e:=\max X.$$

Dan is $(X,\vee,\wedge,^*,0,e)$ *een Boole algebra.*

3.12.11. STELLING. *Zij* $(B,\vee,\wedge,^*,0,e)$ *een Boole algebra. We definiëren voor alle* $a,b\in B$:

$$(a<_\circ b) :\Leftrightarrow (a\wedge b=a \text{ en } a\neq b).$$

Dan is $(B,<_\circ)$ *een Boole tralie waarin* $\min B = 0$, $\max B = e$. $\inf\{a,b\}=a\wedge b$, $\sup\{a,b\}=a\vee b$ *en het complement van* a *is* a^*.

3.12.12. De begrippen Boole deelalgebra, Boole deelring, en isomorfie van Boole algebras en Boole ringen zijn zo voor de hand liggend dat we ze niet zullen formuleren. De fundamentele representatiestelling van Boole ringen (algebras) is de stelling dat iedere Boole ring (algebra) voor zekere verzameling V isomorf is met een Boole deelring van $(P(V),\dot{-},\cap)$ (Boole deelalgebra van $(P(V),\cup,\cap,^*,\emptyset,V)$. Het valt echter ver buiten het bestek van dit boek een bewijs van deze stelling te geven. We zullen slechts een bewijs geven voor het geval dat de Boole ring $(R,+,\ )$ eindig is. Deze representatiestelling onderstreept nogmaals het belang van het werken met verzamelingen en van het rekenen modulo 2.

3.12.13. Niet zonder reden kozen we voor de bewerkingen in een Boole algebra dezelfde symbolen als voor en en of in de logica. In 1.18.19 merkten we op dat er analogie bestaat tussen de en $(\wedge)$ en of $(\vee)$ uit de logica en $\cap$ en $\cup$ uit de verzamelingenleer. We kunnen deze analogie nu volkomen doorzien. Zij V een verzameling van propositieveranderlijken $V=\{p,q,\ldots,r\}$. We nemen gemakshalve aan dat V eindig is, zeg n elementen heeft. Zij W de verzameling van alle propositievormen opgebouwd met de veranderlijken $p,q,\ldots,r$, de symbolen $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ en haakjes. (We kunnen de andere logische symbolen in $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ uitdrukken; zo is voor propositievormen L en M de vorm $L\Rightarrow M$ een afkorting van $\neg(L\vee M)$.) Voor de elementen van W definiëren we een equivalentierelatie: we zeggen L gelijkwaardig met R als $L\Leftrightarrow R$ een steeds ware propositievorm is (zie 1.18.5). In de verzameling van de equivalentieklassen van deze relatie (we noteren de klasse waarin L ligt met $\underline{L}$; de verzameling van klassen heet $\underline{W}$), definiëren we $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ door $\underline{L}\wedge\underline{M} := \underline{L\wedge M}$; $\underline{L}\vee\underline{M}:=\underline{L\vee M}$; $\neg\underline{L}:=\underline{\neg L}$. Op dezelfde wijze als in § 2.4 zouden we moeten laten zien dat deze definities onafhankelijk zijn van de gekozen representanten. We noemen de klasse van alle steeds ware propositievormen $\underline{1}$ en de klasse van alle nooit ware propositievormen $\underline{0}$. We hebben nu:

3.12.14. STELLING. $(\underline{W},\vee,\wedge,\neg,\underline{0},\underline{1})$ *is een Boole algebra die isomorf is met* $(P(P(V)),\cup,\cap,^*,\emptyset,P(V))$.

Bewijs. We gebruiken waarheidstafels (1.18.2). Omdat V uit n elementen bestaat zijn er 2^n verschillende wijzen om aan elk van de veranderlijken $p,q,\ldots,r$ de waarde 0 of 1 toe te kennen. Merk op dat elk van deze 2^n mogelijkheden eenduidig correspondeert met een deelverzameling van V. Met iedere klasse uit $\underline{W}$ correspondeert in de waarheidstafel een kolom van 2^n nullen en enen. Deze kolommen zijn op te vatten als karakteristieke functies van elementen van P(P(V)); zo'n kolom is namelijk de karakteristieke functie van die deelverzameling van P(V) die bestaat uit de deelverzamelingen van V die corresponderen met de rijen waar in de kolom een 1 staat. Ter voltooiing van het bewijs merken we op dat de kolommen van $\underline{L}\vee\underline{M}$, $\underline{L}\wedge\underline{M}$ en $\neg\underline{L}$ uit die van $\underline{L}$ en $\underline{M}$ ontstaan op dezelfde wijze als karakteristieke functies berekend worden, namelijk door componentsgewijze optelling, vermenigvuldiging en complementering modulo 2. Zo hebben we bewezen dat $(\underline{W},\vee,\wedge,\neg,\underline{0},\underline{1})$ isomorf is met de Boole algebra gevormd door de karakteristieke functies op P(V) met waarden in GF(2). $\underline{W}$ vormt dus zelf een Boole algebra. De algebra van de karakteristieke functies is isomorf met die gevormd door P(P(V)). (3.12.8, 3.12.9 en 3.12.3).

3.12.15. We zullen ons voor de verdere bestudering van het "Boole rekenen" bedienen van de taal van de Boole ring. De liefhebber van een andere taal zal zonder moeite alle begrippen en beweringen kunnen omzetten in de taal der Boole algebra of in die van het Boole tralie. We zullen ons allereerst bezighouden met de eigenschappen van maximale idealen van een Boole ring.

3.12.16. STELLING. *Zij* (R,+,) *een Boole ring;* (S,+,) *een echt ideaal in* (R,+,). *De volgende beweringen zijn nu gelijkwaardig.*

(α) *Als* $xy\in S$ *dan* $(x\in S)\vee(y\in S)$ *m.a.w.* S *vormt een priemideaal.*

(β) $\forall_{x\in R}\,[(x\in S)\vee((e+x)\in S)]$.

(γ) S *vormt een maximaal ideaal.*

Bewijs. (i) Zij gegeven (α), zij $x\in R$, dan is $x(e+x)=0$, dus $x\in S$ of $(e+x)\in S$. Uit (α) volgt dus (β).
(ii) Zij gegeven (β); laat $S_0\supset S$, $S_0\neq S$ en laat S_0 een ideaal vormen; zij $a\in S_0\setminus S$, dan is $(e+a)\in S$, dus $(e+a)\in S_0$. Maar dan is $e=e+a+a\in S_0$, dus $S_0=R$, dus S vormt een maximaal ideaal, en uit (β) volgt (γ).
(iii) Zij gegeven (γ); zij $xy\in S$, $x\notin S$. Daar S maximaal is brengen x en S als ideaal de hele ring voort (3.8.11). Dus $e=ax+s$ voor zekere $a\in R$ en $s\in S$, maar dan is $y=axy+sy\in$ $\in S$. Uit (γ) volgt dus (α).

3.12.17. STELLING. *Zij* $(S,+,\ )$ *een echt ideaal in de Boole ring* $(R,+,\ )$, *dan is de restklassenring* $(R(\mathrm{mod}\ S),+,\ )$ *een Boole ring.*

Bewijs. Eenvoudige verificatie; is bijv. $a+S$ een restklasse, dan is in $R(\mathrm{mod}\ S)$: $(a+S)^2=a^2+S=a+S$.

3.12.18. STELLING. *Een ideaal in een Boole ring is dan en slechts dan maximaal indien de restklassenring isomorf is met* GF(2).

Bewijs. (i) We merken op dat GF(2) de enige Boole ring is die geen nuldelers heeft. Voor een element x met $0\neq x\neq e$ in een Boole ring geldt nl. $x(e+x)=x+x=0$. Als de restklassenring $(R(\mathrm{mod}\ S),+,\ )$ nuldelers heeft, betekent dit dat voor zekere x en y geldt $xy\in S$, $x\notin S$, $y\notin S$, dus dat S niet maximaal is wegens 3.12.16.(ii) Als de restklassenring GF(2) is, dan is voor het bij S horende homomorfisme f van $(R,+,\ )$ op GF(2) voor iedere $x\in R$: $1=f(e)=f(e+x+x)=f(e+x)+f(x)$. Omdat f alleen de waarde 0 of 1 aanneemt volgt hieruit dat $f(e+x)=0$ of $f(x)=0$ dus $(x\in S)\vee((e+x)\in S)$, dus S maximaal.

3.12.19. STELLING. *Zij* $(R,+,\ )$ *een* <u>*eindige*</u> *Boole ring. Ieder element dat ongelijk aan* e *is, is bevat in een maximaal ideaal.*

Bewijs. Zij $x\neq e$. Beschouw het hoofdideaal $(\{x\})$. Is dit maximaal dan zijn we klaar, anders is er een echt echt-omvattend ideaal. Is dit omvattende ideaal maximaal dan zijn we klaar, anders is er een echt echt-omvattend ideaal, enz. Omdat het ideaal steeds meer elementen bevat en het totaal aantal elementen eindig is, komen we na eindig veel stappen tot een maximaal ideaal.

Het bewijs van de met 3.12.19 overeenkomende stelling voor oneindige Boole ringen valt buiten de opzet van dit boek.

3.12.20. GEVOLG. *Zij* $(R,+,\ )$ *een eindige Boole ring,* $x\in R$, $x\neq 0$, *dan is er een homomorfisme* f *van* $(R,+,\ )$ *op* GF(2) *waarvoor* $f(x)=1$.

Bewijs. $e+x\neq e$, dus er is een maximaal ideaal dat $e+x$ bevat en x dus niet bevat; het homomorfisme waarvan dit de kern is voldoet.

3.12.21. We zullen nu de eindige Boole ring $(R,+,\ )$ in verband brengen met $(P(V),\div,\cap)$ waarbij V *de verzameling is van alle homomorfismen van* $(R,+,\ )$ *op* GF(2). We definiëren $\phi:R\to P(V)$ door te stellen:

$$\phi(x) := \{f\in V \mid f(x)=1\} \qquad (x\in R).$$

We bewijzen nu achtereenvolgens de eigenschappen 3.12.22 t/m 3.12.24.

3.12.22. De afbeelding $\phi:R\to P(V)$ is een homomorfisme van $(R,+,\ )$ in $(P(V),\div,\cap)$.

Bewijs. $\phi(xy)=\{f\in V|\ f(xy)=1\}$, maar opdat $f(xy)=f(x)f(y)=$ $=1$ moet $f(x)=1$ en $f(y)=1$. Derhalve: $\phi(xy)=\phi(x)\cap\phi(y)$ $(x,y\in R)$. $\phi(x+y)=\{f\in V|\ f(x)+f(y)=1\}$; maar opdat $f(x)+f(y)=1$ moet òf $f(x)=1$ en $f(y)=0$, òf $f(x)=0$ en $f(y)=1$. Derhalve $\phi(x+y)=\phi(x)\div\phi(y)$ $(x,y\in R)$.

We merken op $\phi(0)=\emptyset$, $\phi(e)=V$.

3.12.23. De afbeelding $\phi:R\to P(V)$ is *één-éénduidig*.

Bewijs. We zullen laten zien dat als $x\neq y$ is, dat er dan een homomorfisme f is met $f(x)\neq f(y)$. We laten nl. zien dat uit $x\neq y$ volgt dat er een maximaal ideaal S is dat precies één van de beide elementen x of y bevat. Als $x\neq y$, dan is $e+x+y\neq e$, anders was $x+y=0$, $x=y$; beschouw een maximaal ideaal S dat $e+x+y$ bevat (3.12.19). S kan niet en x en y bevatten want dan zou het ook $e+x+y+x+y=$ $=e$ bevatten; het kan evenmin en $e+x$ en $e+y$ bevatten want ook $e+x+y+e+x+e+y=e$. Dus òf $x\in S$, $e+y\in S$, òf $e+x\in S$, $y\in S$. Voor het homomorfisme f op $GF(2)$ waarvan S de kern is geldt dus òf $f(x)=0$ en $f(y)=1$, òf $f(x)=1$ en $f(y)=0$.

In het geval van oneindige Boole ringen zouden we niet verder kunnen komen dan het thans reeds bereikte resultaat dat $(R,+,\ )$ isomorf is met een Boole deelring van $(P(V),\div,\cap)$; oneindige producten bestaan immers in het algemeen niet in de ring, terwijl oneindige collecties verzamelingen wel steeds een doorsnede hebben. In het eindige geval hebben wij echter:

3.12.24. De afbeelding ϕ is een afbeelding van R op $P(V)$.

Bewijs. Het is voldoende om te laten zien dat er bij elk element f van V een $x_f\in R$ bestaat met $\phi(x_f)=\{f\}$. Voor een willekeurige $V_0\subset V$ volgt dan uit $V_0=\{f_1,\dots,f_l\}$, alle $f_1,\dots,f_l$ verschillend, dat $V_0=\phi(x_{f_1}+\dots+x_{f_l})$. Zij f een homomorfisme; zij $f^{\leftarrow}(0)=\{x_1,\dots,x_k\}$ $(x_1,\dots,$ x_k alle verschillend) dan nemen we $x_f:=(e+x_1)(e+x_2)\cdots$ $\cdots(e+x_k)$. Nu is $f(x_f)=f(e+x_1)f(e+x_2)\cdots f(e+x_k)=1$, en als $g(x_f)=1$ dan is $g(x_1)=g(x_2)=\dots=g(x_k)=0$, dus het maximale ideaal $g^{\leftarrow}(0)$ omvat $f^{\leftarrow}(0)$. Daar ook $f^{\leftarrow}(0)$ maximaal is, volgt $g=f$ en dus $\phi(x_f)=\{f\}$.

Samenvattend:

3.12.25. STELLING. *Iedere eindige Boole ring* $(R,+,\ )$ *is isomorf met* $(P(V),\dotplus,\cap)$ *waarbij* V *de verzameling is van alle homomorfismen van* $(R,+,\ )$ *op* $GF(2)$.

3.12.26. GEVOLG. *Het aantal elementen van een eindige Boole ring is een macht van 2. Alle Boole ringen met* 2^n *elementen zijn isomorf.*

We komen nog eenmaal op Boole ringen terug (in 3.20.6).

3.13. Opgaven over ringen en lichamen

3.13.1. Construeer (op isomorfie na) alle lichamen met drie en vier elementen. Stel in beide gevallen de producttafels van optelling en vermenigvuldiging op.

3.13.2. Zij $(R,+,\ )$ een ring met eenheidselement. Bewijs dat uit $ab=ba$ volgt:

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}) \quad (n\in\mathbf{N};\ a,b\in R).$$

3.13.3. Een element a uit een ring met eenheidselement e heet *nilpotent*, indien $\exists_{n\in\mathbf{N}}\ (a^n=0)$. Bewijs dat als a nilpotent is, e-a regulier is.

3.13.4. Bewijs dat de nilpotente elementen in een commutatieve ring met eenheidselement een ideaal vormen. Bewijs dat in de restklassenring naar dit ideaal het nulelement het enige nilpotente element is.

3.13.5. Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring met eenheidselement. Zij $(S,+,\ )$ een ideaal. $r(S):=\{a\in R \mid \exists_{n\in\mathbf{N}}\ [a^n\in S]\}$. Bewijs dat $r(S)$ een ideaal vormt (geheten *radicaal* van S). Bepaal in $(\mathbf{Z},+,\ )$ het radicaal van de hoofdidealen voortgebracht door resp. 5 en 6.

3.13.6. Bewijs dat een element van een commutatieve ring met eenheidselement dan en slechts dan regulier is indien het tot geen enkel echt ideaal behoort.

3.13.7. Zij $(R,+,\ )$ een ring met eenheidselement. Zij $C:=\{x\in R \mid \forall_{y\in R}\ [xy=yx]\}$, dan is $(C,+,\ )$ een commutatieve deelring van $(R,+,\ )$ (geheten het *centrum* van R). Bewijs dit.

3.13.8. Bewijs dat x^2+1 irreducibel is in $\mathbf{Z}[x]$. De ring $(\mathbf{Z}[x]\mathrm{mod}(\{x^2+1\}),+,\cdot)$ heet de ring der *gehele getallen van Gauss*. Vormen de gehele getallen van Gauss een lichaam, een integriteitsgebied? Bepaal de reguliere elementen van de ring der gehele getallen van Gauss. Bewijs dat de gehele getallen van Gauss geschreven kunnen worden als $a+bi$, $a,b\in\mathbf{Z}$, waarmee men rekent als met complexe getallen (zie § 4.4).

3.13.9. Bewijs dat de restklassenring van $\mathbf{Z}[x]$ naar het ideaal voortgebracht door x en 2 (zie 3.9.3) een lichaam is, isomorf met GF(2).

3.13.10. Zij $n|m$ voor zekere $n,m\in\mathbf{N}$. Bewijs dat iedere restklasse uit $\mathbf{Z}(\text{mod } n)$ vereniging is van m/n restklassen uit $(\mathbf{Z} \text{ mod } m)$.

3.13.11. Zij p een priemgetal; $\mathbf{Q}_p:=\{x\in\mathbf{Q}|\ \exists_{t\in\mathbf{Z}}\ \exists_{n\in\mathbf{N}}[x=tn^{-1}\wedge \wedge\neg(p|n)]\}$.

(i) Bewijs dat $(\mathbf{Q}_p,+,\ )$ een deelring is van $(\mathbf{Q},+,\ )$.

(ii) Bewijs dat $\forall_{x\in\mathbf{Q}}[(x\in\mathbf{Q}_p)\vee(x^{-1}\in\mathbf{Q}_p)]$.

(iii) Bewijs dat $\mathbf{Q}_p$ een maximale echte deelring van $\mathbf{Q}$ vormt; d.w.z. laat zien dat als R een deelring van $\mathbf{Q}$ vormt die $\mathbf{Q}_p$ omvat, dan $(R=\mathbf{Q}_p)\vee(R=\mathbf{Q})$.

(iv) Zij $(S,+,\ )$ een ideaal in $(\mathbf{Q}_p,+,\ )$, $S\neq\{0\}$. Laat zien dat er een $n\in\mathbf{Z}^+$ bestaat zó dat:

$$S = \{p^n x|\ x\in\mathbf{Q}_p\}.$$

3.13.12. Bewijs dat de restklassenring $(\mathbf{Q}[x](\text{mod}(\{x^2+1\})),+,\ )$ een lichaam is; bepaal de karakteristiek. Is dit lichaam (isomorf met) het quotiëntenlichaam van het integriteitsgebied van de gehele getallen van Gauss (zie 3.13.9)?

3.13.13. Zij $(R,+,\ )$ een commutatief lichaam. Een *waardering* w van $(R,+,\ )$ is een afbeelding $R\to\mathbf{R}^+:=\{x\in\mathbf{R}|\ x\geq 0\}$ die voldoet aan:
(i) $w(a)=0$ dan en slechts dan als $a=0$;
(ii) $w(ab)=w(a)w(b)$ $(a,b\in R)$;
(iii) $w(a+b)\leq w(a)+w(b)$ $(a,b\in R)$.
Bewijs dat de absolute waarde een waardering is in $\mathbf{Q}$ en in $\mathbf{R}$.

3.13.14. De *p-adische waardering* in $\mathbf{Q}$. Zij p een priemgetal. Voor $x\in\mathbf{Q}\backslash\{0\}$ definiëren we $\nu(x)$ door x te schrijven als $p^{\nu(x)}tn^{-1}$ met $(p,|t|)=(p,|n|)=(|t|,|n|)=1$.

(i) Bewijs dat $\nu(x)$ eenduidig bepaald is.

$w_p:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}^+$ is gedefinieerd door

$$w_p(x) := \begin{cases} p^{-\nu(x)} & \text{als } x\neq 0 \\ 0 & \text{als } x=0 \end{cases}$$

(ii) Bewijs dat w_p een waardering van $\mathbf{Q}$ is.

3.13.15. Zij $(R,+,\ )$ een commutatieve ring met eenheidselement. Zij $I:=\{x\in R \mid x^2=x\}$. We definiëren:

$$\forall_{x\in I}\ \forall_{y\in I}\ [x\oplus y:=x+y-2xy].$$

Bewijs dat $(I,\oplus,\ )$ een Boole ring is.

3.13.16. Geef de producttafels van de optelling en vermenigvuldiging van de Boole ring $(W_2,+,\ )$ die volgens 3.12.10, 3.12.8 ontstaat uit het Boole tralie $(W_2,<)$ uit 2.8.32. Geef alle maximale idealen van deze Boole ring.

3.13.17. Bewijs dat iedere eindige Boole ring een hoofdideaalring is.

3.13.18. Bewijs dat een eindige Boole ring $(R,+,\ )$ isomorf is met een ring $(P(V),\div,\cap)$ op de volgende manier. Zij $(R,+,\ )$ een Boole ring; $R=\{x_1,\dots,x_k\}$. Bij iedere $S\in P(R)$ berekenen we $x_S:=\left(\prod_{x\in S} x\right)\left(\prod_{x\in R\setminus S}(e+x)\right)$.

Zij $V:=\{x_S \mid S\in P(V),\ x_S\neq 0\}$. (De elementen van V heten de atomen.) Bewijs dat iedere $x\in R$ eenduidig te schrijven is als een som van elementen uit V.

3.14. Lineaire algebra; vectorruimten

3.14.1. $\mathbf{R}^n$ ALS VECTORRUIMTE

We zullen van nu af de elementen van $\mathbf{R}^n$ *vectoren* noemen. De vector $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ noteren we: $\mathbf{a}$. Ook al vermelden we het niet uitdrukkelijk: de componenten (ook coördinaten geheten) van een vector, $\mathbf{x}$, zijn steeds $x_1,x_2,\dots,x_n$. In sommige beschouwingen met een meetkundige inslag gebruiken we ook hoofdletters P, Q, R voor elementen van $\mathbf{R}^n$. We kunnen nu definiëren een productoperatie geheten optelling in $\mathbf{R}^n$ door:

$$\forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ \forall_{\mathbf{b}\in\mathbf{R}^n}\ [\mathbf{a}+\mathbf{b}:=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)].$$

Men verifieert zonder moeite dat $(\mathbf{R}^n,+)$ een abelse groep is. De vector $(0,0,\dots,0)=:\mathbf{0}$ (ook geheten de *oorsprong*) is het eenheidselement; $-\mathbf{a}=(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$. Naast de optelling zullen we ook definiëren een afbeelding van $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, geheten *scalair product*. Als we het scalair product van $\alpha\in\mathbf{R}$ en $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ noteren als $\alpha\mathbf{a}$ luidt de definitie:

$$\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ [\alpha\mathbf{a}:=(\alpha a_1,\alpha a_2,\ldots,\alpha a_n)].$$

We zullen zeggen dat door deze definitie van een optelling en van een scalaire vermenigvuldiging met de elementen van een lichaam, nl. $\mathbf{R}$, de verzameling $\mathbf{R}^n$ tot een *vectorruimte* wordt. Uit onze definities volgt nog dat voor het eenheidselement, 1, van het lichaam $\mathbf{R}$ geldt: $\forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ [1\mathbf{a}=\mathbf{a}]$. Verder geldt $\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\beta\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ [\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}]$, terwijl ook de distributieve wetten:

$$\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ \forall_{\mathbf{b}\in\mathbf{R}^n}\ [\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}];$$

$$\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\beta\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ [(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}]$$

gelden. Het woord vector is ontleend aan de natuurkunde; daar betekent het een grootheid bepaald door grootte en richting. De lezer overtuige zich er van dat als hij in $\mathbf{R}^2$ het element (a_1,a_2) identificeert met een pijl beginnend in $(0,0)$ en eindigend in (a_1,a_2) de zojuist gedefinieerde optelling inderdaad overeenkomt met wat hij uit de elementaire natuurkunde kent: het zgn. parallellogram van krachten. Voor de scalaire vermenigvuldiging geldt een analoge opmerking.

3.14.2. We zullen nu definiëren het begrip vectorruimte over R, waarin $(R,+,\ )$ een commutatief lichaam is. Het eenheidselement uit R zullen we met 1 aanduiden, willekeurige elementen uit R duiden we vaak aan met α, β, ... De vectorruimte zal zijn een verzameling V waarvan we de elementen aangeven met $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ...; (behalve in voorbeelden waar de elementen al een andere naam hebben zoals 3.14.7). In de definitie zal voorts voorkomen een productoperatie, geheten optelling: $V\times V\to V$ die we met + aanduiden, en een afbeelding: $R\times V\to V$ waarbij we het beeld van $(\alpha,\mathbf{a})$ als $\alpha\mathbf{a}$ noteren $(\alpha\in R,\ \mathbf{a}\in V)$.

3.14.3. DEFINITIE. *Zij* $(R,+,\ )$ *een commutatief lichaam, een tripel* $(V,+,R)$ *heet een vectorruimte (ook wel lineaire ruimte) over* R *indien:*

(V1) $(V,+)$ *is een abelse groep,*

(V2) *Er is een afbeelding* $R\times V\to V$ *die voldoet aan:*

$$\forall_{a\in V}\ [\,1a=a\,],$$

$$\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{\beta\in R}\ \forall_{a\in V}\ [\,\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a\,].$$

(V3) $$\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{a\in V}\ \forall_{b\in V}\ [\,\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b\,],$$

$$\forall_{\alpha\in R}\ \forall_{\beta\in R}\ \forall_{a\in V}\ [\,(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a\,].$$

We noteren het eenheidselement van $(V,+)$ met $\mathbf{0}$.

3.14.4. VOORBEELDEN. Is $(R,+,\ )$ een commutatief lichaam dan is dit met zijn eigen optelling en vermenigvuldiging ook steeds een vectorruimte over R (zie ook § 3.20). $(\mathbf{R}^n,+,\mathbf{R})$ is volgens 3.14.1 een vectorruimte over $\mathbf{R}$ die we steeds weer met $\mathbf{R}^n$ zullen noteren. Evenzo $\mathbf{Q}^n:=(\mathbf{Q}^n,+,\mathbf{Q})$, $\mathbf{C}^n:=(\mathbf{C}^n,+,\mathbf{C})$ (zie § 4.4).

3.14.5. Voor ons van het meeste belang zijn vectorruimten over $\mathbf{C}$ en $\mathbf{R}$; we zullen in de paragrafen 3.14 tot en met 3.19 steeds alle resultaten formuleren voor lineaire ruimten over $\mathbf{R}$, geheten reële vectorruimten. De lezer die nu reeds vertrouwd is met complexe getallen doet er goed aan van de bewezen eigenschappen meteen op te merken dat ze, behoudens voor de hand liggende modificaties, waarvoor we soms wel een aanwijzing zullen geven, ook gelden voor complexe vectorruimten (zoals trouwens ook voor vectorruimten over andere lichamen van de karakteristiek nul); in § 3.20 zullen we nog iets zeggen over vectorruimten over eindige lichamen. De lezer voor wie complexe getallen nog vreemd zijn, zal na lezing van § 4.4 eveneens zonder moeite de overgang van reële vectorruimten naar complexe vectorruimten kunnen maken. Omdat in de komende paragrafen het beschouwde lichaam toch steeds $\mathbf{R}$ is, en de optelling $+$ genoteerd wordt zullen we in plaats van $(V,+,\mathbf{R})$ kortweg V schrijven. We bespreken eerst nog een drietal belangrijke voorbeelden.

VOORBEELDEN

3.14.6. Indien we in $\mathbf{R}[x]$ (3.9.1) een scalaire vermenigvuldiging definiëren door:

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) := \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k)x^k \qquad \Big(\alpha\in\mathbf{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\in\mathbf{R}[x]\Big),$$

dan is $\mathbf{R}[x]$ met de ringoptelling uit 3.9.1 en deze scalaire vermenigvuldiging een vectorruimte over $\mathbf{R}$. Bekijken we in $\mathbf{R}[x]$ de deelverzameling van de polynomen van graad $\leq n$ dan vormen ook deze een vectorruimte over $\mathbf{R}$. We zullen deze noteren: $\mathbf{R}[x,n]$.

3.14.7. Zij V een willekeurige niet lege verzameling. We definiëren in $\mathbf{R}^V$ als scalaire vermenigvuldiging: $\forall_{x\in V}\ [(\alpha f)(x):=\alpha(f(x))]$ $(\alpha\in\mathbf{R},\ f\in\mathbf{R}^V)$. Met de ringoptelling uit 3.7.10 en deze scalaire vermenigvuldiging is $\mathbf{R}^V$ een lineaire ruimte over $\mathbf{R}$.

3.14.8. Zij $x_1,\ldots,x_n$ een n-tal variabelen. Een *lineaire vorm* in $x_1,\ldots,x_n$ is een uitdrukking $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ waarbij $a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R}$. Zij $L[x_1,\ldots,x_n]:=\{a_1x_1+\ldots+a_nx_n \mid a_1\in\mathbf{R},\ \ldots,\ a_n\in\mathbf{R}\}$ de verzameling van alle lineaire vormen in $x_1,\ldots,x_n$. We maken van $L[x_1,\ldots,x_n]$ een vectorruimte over $\mathbf{R}$ door de definities:

$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)+(b_1x_1+\ldots+b_nx_n):=(a_1+b_1)x_1+\ldots+(a_n+b_n)x_n;$$

$$\alpha(a_1x_1+\ldots+a_nx_n):=(\alpha a_1)x_1+\ldots+(\alpha a_n)x_n$$

$$(\alpha\in\mathbf{R},\ a_1x_1+\ldots+a_nx_n\in L[x_1,\ldots,x_n],\ b_1x_1+\ldots+b_nx_n\in L[x_1,\ldots,x_n]).$$

3.14.9. EIGENSCHAPPEN. Zij V een reële lineaire ruimte dan geldt:

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{a}\in V),$$

$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (\alpha\in\mathbf{R}),$$

$$(-\alpha)\mathbf{a} = -(\alpha\mathbf{a}) \qquad (\alpha\in\mathbf{R},\ \mathbf{a}\in V).$$

3.14.10. DEFINITIE. *De reële lineaire ruimten* V_1 *en* V_2 *heten isomorf indien er een één-éénduidige afbeelding* A *van* V_1 *op* V_2 *bestaat met:*

(i) $\forall_{\mathbf{x}\in V_1}\forall_{\mathbf{y}\in V_1}\ [A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y})]$,

(ii) $\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{x}\in V_1}\ [A(\alpha\mathbf{x})=\alpha(A(\mathbf{x}))]$.

Opmerking: bij afbeeldingen van vectorruimten gebruiken we meest de haakjesloze notatie: dus $A\mathbf{x}$ i.p.v. $A(\mathbf{x})$.

3.14.11. VOORBEELD. $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}[x,n-1]$ en $L[x_1,\ldots,x_n]$ zijn isomorf $(n\in\mathbf{N})$. $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}(x,n-1)$ en $B:\mathbf{R}^n\to L[x_1,\ldots,x_n]$ gedefinieerd door: $\forall_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n}\ [A\mathbf{a}:=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1};\ B\mathbf{a}:=a_1x_1+\ldots+a_nx_n]$ zijn isomorfismen.

3.14.12. DEFINITIE. *Een deelverzameling* $V_0 \subset V$ *van een vectorruimte* V *heet een deelvectorruimte (lineaire deelruimte of soms kortweg deelruimte) van* V *indien* V_0 *met de optelling en scalaire vermenigvuldiging zelf een lineaire ruimte is.*

In het bijzonder is V een lineaire deelruimte van zichzelf. Een deelruimte $V_0 \subset V$ met $V_0 \neq V$ heet *echte* lineaire deelruimte.

3.14.13. STELLING. *Opdat* V_0, $V_0 \neq \emptyset$, *een lineaire deelruimte van* V *is, is nodig en voldoende:*

$$(*) \qquad \forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \forall_{\beta \in \mathbf{R}} \forall_{\mathbf{x} \in V_0} \forall_{\mathbf{y} \in V_0} [\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} \in V_0].$$

Bewijs. (i) Nodig is triviaal. (ii) Uit de conditie (*) volgt in het bijzonder $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in V_0$, dus $(V_0,+)$ is een abelse groep (3.5.3); bovendien $\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \forall_{\mathbf{x} \in V_0} [\alpha\mathbf{x} \in V_0]$ zodat de scalaire vermenigvuldiging inderdaad $\mathbf{R} \times V_0 \rightarrow V_0$ is.

3.14.14. GEVOLG. $V_0 \subset V$, $V_0 \neq \emptyset$, *is dan en slechts dan een lineaire deelruimte indien* $\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \forall_{\mathbf{x} \in V_0} \forall_{\mathbf{y} \in V_0} [\alpha\mathbf{x} \in V_0,\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \in V_0]$.

3.14.15. VOORBEELDEN. In elke vectorruimte is $\{\mathbf{0}\}$ een lineaire deelruimte. In de rij: $\{(a_1,0,\ldots,0) \mid a_1 \in \mathbf{R}\}$, $\{(a_1,a_2,0,\ldots,0) \mid a_1 \in \mathbf{R},\ a_2 \in \mathbf{R}\}, \ldots, \{(a_1,\ldots,a_{n-1},0) \mid a_1 \in \mathbf{R},\ \ldots,\ a_{n-1} \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{R}^n$ vormt elke verzameling een echte lineaire deelruimte van alle volgende. Is $V \neq \emptyset$, $V_0 \subset V$ dan vormt $I(V_0)$ een deelruimte van $\mathbf{R}^V$ (zie 3.8.2).

3.14.16. DEFINITIE. *Zij* V *een vectorruimte. Een lineaire variëteit is een deelverzameling van de vorm* $\mathbf{a}+V_0$ *waarbij* $\mathbf{a} \in V$ *en* V_0 *lineaire deelruimte van* V *is.*

We merken nog op dat V_0 als deelruimte ook een ondergroep van V is; de lineaire variëteit $\mathbf{a}+V_0$ is de nevenklasse van V_0 die $\mathbf{a}$ bevat.

3.14.17. VOORBEELDEN. $\{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid f(1)=1\}$ is een lineaire variëteit in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, die niet tevens een lineaire deelruimte is. In $\mathbf{R}^2$ vormen alle punten op een rechte door (0,0) een lineaire deelruimte; de punten op een rechte niet door(0,0) vormen een lineaire variëteit die geen lineaire deelruimte is. Interpreteren we ook $\mathbf{R}^3$ meetkundig, nl. als de ruimte met drie onderling loodrechte coördinaatassen, dan zijn alle vlakken en rechten lineaire variëteiten, maar alleen de vlakken en lijnen door $O:=(0,0,0)$ zijn deelruimten.

3.14.18. EIGENSCHAP. De lineaire variëteit $\mathbf{a}+V_0$ is dan en slechts dan een lineaire deelruimte indien $\mathbf{a}\in V_0$; en ook indien $\mathbf{0}\in\mathbf{a}+V_0$.

3.14.19. DEFINITIE. *Een stelsel vectoren* $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ *uit een lineaire ruimte* V *heet (lineair) afhankelijk indien:*

$$\exists_{\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbf{R}^n,\mathbf{a}\neq\mathbf{0}}\ [a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\ldots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}].$$

Een eindig stelsel vectoren dat niet lineair afhankelijk is heet lineair onafhankelijk. Een oneindig stelsel $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots$ *heet lineair onafhankelijk als ieder eindig deelstelsel onafhankelijk is.*

3.14.20. VOORBEELDEN. (1,1,2), (1,2,3,) en (1,0,1) in $\mathbf{R}^3$ zijn lineair afhankelijk want $2(1,1,2)-(1,2,3)-(1,0,1)=\mathbf{0}$. Het stelsel $\mathbf{e}_1:=(1,0,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2:=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,$ $\mathbf{e}_n:=(0,0,0,\ldots,1)$ in $\mathbf{R}^n$ is lineair onafhankelijk. In $\mathbf{R}[x]$ zijn de polynomen: $1, x, x^2, \ldots, x^n$ lineair onafhankelijk. In $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (3.14.7) is het stelsel sin, cos, f waarbij $f(x):=$ $:=x(\frac{\pi}{2}-x)(x\in\mathbf{R})$, lineair onafhankelijk (de lezer bewijze dit).

3.14.21. DEFINITIE. *Een vector* $\mathbf{w}$ *heet lineaire combinatie van* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ *indien:*

$$\exists_{(a_1,\ldots,a_k)\in\mathbf{R}^k}\ [\mathbf{w}=a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\ldots+a_k\mathbf{v}_k].$$

EIGENSCHAPPEN

3.14.22. *Als* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ *een lineair afhankelijk stelsel is dan is tenminste één der* $\mathbf{v}_i$ *een lineaire combinatie van de overige vectoren uit het stelsel.*

Bewijs. Als $a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, $a_i\neq 0$, dan is

$$\mathbf{v}_i=-\frac{a_1}{a_i}\mathbf{v}_1-\ldots-\frac{a_{i-1}}{a_i}\mathbf{v}_{i-1}-\frac{a_{i+1}}{a_i}\mathbf{v}_{i+1}-\ldots-\frac{a_n}{a_i}\mathbf{v}_n.$$

3.14.23. $\mathbf{0}$ is een afhankelijk stelsel.

3.14.24. Is $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ een lineair afhankelijk stelsel, dan is ook $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_l$ lineair afhankelijk.

3.14.25. Zijn $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$ dan vormt $[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k]:=$ $:=\{a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_k\mathbf{v}_k \mid a_1\in\mathbf{R},\ldots,a_k\in\mathbf{R}\}$ een lineaire deelruimte van V.

De deelruimte $[v_1,\dots,v_k]$ heet de door $v_1,\dots,v_k$ voortgebrachte deelruimte. Het begrip voortgebrachte deelruimte heeft ook zin bij oneindige stelsels:

3.14.26. Is $(v_n)_n$ een stelsel vectoren dan is $[(v_n)_n]:=$ $:=\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \mid a_n \in \mathbf{R}\ (n\in\mathbf{N})$, slechts eindig veel van de $a_n \neq 0\}$ een lineaire deelruimte.

Als W een willekeurige deelverzameling van V is, dan noteren we de deelruimte van V bestaande uit alle eindige lineaire combinaties van elementen uit W met [W]. (De notatie is hier niet helemaal consequent; als we in 3.14.25 als notatie $[\{v_1,\dots,v_k\}]$ gekozen hadden in plaats van $[v_1,\dots,v_k]$, zou [W] wel consequent zijn.)

3.14.27. VOORBEELDEN. In $\mathbf{R}^n$ geldt $[e_1,e_2,\dots,e_n]=\mathbf{R}^n$. In $\mathbf{R}[x]$ is $[1,x,x^2,\dots,x^n]=\mathbf{R}[x,n]$, doch $[1,x,x^2,\dots]=$ $=\mathbf{R}[x]$.

3.14.28. STELLING. *Indien* $[v_1,\dots,v_k]\neq\{\mathbf{0}\}$ *dan heeft het eindige stelsel* $v_1,\dots,v_k$ *een lineair onafhankelijk deelstelsel dat ook* $[v_1,\dots,v_k]$ *voortbrengt.*

Bewijs. Als $v_1,\dots,v_k$ lineair onafhankelijk is, dan is er niets te bewijzen, anders is één der vectoren zeg v_i een lineaire combinatie van $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_k$ (3.14.22). Dan is $V_0:=[v_1,\dots,v_k]=[v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,$ $\dots,v_k]$. Is dit laatste stelsel nog steeds niet lineair onafhankelijk dan kunnen we met 3.14.22 een deelstelsel vinden dat uit een vector minder bestaat. Dit proces herhalen we tot we een onafhankelijk stelsel vinden dat V_0 voortbrengt; omdat $V_0\neq\{\mathbf{0}\}$ vinden we inderdaad een lineair onafhankelijk stelsel.

3.14.29. DEFINITIE. *Een basis van een vectorruimte* V *is een eindig lineair onafhankelijk stelsel* $v_1,\dots,v_n$ *zodat* $[v_1,\dots,v_n]=V$.

3.14.30. VOORBEELDEN. $e_1,\dots,e_n$ is een basis van $\mathbf{R}^n$ (deze noemen we vaak de *standaardbasis*); maar ook $(1,1,0,\dots,0)$, $(0,1,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,1),(0,0,\dots,0,1)$ is een basis van $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}[x]$ heeft geen basis.

We zullen ons in dit hoofdstuk verder meestal bezighouden met vectorruimten die wel een basis hebben.

3.14.31. EIGENSCHAP. Indien $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een basis is van V, dan is iedere vector uit V *op éénduidige wijze* te schrijven als lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$.

Bewijs. Als voor zekere $\mathbf{w}\in V$ geldt: $\mathbf{w}=a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n=b_1\mathbf{v}_1+\ldots+b_n\mathbf{v}_n$, dan is $(a_1-b_1)\mathbf{v}_1+\ldots+(a_n-b_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. Daar $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ lineair onafhankelijk zijn, betekent dit: $a_1=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n$.

Als $\mathbf{w}=a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n$, dan heten de getallen $a_1,\ldots,a_n$ de coördinaten van $\mathbf{w}$ ten opzichte van de basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$. De coördinaten in $\mathbf{R}^n$: $(a_1,\ldots,a_n)$ zijn dus de coördinaten ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

3.14.32. STELLING. *(Uitwisselingsstelling). Indien* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ *een basis van de vectorruimte* V *vormen en indien* $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ *een onafhankelijk stelsel in* V *is, dan is* $m\leq n$.

Bewijs. Stel $m>n$. Omdat $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een basis vormen, is $\mathbf{w}_1$ een lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ dus: $\mathbf{w}_1=a_1\mathbf{v}_1+$ $+\ldots+a_n\mathbf{v}_n$. Omdat $\mathbf{w}_1$ voorkomt in een lineair onafhankelijk stelsel is $\mathbf{w}_1\neq\mathbf{0}$, dus $(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$. Uitsluitend voor het gemak van de notatie nemen we aan dat a_1 een van de coëfficiënten is die $\neq 0$ is. Nu is $\mathbf{v}_1=\frac{1}{a_1}\mathbf{w}_1-\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2-\ldots-\frac{a_n}{a_1}\mathbf{v}_n$. Als we in iedere lineaire combinatie van $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_1$ vervangen door deze uitdrukking, zien we: $[\mathbf{w}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n]=V$. Derhalve is $\mathbf{w}_2=b_1\mathbf{w}_1+b_2\mathbf{v}_2+\ldots+b_n\mathbf{v}_n$. Hierin is $(b_2,\ldots,b_n)\neq(0,\ldots,0)$ anders was nl. $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ afhankelijk, hetgeen niet zo is (3.14.24). Neem gemakshalve aan $b_2\neq 0$, dan is

$\mathbf{v}_2=\frac{1}{b_2}\mathbf{w}_2-\frac{b_1}{b_2}\mathbf{w}_1-\frac{b_3}{b_2}\mathbf{v}_3-\ldots-\frac{b_n}{b_2}\mathbf{v}_n$. Zo zien we dat $[\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{v}_3,\ldots,\mathbf{v}_n]=V$. We gaan zo door: $\mathbf{w}_3=c_1\mathbf{w}_1+c_2\mathbf{w}_2+$ $+c_3\mathbf{v}_3+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$ en hierin is $(c_3,\ldots,c_n)\neq(0,\ldots,0)$ anders waren $\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ lineair afhankelijk hetgeen niet zo is (3.14.24). Zo vinden we $[\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n]=V$. Maar dit betekent dat $\mathbf{w}_{n+1}=d_1\mathbf{w}_1+\ldots+d_n\mathbf{w}_n$, zodat $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ geen lineair onafhankelijk stelsel is. De veronderstelling $m>n$ is dus onjuist.

3.14.33. GEVOLG. *Elke basis van de lineaire ruimte* V *bestaat uit evenveel vectoren.*

Bewijs. Als $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ en $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ bases zijn, zijn het per definitie lineair onafhankelijke stelsels, zodat $m\leq n$ en $n\leq m$.

3.14.34. DEFINITIE. *Het aantal vectoren in een basis van* V *heet de dimensie van* V *(afgekort* dim V*). Voor de lineaire variëteit* $\mathbf{a}+V_0$ *definiëren we:* $\dim(\mathbf{a}+V_0) := \dim V_0$. *Als de lineaire ruimte geen basis heeft zeggen we wel* $\dim V = \infty$.

We houden ons in dit hoofdstuk dus meestal bezig met eindig-dimensionale vectorruimten. Het is duidelijk dat als V_0 deelruimte van V is geldt: $\dim V_0 \leq \dim V$.

3.14.35. VOORBEELDEN. $\dim \mathbf{R}^n = \dim \mathbf{R}[x,n-1] = \dim L[x_1,\ldots,x_n] = n$; $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

3.14.36. STELLING. *(Uitbreidingsstelling). Zij* V_0 *een lineaire deelruimte van* V; $m := \dim V_0 < \dim V =: n$. *Zij* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ *een basis van* V_0, *dan heeft* V *een basis* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ *die een uitbreiding is van de basis van* V_0 *met niet in* V_0 *gelegen vectoren.*

Bewijs. Zij $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ een basis van V. Het stelsel $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ is lineair onafhankelijk. Volgens 3.14.32 zijn m van de w's uit te wisselen voor $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$.

3.14.37. STELLING. *(Representatiestelling). Iedere* n-*dimensionale vectorruimte* V *over* $\mathbf{R}$ *is isomorf met* $\mathbf{R}^n$.

Bewijs. Zij $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een basis van V. De afbeelding $A:V\to\mathbf{R}^n$ gedefinieerd door $A(a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n):=(a_1,\ldots,a_n)$ $(a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R})$ is een isomorfisme.

3.14.38. STELLING. *(Reduceerstelling). Voor alle stelsels vectoren* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ *uit de vectorruimte geldt:*

(i) $[\mathbf{0},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]$,

(ii) $[\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]$,

(iii) $[\alpha\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]$ $(\alpha\in\mathbf{R},\ \alpha\neq 0)$,

(iv) $[\mathbf{v}_{f(1)},\mathbf{v}_{f(2)},\ldots,\mathbf{v}_{f(k)}]=[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k]$ $(f\in S_k)$.

Het bewijs van deze stelling is volkomen triviaal. Op deze stelling berust echter de rekentechniek in $\mathbf{R}^n$ en wegens 3.14.37 dus algemeen in n-dimensionale ruimten. We geven één voorbeeld van dit rekenen. De lezer zal zich de hierin getoonde techniek wel moeten eigenmaken.

3.14.39. VOORBEELD. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ zijn vectoren in $\mathbf{R}^5$. Bepaal een basis van $V:=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y}]$ indien: $\mathbf{u}=(0,0,1,1,1)$; $\mathbf{v}=(0,2,3,5,7)$, $\mathbf{w}=(0,3,6,2,-2)$, $\mathbf{x}=(0,1,2,3,4)$, $\mathbf{y}=(0,0,0,0,1)$. De lezer zal merken dat we in de nu volgende berekening tientallen malen beroep doen op (i), (ii), (iii) en (iv) uit 3.14.38; het is leerzaam éénmaal echt alles stap voor stap te doen. Allereerst $V=[\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{y}]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (0,1,2,3,4) \\ \mathbf{v} &= (0,2,3,5,7) \\ \mathbf{w} &= (0,3,6,2,-2) \\ \mathbf{u} &= (0,0,1,1,1) \\ \mathbf{y} &= (0,0,0,0,1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{x} &= (0,1,2,3,4) \\ \mathbf{v}-2\mathbf{x} &= (0,0,-1,-1,-1) \\ \mathbf{w}-3\mathbf{x} &= (0,0,0,-7,-14) \\ \mathbf{u} &= (0,0,1,1,1) \\ \mathbf{y} &= (0,0,0,0,1) \end{aligned}$$

Door herhaald toepassen van (i) tot en met (iv) verkrijgen we nu: $V=[\mathbf{x},\mathbf{v}-2\mathbf{x},\mathbf{w}-3\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y}]=[\mathbf{x},-1/7(\mathbf{w}-3\mathbf{x}),\mathbf{u},\mathbf{y}]=$ $=[\mathbf{x},\mathbf{u},-1/7(\mathbf{w}-3\mathbf{x}),\mathbf{y}]$. Van dit laatste stelsel voortbrengenden van V is onmiddellijk te zien dat het lineair onafhankelijk is en dus een basis is. We krijgen een fraaiere basis (waarom?) als we nog even verder werken: (noem: $-1/7(\mathbf{w}-3\mathbf{x})=:\mathbf{t}$)

$$\begin{aligned} V &= [\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{t},\mathbf{y}] = [\mathbf{x}-4\mathbf{y},\mathbf{u}-\mathbf{y},\mathbf{t}-2\mathbf{y},\mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{x}-4\mathbf{y}-3(\mathbf{t}-2\mathbf{y}),\mathbf{u}-\mathbf{y}-(\mathbf{t}-2\mathbf{y}),\mathbf{t}-2\mathbf{y},\mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{x}-4\mathbf{y}-3(\mathbf{t}-2\mathbf{y})-2(\mathbf{u}-\mathbf{y}-(\mathbf{t}-2\mathbf{y})),\mathbf{u}-\mathbf{y}-(\mathbf{t}-2\mathbf{y}),\mathbf{t}-2\mathbf{y},\mathbf{y}] = \\ &= [\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_5]. \end{aligned}$$

3.14.40. Voor $n>3$, gebruikt men in $\mathbf{R}^n$ vaak meetkundige terminologie ontleend aan $\mathbf{R}^3$. Zo noemt men een $(n-1)$-dimensionale variëteit een hypervlak en een één-dimensionale variëteit een lijn. Het gebruik van vectoren leidt tot elegante methoden in de analytische meetkunde in vlak en ruimte (zie 3.21.3, 3.21.4).

3.14.41. DEFINITIE. *De vectorruimte* V *heet de directe som van de deelruimten* V_1 *en* V_2 *(notatie* $V=V_1\oplus V_2$*) indien:*

(i) $V_1\cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;
(ii) $[V_1\cup V_2] = V$.

Vergelijk deze definitie met 3.6.8.

3.14.42. GEVOLGEN. (a) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.
(b) Elke $\mathbf{v}\in V$ is op eenduidige wijze te schrijven als $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ met $\mathbf{v}_1\in V_1$, $\mathbf{v}_2\in V_2$ (vergelijk met 3.6.8).

3.14.43. CONSTRUCTIE VAN EEN DIRECTE SOM. Laat V_1 en V_2 vectorruimten zijn. We maken van $W:=V_1\times V_2$ een vectorruimte door de definities

$$\forall_{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)\in W}\ \forall_{(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\in W}\ \forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ [\,(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)+(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2):=(\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2),$$
$$\alpha(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2):=(\alpha\mathbf{u}_1,\alpha\mathbf{u}_2)\,].$$

W is nu de directe som van de deelruimten $\tilde V_1:=\{(\mathbf{v}_1,0)\mid \mathbf{v}_1\in V_1\}$ en $\tilde V_2:=\{(0,\mathbf{v}_2)\mid \mathbf{v}_2\in V_2\}$ die isomorf zijn met resp. V_1 en V_2. Meestal zegt men i.p.v. $W=\tilde V_1\oplus\tilde V_2$ ook in dit geval wel $W=V_1\oplus V_2$, d.w.z. men identificeert $\tilde V_1$ en V_1 en eveneens $\tilde V_2$ en V_2. (Vergelijk dit met 3.5.5 en 3.6.11.)

3.14.44. STELLING. *Zij* W *een vectorruimte met dimensie* n+m; *zij* V_1 *een deelruimte met dimensie* n. *Dan bestaat er een deelruimte* V_2 *met dimensie* m *zó dat* $W=V_1\oplus V_2$.

Bewijs. Kies een basis $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ van W, waarvan $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ een basis van V_1 is (3.14.36). Dan voldoet $V_2:=[\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m]$ aan de eisen.

3.15. Lineaire afbeeldingen

In deze paragraaf zullen we de homomorfismen van vectorruimten bestuderen. Homomorfismen van vectorruimten noemt men lineaire afbeeldingen. We formuleren alles alleen voor vectorruimten over **R**.

3.15.1. DEFINITIE. *Laat* V_1 *en* V_2 *vectorruimten over* **R** *zijn. Een afbeelding* $A:V_1\to V_2$ *heet een lineaire afbeelding van* V_1 *in* V_2 *indien:*

(i) $\forall_{\mathbf{x}\in V_1}\ \forall_{\mathbf{y}\in V_1}\ [A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}]$,

(ii) $\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{x}\in V_1}\ [A(\alpha\mathbf{x})=\alpha(A\mathbf{x})]$.

Men vergelijke dit met 3.14.10. Een isomorfisme van de vectorruimte V_1 op V_2 is dus een één-éénduidige lineaire afbeelding van V_1 op V_2. Een lineaire afbeelding van V in **R** heet een *lineaire functionaal*. In plaats van lineaire afbeelding gebruikt men in het geval dat $V_1=V_2$ ook wel de namen: lineaire operator, lineaire transformatie.

EIGENSCHAPPEN

3.15.2. Laat $A:V_1\to V_2$ een lineaire afbeelding zijn. Dan is

$\forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\beta\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{x}\in V_1}\ \forall_{\mathbf{y}\in V_1}\ [A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y}]$;

in het bijzonder is $A0=0$, $\forall_{\mathbf{v}\in V_1}\ [A(-\mathbf{v})=-A\mathbf{v}]$.

3.15.3. Zij $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een basis van de vectorruimte V_1; zij $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ een willekeurig stelsel in V_2, dan is er precies één lineaire afbeelding A met $A\mathbf{v}_i=\mathbf{w}_i$ $(1\le i\le n)$.
Bewijs. We definiëren A door $A(a_1\mathbf{v}_1+\ldots+a_n\mathbf{v}_n):=$
$:=a_1\mathbf{w}_1+\ldots+a_n\mathbf{w}_n$ $(a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{R})$.

Een lineaire afbeelding van V_1 ligt dus volkomen vast door de beelden van de vectoren uit een basis van V_1. We merken op dat $AV_1=[A\mathbf{v}_1,A\mathbf{v}_2,\ldots,A\mathbf{v}_n]$.

3.15.4. Als S_1 een deelruimte van V_1 is en A een lineaire afbeelding van V_1 in V_2 dan is het *beeld* AS_1 een deelruimte van V_2.

3.15.5. Als S_2 een deelruimte van V_2 is en A een lineaire afbeelding van V_1 in V_2 dan is $A^{\leftarrow}S_2$ een deelruimte van V_1.

Het bewijs van deze beide eigenschappen is een eenvoudige toepassing van 3.14.13 en 3.15.2.

3.15.6. DEFINITIE. *Zij* $A:V_1\to V_2$ *een lineaire afbeelding, dan heet de deelruimte* $A^{\leftarrow}\{\mathbf{0}\}$ *van* V_1 *de kern (of nulruimte) van* A*; notatie:* N(A).

3.15.7. VOORBEELDEN. In $\mathbf{R}[x]$ is de afbeelding A gedefinieerd door $\forall_{f(x)\in\mathbf{R}[x]}\,[Af(x)=xf(x)]$ een lineaire afbeelding $\mathbf{R}[x]\to\mathbf{R}[x]$. Voor deze afbeelding geldt $N(A)=\{\mathbf{0}\}$. Nu is $(A\circ A)(f(x))=x^2f(x)$ voor alle $f(x)\in\mathbf{R}[x]$. (Afwijkend van 1.24.10, om redenen die zullen blijken in 3.15.17, schrijven we $A\circ A=A^2$). Eveneens $A^n(f(x))=x^nf(x)$.
In $\mathbf{R}^V$ (3.14.7) definieert men bij elke $v\in V$ de lineaire functionaal $\delta_v:\mathbf{R}^V\to\mathbf{R}$ door: $\forall_{f\in\mathbf{R}^V}\,[\delta_v f:=f(v)]$. Nu is $N(\delta_v)=I(\{v\})$ (3.8.2).

3.15.8. VOORBEELD. We definiëren een lineaire afbeelding $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ door de afspraak dat de coördinaten $(y_1,\ldots,y_m)$ van $\mathbf{y}:=A\mathbf{x}$ (dat zijn dus de coördinaten t.o.v. de standaardbasis, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$) berekend worden uit de coördinaten van $\mathbf{x}$ volgens:

$$
(1)\qquad
\begin{array}{l}
y_1 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\
y_2 = a_{21}x_1+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n\\
\vdots\qquad\quad \vdots\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
y_m = a_{m1}x_1+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n.
\end{array}
\qquad (a_{ij}\in\mathbf{R},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n)
$$

Het blok getallen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heet de *matrix* van A t.o.v. de standaardbases. We noteren de matrix als (a_{ij}) of $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ of als er geen verwarring dreigt ook weer met A. Als het de leesbaarheid verhoogt zullen we soms in matrices komma's plaatsen; bijv. zeggen we: "een vector $a\in\mathbf{R}^n$ is op te vatten als een matrix met één rij en n kolommen: $(a_1,\ldots,a_n)$". We merken op dat de kolommen van de matrix juist de verticaal geschreven beelden van $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ zijn:

$$A\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A\,\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

We korten (1) vaak af door

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

We merken nog op: N(A) bestaat uit alle vectoren $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ waarvan de coördinaten voldoen aan:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

De samenhang tussen lineaire afbeeldingen en stelsels lineaire vergelijkingen die zich nu begint af te tekenen is een van de redenen waarom wij ons voor lineaire afbeeldingen interesseren.

3.15.9. In 3.15.8 zagen we dat bij elk blok getallen (zo'n blok heet matrix) met m rijen en n kolommen een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ hoort. Omgekeerd zullen we nu zien dat men iedere lineaire afbeelding van een n-dimensionale ruimte V_n in een m-dimensionale ruimte W_m

met een m bij n matrix (dit is met m rijen en n kolommen) beschrijven kan. Zij $B:V_n \to W_m$ lineair. Kies een basis in V_n, noem deze $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$; kies ook een basis in W_m: $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$. Als $B\mathbf{v}_i = b_{1i}\mathbf{w}_1 + b_{2i}\mathbf{w}_2 + \ldots + b_{mi}\mathbf{w}_m$ $(1 \le i \le n)$ en als $(x_1,\ldots,x_n)$ de coördinaten van $\mathbf{x}$ t.o.v. $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ voorstellen en $(y_1,\ldots,y_m)$ de coördinaten van $\mathbf{y} := B\mathbf{x}$ t.o.v. $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ dan verifieert men dat met de in 3.15.8 afgesproken betekenis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De matrix (b_{ij}) is matrix van B ten opzichte van de gekozen bases $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ en $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$. In het bijzonder kan dus iedere lineaire functionaal op een n-dimensionale ruimte beschreven worden met een matrix van één rij en n kolommen (in $\mathbb{R}$ nemen we als basis: 1).

3.15.10. DEFINITIE. *Zij* $A:V \to W$ *lineair, dan heet* dim AV *de rang van* A.

3.15.11. STELLING. *(Dimensiestelling). Zij* $A:V \to W$ *lineair, zij* $\dim V = n \in \mathbb{N}$.

$$\dim V = \dim N(A) + \dim AV.$$

Bewijs. Zij ℓ de dimensie van N(A) dan is $\ell \le n$ omdat N(A) een deelruimte is van V. Als $\ell = n$ is, is $N(A) = V$ en dus $AV = \{\mathbf{0}\}$, zodat er dan niets te bewijzen valt. Als $\ell < n$ is, kiezen we een basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell,\mathbf{v}_{\ell+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ in V zó dat $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell$ een basis van N(A) is (3.14.36). $AV = [A\mathbf{v}_{\ell+1},\ldots,A\mathbf{v}_n]$, en deze voortbrengenden van AV zijn onafhankelijk want uit $a_{\ell+1}A\mathbf{v}_{\ell+1} + \ldots + a_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ volgt $A(a_{\ell+1}\mathbf{v}_{\ell+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, zodat $a_{\ell+1}\mathbf{v}_{\ell+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \in N(A)$ en derhalve $a_{\ell+1}\mathbf{v}_{\ell+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_\ell\mathbf{v}_\ell$ voor zekere $b_1,\ldots,b_\ell$. Omdat $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ lineair onafhankelijk zijn volgt hieruit $0 = b_1 = \ldots = b_\ell = a_{\ell+1} = \ldots = a_n$. Dus $\dim AV = n - \ell$.

EIGENSCHAPPEN

3.15.12. Zij $A:V \to W$ lineair, zij $\mathbf{b} \in W$. De lineaire vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft dan en slechts dan een oplossing indien $\mathbf{b} \in AV$.

3.15.13. Zij $A:V\to W$ lineair, $\mathbf{a}\in V$, dan is $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x}=A\mathbf{a}\}=\mathbf{a}+N(A)$.

Deze eigenschap bevat de bekende kreet: de algemene oplossing van een inhomogene lineaire vergelijking bestaat uit een particuliere oplossing plus de algemene oplossing van de overeenkomstige homogene vergelijking. De inhomogene vergelijking is $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$*, de homogene* $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ en als $A\mathbf{a}=\mathbf{b}$ is $\mathbf{a}$ een particuliere oplossing.

Als we een stelsel vergelijkingen in feite moeten oplossen dan gaan we vaak enigszins anders te werk. Laten we eerst een homogeen stelsel bekijken. Laat $\ell_1=0, \ldots, \ell_m=0$ een m-tal vergelijkingen zijn in de onbekenden $x_1,\ldots,x_n$, d.w.z. $\ell_i\in L[x_1,\ldots,x_n]$ $(1\le i\le m)$. De oplossingen vormen een deelruimte van $\mathbf{R}^n$, de *oplossingsruimte*. We merken op dat deze oplossingsruimte bepaald wordt door de deelruimte $[\ell_1,\ldots,\ell_m]\subset L[x_1,\ldots,x_n]$. Met behulp van de reduceerstelling (3.14.38) proberen we dan een zo eenvoudig mogelijke basis te vinden voor deze deelruimte, waarna we de oplossing zo kunnen aflezen. Nemen we als voorbeeld het stelsel in $x_1,\ldots,x_5$:

$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 0 \\ 2x_2+3x_3+5x_4+7x_5 = 0 \\ 3x_2+6x_3+2x_4-2x_5 = 0 \\ x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

In 3.14.39 hebben we al berekend dat dit stelsel dezelfde oplossingen heeft als $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$. De oplossing is dus $\{(x_1,0,0,0,0) \mid x_1\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^5$. Bij het oplossen van inhomogene vergelijkingen gaan we bijna net zo te werk; het enige verschil is dat we nu de rechterleden bij het lineair combineren van vergelijkingen meenemen. Als het stelsel niet oplosbaar is komen we dan vanzelf op een strijdigheid. We geven twee eenvoudige voorbeelden.

(a) $\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+6x_2+10x_3=2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x_1-x_3=1 \\ x_2+2x_3=0 \end{array}\right\}$

De oplossingen zijn dus $(1,0,0)+\{\lambda(1,-2,1) \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$.
Dit betekent tevens dat $\{\lambda(1,-2,1) \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$ de nulruimte is van de lineaire afbeelding $A:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ die ten opzichte van $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ als matrix heeft: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

We zien onmiddellijk dat $A\mathbf{e}_1=(1,1,2)$, dus $\mathbf{e}_1$ is een particuliere oplossing.

(b) Het stelsel $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+6x_2+10x_3=6 \end{cases}$

is strijdig; we vinden dat de oplossingen van dit stelsel dezelfde zijn als die van:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

3.15.14. Laat $A:V \to W$ lineair zijn. Nu geldt: A is één-éénduidig dan en slechts dan als $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

3.15.15. DEFINITIE. *Laat* V *en* W *lineaire ruimten zijn. De verzameling van alle lineaire afbeeldingen van* V *in* W *noteren we* $\mathrm{Hom}(V,W)$.

3.15.16. $\mathrm{Hom}(V,W)$ wordt zelf een lineaire ruimte indien we definiëren

$$\forall_{A,B\in\mathrm{Hom}(V,W)}\ \forall_{\mathbf{x}\in V}\ [(A+B)\mathbf{x} := A\mathbf{x}+B\mathbf{x}],$$

$$\forall_{A\in\mathrm{Hom}(V,W)}\ \forall_{\alpha\in\mathbf{R}}\ \forall_{\mathbf{x}\in V}\ [(\alpha A)\mathbf{x} := \alpha(A\mathbf{x})].$$

3.15.17. $(\mathrm{Hom}(V,V),+,\circ)$ is een ring. Deze ring is niet commutatief. Eenheidselement is I_V (we schrijven meestal I), nulelement is de lineaire afbeelding O met $\forall_{\mathbf{v}\in V}\ [O(\mathbf{v}) := \mathbf{0}]$. We noteren deze ring met $\mathrm{Hom}(V,V)$.

3.15.18. Als $A\in\mathrm{Hom}(V,W)$, $B\in\mathrm{Hom}(W,U)$ dan is $BA := B\circ A\in \in\mathrm{Hom}(V,U)$. Als $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = p$, en als we bases $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ in V, $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ in W en $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p$ in U gekozen hebben zodat $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ de matrix van A, $(b_{ki})_{1\le k\le p,\ 1\le i\le m}$ de matrix van B is ten opzichte van de gekozen bases, wat is dan de matrix van BA? De lezer rekene geduldig na dat de matrix van BA ten opzichte van de gekozen bases is:

$$(c_{kj})_{1\le k\le p,\ 1\le j\le n} \text{ waarin } c_{kj} = \textstyle\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}.$$

We zullen de matrix van BA noemen het product van de matrix van B en die van A. Hiermede is voor matrices van passende afmetingen een product gedefinieerd.

3.15.19. STELLING. *Zij* $A:V\to V$ *lineair*, $\dim V = n\in\mathbf{N}$. A *is regulier in de ring* $\mathrm{Hom}(V,V)$ *dan en slechts dan indien* $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

Bewijs. (i) Ringinverse is inverse afbeelding. Uit $N(A)=\{\mathbf{0}\}$ volgt dat A één-éénduidig is (3.15.14); uit $\dim AV = \dim V - \dim N(A) = n-0 = n$ (3.15.11) volgt $AV=V$ dus A is op. (ii) Als A één-éénduidig en op is, is zeker $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

Merk op dat de conditie dat $\dim V$ eindig is niet gemist kan worden. De afbeelding $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}[x],\mathbf{R}[x])$ uit 3.15.7 heeft $N(A)=\{\mathbf{0}\}$, is dus één-éénduidig; maar A is niet op en dus niet regulier.

3.15.20. DEFINITIE. *Zij* $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$. *De verzameling* $\sigma(A):=\sigma_{\mathbf{R}}(A):=\{\lambda\in\mathbf{R} \mid A-\lambda I \text{ niet regulier}\}$ *heet het (reële) spectrum van* A.

Zo is $\sigma(I)=\{1\}$, $\sigma(O)=\{0\}$. De eigenschappen van spectra van lineaire afbeeldingen van vectorruimten over $\mathbf{C}$ zijn mooier dan van die over $\mathbf{R}$.

3.15.21. DEFINITIE. *Zij* $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$. *Een getal* $\lambda\in\mathbf{R}$ *heet een eigenwaarde van* A *indien:*

$$\exists_{\mathbf{v}\in V}\,[\mathbf{v}\neq\mathbf{0},\ A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}].$$

Iedere vector $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ *die voldoet aan* $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ *heet een eigenvector bij de eigenwaarde* λ.

Zo is 0 een eigenwaarde van A dan en slechts dan indien $\dim N(A) > 0$.

3.15.22. STELLING. *Zij* $\dim V = n\in\mathbf{N}$; $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$. *Dan is* $\sigma(A)$ *de verzameling van alle eigenwaarden.*

Bewijs. Zij $\lambda\in\sigma(A)$, dan is $A-\lambda I$ niet regulier en dus (dim V is eindig!) is $\dim N(A-\lambda I)>0$ (3.15.19); zij $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{x}\in N(A-\lambda I)$, dan is $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, zodat λ een eigenwaarde is. Als $\mathbf{x}$ een eigenvector ($\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$!) is bij de eigenwaarde λ dan is $\mathbf{x}\in N(A-\lambda I)$; hieruit volgt dat elke eigenwaarde λ element van $\sigma(A)$ is.

3.15.23. EIGENSCHAP. Zij $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $\lambda\in\sigma(A)$ dan is $\{\mathbf{v}\in V \mid A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}\}$ een lineaire deelruimte van V. Deze heet de *eigenruimte* bij de eigenwaarde λ. De dimensie van deze eigenruimte noteren we met m_λ.

3.15.24. STELLING. *Indien* $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ *eigenvectoren zijn bij verschillende eigenwaarden* $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ *van* $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$ *dan is het stelsel* $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ *lineair onafhankelijk.*

Bewijs. Stel dat $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ lineair afhankelijk zijn dan is één van deze vectoren een lineaire combinatie van de overige (3.14.22). (Als k=1, is er niets te bewijzen.) Stel gemakshalve dat $\mathbf{x}_k$ dit is (anders moeten we hernummeren, zie het bewijs van 3.14.32). Dan is $\mathbf{x}_k=a_1\mathbf{x}_1+\ldots+a_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}$, waarbij $(a_1,\ldots,a_{k-1})\neq(0,\ldots,0)$ omdat $\mathbf{x}_k$ als eigenvector $\neq\mathbf{0}$ is. We hebben dan $A\mathbf{x}_k=A(a_1\mathbf{x}_1+\ldots+a_{k-1}\mathbf{x}_{k-1})$, dus $\lambda_k\mathbf{x}_k=a_1\lambda_1\mathbf{x}_1+\ldots+a_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}$. Nu volgt: $a_1(\lambda_1-\lambda_k)\mathbf{x}_1+\ldots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\mathbf{x}_{k-1}=\mathbf{0}$. Omdat $(\lambda_i-\lambda_k)\neq 0$ $(1\leq i\leq k-1)$ volgt hieruit dat ook het stelsel $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}$ afhankelijk is. We herhalen de argumentatie en vinden iedere keer een stelsel met één vector minder dat lineair afhankelijk is. Stel dat we het zo vaak herhaald hebben dat we weten dat $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ afhankelijk is, dan is $\mathbf{x}_2=a\mathbf{x}_1$ met $a\neq 0$; $\lambda_2\mathbf{x}_2=a\lambda_1\mathbf{x}_1$; $a(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$ en dit is onmogelijk daar $a\neq 0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}$. Onze veronderstelling is dus onjuist en $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ is een onafhankelijk stelsel.

3.15.25. VOORBEELD. We beschouwen $\mathbf{R}^3$. Zij V een vlak door $O:=(0,0,0)$, d.w.z. V is een twee-dimensionale deelruimte van $\mathbf{R}^3$. Zij M een één-dimensionale deelruimte met $M\cap V=\{\mathbf{0}\}$; M is dus een lijn door O die niet in V ligt. Merk op $\mathbf{R}^3=M\oplus V$ (3.14.41). Als lineaire afbeelding P nemen we "projectie op V in de richting van M"; d.w.z. $\forall_{\mathbf{m}\in M}\forall_{\mathbf{v}\in V}[P(\mathbf{m}+\mathbf{v}):=\mathbf{v}]$ (volgens 3.14.42 definieert dit inderdaad een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$).
Nu zien we: $\sigma(P)=\{0,1\}$. $N(P)=M$ is de eigenruimte bij de eigenwaarde 0, V is de eigenruimte bij de eigenwaarde 1 en $V=P\mathbf{R}^3$. Elk stelsel $\mathbf{m},\mathbf{v}$ met $\mathbf{m}\in M$, $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ is lineair onafhankelijk. Nemen we een tweetal onafhankelijke vectoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2\in V$ en een vector $\mathbf{m}\in M$, $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ dan is $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{m}$ een basis van $\mathbf{R}^3$. De matrix van P ten opzichte van deze basis is zeer eenvoudig nl.:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

We merken nog op dat P een idempotent element is van de ring $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$.

3.15.26. Zij P een idempotent in Hom(W,W). Zij $\lambda\in\sigma(P)$, dan is er dus een $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, zodat $P\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, $P^2\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}$, maar $P^2=P$, dus $(\lambda-\lambda^2)\mathbf{x}=\mathbf{0}$; $\lambda-\lambda^2=0$ en $\lambda=0$ of $\lambda=1$. Een idempotente lineaire afbeelding heeft dus geen andere eigenwaarden dan 0 of 1. Als $W\neq N(P)\neq\{\mathbf{0}\}$ komen 0 en 1 ook beide als eigenwaarden voor. Zij $W_0:=N(P)$; $W_1:=PW$, dan is W_0 de eigenruimte bij 0, W_1 de eigenruimte bij 1 en $W_0\oplus W_1=W$.

3.15.27. Zij A Hom(V,V), dim V = n. Als V een basis, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$, heeft die geheel uit eigenvectoren bestaat dan heeft A een matrix $(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ ten opzichte van deze basis die heel eenvoudig is. Het is een diagonaalmatrix, d.w.z. $a_{ij}=0$ als $i\neq j$. Op de diagonaal staan de eigenwaarden van A: $\{a_{ii}\mid 1\leq i\leq n\}=\sigma(A)$. Omgekeerd ziet men onmiddellijk: als de matrix van een lineaire afbeelding ten opzichte van een basis een diagonaalmatrix is, dan bestaat deze basis uit eigenvectoren en dan zijn de diagonaalelementen de eigenwaarden.

EIGENSCHAPPEN

3.15.28. Zij $A \in Hom(V,V)$; $\dim V = n$. Indien A een n-tal verschillende eigenwaarden heeft, dan heeft V een basis ten opzichte waarvan de matrix van A een diagonaalmatrix is.

Bewijs. 3.15.24, 3.15.27.

3.15.29. Zij $A \in Hom(V,V)$; $\dim V = n$; $\sigma(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ alle verschillend. Voor de dimensies van de eigenruimten geldt nu:

$$\sum_{i=1}^{k} m_{\lambda_i} \le n.$$

Alleen indien $\sum_{i=1}^{k} m_{\lambda_i} = n$ is het mogelijk A te beschrijven met een diagonaalmatrix ten opzichte van een geschikt gekozen basis. Helaas is niet iedere lineaire afbeelding zo *mooi*.

3.15.30. VOORBEELD. Zij $A:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de lineaire afbeelding met $A(x_1,x_2):=(x_1+x_2,x_2)$ $((x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2)$. De matrix van A ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ is dus $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Men ziet gemakkelijk dat $\sigma(A)=\{1\}$ en dat de eigenruimte bij 1 gelijk is aan $\{(x_1,0)\mid x_1\in\mathbf{R}\}$ en dus dimensie 1 heeft. Beschouw ook de draaiïng om de oorsprong in $\mathbf{R}^2$ over een hoek ϕ in positieve zin, d.w.z. tegen de klok in als $\phi\ge 0$ is. Noem deze draaiïng D_ϕ. Ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ is de matrix van D_ϕ:

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}.$$

Als $\phi\neq 2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ heeft D_ϕ geen eigenvectoren, en dus geen eigenwaarden: $\sigma(D_\phi)=\emptyset$. (Als we werken met vectorruimten over $\mathbf{C}$ dan heeft iedere lineaire afbeelding uit $Hom(V,V)$ ($\dim V$ eindig!) een niet leeg spectrum; zie 3.16.17.)

We besluiten deze paragraaf met nog enige eigenschappen van spectra.

3.15.31. Zij B een regulier element van $Hom(V,V)$ ($\dim V$ eindig) dus $0\notin\sigma(B)$. Dan is $\sigma(B^{-1})=\{\lambda^{-1}\mid \lambda\in\sigma(B)\}$. De eigenvectoren van B bij een eigenwaarde λ zijn tevens de eigenvectoren van B^{-1} nu bij eigenwaarde λ^{-1}.

3.15.32. Zij $A\in Hom(V,V)$, ($\dim V$ eindig); B regulier in $Hom(V,V)$. Dan is $\sigma(A)=\sigma(BAB^{-1})$.

Bewijs. Als $Ax=\lambda x$, dan is $BAB^{-1}(Bx)=\lambda(Bx)$.
Als $BAB^{-1}x=\mu x$, dan is $A(B^{-1}x)=\mu(B^{-1}x)$.

3.16. Matrices en determinanten

In deze paragraaf zullen we de rekentechnieken van de lineaire algebra introduceren. Voor zover bewijzen zullen ontbreken, zijn dit rechtstreekse toepassingen van de voorafgaande paragrafen, dan wel triviale verificaties. De lezer zal door het lezen van deze paragraaf de techniek niet onder de knie krijgen; het zal voor hem, indien hij een beginner is, nodig zijn nogal wat tijd te besteden aan het oplossen (= uitrekenen) van sommen die hij zichzelf zonder moeite kan opgeven.

3.16.1. Wij hebben matrices tot nu toe leren kennen als matrices van lineaire afbeeldingen. Wij hebben gezien dat de lineaire afbeelding de matrix niet éénduidig bepaalt, maar dat de matrix mede afhangt van de keuze van de bases. Allereerst zullen we daarom nagaan hoe matrices veranderen als we op een andere basis overgaan.
Zij V een n-dimensionale ruimte. Laat $u_1,\dots,u_n$ een basis van V zijn en $v_1,\dots,v_n$ eveneens. Nu bestaan er getallen s_{ji} $(1\le j\le n,\ 1\le i\le n)$ zodat

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}u_j \qquad (1\le i\le n).$$

De matrix (s_{ji}) heet de *overgangsmatrix* van de basis $u_1,\dots,u_n$ op de basis $v_1,\dots,v_n$. We beschouwen deze matrix ook als de matrix van een element van $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$, waarbij we in $\mathbf{R}^n$ de vaste basis $e_1,\dots,e_n$ gekozen hebben. Uit het feit, dat de kolommen van (s_{ji}) de coördinaten van de onafhankelijke vectoren $v_1,\dots,v_n$ ten opzichte van de basis $u_1,\dots,u_n$ zijn, volgt dat dit element van $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ regulier is. De matrix van de inverse ten opzichte van $e_1,\dots,e_n$ noteren we met $(s_{ji})^{-1}$. Men kan nagaan dat $(s_{ji})^{-1}$ de overgangsmatrix van $v_1,\dots,v_n$ op $u_1,\dots,u_n$ is.

3.16.2. Zij nu x een vector uit V. Zij $x=x_1u_1+x_2u_2+\dots+x_nu_n$. $x=x_1'v_1+x_2'v_2+\dots+x_n'v_n$; dan is in de notatie van 3.15.9:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdot & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Bovendien, als A een lineaire afbeelding van V in V is waarvan de matrix ten opzichte van $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ gelijk aan (a_{ij}) is en waarvan de matrix ten opzichte van $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ gelijk is aan (a'_{ij}), dan cijfert men na dat $(a'_{ij})=$ $=(s_{ji})^{-1}(a_{ij})(s_{ji})$. Het matrixproduct hier gebruikt is dat van 3.15.18.

3.16.3. We kunnen 3.15.27 nu ook aldus herformuleren: zij $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$ met matrix (a_{ij}) ten opzichte van een basis $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ van V; als A een n-tal onafhankelijke eigenvectoren heeft dan bestaat er een matrix (s_{ji}) zó dat $(s_{ji})^{-1}(a_{ij})(s_{ji})$ een diagonaalmatrix is. De matrix (s_{ji}) is nl. de overgangsmatrix van $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ op een basis van eigenvectoren. We zeggen dat we op de bovenstaande manier de matrix (a_{ij}) *gediagonaliseerd* hebben. Zoals we reeds in 3.15.30 opmerkten in niet iedere matrix diagonaliseerbaar.

3.16.4. Van nu af zullen we vierkante matrices beschouwen. We schrijven elementen van $\mathbf{R}^n$ weer als geordende n-tallen, d.w.z. door middel van hun coördinaten ten opzichte van de basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. (3.14.31.) Een optelling van $(n\times n)$-matrices definiëren we door de *afspraak* dat $(c_{ij})_{1\le i,j\le n}:=$ $:=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}+(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ als $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(1\le i,j\le n)$. We zullen matrices ook vermenigvuldigen en wel volgens 3.15.18, d.w.z. dat $(c_{ij})=(a_{ij})(b_{ij})$ betekent $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. De verzameling van alle $(n\times n)$-matrices met elementen uit $\mathbf{R}$ (notatie: $M_n(\mathbf{R})$) is met deze optelling en vermenigvuldiging een ring die isomorf is met $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$. (We zullen deze ring weer met $M_n(\mathbf{R})$ aangeven; als geen verwarring met lineaire afbeeldingen dreigt noteert men matrices ook wel weer met hoofdletters A, B, C, enz. In de passages waar steeds $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ als basis van $\mathbf{R}^n$ beschouwd wordt, is zulke verwarring niet gevaarlijk.)

Deze isomorfie heeft tot gevolg dat we allerlei begrippen uit $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ kunnen overnemen in $M_n(\mathbb{R})$. Zo is een matrix dan en slechts dan regulier indien de bijbehorende lineaire afbeelding regulier is; 3.16.2 brengt nu o.a. een gevolg tot uitdrukking van het feit dat het regulier zijn van een lineaire afbeelding onafhankelijk is van de gekozen basis. We spreken ook van eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix. We kunnen ook definiëren de *rang* van een matrix, als de rang van de ermee isomorfe lineaire afbeelding uit $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. We zien onmiddellijk: de rang van een matrix is het maximale aantal *lineair onafhankelijke kolommen* (3.15.10). Een belangrijke eigenschap van matrices is dat de rang ook gelijk is aan het maximale aantal *lineair onafhankelijke rijen*. De lezer kan dit met enige moeite bewijzen; wij zullen het in de volgende paragraaf als nevenresultaat moeiteloos verkrijgen (3.17.30). Het begrip rang is bovendien niet beperkt tot vierkante matrices. Is $(b_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ een matrix dan noemen we zijn rang de rang van de bijbehorende afbeelding uit $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ($\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ met standaardbases). De bovenbeschreven eigenschap luidt dan dat de dimensie van de deelruimte van $\mathbb{R}^m$ opgespannen door de kolommen van (b_{ij}) gelijk is aan de dimensie van de deelruimte van $\mathbb{R}^n$ opgespannen door de rijen van (b_{ij}).

3.16.5. DEFINITIE. *Zij* $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *een vierkante matrix. De determinant van* (a_{ij}) *definiëren we door:*

$$\det(a_{ij}) := \sum_{\sigma\in S_n} t(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

De sommatie wordt genomen over alle permutaties van $\{1,2,\dots,n\}$. $t(\sigma)$ *is gedefinieerd door:*

$$t(\sigma) := \begin{cases} 1 & \textit{als } \sigma\in A_n \\ -1 & \textit{als } \sigma\in S_n\setminus A_n. \end{cases}$$

Men gebruikt voor de determinant van (a_{ij}) vaak als notatie:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.16.6. VOORBEELD

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+ \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Voor het berekenen van determinanten staan ons velerlei hulpmiddelen ter beschikking. We sommen een aantal hiervan op. Het narekenen dat alle onderstaande beweringen inderdaad juist zijn zal van de lezer enig geduld vergen.

EIGENSCHAPPEN

3.16.7. $\det(a_{ij})=\det(a_{ji})$. "Spiegelen van de matrix verandert de determinant niet".

3.16.8. $$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1k}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{nk}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nk}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.16.9. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+\lambda a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.16.10. Als we in de determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

de i^{de} rij en j^{de} kolom weglaten, dan heet de overgebleven $((n-1)\times(n-1))$-determinant de *onderdeterminant* van het element a_{ij}; notatie: D_{ij}. Men noemt $(-1)^{i+j}D_{ij}$ de *minor* van a_{ij}. Alle termen in $\det(a_{ij})$ die het element a_{ij} bevatten hebben als som $(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}$. Hierop berust het ontwikkelen van een determinant naar de minoren van een rij of kolom:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij} \qquad (1\le j\le n).$$

3.16.11. OPGAVE. Schrijf enige determinanten van 3×3 matrices op en bereken die eerst volgens 3.16.6 en daarna door herhaalde toepassingen van 3.16.7 tot en met 3.16.10.

3.16.12. STELLING. *(Regel van Cramer). Als voor het stelsel vergelijkingen*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

geldt dat $D:=\det(a_{ij})\neq 0$ *is, dan is het éénduidig oplosbaar. De oplossing is:*

$$x_i = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1\leq i\leq n).$$

Bewijs. Als $(x_1,\ldots,x_n)$ een oplossing is dan is:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

en de linker determinant is x_1D. Evenzo voor $2\leq i\leq n$.

3.16.13. GEVOLG. *Geldt voor een homogeen stelsel van* n *vergelijkingen in* n *onbekenden dat de coëfficiënten-determinant ongelijk aan* 0 *is, dan is* $(0,\ldots,0)$ *de enige oplossing.*

Bewijs. Neem $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$ in 3.16.12.

3.16.14. GEVOLG. *Een* $(n\times n)$ *matrix is dan en slechts dan regulier indien* $\det(a_{ij})\neq 0$.

Bewijs. 3.16.13; 3.15.9; 3.15.13.

3.16.15. NOTATIE. We zullen gebruiken het *Kronecker symbool* δ_{ij} gedefinieerd door $\delta_{ij}:=\begin{cases}1 \text{ als } i=j,\\ 0 \text{ als } i\neq j.\end{cases}$

Het eenheidselement van $M_n(\mathbf{R})$ is (δ_{ij}).

3.16.16. STELLING. *Zij* $D:=\det(a_{ij})\neq 0$ *en zij* $(b_{ij})=(a_{ij})^{-1}$ *dan is* $b_{ij}=(-1)^{i+j}D^{-1}D_{ji}$.

Bewijs. Reken maar na dat $(b_{ij})(a_{ij})=(a_{ij})(b_{ij})=(\delta_{ij})$.

3.16.17. STELLING. *Zij* $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ *met matrix* (a_{ij}) *dan is* $\lambda\in\sigma(A)$ *dan en slechts dan als:* $\det(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$.

Bewijs. Een eigenvector is een oplossing ongelijk aan $(0,\ldots,0)$ van

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Pas nu toe: 3.15.20, 3.15.19; 3.16.14.

De vergelijking $\det(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$ heet de karakteristieke vergelijking van (a_{ij}). Het is een n^{de}-graads vergelijking in λ; deze heeft dus ten hoogste, met multipliciteit geteld, n oplossingen (zie ook 3.15.29). Werken we met $\mathbf{C}$ in plaats van $\mathbf{R}$ dan heeft de karakteristieke vergelijking precies *n* oplossingen (met multipliciteit geteld). Ook in $\mathbf{C}$ kan evenwel $\sum_{\lambda\in\sigma(A)} m_\lambda<n$ zijn, (zie 3.15.29).

In $\mathbf{R}$ kunnen we wel vaststellen dat iedere matrix met een oneven aantal rijen en kolommen ten minste één reële eigenwaarde met reële vectoren heeft (zie ook 8.5.2 en merk op dat de complex geconjugeerde van een oplossing ook een oplossing is.)

3.16.18. OPGAVE. Schrijf enige reguliere matrices uit $M_3(\mathbf{R})$ op en bepaal daarvan de inverse zowel door toepassing van 3.16.16 als ook door met de techniek van 3.14.39 te bepalen wat het beeld onder de inverse afbeelding (d.i. het origineel onder de oorspronkelijke afbeelding) van $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ is.

3.16.19. STELLING. *Als* $(c_{ij})=(a_{ij})(b_{ij})$, *dan is* $\det(c_{ij})= =\det(a_{ij})\det(b_{ij})$.

Bewijs. Door in de linker determinant de $n+1^e$ tot en met de $(2n)^e$ rij met geschikte factoren vermenigvuldigd bij de 1^e tot en met de n^e rij op te tellen bewijst men de gelijkheid van de determinanten op pagina 189. Het is niet moeilijk in te zien dat de linker determinant gelijk is aan $\det(a_{ij})\det(b_{ij})$ en de rechter aan $\det(c_{ij})$.

3.16.20. GEVOLG. *Is* $(b_{ij})=(a_{ij})^{-1}$, *dan is* $\det(b_{ij})= =(\det(a_{ij}))^{-1}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 \;\cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 \;\cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

3.17. Euclidische ruimten

3.17.1. DEFINITIE. *Zij* V *een reële vectorruimte. Een inwendig product in* V *is een afbeelding van* $V \times V$ *in* $\mathbf{R}$ *met de volgende eigenschappen (we duiden het beeld van een paar* $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *weer aan met* $(\mathbf{a},\mathbf{b})$*):*

(I1) $(\mathbf{x},\mathbf{x})>0$ *indien* $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$;
(I2) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}\in V)$;
(I3) $(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ $(\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R};\ \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}\in V)$.

Uit $(\mathbf{0},\mathbf{0})=(\alpha\mathbf{0},\mathbf{0})=\alpha(\mathbf{0},\mathbf{0})$ voor alle $\alpha\in\mathbf{R}$ volgt meteen dat $(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$.

3.17.2. VOORBEELD. In $\mathbf{R}^n$ krijgen we een inwendig product door de definitie: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$
$(\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n),\ \mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbf{R}^n)$; tenzij anders vermeld nemen we in $\mathbf{R}^n$ steeds dit inwendig product.

3.17.3. We zullen bekijken wat dit betekent voor de analytische meetkunde in $\mathbf{R}^2$ (aan de lezer laten we over dit ook voor $\mathbf{R}^3$ na te gaan) omdat veel van de terminologie ontleend is aan de meetkunde.
Als $\mathbf{a}=A=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$, $\mathbf{b}=B=(b_1,b_2)\in\mathbf{R}^2$ dan zijn de afstanden in het vlak (volgens Pythagoras): $\overline{AO}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\overline{BO}=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$, $\overline{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$. Zij ϕ de hoek tussen OA en OB dan rekent men na volgens de cosinusregel dat

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\phi = \tfrac{1}{2}(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2) = a_1b_1+a_2b_2 = (\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

3.17.4. Aan de vorige opmerking ontlenen we de volgende terminologie.

DEFINITIE. *Zij* V *een reële vectorruimte met inwendig product. De lengte (of norm) van een vector* $\mathbf{x}$ *(notatie:* $|\mathbf{x}|$*) is* $\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ $(\mathbf{x}\in V)$.
De afstand van de vectoren $\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}$ *(notatie:* $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$*) is* $\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}\in V)$.
De vectoren $\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}$ *heten loodrecht (of orthogonaal) (notatie:* $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$*) als* $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}\in V)$.

(Opmerking: (V,d) is een voorbeeld van wat we in 5.2.1 een metrische ruimte zullen noemen.)
Men moet de bovenstaande terminologie niet te strikt opvatten. Ook $((a_1,a_2),(b_1,b_2)):=(a_1-a_2)(b_1-b_2)+a_2b_2$ is een inwendig product in $\mathbf{R}^2$ waarbij $(1,0)\perp(1,1)$ en $|(1,1)|=1$ en $|(0,1)|= 2$. Zij, algemener, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ een basis in $\mathbf{R}^3$ dan definieert men steeds een inwendig product door:

$$(a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+a_3\mathbf{v}_3,\ b_1\mathbf{v}_1+b_2\mathbf{v}_2+b_3\mathbf{v}_3):=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Alleen indien voor de vectoren $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ geldt dat ze in de gewone meetkunde van de ruimte onderling loodrecht zijn en lengte 1 hebben, komen de begrippen lengte afstand en loodrechte stand gebaseerd op het inwendig product overeen met de begrippen uit de stereometrie.

EIGENSCHAPPEN. Steeds is V een reële vectorruimte met een inwendig product.

3.17.5. Is $\mathbf{a}\in V$ dan definieert $f(\mathbf{x}):=(\mathbf{a},\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in V)$ een lineaire functionaal op V.

3.17.6. $$\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\mathbf{x}_j,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k\mathbf{y}_k\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \alpha_j\beta_k(\mathbf{x}_j,\mathbf{y}_k)$$

(1.19.6!).

3.17.7. $\forall_{\mathbf{x}\in V}[(\mathbf{x},\mathbf{y})=0]$ dan en slechts dan indien $\mathbf{y}=\mathbf{0}$.

3.17.8. STELLING. *(De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)* $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})$ *voor alle* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. *Gelijkheid treedt dan en slechts dan op als* $\mathbf{x}$ *en* $\mathbf{y}$ *afhankelijk zijn.*

Bewijs. Als $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ is het gestelde triviaal. Stel $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Beschouw de kwadratische vorm

$$\lambda^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y},\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}).$$

Deze vorm is niet negatief voor alle $\lambda\in\mathbf{R}$ wegens 3.17.1, derhalve is de discriminant niet positief: $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})\le 0$. Bovendien zien we dat $(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})<0$ tenzij de kwadratische vorm een nulpunt heeft, d.w.z. tenzij $\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ voor zekere waarde van λ.

Men vergelijke bovenstaande stelling en bewijs met 5.9.8. Passen we deze stelling toe op het inwendige product uit 3.17.2 in $\mathbf{R}^n$, dan vinden we:

$$(x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)$$
$$(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbf{R}).$$

EIGENSCHAPPEN

3.17.9. $|\mathbf{x}|=0$ dan en slechts dan als $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

3.17.10. $|\alpha\mathbf{x}|=|\alpha|\,|\mathbf{x}|$ $(\alpha\in\mathbf{R},\ \mathbf{x}\in V)$.

3.17.11. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\leq|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ $(\mathbf{x},\mathbf{y}\in V)$.

Bewijs. Pas de definities en 3.17.8 toe.

3.17.12. $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ dan en slechts dan als $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2$. (Dit is een generalisatie van de stelling van Pythagoras.)

3.17.13. Voor alle $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$ geldt:

(a) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$,

(b) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$; $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ alleen indien $\mathbf{x}=\mathbf{y}$,

(c) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

Vergelijkt men 3.17.13 met 5.2.1 dan ziet men dat 3.17.13 juist uitdrukt dat (V,d) een metrische ruimte is. Zowel 3.17.13 (c) als 3.17.11 heten wel driehoeksongelijkheid. Reële vectorruimten met een inwendig product heten *Euclidische ruimten*.
Alles wat we in § 3.17 tot nog toe gedaan hebben is ook geldig in ruimten met dimensie oneindig.

3.17.14. OPMERKING. In complexe vectorruimten kan men met 3.17.1 geen inwendig product definiëren. De drie eisen zijn zelfs strijdig zoals blijkt uit $(i\mathbf{x},i\mathbf{x})=i(\mathbf{x},i\mathbf{x})=$ $=i(i\mathbf{x},\mathbf{x})=-(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Wil men voor vectorruimten over $\mathbf{C}$ toch een inwendig product definiëren dat geschikt is voor een lengte-begrip enz. dan vervangt men (I2) door de eis: (I2*) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$ (de bovenstreep duidt op complex conjugeren). Complexe vectorruimten met een inwendig product (dat voldoet aan (I1), (I2*) en (I3)) heten *unitaire ruimten*. In dit hoofdstuk zullen we ze verder niet beschouwen; (zie 5.10.15 en § 7.8).

3.17.15. DEFINITIE. *Zij* V *een Euclidische ruimte, zij* W *een deelverzameling van* V. *We zeggen dat* $\mathbf{x}\in V$ *orthogonaal is op* W *indien* $\forall_{\mathbf{w}\in W}\,[(\mathbf{x},\mathbf{w})=0]$. *(We gebruiken als notaties* $\mathbf{x}\perp W$ *of* $(\mathbf{x},W)=0$.*) Het orthogonale complement van* W *(notatie* $W^\perp$*) is gedefinieerd door:*

$$W^\perp := \{\mathbf{x}\in V \mid (\mathbf{x},W)=0\}.$$
$$W^{\perp\perp} := (W^\perp)^\perp.$$

EIGENSCHAPPEN

3.17.16. Is W deelverzameling van V, dan is $W^\perp$ een deelruimte van V.

3.17.17. $W\cap W^\perp\subset\{\mathbf{0}\}$.

3.17.18. $W^{\perp\perp} \supset [W]$, waarin $[W]$ de lineaire deelruimte is bestaande uit alle eindige lineaire combinaties van elementen uit W.

3.17.19. DEFINITIE. *Een eindig of oneindig stelsel* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ *in een Euclidische ruimte heet orthonormaal indien:*

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j \in \mathbb{N}).$$

3.17.20. VOORBEELD. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ is een orthonormaal stelsel in $\mathbb{R}^n$ (met het inwendige product uit 3.17.2).

We zullen van nu af aan slechts beschouwen eindig dimensionale Euclidische ruimten. Zoals uit 3.17.21 zal blijken zijn dan ook alle orthonormale stelsels eindig. In § 7.8 zullen we een aantal van de stellingen die we in deze paragraaf voor eindige dimensie bekijken in een oneindig dimensionale Euclidische ruimte ontmoeten.

3.17.21. STELLING. *Zij* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *een orthonormaal stelsel dan is* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *ook een lineair onafhankelijk stelsel.*

Bewijs. Uit $\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ volgt: $0 = (\sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^k a_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{ij} = a_j \quad (1 \le j \le k)$.

3.17.22. STELLING. *Zij* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *een basis van de Euclidische ruimte* V; *zij* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *tevens een orthonormaal stelsel (orthonormale basis). Dan is voor alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:

$$\text{(i)} \qquad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i,$$

$$\text{(ii)} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)(\mathbf{y}, \mathbf{v}_i) \qquad (\textit{Parseval}),$$

$$\text{(iii)} \qquad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)^2.$$

Bewijs. (i) Omdat $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ een basis is, is $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n$ voor zekere $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dan is $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = x_j \quad (1 \le j \le n)$. (ii) Als $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j$ dan is $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. (iii) Neem $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ in Parseval's identiteit.

Ook de identiteit (iii) wordt wel naar Parseval genoemd. Stelling 3.17.22 spreekt uit dat de coördinaten van een vector ten opzichte van een orthonormale basis berekend kunnen worden als inwendige producten ((i)). Voorts: als A de lineaire afbeelding is van V in $\mathbf{R}^n$ vastgelegd door $Av_i := e_i$ $(1 \le i \le n)$ dan geldt voor elk tweetal vectoren dat $(x,y)=(Ax,Ay)$, het laatste inwendige product berekend volgens 3.17.2. Iedere n-dimensionale Euclidische ruimte die een orthonormale basis heeft (we zullen in 3.17.23 zien dat iedere n-dimensionale Euclidische ruimte een orthonormale basis heeft), is dus ook als ruimte met inwendig product isomorf met $\mathbf{R}^n$. Dit is de betekenis van Parseval's identiteit.

3.17.23. STELLING. *Iedere eindig dimensionale Euclidische ruimte heeft een orthonormale basis.*

Bewijs. Zij $u_1,\dots,u_n$ een basis van de ruimte. We construeren uitgaande van deze basis een orthonormale basis $v_1,\dots,v_n$ door middel van het zogenaamde orthonormalisatieproces van *Gram-Schmidt:*

$v_1 := (|u_1|)^{-1}u_1$; $w_2 := u_2-(u_2,v_1)v_1$; $v_2 := (|w_2|)^{-1}w_2$;

nu is reeds $|v_1|=|v_2|=1$, $(v_1,v_2)=0$. Vervolgens: $w_3 := u_3-(u_3,v_1)v_1-(u_3,v_2)v_2$; $v_3 := (|w_3|)^{-1}w_3$ (ga na dat $w_3 \neq 0$!), dan is $|v_3|=1$; $(v_1,v_3)=(v_2,v_3)=0$. Zo gaan we door: $w_4 := u_4-(u_4,v_1)v_1-(u_4,v_2)v_2-(u_4,v_3)v_3$; $v_4 := (|w_4|)^{-1}w_4$. Enzovoort. Na de n^e stap hebben we een orthonormale basis $v_1,v_2,\dots,v_n$ verkregen.

3.17.24. GEVOLG. *Zij* V *een Euclidische ruimte,* dim V = n; *zij* W *een deelruimte,* dim W = k < n, *dan heeft* V *een orthonormale basis* $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$ *waarvan* $v_1,\dots,v_k$ *een orthonormale basis van* W *is.*

Bewijs. Pas het Gram-Schmidt proces toe op een basis als aangegeven in 3.14.36.

3.17.25. GEVOLG. *In de notatie van* 3.17.24 *is* $v_{k+1},\dots,v_n$ *een orthonormale basis voor* $W^\perp$; $\dim W^\perp = n - \dim W$; $W^{\perp\perp}=W$. *Bovendien:* $V=W\oplus W^\perp$ (3.14.41).

We merken op dat de laatste bewering inhoudt dat elke $x\in V$ op éénduidige wijze geschreven kan worden als $x=y+z$ met $y\in W$, $(z,W)=0$. Deze vector y heet de *projectie van* x *op* W. Is in het bijzonder $W=\{\lambda w \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$ waarbij $|w|=1$, dan is de projectie van x op W gelijk aan: $(x,w)w$. In de schrijfwijze $x = \sum_{i=1}^n (x,v_i)v_i$ ($v_1,\dots,v_n$ orthonormale basis) is x dus geschreven als de som van zijn projecties op de loodrechte assen $[v_1],[v_2],\dots,[v_n]$.

We wijzen er met nadruk op dat in 3.17.25 op essentiële wijze gebruik gemaakt is van het feit dat dim V eindig is. Is $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ een orthonormaal stelsel in een Euclidische ruimte dat geen basis is, dan zijn 3.17.22 (iii) en (i) te verzwakken.

3.17.26. STELLING. *(De ongelijkheid van Bessel). Is* $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ *een orthonormaal stelsel in de Euclidische ruimte* V, *dan is*

(i) $\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x},\mathbf{v}_i)^2 \leq |\mathbf{x}|^2$,

(ii) $(\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x},\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i) \in [\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k]^{\perp}$.

Bewijs. Vul $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ aan tot een orthonormale basis $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ van V (men verifiëre dat dit kan) en pas 3.17.22 en 3.17.25 toe.

3.17.27. OPMERKING. Stelling 3.17.26 geldt ook in oneindig dimensionale Euclidische ruimten. Men kan een bewijs geven aldus:

(i) Zij $\mathbf{x}' := \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x},\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i$; dan is $0 \leq (\mathbf{x}',\mathbf{x}') =$ $= (\mathbf{x},\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x},\mathbf{v}_i)^2$.

(ii) Voor $1\leq j\leq k$ geldt $(\mathbf{x}',\mathbf{v}_j)=(\mathbf{x},\mathbf{v}_j)-(\mathbf{x},\mathbf{v}_j)=0$, dus $\mathbf{x}'\perp[\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k]$.

3.17.28. In 3.15.9 zagen we dat iedere lineaire functionaal f in een n-dimensionale ruimte beschreven kan worden met een rij van n reële getallen: $a_1,\dots,a_n$ zó dat bij basis $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ geldt:

$$f(x_1\mathbf{v}_1+\dots+x_n\mathbf{v}_n) = a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n.$$

In een n-dimensionale Euclidische ruimte kunnen we nu ook zeggen:

3.17.29. STELLING. *Zij* V *een* n*-dimensionale Euclidische ruimte; is* $f:V\to\mathbb{R}$ *een lineaire functionaal, dan bestaat er één en precies één* $\mathbf{a}\in V$ *zó dat:* $f\mathbf{x}=(\mathbf{a},\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in V)$.

Bewijs. Kies een orthonormale basis $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ in V; zij $f\mathbf{e}_i=a_i$; $(1\leq i\leq n)$; en neem $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i$. Nu is

$x = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i$; $fx = \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)a_i = (a,x)$ (Parseval).
Als $\forall_{x\in V} [(x,a)=(x,b)]$ volgt $a=b$ uit 3.17.7.

We besluiten deze paragraaf met de discussie die in 3.16.4 is aangekondigd.

3.17.30. STELLING. *Van iedere reële* $(m\times n)$*-matrix* $(m,n\in\mathbf{N})$ *geldt dat de dimensie van de deelruimte van* $\mathbf{R}^m$ *opgespannen door de* n *kolommen gelijk is aan de dimensie van de deelruimte van* $\mathbf{R}^n$ *opgespannen door de* m *rijen.*

Bewijs. (We zullen spreken van de rijenruimte en de kolommenruimte.) Zij de matrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$;
deze vatten we op als de matrix van een lineaire afbeelding $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ met standaardbases en het "gewone" inwendige product uit 3.17.2. De kolommen van (a_{ij}) spannen $A\mathbf{R}^n$ op, dus rang A is gelijk aan de dimensie van de kolommenruimte.
We definiëren: $a_1:=(a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,a_m:=(a_{m1},\dots,a_{mn})$.
Zij $x=(x_1,\dots,x_n)$. Het stelsel vergelijkingen $(a_1,x)=0$, $\dots$, $(a_m,x)=0$ heeft als oplossingen juist de vectoren uit $N(A)$. Met de betekenis van het inwendig product voor ogen zien we dus dat $N(A)=[a_1,\dots,a_m]^\perp$. Nu is enerzijds $\dim[a_1,\dots,a_m]^\perp = \dim N(A) = n - \text{rang } A$ (3.15.11), anderzijds is $\dim[a_1,\dots,a_m]^\perp = n - \dim[a_1,\dots,a_m]$ (3.17.25).
Dus rang $A = \dim[a_1,\dots,a_m]$.

3.17.31. GEVOLG. *Voor het homogene stelsel vergelijkingen* $\ell_1=0$, $\ell_2=0$, $\dots$, $\ell_m=0$, *met* $\ell_1,\dots,\ell_m\in L[x_1,\dots,x_n]$ *geldt dat de dimensie van de oplossingsruimte gelijk is aan* $n-\dim[\ell_1,\dots,\ell_m]$.

Voor gebruik in een later hoofdstuk (6.6.1) bespreken we nog één stelling:

3.17.32. STELLING. *Zij* A *een lineaire afbeelding van een* n*-dimensionale Euclidische ruimte* V *in een* m*-dimensionale Euclidische ruimte* W *dan bestaat er een getal* $M\in\mathbf{R}$ *zó dat* $\forall_{x\in V} [\,|Ax|\le M|x|\,]$.

Bewijs. Zonder verlies aan algemeenheid mogen we aannemen $V:=\mathbf{R}^n$, $W:=\mathbf{R}^m$ (3.17.22). Laat A t.o.v. de stan-

daardbases matrix $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ hebben.
Zij $M := (\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2))^{\frac{1}{2}}$.
Als $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ dan is: $|\mathbf{x}|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$ en

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n)^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} (a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2)(x_1^2+\ldots+x_n^2) = M^2|\mathbf{x}|^2,$$

wegens 3.17.8.

3.18. Orthogonale lineaire afbeeldingen

In deze paragraaf beschouwen we als vectorruimten alleen de Euclidische ruimten $\mathbf{R}^n$ ($n\in\mathbf{N}$) met standaardbasis, e_1, $\ldots,e_n$ en het inwendig product als in 3.17.2. Volgens 3.17.22 is dit echter geen beperking van de algemeenheid.

3.18.1. DEFINITIE. *Zij* $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ *een matrix. Dan is de geadjungeerde (ook wel getransponeerde) matrix (notatie:* $(a_{ij})^T$*) de matrix* $(a_{ji})_{1\le j\le n,\ 1\le i\le m}$.

De geadjungeerde matrix ontstaat dus door in de oorspronkelijke matrix rijen en kolommen te verwisselen. Als men (evenals in 3.15.8) een vector uit $\mathbf{R}^n$ voorstelt als een matrix met n rijen en één kolom dan is volgens deze notatie: $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^T\mathbf{y}$. Voor een vierkante matrix kunnen we nu 3.16.7 herschrijven als $\det(a_{ij})=\det(a_{ij})^T$.

3.18.2. DEFINITIE. *Zij* $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ *lineair, dan is* $A^T:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ *de lineaire afbeelding waarvan de matrix de getransponeerde is van de matrix van* A.

EIGENSCHAPPEN

3.18.3. Als $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, $B\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^p)$, dan is $(BA)^T=A^TB^T$.

3.18.4. Als A $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$, dan geldt

$$\forall_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n}\ \forall_{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n}\ [(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A^T\mathbf{y})].$$

Zowel van 3.18.3 als van 3.18.4 is het bewijs simpele verificatie. De lezer doet er goed aan zich te realiseren dat ook ten opzichte van andere orthonormale bases dan de standaardbases in $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ de matrices van A en A^T geadjungeerd zijn (zie 3.18.14).

3.18.5. DEFINITIE. $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *heet orthogonaal indien:* $\forall_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} [\, |A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|\,]$.

3.18.6. VOORBEELD. Is A de draaiïng over een hoek ϕ om de oorsprong in $\mathbf{R}^2$ (3.15.30) dan is A orthogonaal. Met behulp van de matrix van A die we reeds in 3.15.30 vermeldden vinden we nl.

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (x_1 \cos\phi - x_2 \sin\phi)^2 + (x_1 \sin\phi + x_2 \cos\phi)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

3.18.7. Orthogonale afbeeldingen laten ook de afstanden invariant - we zeggen: het zijn isometrieën (5.7.19) - immers: $d(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = |A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| = |A(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Omgekeerd is iedere lineaire isometrie van $\mathbf{R}^n$ op zichzelf ook orthogonaal. De volgende stelling geeft een aantal karakteriseringen van orthogonale lineaire afbeeldingen.

3.18.8. STELLING. *Zij* $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. *De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(a) A *is orthogonaal;*

(b) $\forall_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} \forall_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n} [\,(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\,]$;

(c) A *is regulier en* $A^{-1} = A^T$;

(d) $AA^T = I$;

(e) $A^T A = I$;

(f) *De rijen van de matrix van* A *vormen een orthonormaal stelsel in* $\mathbf{R}^n$;

(g) *De kolommen van de matrix van* A *vormen een orthonormaal stelsel in* $\mathbf{R}^n$;

Bewijs. We merken op dat, omdat een orthonormaal stelsel van n vectoren, volgens 3.17.21 ook een basis vormt, de gelijkwaardigheid van (c) tot en met (g) triviaal is. Zij gegeven (a), dan is voor ieder tweetal vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y});$$
$$(A(\mathbf{x}+\mathbf{y}), A(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = (A\mathbf{x},A\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{x},A\mathbf{y}) + (A\mathbf{y},A\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{x},A\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Hieruit volgt (b).
Uit (b) volgt (g) want de i^e kolom van de matrix van A is $A\mathbf{e}_i$ en $(A\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$.
Tenslotte volgt uit (g) weer (a), want als $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$

een orthonormale basis is, geldt voor $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$ wegens 3.17.22 (ii) dat:

$$(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (Ae_i, Ae_j) = (Ax,Ax).$$

OPMERKING. Met de interpretatie van het inwendig product in $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$ betekent (b) dat onder een orthogonale afbeelding niet alleen elke lengte maar ook de cosinus van elke hoek behouden blijft.

EIGENSCHAPPEN

3.18.9. Het product van orthogonale afbeeldingen is orthogonaal. Is A orthogonaal dan is ook $A^{-1}=A^T$ orthogonaal. I is orthogonaal. De orthogonale afbeeldingen van $\mathbf{R}^n$ ($n\geq 2$) vormen een niet-commutatieve groep.

De groep van de orthogonale afbeeldingen van $\mathbf{R}^3$ op $\mathbf{R}^3$ speelt een belangrijke rol in de natuurkunde.

3.18.10. Als $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ orthogonaal is, dan is $\sigma(A)\subset\{1,-1\}$. Is n oneven dan is er steeds tenminste één eigenwaarde (3.16.17; 8.5.2).

3.18.11. Is A orthogonaal met matrix (a_{ij}) dan is $\det(a_{ij})=$ $=1$ of $\det(a_{ij})=-1$

Bewijs. 3.16.7; 3.16.20; 3.18.8 (c).

Orthogonale afbeeldingen waarvoor de determinant +1 is heten *direct orthogonaal*, die waarvoor de determinant -1 is heten *gespiegeld orthogonaal*. De direct orthogonale afbeeldingen vormen een normale ondergroep van de groep der orthogonale afbeeldingen.
Teneinde enig begrip te krijgen van de meetkundige achtergrond van deze terminologie zullen we nu uitzoeken welke orthogonale afbeeldingen van $\mathbf{R}^2$ er bestaan.

3.18.12. STELLING. *Iedere orthogonale afbeelding van* $\mathbf{R}^2$ *is hetzij een draaiing om* O, *hetzij een spiegeling aan een rechte door* O.

Zonder dat we er veel woorden aan besteden zal de lezer begrijpen dat onder "spiegeling aan een rechte door O" verstaan wordt de lineaire afbeelding S bepaald door: $Sx:=x$ als $x\in L$ (L stelt de rechte voor), $Sx=-x$ als $x\in L^{\perp}$ (zie 3.21.33).

Bewijs. We puzzelen dit uit. Laat de matrix van de orthogonale afbeelding $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zijn.

Dan is $a^2+c^2=b^2+d^2=1$, $ab+cd=0$. Nu is $(a,c)\neq(0,0)$; uit $ab+cd=0$ volgt dan dat er een μ bestaat met $d=\mu a$, $b=-\mu c$. Omdat $b^2+d^2=1$ is $\mu^2=1$. We zien dat $\mu=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$.
Er zij twee mogelijkheden:

(i) $\mu=1$; de matrix is $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a\end{pmatrix}$ waarbij $a^2+c^2=1$.

Stelt men $a = \cos\phi$, $c = \sin\phi$ dan is duidelijk dat de afbeelding een draaiïng om O over een hoek ϕ is (3.15.30).

(ii) $\mu=-1$; met $a = \cos\psi$, $c = \sin\psi$ is de matrix nu:

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Men verifieert zonder moeite dat de afbeelding nu is een spiegeling aan de rechte $L:=\{\lambda(\cos\frac{1}{2}\psi, \sin\frac{1}{2}\psi) \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$.

3.18.13. OPGAVE. Zij A een direct orthogonale afbeelding van $\mathbf{R}^3$ op $\mathbf{R}^3$. Bewijs:
(i) A heeft een eigenwaarde +1.
(ii) Er is een rechte door O die in de eigenruimte bij +1 bevat is.
(iii) De afbeelding is een draaiïng om de rechte uit (ii).

In de volgende paragraaf zullen we weer overgangen van een basis op een andere basis maken; daarbij gebruiken we het volgende resultaat waarvan we het bewijs aan de lezer overlaten.

3.18.14. OPGAVE. Zij V een n-dimensionale Euclidische ruimte; $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ en $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ orthonormale bases, dan is de overgangsmatrix van de basis $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ op de basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een orthogonale matrix. Bewijs dit.

3.19. Symmetrische lineaire afbeeldingen

We beschouwen een Euclidische ruimte V.

3.19.1. DEFINITIE. *Een afbeelding* $A:V\to V$ *heet symmetrisch (of zelfgeadjungeerd) indien:*

$$\forall_{\mathbf{x}\in V}\ \forall_{\mathbf{y}\in V}\ [(\mathbf{x},A\mathbf{y})=(A\mathbf{x},\mathbf{y})].$$

Elke symmetrische afbeelding is lineair. De lezer ga dit zelf na.

3.19.2. DEFINITIE. *Een* $(n\times n)$ *matrix* (a_{ij}) *heet symmetrisch indien* $a_{ij}=a_{ji}$ $(1\le i,j\le n)$.

We nemen verder aan dat de dimensie van V eindig is. Beide begrippen hadden we dan ook kunnen formuleren met $A^T=A$, resp. $(a_{ij})^T=(a_{ij})$, ze zijn verbonden door 3.19.3.

3.19.3. STELLING. *Zij* $v_1,\ldots,v_n$ *een orthonormale basis van* V. $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$ *is dan en slechts dan zelf-geadjungeerd als de matrix van* A *t.o.v.* $v_1,\ldots,v_n$ *symmetrisch is.*

Bewijs. (i) Zij A zelf-geadjungeerd met matrix (a_{ij}), dan is: $a_{ij}=(v_i,Av_j)=(Av_i,v_j)=a_{ji}$ $(1\le i,j\le n)$.
(ii) Als $(a_{ij})^T=a_{ij}$ volgt door uitschrijven van de inwendige producten met 3.17.22 (ii) dat $(x,Ay)=(Ax,y)$ $(x,y\in V)$.

OPMERKING. Ten opzichte van een niet-orthonormale basis, hoeft een symmetrische afbeelding geen symmetrische matrix te hebben.

3.19.4. STELLING. *Iedere reële symmetrische matrix heeft ten minste één reële eigenwaarde.*

De lezer die niet vertrouwd is met **C** leze het bewijs later (na § 4.4).

Bewijs. Laat de matrix van de afbeelding zijn (a_{ij}). We beschouwen deze als matrix van een afbeelding van $\mathbf{C}^n$ in zichzelf. Binnen **C** is de karakteristieke vergelijking: $\det(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$ oplosbaar (8.5.2). We vinden zo een eigenwaarde $\lambda\in\mathbf{C}$ en een eigenvector $x\in\mathbf{C}^n$, $x\neq 0$. Omdat alle coëfficiënten uit **R** zijn, is dan ook $\bar\lambda$ eigenwaarde met eigenvector $\bar x$ (iedere component van $\bar x$ is de geconjugeerde van de overeenkomstige component van x). We berekenen nu $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i\bar x_j$ op twee manieren. Enerzijds is $\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar x_j = \bar\lambda\bar x_i$ anderzijds is $\lambda x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$. Zo vinden we $\lambda\sum_{j=1}^n x_j\bar x_j = \bar\lambda\sum_{i=1}^n x_i\bar x_i$. Nu is $\sum_{j=1}^n x_j\bar x_j = \sum_{j=1}^n |x_j|^2>0$, omdat x als eigenvector ongelijk 0 is. Derhalve is $\lambda=\bar\lambda$; dus λ is reëel. (We hebben zelfs bewezen dat alle eigenwaarden van een reële symmetrische matrix beschouwd als element van $M_n(\mathbf{C})$ reëel zijn.)

3.19.5. STELLING. *Voor iedere eindig-dimensionale Euclidische ruimte* V *en voor iedere symmetrische lineaire afbeelding* A *van* V *in* V *geldt dat* V *een orthonormale basis heeft die bestaat uit eigenvectoren van* A.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar de dimensie van V. Als dim V = 1 is iedere vector $v\neq 0$ eigenvector, we nemen er één met $|\mathbf{v}|=1$. Neem nu aan dat de bewering geldt voor elke $(n-1)$-dimensionale vectorruimte en elke symmetrische afbeelding er van. Zij A symmetrisch in $\mathrm{Hom}(V,V)$, $\dim V = n$; zij λ een (reële) eigenwaarde van A en $\mathbf{v}_n$ een eigenvector met lengte 1 (3.19.4). Nu is $[\mathbf{v}_n]^\perp$ een $(n-1)$-dimensionale ruimte, V_{n-1}, en de restrictie van A tot V_{n-1} is een symmetrische afbeelding. (We hoeven alleen te laten zien dat $A(V_{n-1})\subset V_{n-1}$ en dit is zo omdat $(\mathbf{v}_n,A\mathbf{x})=(A\mathbf{v}_n,\mathbf{x})=\lambda(\mathbf{v}_n,\mathbf{x})$ en $(\mathbf{v}_n,\mathbf{x})=0$ indien $\mathbf{x}\in V_{n-1}$. Volgens de inductieveronderstelling heeft V_{n-1} een orthonormale basis van eigenvectoren $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$. Dan is $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ een orthonormale basis van V, die uit eigenvectoren van A bestaat.

3.19.6. GEVOLG. *Is* A *een symmetrische lineaire afbeelding van* V *in* V *en is* $\dim V = n$, *dan heeft* V *een basis ten opzichte waarvan de matrix van* A *een diagonaalmatrix is.*

Bewijs. 3.19.5; 3.15.27.

3.19.7. GEVOLG. *Is* $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *een symmetrische matrix, dan bestaat er een orthogonale matrix* $(s_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *zodat* $(s_{ji})(a_{ij})(s_{ij})$ *een diagonaalmatrix is.*

Bewijs. 3.19.5; 3.18.14; 3.16.2; 3.18.8 (c).

3.19.8. Dit laatste gevolg heeft als consequentie dat elke homogene kwadratische vorm (homogeen betekent: alle termen zijn van dezelfde graad) in de veranderlijken $x_1,\ldots,x_n$ geschreven kan worden als een lineaire combinatie van kwadraten. Allereerst stellen we vast dat *iedere* kwadratische vorm in $x_1,\ldots,x_n$ te schrijven is als

$$(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

met een symmetrische matrix (a_{ij}). Als (a_{ij}) de matrix van $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ (standaardbasis) is en $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ staat hier: $(A\mathbf{x},\mathbf{x})$. Zij volgens 3.19.7: $(s_{ji})(a_{ij})(s_{ij})=(\lambda_i\delta_{ij})$ waarbij (s_{ij}) orthogonaal is en λ_i de eigenwaarden van (a_{ij}) zijn. Dan is $(a_{ij})=(s_{ij})(\lambda_i\delta_{ij})(s_{ji})$, en de kwadratische vorm is $\sum_{i=1}^n \lambda_i(s_{1i}x_1+\ldots+s_{ni}x_n)^2$.

Wil men van een gegeven kwadratische vorm $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ met $a_{ij}=a_{ji}$, de schrijfwijze als lineaire combinatie van kwadraten opschrijven dan moet men blijkbaar de eigenwaarden en eigenvectoren van de symmetrische matrix opsporen. We maken nog een triviale opmerking: een kwadratische vorm is positief (niet-negatief) definiet dan en slechts dan als alle eigenwaarden van de bijbehorende symmetrische matrix positief (niet negatief) zijn. De mogelijkheid een homogene kwadratische vorm te schrijven als lineaire combinatie van kwadraten is van groot belang voor de analytische meetkunde van de tweedegraads krommen en oppervlakken.

3.20. Aanvullingen

In deze korte paragraaf bespreken we voornamelijk aan de hand van opgaven een aantal begrippen die niet meer met elkaar gemeen hebben, dan dat vectorruimten over een lichaam er een rol in spelen. Voor het maken van de opgaven uit paragraaf 3.21 is kennis van deze begrippen niet nodig.

3.20.1. Zij (R,+,) een commutatief lichaam; zij (S,+,) een deellichaam. Dan kan men R beschouwen als een vectorruimte over S indien men als optelling neemt de lichaamsoptelling en als scalaire vermenigvuldiging de lichaamsvermenigvuldiging met elementen van S.
In 3.10.5 zeiden we in deze situatie dat (R,+,) een uitbreiding is van (S,+,). We zeggen dat deze uitbreiding *eindig* is indien R als vectorruimte over S eindig dimensionaal is; dit betekent dus dat R een eindige basis heeft; er bestaan dan elementen $r_1,\ldots,r_n \in R$ zodanig dat elk element $r\in R$ eenduidig geschreven kan worden als lineaire combinatie $r:=s_1r_1+s_2r_2+\ldots+s_nr_n$ met $s_1,\ldots,s_n\in S$. De dimensie van deze vectorruimte heet de graad van de uitbreiding.

3.20.2. OPGAVE. Zij (R({s}),+,) een enkelvoudige algebraïsche uitbreiding van (R,+,). Bewijs dat dit een eindige uitbreiding is, waarvan de graad gelijk is aan de graad van p(x) als p(x)=0 een definiërende vergelijking van R({s}) is. Geef een basis aan van R({s}) als vectorruimte over R.

3.20.3. STELLING. *Iedere eindige uitbreiding van een lichaam is algebraïsch (zie* 3.10.5*).*

Bewijs. Laat (R,+,) een uitbreiding van de graad n van $(S,+,\ )$ zijn. Zij $s\in R\setminus S$, dan is $e=:s^0,s,s^2,\ldots,s^n$ een $(n+1)$tal elementen uit R; deze zijn lineair afhankelijk, dus er bestaat $a_0,\ldots,a_n\in S$ zó dat $\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0$, $(a_0,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$, m.a.w. s is een nulpunt van een polynoom $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ in $S[x]$.

3.20.4. OPGAVE. Laat $(R,+,\ )$ een eindige uitbreiding zijn van $(S,+,\ )$ van de graad n, laat $(S,+,\ )$ een uitbreiding zijn van $(T,+,\ )$ van de graad m. Bewijs dat $(R,+,\ )$ een eindige uitbreiding is van $(T,+,\ )$ van de graad mn.

3.20.5. OPGAVE. Een eindig lichaam is een eindige uitbreiding van zijn priemlichaam. Laat zien dat hieruit stelling 3.10.13 volgt.

3.20.6. $(GF(2))^n$

We beschouwen $(GF(2))^n$. Deze verzameling bestaat uit alle geordende n-tallen van nullen en enen. $(GF(2))^n$ is een vectorruimte over $GF(2)$ indien we definiëren
$(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n):=(c_1,\ldots,c_n)$ indien $a_i+b_i\equiv c_i \pmod 2$
$(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n\in GF(2))$ en $1\mathbf{a}:=\mathbf{a}$; $0\mathbf{a}:=\mathbf{0}$
$(\mathbf{a}\in(GF(2))^n)$.
Merk op dat als V een willekeurige niet lege verzameling $P(V)$ is met als optelling symmetrisch verschil en als scalair product $0\cdot V_0:=\emptyset$; $1\cdot V_0:=V_0$ $(V_0\subset V)$ een vectorruimte over $GF(2)$ is.
De lezer doet er goed aan zich voor ogen te stellen wat we tot op heden zoal over de verzamelingen van de geordende n-tallen van nullen en enen gezegd hebben: we kennen ze als karakteristieke functies van $P(\mathbf{N}_n)$ (2.4.10); in 2.6.30 introduceerden we een ordening; uit 2.6.30 en 2.8.27 bleek dat ze een Boole tralie vormden; de groepseigenschap die aan de huidige beschouwing als vectorruimte ten grondslag ligt is bekend na 3.3.21 (d) en 3.4.10 (a); volgens 3.12.10 en 3.12.8 of 3.12.3 zijn ze ook te beschouwen als Boole algebra en Boole ring, volgens 3.12.25 zelfs als de enige eindige Boole algebra's en Boole ringen (tot op isomorfie na); uit 3.20.5 volgt tenslotte dat $GF(2^n)$ (3.10.14) een vectorruimte van dimensie n over $GF(2)$ is en uit de analoge stelling van 3.14.37 volgt dat $GF(2^n)$ als vectorruimte isomorf is met $(GF(2))^n$. In alle gevallen waarin sprake is van een optelling is dit dezelfde; de eventuele aanwezige vermenigvuldigingen kunnen echter verschillen.

3.20.7. OPGAVE. Representeer het lichaam $GF(16)$ (3.10.15) en de Boole ring $(P(\{1,2,3,4\}),\dotplus,\cap)$ (3.12.3) beide met de elementen van $(GF(2))^4$. Geef regels voor de opstelling van de producttafels van de lichaamsvermenigvuldiging in de voorstelling van GF(16) en van "doorsnede" in de voorstelling van $(P(\mathbf{N}),\dotplus,\cap)$.

CONVEXE VERZAMELINGEN IN $\mathbf{R}^n$.

We beschouwen $\mathbf{R}^n$ als Euclidische ruimte met de standaardbasis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

3.20.8. DEFINITIE. *Een deelverzameling* $U\subset\mathbf{R}^n$ *heet convex indien* $\forall_{\mathbf{x}\in U}\ \forall_{\mathbf{y}\in U}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ [\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in U]$.

Als voorbeelden merken we op dat iedere lineaire variëteit convex is; en dat $\{\mathbf{x}\mid x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0\}$ convex is (zie 5.9.1). Het is duidelijk dat de doorsnede van convexe verzamelingen convex is.
Laat $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\in\mathbf{R}^n$ (in meetkundige beschouwingen als deze schrijft men ook vaak hoofdletters voor de elementen: $P_1,\ldots,P_k\in\mathbf{R}^n$).
Het *convexe polytoop* opgespannen door $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ (notatie: $C(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k)$) is gedefinieerd door:

$$C(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k):=\{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i\mathbf{x}_i \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbf{R}^+,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

3.20.9. OPGAVE. (a) Bewijs dat ieder convex polytoop een convexe verzameling is.

(b) Bewijs dat, als $\mathbf{x}\in C(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$, dat dan $C(\mathbf{x},\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)=C(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$.

(c) Bewijs dat $C(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ de doorsnede is van alle convexe verzamelingen die $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ bevatten.

(d) Bewijs dat er een deelverzameling $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_\ell\}\subset\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ bestaat zó dat

(i) $C(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_\ell)=C(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$,

(ii) $\mathbf{b}_i\notin C(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{i-1},\mathbf{b}_{i+1},\ldots,\mathbf{b}_\ell)$ $\quad(1\leq i\leq\ell)$.

De elementen $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_\ell$ heten de hoekpunten van het convexe polytoop $C(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$.

(e) Bewijs dat de verzameling der hoekpunten éénduidig bepaald is door het convexe polytoop.

(f) Bewijs dat $\{\mathbf{x}\mid x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ een convex polytoop is met hoekpunten $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$.

3.20.10. DEFINITIE. *Een convex polytoop* $C(\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ *heet een* k-*simplex indien het stelsel* $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_0$ *lineair onafhankelijk is.*

3.20.11. OPGAVE. Zij $C(\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ een k-simplex.

(a) Bewijs dat ieder element $\mathbf{x}\in C(\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ ééndui-

dig te schrijven is als $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i\mathbf{a}_i$ met $\lambda_i \geq 0$, $0 \leq i \leq k$ en $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

(b) Bewijs dat $\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_k$ de hoekpunten van het k-simplex zijn.

3.21. Opgaven over lineaire algebra

We herhalen: de lezer die lineaire algebra werkelijk leren wil zal vaardigheid in het numerieke werken met concrete bases, lineaire vergelijkingen, determinanten enz. moeten verwerven. Daarvoor is het oplossen van een zeker aantal "rekensommen" noodzakelijk. In deze paragraaf komt slechts een gering aantal dergelijke vraagstukken voor; de lezer zal naar behoefte zelf meer opgaven moeten opstellen en oplossen.

3.21.1. (a) Bewijs dat $\mathbf{Q}^n$ met de definities

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) := (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$
$$\alpha(x_1,\ldots,x_n) := (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$$
$$(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n,\alpha\in\mathbf{Q})$$

een lineaire ruimte over $\mathbf{Q}$ is. Bepaal de dimensie en een basis.

(b) Bewijs dat $\mathbf{R}^n$ met de gebruikelijke optelling en met als vermenigvuldiging: $\alpha(x_1,\ldots,x_n) := (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$ $(\alpha\in\mathbf{Q},\ x\in\mathbf{R}^n)$

een lineaire ruimte over $\mathbf{Q}$ is. Wat geldt nu voor de dimensie?

3.21.2. Bewijs dat de doorsnede van een aantal lineaire deelruimten van een vectorruimte zelf een vectorruimte is.

3.21.3. (a) Bewijs dat in $\mathbf{R}^3$ de verzameling $\{\lambda\mathbf{v} \mid -\infty<\lambda<\infty\}$ een rechte door (0,0,0) voorstelt tenzij $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(b) Bewijs dat de vectoren met eindpunten op een rechte geschreven kunnen worden als $\mathbf{x}=\mathbf{a}+t\mathbf{v}$ met $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, $-\infty<t<\infty$. We noemen dit een parametervoorstelling van de rechte met $\mathbf{a}$ als steunvector, $\mathbf{v}$ als richtingsvector, t als parameter.

(c) Bewijs dat de parametervoorstelling van een vlak in $\mathbb{R}^3$ is: $\mathbf{x}=\mathbf{a}+t_1\mathbf{v}_1+t_2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ onafhankelijk, $-\infty<t_1,t_2<\infty$.

(d) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak met vergelijking $2x-y+z=3$ en eveneens van de snijlijn van de vlakken $x+y=1$ en $2x-y+z=3$ (we schrijven (x,y,z) i.p.v. (x_1,x_2,x_3)).

(e) Bepaal een vergelijking van het vlak met parametervoorstelling $\mathbf{x}=(1,2,3)+t_1(0,1,1)+t_2(1,0,-2)$.

3.21.4. Bewijs dat de vergelijking van het vlak in $\mathbb{R}^3$ gaande door $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3)$ en $R=(r_1,r_2,r_3)$ is:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.21.5. Ga van de volgende deelverzamelingen van de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ na of het lineaire variëteiten zijn. Bepaal de dimensie van die deelverzamelingen die een lineaire variëteit zijn en ook een basis indien de deelverzameling zelfs een deelruimte is.

(a) $\{\mathbf{x} \mid x_1=0\}\cup\{\mathbf{x} \mid x_2=0\}$.

(b) $\{\mathbf{x} \mid x_1^2+\ldots+x_n^2=1\}$.

(c) $\{\mathbf{x} \mid x_1=0,\ x_2=0\}$.

(d) $\{\mathbf{x} \mid x_1+x_2+\ldots+x_n=1\}$.

3.21.6. Bewijs dat voor iedere waarde van $a\in\mathbb{R}$ de volgende vier vlakken in $\mathbb{R}^3$ tenminste één punt gemeen hebben.

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 2, \\ y-z &= 0, \\ 2x-y-z &= 4, \\ x-3y+az &= a. \end{aligned}$$

Bepaal a zó dat de vier vlakken een gemeenschappelijke snijlijn hebben. Geef een parametervoorstelling van deze snijlijn.

3.21.7. Geef van $\mathbb{R}[x,5]$ een basis die de volgende polynomen bevat x^5+2x^3, x^4+1, x^3+x^2.

3.21.8. Bepaal een basis voor de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ opgespannen door $(-1,0,2,3,4)$, $(-2,1,4,7,10)$, $(6,4,2,0,-2)$; geef een aanvulling van de basis van deze deelruimte tot een basis van $\mathbb{R}^5$.

3.21.9. Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte; laat V_1 en V_2 deelruimten zijn. Bewijs dat:

$$\dim[V_1 \cup V_2] + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

(vergelijk met 3.14.41).

3.21.10. De vectoren $\mathbf{a}=(1,2,3,4)$, $\mathbf{b}=(2,-1,0,2)$ en $\mathbf{c}=(4,-3,-1,-1)$ spannen een deelruimte U van $\mathbf{R}^4$ op.

(a) Bepaal de dimensie van U.

(b) Behoort $\mathbf{d}=(-4,1,-2,10)$ tot U?

(c) Behoort $\mathbf{e}=(3,1,2,1)$ tot U?

3.21.11. Gegeven zijn de vectoren in $\mathbf{R}^4$: $\mathbf{a}=(3,-1,4,7)$; $\mathbf{b}=(1,-3,2,5)$; $\mathbf{c}=(2,6,1,-2)$; $\mathbf{d}=(5,3,2,-1)$ en $\mathbf{e}=(0,4,-1,-4)$.
Bepaal van elk der volgende vectorruimten de dimensie en een basis: $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$; $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]$; $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{e}]$.

3.21.12. Zij V een vectorruimte; $\mathbf{v}_1 \in V$, $\mathbf{v}_2 \in V$, $\mathbf{v}_3 \in V$; $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $a_1 a_3 \neq 0$. Bewijs dat $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2] = [\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$.

3.21.13. Zij $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ met matrix t.o.v. de standaardbasis:
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal N(A); bepaal de oplossingen van $A\mathbf{x}=(6,2,4)$.
(b) Bepaal een basis voor $\{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \mid \exists_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3} [A\mathbf{x}=\mathbf{y}]\}$.

3.21.14. A is een lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ bepaald door: $A(0,1,1)=(1,3,10)$, $A(1,1,1)=(2,2,8)$; $A(1,0,2)=(3,1,6)$.

(a) Bepaal de matrix van A ten opzichte van $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A.

(c) Bepaal een basis van $\mathbf{R}^3$ zó dat A ten opzichte van die basis als matrix een diagonaalmatrix heeft.

3.21.15. Zij $A \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $A^2=I$ (de identieke afbeelding); zij $V_1 := (I+A)V$; $V_2 := (I-A)V$.

(a) Bewijs dat V_1 en V_2 lineaire deelruimten van V zijn.

(b) Bewijs dat $\forall_{\mathbf{x} \in V_1} [A\mathbf{x}=\mathbf{x}]$ en $\forall_{\mathbf{x} \in V_2} [A\mathbf{x}=-\mathbf{x}]$.

(c) Bewijs dat $V = V_1 \oplus V_2$.

3.21.16. Zij $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$. Bewijs dat rang $BA \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$.

3.21.17. Zij $A,B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$; rang $B = n$. Bewijs dat AB en BA dezelfde eigenwaarden hebben.

3.21.18. Zij $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$; zij $\forall_{x\in\mathbf{R}^n}[BAx=0]$. Bewijs dat rang A + rang $B \le m$.

3.21.19. Zij $A,B \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$. Bewijs dat rang A + rang $B \le$ $\le n$ + rang AB. Bewijs dat als rang $A = n$, dan rang $AB =$ $=$ rang B.

3.21.20. Zij $a \in \mathbf{R}^3$; zij $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ gedefinieerd door: $A(x_1,x_2,x_3):=(x_1+x_2+x_3)a$. Bepaal de eigenwaarden en eigenruimten van A.

3.21.21. $A \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ is gedefinieerd door: $Ae_1=0$, $Ae_i=e_{i-1}$ $(2\le i\le n)$. Bepaal de matrix van A t.o.v. $e_1,\dots,e_n$. Toon aan dat $\forall_{x\in\mathbf{R}^n}[A^n x=0]$. Toon aan dat $\sigma(A)=\{0\}$.

3.21.22. De afbeelding $A:\mathbf{R}[x,3]\to\mathbf{R}[x,3]$ is gedefinieerd door: $A(ax^3+bx^2+cx+d):=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$.

(a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

(b) Bepaal de matrix van A ten opzichte van de basis x^3, x^2, x, 1.

(c) Bewijs dat A regulier is en bepaal de matrix van A^{-1} ten opzichte van $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)$, 1.

3.21.23. Bewijs de volgende identiteit (determinant van Vandermonde):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\ge i>j\ge 1} (x_i-x_j).$$

3.21.24. Zij $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ een matrix; door uit deze matrix $m-p$ rijen en $n-p$ kolommen weg te laten verkrijgt men een vierkante matrix met p rijen en kolommen; de determinant van deze vierkante matrix heet een $(p\times p)$-onderdeterminant van (a_{ij}).

Bewijs dat rang$(a_{ij})=r$ dan en slechts dan als alle $(p\times p)$-onderdeterminanten met $p>r$ gelijk aan 0 zijn, en tenminste één $(r\times r)$-onderdeterminant ongelijk aan 0 is.

3.21.25. (Cauchy-Binet). Voor matrices $(a_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ en $(b_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ waarbij $m\le n$ is, geldt dat het product $(a_{ij})(b_{ij})^T$ een $(m\times m)$ matrix is.
Zij M een deelverzameling van m verschillende elementen uit $\mathbf{N}_n$, zij $\det_M(a_{ij})$ de $(m\times m)$-onderdeterminant die uit (a_{ij}) ontstaat door de kolommen met rangnummer in $\mathbf{N}_n\backslash M$ weg te laten.
Bewijs dat $\det(a_{ij})(b_{ij})^T = \sum_M \det_M(a_{ij})\det_M(b_{ij})$, waarbij de sommatie zich uitstrekt over alle $\binom{n}{m}$ verschillende verzamelingen $M\subset\mathbf{N}_n$.

3.21.26. Zij V een Euclidische ruimte.
(a) Bewijs dat $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|=|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ dan en slechts dan als één der twee vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ een niet negatief veelvoud van de ander is.
(b) Bewijs dat $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2$ (parallellogramidentiteit) voor alle $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ uit V.

3.21.27. Laat V_1 en V_2 lineaire deelruimten van een eindig-dimensionale Euclidische ruimte V zijn. Bewijs dat:
(a) $[V_1\cup V_2]^\perp = V_1^\perp\cap V_2^\perp$;
(b) $(V_1\cap V_2)^\perp = [V_1^\perp,\ V_2^\perp]$.

3.21.28. Geef een orthonormale basis van $\mathbf{R}^3$ waarvan $5^{-\frac{1}{2}}(1,0,2)$ een element is.

3.21.29. Zij V een eindig-dimensionale Euclidische ruimte, zij V_0 een deelruimte van V. Onder de orthogonale projectie op V_0 verstaat men de lineaire afbeelding $P\in\mathrm{Hom}(V,V)$ vastgelegd door: $\forall_{\mathbf{x}\in V_0}[P\mathbf{x}:=\mathbf{x}]$ en $P(V_0^\perp)=\{\mathbf{0}\}$ (vergelijk met 3.15.25).
(a) Zij $\mathbf{v}\ne\mathbf{0}$, bewijs dat voor de orthogonale projectie P_1 op $[\mathbf{v}]$ geldt:

$$P_1\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{v})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})}\mathbf{v} \quad (\mathbf{x}\in V).$$

(b) Zij $\mathbf{v},\mathbf{w}$ een onafhankelijk stelsel; zij P_2 de orthogonale projectie op $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$. Bewijs dat voor alle $\mathbf{x}\in V$, geldt: $P_2\mathbf{x}=\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v}+\beta(\mathbf{x})\mathbf{w}$ waarbij

$$\alpha(\mathbf{x}):=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{v})(\mathbf{w},\mathbf{w})-(\mathbf{x},\mathbf{w})(\mathbf{v},\mathbf{w})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})(\mathbf{w},\mathbf{w})-(\mathbf{v},\mathbf{w})^2} \text{ en } \beta(\mathbf{x}):=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{w})(\mathbf{v},\mathbf{v})-(\mathbf{x},\mathbf{v})(\mathbf{v},\mathbf{w})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})(\mathbf{w},\mathbf{w})-(\mathbf{v},\mathbf{w})^2}.$$

(c) Bewijs dat iedere orthogonale projectie op een deelruimte V_0 een symmetrische lineaire afbeelding is.

3.21.30. Laat A en B lineaire afbeeldingen zijn van de Euclidische ruimte V in zichzelf waarvoor geldt: $\forall_{\mathbf{x}\in V}\ \forall_{\mathbf{y}\in V}\ [(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(B\mathbf{x},\mathbf{y})]$. Bewijs dat A=B.

3.21.31. Zij V een eindig-dimensionale Euclidische ruimte. Zij $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ een orthonormaal stelsel. Bewijs dat indien voor elke $\mathbf{v}\in V$ geldt dat $(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v},\mathbf{v}_i)^2$, het stelsel $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ een basis is.

3.21.32. Construeer een orthonormale basis voor de deelruimte van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door (1,2,1,3), (4,1,1,1), (3,1,1,0). Vul deze basis aan tot een orthonormale basis voor $\mathbf{R}^4$.

3.21.33. Zij V_0 een lineaire deelruimte van de eindig-dimensionale Euclidische ruimte V. Onder de spiegeling t.o.v. V_0 verstaan we de lineaire afbeelding $S\in\mathrm{Hom}(V,V)$ vastgelegd door: $\forall_{\mathbf{x}\in V_0}\ [S\mathbf{x}:=\mathbf{x}]$; $\forall_{\mathbf{x}\in V_0^{\perp}}\ [S\mathbf{x}:=-\mathbf{x}]$.

(a) Bewijs dat S een orthogonale lineaire afbeelding is.
(b) Beschrijf S met een matrix t.o.v. een geschikt gekozen orthonormale basis. Bewijs dat S een symmetrische lineaire afbeelding is.
(c) Geef de matrix t.o.v. $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ van de spiegeling van $\mathbf{R}^3$ t.o.v. $\{\mathbf{x}\mid 2x_1-x_2+3x_3=0\}$.

3.21.34. Zij V een eindig-dimensionale Euclidische ruimte, zij $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}\neq\mathbf{b}$. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van de afbeelding $A\in\mathrm{Hom}(V,V)$ gedefinieerd door $\forall_{\mathbf{x}\in V}\ [A\mathbf{x}:=\mathbf{x}+(\mathbf{b},\mathbf{x})\mathbf{a}]$.
(Onderscheid de gevallen $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ en $(\mathbf{a},\mathbf{b})\neq 0$.)

3.21.35. (Determinanten van Gram). Zij $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ een stelsel vectoren in $\mathbf{R}^n$. Zij $a_{ij}:=(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$ $(1\le i,j\le k)$.
Bewijs dat $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ dan en slechts dan een lineair onafhankelijk stelsel vormen als $\det(a_{ij})_{1\le i\le k,\ 1\le j\le k}\neq 0$.

3.21.36. In $\mathbf{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$.
$\forall_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3}\ [(\mathbf{a},\mathbf{x})^2=(\mathbf{b}_1,\mathbf{x})^2+(\mathbf{b}_2,\mathbf{x})^2]$.
Bewijs dat $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ lineair afhankelijk zijn.

3.21.37. (Traagheidswet van Sylvester). In $\mathbf{R}^n$ zijn gegeven twee onafhankelijke stelsels van r vectoren: $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ en $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r$, zó dat voor elke $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ geldt:

$$(\mathbf{a}_1,\mathbf{x})^2+\ldots+(\mathbf{a}_s,\mathbf{x})^2-(\mathbf{a}_{s+1},\mathbf{x})^2-\ldots-(\mathbf{a}_r,\mathbf{x})^2 =$$
$$= (\mathbf{b}_1,\mathbf{x})^2+\ldots+(\mathbf{b}_t,\mathbf{x})^2-(\mathbf{b}_{t+1},\mathbf{x})^2-\ldots-(\mathbf{b}_r,\mathbf{x})^2.$$

Bewijs dat $s=t$.

3.21.38. Zij $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{q}'\in\mathbf{R}^n$. Bewijs dat voor elke $\lambda\in[0,1]$: $d(\lambda\mathbf{p}+(1-\lambda)\mathbf{q},\ \lambda\mathbf{p}'+(1-\lambda)\mathbf{q}') \le \lambda d(\mathbf{p},\mathbf{p}')+(1-\lambda)d(\mathbf{q},\mathbf{q}')$.

3.21.39. Zij Z de lineaire afbeelding van $\mathbf{R}^2$ op $\mathbf{R}^2$ met matrix t.o.v. $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, waarbij $(a,b)\neq(0,0)$. Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ met $\mathbf{x}\neq 0\neq\mathbf{y}$ uit $\mathbf{R}^2$ geldt: $\dfrac{(Z\mathbf{x},Z\mathbf{y})}{|Z\mathbf{x}||Z\mathbf{y}|} = \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$.
(Merk op dat $Z=\sqrt{a^2+b^2}\,T$, waarbij T orthogonaal is; ook kan men Z opvatten als de vermenigvuldiging in $\mathbf{C}$ met het complexe getal: $(a+bi)$. De bewering houdt dan in dat vermenigvuldiging met een complex getal een "*hoektrouwe*" afbeelding is.)

3.21.40. Zij $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$. Bewijs dat A^TA symmetrisch is en dat alle eigenwaarden van A^TA niet negatief zijn

3.21.41. $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$; A is symmetrisch en alle eigenwaarden van A zijn niet negatief. Bewijs dat er een $B\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ bestaat met $B^2=A$.

3.21.42. Bewijs dat iedere lineaire afbeelding $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ te schrijven is als $A=BC$ waarbij B orthogonaal is en C symmetrisch.

3.21.43. Zij $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$. Bewijs dat $N(A^T)=(A(\mathbf{R}^n))^\perp$ en $A^T(\mathbf{R}^n)=(N(A))^\perp$.

3.21.44. Zij $A\in\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ symmetrisch. Bewijs dat de grootste eigenwaarde van A gelijk is aan $\max\{(A\mathbf{x},\mathbf{x}) \mid |\mathbf{x}|=1\}$.

4 De reële en complexe getallen

4.1. Laat $(K,+,\cdot,<)$ als in 3.11 een commutatief lichaam zijn voorzien van een lineaire ordening (die we met $<$ aangeven). Als A een deelverzameling is van K en m een element van K met de eigenschap $\forall_{a\in A}[a\leq m]$ dan noemen we m een *bovengrens* van A (zie 2.7). Het is duidelijk dat als m een bovengrens is van A ook ieder element $x\in K$ met $x>m$ een bovengrens is van A. We noemen een deelverzameling A van K *naar boven begrensd* als A een bovengrens heeft (zie 2.7.12, 2.7.14).

4.1.1. DEFINITIE. *Een geordend commutatief lichaam $(K,+,\cdot,<)$ heet Dedekinds geordend als iedere niet lege naar boven begrensde deelverzameling van K een kleinste bovengrens (supremum) heeft.*

Als A een niet lege naar boven begrensde deelverzameling van een Dedekinds geordend lichaam is dan geven we de kleinste bovengrens van A (het supremum van A) aan met $\sup A$. (Zie 2.7.18).
In de volgende paragraaf zullen we bewijzen dat de eis in 4.1.1 (definitie) het lichaam K éénduidig bepaalt. Anders gezegd:

4.1.2. STELLING. *Er is één Dedekinds geordend lichaam (op isomorfie na).*

Vaak neemt men 4.1.2 als axioma aan. We zullen dat voorlopig ook doen. Het in deze stelling genoemde lichaam noemen we het lichaam van de *reële getallen*. We geven het aan met $\mathbb{R}$. In 4.1.15 zullen we zien dat de reële getallen zoals we die op intuïtieve wijze al hebben leren kennen overeenstemmen met het lichaam dat we nu gedefinieerd hebben. Volgens 3.11.4 is $\mathbb{Q}$ een deellichaam van $\mathbb{R}$. Met het volgende voorbeeld illustreren we dat $\mathbb{R}$ ook andere dan rationale getallen bevat. De getallen in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ noemen we irrationaal.

4.1.3. VOORBEELD. Als $\alpha \in \mathbf{R}^+$ en $1 \le \alpha^2 < 2$ dan definiëren we $\beta := \alpha + (2-\alpha^2)(2\alpha+1)^{-1}$. Dan is $\beta > \alpha$ en $\beta^2 < 2$. Is $\alpha \in \mathbf{R}^+$ en $\alpha^2 > 2$ dan definiëren we $\beta := \alpha + (2-\alpha^2)(2\alpha)^{-1}$. Dan is $\beta < \alpha$ en $\beta^2 > 2$. Zij nu $A := \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge x^2 < 2\}$. Dan is $1 \in A$ en 2 is een bovengrens van A. Dus heeft A een supremum en $1 \le \sup A \le 2$.
Uit het vorenstaande volgt dat $(\sup A)^2 = 2$. Stel nu dat $\sup A \in \mathbf{Q}$. Dan zijn er gehele getallen m en n met $(m,n)=1$, zodat $\sup A = mn^{-1}$, d.w.z. $m^2 = 2n^2$. (We gebruiken hier de notatie (m,n):=grootste gemene deler van m en n.) Hieruit volgt dat m even is, dus m^2 een 4-voud, dus n even, d.w.z. $(m,n) \ge 2$. Dit is een tegenspraak. Hiermee is aangetoond dat er een getal $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ is met $\alpha^2 = 2$.

Als $A \subset \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ dan noemen we a een *ondergrens* van A als $\forall_{x \in A} [a \le x]$.

4.1.4. STELLING. *Iedere niet lege deelverzameling van* **R** *die een ondergrens heeft heeft een grootste ondergrens (infimum).*

Bewijs. Zij $V \subset \mathbf{R}$, $V \ne \emptyset$ en a een ondergrens van V. We definiëren $W := \{x \mid -x \in V\}$. Dan is $-a$ een bovengrens van W. Dus W heeft een kleinste bovengrens α. Het getal $-\alpha$ is dan de grootste ondergrens van V.

4.1.5. STELLING. *Is* **R** *de vereniging van twee niet lege deelverzamelingen* A *en* B *waarvoor geldt*

$$\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} [a < b]$$

dan is er een $c \in \mathbf{R}$ *met de eigenschappen*

(i) $\forall_{x \in \mathbf{R}} [(x < c) \Rightarrow (x \in A)]$,

(ii) $\forall_{y \in \mathbf{R}} [(y > c) \Rightarrow (y \in B)]$.

Bewijs. B is niet leeg. Zij $b \in B$. Dan is b een bovengrens van A. A is niet leeg. Dus heeft A een supremum c. Zij $x < c$. Dan is x niet een bovengrens van A, d.w.z. er is een $a \in A$ met $a > x$. Dus is $x \notin B$, d.w.z. $x \in A$. Hiermee is (i) aangetoond. Neem nu $y > c$. Dan is $y \notin A$, dus $y \in B$ waarmee (ii) is aangetoond.

Een splitsing van **Q** van bovenstaand type heeft niet de eigenschap van 4.1.5. Dedekind noemde zo'n splitsing een *snede*. Men kan voor sneden een optelling en een vermenigvuldiging definiëren en dan aantonen dat de sneden een Dedekinds geordend lichaam vormen. Deze invoering van **R** kan men bijv. vinden in [22], hoofdstuk 1.

We bewijzen nu een aantal stellingen over $\mathbf{R}$ die in het vervolg veel gebruikt zullen worden. De bewijzen berusten steeds op de definitie van $\mathbf{R}$, d.w.z. we gebruiken alleen het feit dat $\mathbf{R}$ een Dedekinds geordend lichaam is. Merk op dat als $s = \sup A$ dan

(i) $\forall_{a\in A}\,[a\le s]$,

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{a\in A}\,[a>s-\varepsilon]$.

Meestal heeft men (i) en (ii) beide nodig om genoemde stellingen te bewijzen. In (i) staat dat s een bovengrens van A is en in (ii) dat $s-\varepsilon$ niet een bovengrens van A is (vergelijk 2.7.21).

4.1.6. STELLING. *Voldoen de rijen reële getallen* $a_1,a_2,\ldots$ *en* $b_1,b_2,\ldots$ *aan*

$$\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n]$$

dan is er een $c\in\mathbf{R}$ *met*

$$\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_n\le c\le b_n].$$

Bewijs. Voor iedere n is b_n een bovengrens van de verzameling $A:=\{a_i \mid i\in\mathbf{N}\}$. Als $c := \sup A$ dan is, volgens de definitie van supremum, $a_n\le c\le b_n$ voor iedere $n\in\mathbf{N}$.

Een rij gesloten intervallen I_n waarvoor geldt $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[I_{n+1}\subset I_n]$ noemen we een *intervallennest*. In 4.1.6 staat dat een intervallennest een verzameling intervallen is waarvan de doorsnede niet leeg is.
In [4] wordt 4.1.6 als definitie van $\mathbf{R}$ genomen. Daarmee is 4.1.2 dan te bewijzen. Merk op dat uit 4.1.6 volgt dat $\mathbf{R}$ niet aftelbaar is (2.5.18). Immers als $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ een één-éénduidige afbeelding van $\mathbf{N}$ *op* $\mathbf{R}$ zou zijn dan konden we $[a_1,b_1]$ zo kiezen dat $f(1)\notin[a_1,b_1]$ en voor iedere $n\in\mathbf{N}$ het interval $[a_{n+1},b_{n+1}]$ zo kiezen dat $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ en $f(n+1)\notin[a_{n+1},b_{n+1}]$. De doorsnede van de intervallen van dit intervallennest zou dan leeg zijn, in strijd met 4.1.6.
In 3.11.8 is gedefinieerd wanneer een geordend lichaam archimedisch geordend genoemd wordt.

4.1.7. STELLING. $\mathbf{R}$ is archimedisch geordend.

Bewijs. Zij $a\in\mathbf{R}$, $a>0$ en $b\in\mathbf{R}$. Het getal b/a is geen bovengrens van $\mathbf{N}$. Immers, als dit wel zo was dan zou $\mathbf{N}$ een supremum c hebben en dan was er een $n\in\mathbf{N}$ met $n>c-1$ en dus $n+1>c$, een tegenspraak omdat $(n+1)\in\mathbf{N}$. Er is dus een natuurlijk getal $n>b/a$, d.w.z. $na>b$ (want $a>0$).

We herinneren aan de definitie van limiet:

4.1.8. DEFINITIE. *De rij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n\in\mathbf{R}$, *heeft de limiet* a, *geschreven als:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [(n>N)\Rightarrow(|a_n-a|<\varepsilon)].$$

We herinneren er aan dat een rij niet meer dan één limiet kan hebben (zie ook 5.1.14 en 5.1.15). Een rij die een limiet heeft noemen we een *convergente* rij. Zoals bekend heeft niet iedere rij een limiet. We willen nu het limietbegrip iets uitbreiden en aan iedere rij reële getallen een getal toekennen zó dat dit met de limiet samenvalt als de rij een limiet heeft. Voor we dit doel herinneren we de lezer aan het symbool ∞ dat we bekend veronderstellen (N.B. ∞ is niet een reëel getal!). We definiëren:

4.1.9. DEFINITIE. *Zij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij reële getallen. We zeggen*

$$\text{"}a_n\to\infty \text{ als } n\to\infty\text{" } \textit{of } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \textit{ als}$$

$$\forall_{a\in\mathbf{R}}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [a_n>a].$$

Analoog definieert men "$a_n\to-\infty$ als $n\to\infty$".

We gaan nu aan iedere rij reële getallen toevoegen een *bovenlimiet* (=*limes superior*) en een *onderlimiet* (=*limes inferior*), notatie respectievelijk $\lim\sup a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ en $\lim\inf a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$. Voor sommige rijen zullen deze nieuwe begrippen het symbool ∞ of $-\infty$ zijn. De definitie zal mogelijk zijn door de volgende stelling.

4.1.10. STELLING. *Als* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij reële getallen is dan is er ten hoogste één getal* $a\in\mathbf{R}$ *met de volgende eigenschappen*

(i) $\forall_{x>a}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [a_n\leq x]$,

(ii) $\forall_{x<a}\ \forall_{N\in\mathbf{N}}\ \exists_{n>N}\ [a_n>x]$.

Als zo'n getal a *niet bestaat dan is precies één van de volgende uitspraken juist:*

(a) $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \exists_{n\in\mathbf{N}}\ [a_n>x]$,

d.w.z. de rij is niet naar boven begrensd,

(b) $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [a_n<x]$,

d.w.z. $a_n\to-\infty$ *als* $n\to\infty$.

Bewijs. Dat er niet meer dan één getal a kan zijn met de eigenschappen (i) en (ii) is triviaal. Dat (a) en (b) niet beide juist kunnen zijn is ook triviaal. Als (a) en (b) niet juist zijn is de rij naar boven begrensd. Er zijn dan getallen α met de eigenschap (i), d.w.z.

$$\forall_{x>\alpha}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [a_n\leq x].$$

Daar (b) niet juist is is de verzameling V van getallen α met eigenschap (i) naar onder begrensd. Zij a het infimum van V.
Als $x>a$ dan is er een $\alpha\in V$ met $a\leq\alpha<x$. Daar α eigenschap (i) heeft is er een $N\in\mathbf{N}$ zo dat voor $n>N$ geldt $a_n\leq x$.
Hiermee is aangetoond dat a ook eigenschap (i) heeft, d.w.z. a is het kleinste element van V. Als $x<a$ dan heeft x eigenschap (i) niet en dus geldt (ii). Hiermee is de stelling bewezen.

Nu definiëren we het begrip lim sup van een rij.

4.1.11. DEFINITIE. *Is* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij reële getallen dan definiëren we*

(a) $\limsup a_n=\infty$ *als de rij niet naar boven begrensd is,*

(b) $\limsup a_n=-\infty$ *als* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$,

(c) $\limsup a_n=a$ *als* a *het in* 4.1.10 *genoemde getal is.*

Volgens 4.1.10 is deze definitie zinvol. Het begrip $\liminf a_n$ wordt op analoge wijze gedefinieerd. Het is eenvoudig in te zien dat voor iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ geldt: $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ met gelijkheid dan en alleen dan als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat (zie 4.5.15 en 4.5.16).
Als we van een rij die een limiet heeft op de een of andere manier deze limiet kunnen raden dan is met behulp van definitie 4.1.8 aan te tonen dat ons vermoeden juist is. We zullen echter vaak van een rij willen kunnen zeggen dat deze een limiet heeft zonder die limiet te weten. De volgende stellingen maken dit mogelijk (zie ook 1.26.9).

4.1.12. STELLING. *Is de rij* $a_1, a_2, \ldots$ *monotoon niet-dalend (d.w.z.* $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_n \le a_{n+1}]$*) en naar boven begrensd dan heeft de rij een limiet.*

Bewijs. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monotoon niet-dalend en begrensd is definiëren we $A := \{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ en $\alpha := \sup A$. Daar voor iedere $\varepsilon>0$ het getal $\alpha-\varepsilon$ niet een bovengrens van A is is er een $N\in\mathbf{N}$ met $\alpha-\varepsilon<a_N\le\alpha$. Voor alle $n>N$ is dan $\alpha-\varepsilon<a_n\le\alpha$, d.w.z. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

4.1.13. DEFINITIE. *Een rij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *elementen van een geordend lichaam* K *heet fundamentaalrij (of Cauchy-rij) als*

$$\forall_{\varepsilon\in K,\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{m>N}\ \forall_{n>N}\ [\,|a_m-a_n|<\varepsilon\,].$$

Merk op dat iedere convergente rij een fundamentaalrij is. Voor het geval $K=\mathbf{R}$ geldt omgekeerd:

4.1.14. STELLING. *Als* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een fundamentaalrij in* $\mathbf{R}$ *is dan is er een* $\alpha\in\mathbf{R}$ *zo dat* $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Bewijs. In de definitie van fundamentaalrij kiezen we $\varepsilon=1$. Voor de daarbij behorende N en alle $n>N$ geldt dan $|a_n-a_{N+1}|<1$, dus geldt voor alle $n\in\mathbf{N}$

$$|a_n|\le\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\},$$

d.w.z. iedere fundamentaalrij is een begrensde rij. In $\mathbf{R}$ weten we dan dat er een $\alpha\in\mathbf{R}$ is met $\alpha = \limsup a_n$. Bij iedere $\varepsilon>0$ is een N zó dat voor alle $n>N$ en alle $m>N$ geldt $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ en bovendien $a_n<\alpha+\varepsilon$. Er is een $m_1>N$ zó dat $a_{m_1}>\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$. Dan is voor alle $n>N$ zowel $a_n<\alpha+\varepsilon$ als $a_n>\alpha-\varepsilon$. Daar de redenering voor iedere $\varepsilon>0$ geldt is bewezen: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

4.1.15. VOORBEELD. Laat voor iedere $i\in\mathbf{N}$ gelden $a_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $0\le a_i\le 9$. Definieer $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot 10^{-i}$. Dan is $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een fundamentaalrij. Deze heeft dus een limiet $s=\sum_{i=1}^{\infty} a_i\cdot 10^{-i}$, de decimale ontwikkeling van het reële getal s ($0\le s\le 1$). Dit is de manier waarop we gewoonlijk voor het eerst met reële getallen kennismaken. We zien dat 4.1.2, onze definitie van $\mathbf{R}$, leidt tot dezelfde voorstelling.

Het is duidelijk dat in $\mathbf{Q}$ een fundamentaalrij niet noodzakelijk convergent is. Het bewijs van 4.1.2 in § 4.2 berust hierop.
We geven nog een generalisatie van stelling 4.1.14 voor functies (zie 4.3.21).

4.1.16. STELLING. *Zij* f *een reële functie, gedefinieerd op* [a,b), *(hierin mag* b *het symbool* ∞ *zijn). Als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{c,a<c<b}\ \forall_{p\in\mathbf{R}}\ \forall_{q\in\mathbf{R}}\ [(c<p<b\wedge c<q<b)\Rightarrow(|f(p)-f(q)|<\varepsilon)]$$

dan bestaat $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x)$.

Bewijs. We beperken ons tot $b\in\mathbf{R}$ (als $b=\infty$ geldt een analoog bewijs). Zij, voor $n\in\mathbf{N}$, $a_n:=f(b-\frac{b-a}{n})$. Uit het gegeven volgt dat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een fundamentaalrij is. Volgens stelling 4.1.14 heeft deze rij een limiet. Noem die ℓ. Zij $\varepsilon>0$. Er is een $N\in\mathbf{N}$ zo dat $|a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$ voor $n>N$. Volgens het gegeven is er een c met $a<c<b$ zo dat voor $x\in(c,b)$ en $y\in(c,b)$ geldt $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Kies nu n zo groot dat $c<b-\frac{b-a}{n}<b$ en $n>N$. Als $x\in(c,b)$ dan geldt $|f(x)-\ell|\le|f(x)-a_n|+|a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
Daar ε willekeurig was is bewezen dat $\lim\limits_{x\uparrow b} f(x)=\ell$.

Zowel 4.1.14 als 4.1.16 worden *stelling van Cauchy* genoemd.

4.2. Bewijs van stelling 4.1.2

We gaan uit van het lichaam $\mathbf{Q}$ Beschouw nu:
$R:=\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$, de verzameling van alle rijen rationale getallen,
$B:=$ de deelverzameling van R bestaande uit de begrensde rijen
$N:=$ de verzameling *nulrijen*, dat zijn rijen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,
$F:=$ de verzameling fundamentaalrijen in $\mathbf{Q}$.
Dan is $N\subset F\subset B\subset R$. In R definiëren we een optelling en een vermenigvuldiging door:

$$(a_1,a_2,\ldots)+(b_1,b_2,\ldots) := (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots),$$

$$(a_1,a_2,\ldots)(b_1,b_2,\ldots) := (a_1b_1,a_2b_2,\ldots)$$

(zie ook 1.26.2).

Het is eenvoudig in te zien dat

$$(a\in B \wedge b\in B) \Rightarrow (a+b\in B \wedge a-b\in B \wedge ab\in B),$$
$$(a\in N \wedge b\in N) \Rightarrow (a+b\in N \wedge a-b\in N),$$
$$(a\in F \wedge b\in F) \Rightarrow (a+b\in F \wedge a-b\in F \wedge ab\in F),$$
$$(a\in B \wedge b\in N) \Rightarrow (ab\in N).$$

4.2.1. STELLING. *$(F,+,\ )$ is een commutatieve ring met eenheidselement en $(N,+,\ )$ is daarin een maximaal ideaal.*

Bewijs. Dat we inderdaad met een ring te maken hebben met $(0,0,0,\ldots)$ als nulelement en $(1,1,1,\ldots)$ als eenheidselement is vrijwel triviaal. Uit de beweringen voorafgaand aan deze stelling volgt dat $(N,+,\ )$ een ideaal is in deze ring. Zij nu $a=(a_1,a_2,\ldots)\in F$ en $a\notin N$. Dan geldt:

$$\exists_{\varepsilon\in\mathbf{Q},\,\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [\,|a_n|>\varepsilon\,].$$

Als $b=(b_1,b_2,\ldots)\in F$ dan is de rij

$$c := (b_1,b_2,\ldots,b_{N+1}/a_{N+1},b_{N+2}/a_{N+2},\ldots)$$

ook een fundamentaalrij en verder geldt:

$$ac-b = (a_1b_1-b_1,\ldots,a_Nb_N-b_N,0,0,0,\ldots),$$

d.w.z. $ac-b\in N$.
Als $(M,+,\ )$ een ideaal is dat $(N,+,\ )$ omvat dan is blijkbaar voor iedere $a\in M$, $a\notin N$ en voor iedere $b\in F$, met het hierboven gedefinieerde element c, ook $ac-(ac-b)=$ $=b\in M$, anders gezegd $M=F$, dus $(N,+,\ )$ is een maximaal ideaal.

Uit 3.8.12 volgt nu onmiddellijk:

4.2.2. STELLING. *$F/N := (F(\mathrm{mod}\ N),+,\ )$ is een lichaam.*

In F definiëren we een relatie die we aangeven met $>*$ door:

$$(a>*b)\ :\Leftrightarrow\ \exists_{\varepsilon\in\mathbf{Q},\,\varepsilon>0}\ \exists_{k\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>k}\ [\,a_n-b_n>\varepsilon\,].$$

Dit betekent onder andere $a-b\notin N$. Voor ieder paar elementen a en b uit F geldt precies één van de uitspraken

$$a>*b,\ b>*a,\ a-b\in N.$$

Als a, b, c en d elementen van F zijn en $a-c\in N$, $b-d\in N$ dan is als $a>*b$ ook $c>*d$. Dit heeft tot gevolg dat de volgende definitie zinvol is:

4.2.3. DEFINITIE. *Als* σ *en* τ *elementen van* F/N *zijn definiëren we* $\sigma>\tau$ *als er representanten* a *en* b *van* σ *resp.* τ *zijn met* $a>*b$. *(Dit geldt dan voor alle representanten.)*

Alle $\sigma\in F/N$ met $\sigma>0$ noemen we positief. De eigenschappen $(O1^*)$ t/m $(O4^*)$ (zie 3.11.1) zijn nu gemakkelijk te verifiëren. We weten dus nu:

4.2.4. STELLING. F/N *is een geordend lichaam.*

Het is tevens duidelijk dat de ordening Archimedisch is.

Als we voor iedere $r\in\mathbf{Q}$ definiëren dat $\phi(r)$ het element van F/N is gerepresenteerd door de fundamentaalrij $(r,r,r,\ldots)$ dan is

(i) $\phi(r+s) = \phi(r)+\phi(s)$,

(ii) $\phi(rs) = \phi(r)\phi(s)$,

(iii) $\phi(r) > \phi(s) \Leftrightarrow r>s$.

Dus is $\mathbf{Q}$ door ϕ isomorf, met behoud van ordening, afgebeeld op een deellichaam van F/N. We identificeren dit met $\mathbf{Q}$. Dan is F/N een uitbreiding van de rationale getallen die in F/N een niet naar boven en niet naar onder begrensde verzameling zijn. We bewijzen nu:

4.2.5. STELLING. F/N *is Dedekinds geordend.*

Bewijs. Zij A een niet lege naar boven begrensde deelverzameling van F/N. Als $\nu\in\mathbf{N}$ en k een voldoende groot geheel getal dan is de rij $(\frac{k}{10^\nu},\frac{k}{10^\nu},\frac{k}{10^\nu},\ldots)$, (anders gezegd het rationale getal $\frac{k}{10^\nu}$), representant van een bovengrens van A in F/N. Dit geldt niet voor alle k. De grootste k waarvoor het niet geldt noemen we k_ν. Het is duidelijk dat voor $n>m$ geldt

$$\frac{k_m}{10^m} \le \frac{k_n}{10^n} < \frac{k_m+1}{10^m},\ \text{dus}\ 0 \le \frac{k_n}{10^n} - \frac{k_m}{10^m} < \frac{1}{10^m},$$

d.w.z. de rij $s:=(\frac{k_1}{10},\frac{k_2}{10^2},\ldots)$ is een fundamentaalrij, representant van $\sigma\in F/N$. Als $\tau>\sigma$ dan is voor iedere representant $t=(t_1,t_2,\ldots)$ van τ: $t>*s$. Er is dan een positief getal ε zo dat $t_n>\frac{k_n}{10^n}+\varepsilon$ vanaf zeker rangnummer. Dan is vanaf zeker rangnummer ook $t_n > \frac{k_n+2}{10^n}$ en dat betekent dat τ een bovengrens van A is. Op analoge wijze is, als $\tau<\sigma$ is, aan te tonen dat τ niet een bovengrens van A is. Dit heeft tot gevolg dat we nu kunnen zeggen dat σ de kleinste bovengrens van A is. Daar A willekeurig was, is de stelling bewezen.

We hebben tot nu toe aangetoond dat er een Dedekinds geordend lichaam is; te weten de geconstrueerde uitbreiding van $\mathbf{Q}$. Het laatste deel van het bewijs is niet moeilijk en we laten het grotendeels aan de lezer over. Neem aan dat $(K,+,\cdot,<)$ een Dedekinds geordend commutatief lichaam is. Dan is $\mathbf{Q} \subset K$. Als $\alpha\in K$ dan definiëren we $A:=\{x\in\mathbf{Q} \mid x<\alpha\}$ en $\phi(\alpha) := \sup A$, waarbij A opgevat wordt als deelverzameling van $\mathbf{R}$. Het bewijs komt er op neer in te zien dat ϕ een isomorfisme is van K op $\mathbf{R}$ en dat $\alpha<\beta$ in K dan en slechts dan als $\phi(\alpha)<\phi(\beta)$ in $\mathbf{R}$. Bedenk daarbij dat zowel in K als in $\mathbf{R}$ alle stellingen van § 4.1 gebruikt mogen worden. We merken nog op dat in meer algemene verzamelingen waarin we zoiets als fundamentaalrijen kunnen definiëren een vergelijkbare constructie bruikbaar is om de verzameling uit te breiden tot een grotere verzameling waarin iedere fundamentaalrij convergeert (completering). Men definieert een equivalentie-relatie voor fundamentaalrijen (verschil van twee fundamentaalrijen is een nulrij) en werkt dan verder als in § 2.4.

4.3. Limieten (herhaling)

In deze paragraaf geven we, grotendeels via opgaven, aan wat bekend verondersteld wordt uit vroegere studie over limieten van rijen en functies. Hier en daar zullen we gebruik maken van de nieuwe kennis uit de paragrafen 4.1 en 4.2.

OPGAVEN

4.3.1. Zijn $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rijen reële getallen met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dan geldt $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$ en $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

4.3.2. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rijen reële getallen zijn waarvoor $\forall_{n\in\mathbf{N}}\, [a_n\le c_n\le b_n]$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$

dan is ook $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$.

4.3.3. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

4.3.4. Als $a\in\mathbf{R}$, $|a|<1$ dan is $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

4.3.5. Als $a\in\mathbf{R}$, $a>0$ dan is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

4.3.6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n} = 4$.

4.3.7. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$.

4.3.8. De rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ is monotoon stijgend. De rij $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ is monotoon dalend. Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ bestaat. We noemen deze limiet e.

4.3.9. DEFINITIE. *Zij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij en zij* s_n *gedefinieerd door* $s_1=a_1$, $\forall_{n\in\mathbf{N}} [s_{n+1}:=s_n+a_{n+1}]$.
We zullen spreken van "de reeks $a_1+a_2+a_3+\ldots$*" of "de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*". Als* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *bestaat (noem de limiet* s*) dan zeggen we dat de reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergeert en we noemen* s *de som van de reeks.*

In 4.3.9 noemen we s_n een *partiële som* van de reeks. Als een reeks niet convergeert noemen we de reeks *divergent*.

OPGAVEN

4.3.10. Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent is.

4.3.11. Als $a\in\mathbf{R}$, $|a|<1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ convergent.

4.3.12. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.3.13. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan en slechts dan convergent als de rij partiële sommen begrensd is.

4.3.14. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rijen positieve reële getallen zijn waarvoor geldt:

(i) $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_n \le b_n]$

en

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is convergent,

dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent (*vergelijkingsstelling*).

4.3.15. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent. Is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. (*Criterium van Cauchy*.)

4.3.16. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent. Is $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. (*Criterium van d'Alembert*.)

4.3.17. Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dan is ook $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$.

4.3.18. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ dan is ook $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. (Zie ook 4.5.31.)

4.3.19. Als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent. We noemen in dit geval de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absoluut convergent*.

4.3.20. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is waarvoor geldt $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_{n+1} \le a_n]$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan is

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$ convergent met een som s waarvoor geldt $0 \le s \le a_1$.

4.3.21. DEFINITIE. *Zij* f *een reële functie gedefinieerd op* (a-h,a+h). *We zeggen* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ *als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(0<|x-a|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-\ell|<\varepsilon)].$$

Op analoge wijze definiëren we $\lim_{x\uparrow a}$ en $\lim_{x\downarrow a}$ (waarbij alleen waarden <a resp. >a beschouwd worden). De modificatie van de definitie als a het symbool ∞ is spreekt ook vanzelf. We merken weer op dat ℓ in 4.3.21 eenduidig vast ligt.

4.3.22. DEFINITIE. *We zeggen:* $f(x)\to\infty$ *als* $x\to a$ *als*

$$\forall_{m\in\mathbf{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(0<|x-a|<\delta) \Rightarrow (f(x)>m)].$$

4.3.23. OPGAVE. Als $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$ en $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$ dan is

$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \ell_1+\ell_2$ en $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$.

4.3.24. DEFINITIE. *De functie* f *gedefinieerd op* (a-h,a+h) *heet continu in* a *als* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *d.w.z.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(|x-a|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-f(a)|<\varepsilon)].$$

4.3.25. OPGAVE. Als $n\in\mathbf{N}$ en $f(x):=x^n$ voor $x\in\mathbf{R}$ dan is f continu in elke $x\in\mathbf{R}$.

Een van de functies waarvan de definitie pas streng te geven is na bestudering van de paragrafen 4.1 en 4.2 is de exponentiële functie. De eerste stap is 4.3.26:

4.3.26. OPGAVE. Zij $a\in\mathbf{R}$, $a>0$ en $k\in\mathbf{N}$. Er is precies één positief reëel getal ξ zó dat $\xi^k=a$. We schrijven $\xi=\sqrt[k]{a}=a^{1/k}$.

Nu is op voor de hand liggende wijze a^x gedefinieerd als $a\in\mathbf{R}^+$ en $x\in\mathbf{Q}$. De volgende stap is nu:

4.3.27. OPGAVE. Als $a\in\mathbf{R}$, $a>1$ en $x\in\mathbf{R}$ dan definiëren we

$$a^x := \sup\{a^y \mid (y\in\mathbf{Q})\wedge(y<x)\}.$$

Ga na dat hierdoor de functie a^x is gedefinieerd, dat de functie monotoon is en continu in elke $x\in\mathbf{R}$ en toon aan dat

$$a^{x+y} = a^x a^y \text{ en } (a^x)^y = a^{xy}.$$

Voor $0<a<1$ kunnen we nu definiëren $a^x=((a^{-1})^x)^{-1}$.

OPGAVEN

4.3.28. $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e.$

4.3.29. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$ voor $x\in\mathbf{R}$.

4.3.30. STELLING. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

Bewijs. Uit 4.3.29 zien we dat

$$\frac{e^x-1}{x} = \lim_{n\to\infty} x^{-1}\{(1+\tfrac{x}{n})^n-1\} = \lim_{n\to\infty} \{n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\tfrac{x}{n})^k\}.$$

Daar voor $x>0$, $1\le k<n$ geldt

$$1<(1+\tfrac{x}{n})^k<(1+\tfrac{x}{n})^n$$

vinden we

$$1<n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\tfrac{x}{n})^k<(1+\tfrac{x}{n})^n$$

en dus

$$1<\frac{e^x-1}{x}<e^x \text{ als } x>0.$$

Voor $x<0$ is $\dfrac{e^x-1}{x} = e^x(\dfrac{e^{-x}-1}{-x})$ en dus

$$e^x<\frac{e^x-1}{x}<1 \text{ als } x<0.$$

Daar e^x in elke $x\in\mathbf{R}$ continu is volgt het gestelde.

De functies sin en cos zijn in dit stadium alleen langs meetkundige weg bekend. Met meetkundige argumenten is de volgende opgave te maken.

4.3.31. OPGAVE. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Vaak ziet men van de meetkundige beschouwingen af. In dat geval worden de sinus en de cosinus gedefinieerd met machtreeksen (zie 4.4.8 en § 6.8).

OPGAVEN

4.3.32. Bewijs de volgende relaties voor
$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ en $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

(ii) $e^x = \cosh x + \sinh x$,

(iii) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

(iv) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,

(v) Schets de grafieken van sinh en cosh.

4.3.33. Als $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$ de exponentiële functie is, $f(x)=e^x$, dan is $f^{\leftarrow}$ de logarithme, $f^{\leftarrow}(x) = \log x$. Bewijs:
(i) $\log(xy) = \log x + \log y$, $(x>0,\ y>0)$,
(ii) als $a>0$ is $a^x = e^{x \log a}$.

4.3.34. Bewijs dat $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

4.4. Complexe getallen

Voor de elementen van $\mathbf{R}^2$ definiëren we een optelling en vermenigvuldiging door:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c,b+d),$$

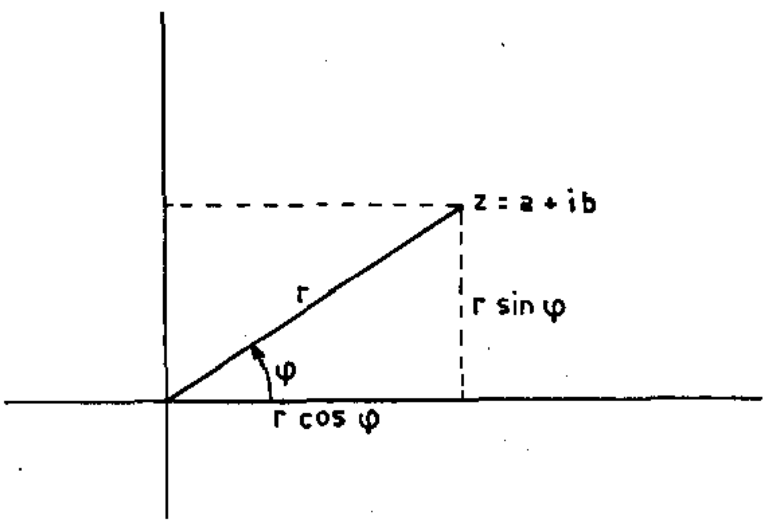
$$(a,b)(c,d) := (ac-bd,ad+bc).$$

Het is nu eenvoudig na te gaan dat $(\mathbf{R}^2,+,\ )$ een lichaam is. Dit lichaam heet het lichaam der complexe getallen en wordt aangegeven als $\mathbf{C}$.
Zij $K:=\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$ en laat ϕ gedefinieerd zijn voor $a\in\mathbf{R}$ door $\phi(a):=(a,0)$. Dan is $(K,+,\ )$ een deellichaam van $\mathbf{C}$ en ϕ een isomorfisme van $\mathbf{R}$ op K. We identificeren deze licha-

men (zie 2.4). We voeren nog als afkorting in: $i:=(0,1)$. Dan is het complexe getal $z=(a,b)$ ook te schrijven als $z=a+ib$. Hierin zijn a en b reële getallen, genaamd *reële deel* van z (=Re z) resp. *imaginaire deel* van z (=Im z).

4.4.1. DEFINITIE. *Als* $z\in\mathbf{C}$, $z=a+ib$ $(a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R})$ *dan definieren we* $|z|$, *de modulus van* z, *door* $|z|:=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, *en* arg z, *het argument van* z, *door* $\arg z := \phi$, *waarin* $-\pi<\phi\le\pi$ *en* $a = |z| \cos\phi$, $b = |z| \sin\phi$.
(Voor $z=0$ *wordt* arg z *niet gedefinieerd.)*

Het zo gedefinieerde argument van z noemt men wel *hoofdwaarde* van het argument. Andere waarden vinden we dan door de beperking $-\pi<\phi\le\pi$ te laten vervallen.
Een meetkundig beeld geeft het diagram van figuur 25.
(N.b. $|z|=:r$.)



Figuur 25

We spreken ook wel van "het complexe vlak" in plaats van $\mathbf{C}$. Dit plaatje zet de nieuwe notaties in de al lang als Cartesisch vlak beschouwde $\mathbf{R}^2$.

4.4.2. DEFINITIE. *Als* $z\in\mathbf{C}$, $z=a+ib$ $(a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R})$ *dan noemen we* $\bar{z}=a-ib$ *de geconjugeerde van* z.

4.4.3. STELLING. *Voor* $z\in\mathbf{C}$ *geldt:*

(i) $z\bar{z} = |z|^2$,

(ii) $z+\bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$,

(iii) $|z| = |\bar{z}|$.

Bewijs. (i), (ii), (iii) zijn directe gevolgen van de definities.

4.4.4. STELLING. *Als* $z_1 \in \mathbf{C}$ *en* $z_2 \in \mathbf{C}$ *dan is:*

(i) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

BEWIJS: Ook hier zijn (i) en (ii) directe gevolgen van de definitie.

We voeren nu ook voor complexe exponenten z de functie e^z in door

4.4.5. DEFINITIE. *Als* $z \in \mathbf{C}$, $z = x + iy$ $(x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$ *dan definieren we*

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

4.4.6. STELLING. *Als* $z \in \mathbf{C}$, $|z| = r$, $\arg z = \phi$ *dan is* $z = re^{i\phi}$.

Merk op dat uit 4.4.5 te zien is dat $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.
In het diagram dat we van $\mathbf{C}$ tekenden wordt voor $x \in \mathbf{R}$ het getal e^{ix} voorgesteld door een punt op de eenheidscirkel (d.i. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$).

4.4.7. STELLING. *Voor* $x \in \mathbf{R}$ *geldt*

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

en

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Bewijs. Direct gevolg van 4.4.5.

4.4.8. DEFINITIE. *Als* $z \in \mathbf{C}$ *dan definiëren we*

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

en

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

We zullen in § 6.8 zonder meetkundige argumenten te gebruiken een functie exp(z) invoeren. Van deze functie kunnen we aantonen dat $\forall_{z \in \mathbf{C}} [e^z = \exp(z)]$. Hierdoor zijn dan ook cos en sin gedefinieerd via 4.4.8. Alle eigenschappen die we langs aanschouwelijke weg hadden leren kennen blijven geldig. Voor elk van deze is een direct bewijs mogelijk met behulp van de definitie van exp(z). We merken hier nog op dat de notatie als exponentiële functie gerechtvaardigd wordt door de volgende stelling.

4.4.9. STELLING. *Als* $z_1 \in \mathbf{C}$ *en* $z_2 \in \mathbf{C}$ *dan is* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Bewijs. Zij $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}, y_1 \in \mathbf{R}, y_2 \in \mathbf{R})$. Dan is

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2}\{(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + \\ &+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\} = \\ &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\} = \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

We beschouwen nu functies van complexe veranderlijken. De begrippen limiet en continuïteit voeren we in met definities analoog aan die voor reële functies.

4.4.10. DEFINITIE. *Zij* $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *een complexe functie gedefinieerd op* $\{z \mid |z-a| < \rho\}$. *We zeggen* $\lim_{z \to a} f(z) = \ell$ *als*

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0} \; \exists_{\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0} \; \forall_{z \in \mathbf{C}} \; [(0 < |z-a| < \delta) \Rightarrow (|f(z) - \ell| < \varepsilon)].$$

4.4.11. DEFINITIE. *Zij* $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *een complexe functie gedefinieerd op* $\{z \mid |z-a| < \rho\}$. *We noemen* f *continu in* a *als*

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a),$$

d.w.z.

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0} \; \exists_{\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0} \; \forall_{z \in \mathbf{C}} \; [(|z-a| < \delta) \Rightarrow (|f(z) - f(a)| < \varepsilon)].$$

OPGAVEN

4.4.12. Ga na welke figuren in het complexe vlak de volgende verzamelingen voorstellen:

(a) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z+3| = |z-i|\}$,

(b) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-i| + |z+i| = 4\}$,

(c) $\{z\in\mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(\frac{z-i}{z+2})=0\}$.

4.4.13. Zij $f(z):=(1+z)^{-1}$ en $g(z):=\frac{z+1}{z-1}$. Ga voor f en g na wat het beeld is van de eenheidscirkel.

4.4.14. Bewijs dat er reële getallen $a_0,a_1,\dots,a_n$ zijn zo dat $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(\cos x)^n = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)]$.

4.4.15. Bewijs dat voor $x\in\mathbf{C}$ geldt:

(i) $\cos(ix) = \cosh x$,

(ii) $\sin(ix) = i \sinh x$.

4.5. Opgaven over hoofdstuk 4

4.5.1. Zij A een niet lege begrensde deelverzameling van $\mathbf{R}$. Zij B de verzameling bovengrenzen van A en O de verzameling ondergrenzen van A.
Bepaal $\inf\{x-y \mid x\in B, y\in O\}$.

4.5.2. Zij A een niet lege begrensde deelverzameling van de positieve reële getallen en $\alpha := \sup A$. Bewijs dat $(0,\alpha) = \bigcup_{a\in A} (0,a)$.

4.5.3. Zij A een niet lege deelverzameling van $\mathbf{R}$ waarvoor geldt $\forall_{x\in A}\ [0\le x\le 1]$. Zij $B:=\{y\in\mathbf{R} \mid \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{x\in A}\ [|x-y|<\varepsilon]\}$.
Bewijs dat B een grootste element heeft.

4.5.4. Zij $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, $a<b$. Bewijs

(i) $\exists_{c\in\mathbf{Q}}\ [a<c<b]$,

(ii) $\exists_{c\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}\ [a<c<b]$.

4.5.5. Voor $n\in\mathbf{N}$ definiëren we: $a_1=0$,

$$a_n := \frac{1^2+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3},\ (n\ge 2),\quad b_n := \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

Bewijs: $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n]$.
Bepaal de verzameling $D:=\{d\in\mathbf{R} \mid \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [a_n<d<b_n]\}$.

4.5.6. Zij $a_1 \in \mathbf{R}$, $b_1 \in \mathbf{R}$, $0 < a_1 < b_1$. We definiëren voor $n \in \mathbf{N}$ $a_{n+1} := (a_n b_n)^{\frac{1}{2}}$, $b_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Bewijs: $\forall_{n \in \mathbf{N}} [\, a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n]$.

Bewijs: $\sup \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \inf \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

4.5.7. Zij K een archimedisch geordend lichaam met de volgende eigenschap:
Zijn $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ rijen elementen van K waarvoor geldt $\forall_{n \in \mathbf{N}} [\, a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n]$ dan is er een $c \in K$ met $\forall_{n \in \mathbf{N}} [\, a_n \le c \le b_n]$.

Bewijs dat $K = \mathbf{R}$.

4.5.8. Zij K een niet-archimedisch geordend lichaam. Bewijs dat K een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling bevat die geen supremum heeft.

4.5.9. Bewijs $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sqrt[n]{n!} = e^{-1}$.

4.5.10. Zij $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ een rij reële getallen met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Als π een permutatie van $\mathbf{N}$ is dan is $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = a$.
Bewijs dit.

4.5.11. Bewijs: Als $a \in \mathbf{R}$, $|a| < 1$, dan is $\lim\limits_{n\to\infty} (na^n) = 0$.

4.5.12. Bewijs: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.5.13. Zij $a_1 \in \mathbf{R}$, $a_1 > 0$. We definiëren $\forall_{n \in \mathbf{N}} [\, a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}\,]$.
Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat en bepaal de limiet.

4.5.14. Bepaal in de onderstaande gevallen $\limsup a_n$ en $\liminf a_n$:

(a) $a_n := (-1)^n + n^{-1}$,

(b) $a_n := n + n^{-1} + (-1)^n (n - n^{-1})$,

(c) $0<a_1<b_1$;
$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[b_{n+1}:=\frac{1}{2}(a_n+b_n)]$, $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[a_{n+1}:=(a_nb_n)b_{n+1}^{-1}]$.

4.5.15. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij reële getallen. Bewijs dat $\liminf a_n \le \limsup a_n$.

4.5.16. Bewijs dat $\liminf a_n = \limsup a_n$ dan en slechts dan als $\lim a_n$ bestaat. In dat geval is $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

4.5.17. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij reële getallen. We definiëren $\alpha_n := \sup\{a_k \mid k\ge n\}$. Bewijs dat $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon niet-stijgende rij is en dat $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \limsup a_n$.

4.5.18. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij positieve reële getallen waarvoor geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,\forall_{m\in\mathbb{N}}\,[a_{n+m}\le a_n+a_m]$.
Bewijs dat $\lim_{n\to\infty}(n^{-1}a_n)$ bestaat.

4.5.19. Bewijs dat iedere begrensde rij reële getallen een convergente deelrij heeft.

4.5.20. Zij K een archimedisch geordend lichaam met de volgende eigenschap: Iedere begrensde monotone rij elementen van K heeft een limiet.
Bewijs dat $K=\mathbb{R}$.

4.5.21. Van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ noemen we de partiële sommen s_n. Als $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[\,|s_n|\le 1]$ en $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[s_{n+1}\ge\frac{1}{2}(s_n+s_{n+2})]$ dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Bewijs dit.

4.5.22. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan en slechts dan convergeert als

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{p\in\mathbb{N}}\,\forall_{q\in\mathbb{N}}\,\left[\,\left|\sum_{n=N+p}^{N+p+q} a_n\right|<\varepsilon\right].$$

4.5.23. Zij $p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ en $x\in\mathbb{R}$, $0\le x<1$. Bewijs dat er een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat, waarvoor geldt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[(a_n\in\mathbb{Z})\wedge(0\le a_n<p)]$,

zo dat $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-n}$.
Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niet éénduidig bepaald is (voor welke x wel?). Als p=2 resp. 3 resp. 10 dan heet $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de binaire resp. ternaire resp. decimale ontwikkeling van x.

4.5.24. Zij ϕ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ een reële functie die op ieder interval begrensd is, d.w.z.

$$\forall_{a\in\mathbf{R}}\ \forall_{b\in\mathbf{R},b>a}\ \exists_{M\in\mathbf{R}}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(a<x<b)\Rightarrow(|\phi(x)|<M)].$$

Als $\lim_{x\to\infty} \{\phi(x+1)-\phi(x)\} = 0$ dan is ook $\lim_{x\to\infty} \{x^{-1}\phi(x)\} = 0$.
Bewijs dit.

4.5.25. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks en $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rij van partiële sommen. Zij $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij. Bewijs dat
$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N} s_n(b_n-b_{n+1})+s_N b_{N+1}$ (voor alle $N\in\mathbf{N}$)
(*Abel-sommatie*).

4.5.26. (*Stelling van Dirichlet*). Als de rijen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ voldoen aan

(i) $\exists_{M\in\mathbf{R}}\ \forall_{N\in\mathbf{N}}\ [\,|\sum_{n=1}^{N} a_n|<M]$,

(ii) $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [b_n\geq b_{n+1}]$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergent. Bewijs dit.
Ga ook na dat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in deze stelling een rij complexe getallen kan zijn.

4.5.27. Bewijs dat voor $x\in\mathbf{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ convergeert.

4.5.28. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een monotoon niet-stijgende rij is dan zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ beide convergent, of beide divergent. Bewijs dit. Als toepassing bewijze men: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ is convergent voor k>1, divergent voor k≤1.

4.5.29. Bewijs dat $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[e^x \geq 1+x]$.

4.5.30. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ als $a\in\mathbf{R}$, $a>0$.

4.5.31. Als $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen is dan geldt

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Bewijs dit. Herformuleer 4.3.15 en 4.3.16 nu.

5 Topologische ruimten en metrische ruimten

5.1. Topologische ruimten

Om een aantal eigenschappen van **R** en **C**, o.a. van limieten, te bestuderen, voeren we abstracte structuren in waarin dezelfde eigenschappen te vinden zijn. Stellingen over **R** en **C** zijn dan gevolgen van meer algemene uitspraken. Bovendien is dan duidelijker welke eigenschappen van **R** en **C** we gebruiken om deze stellingen te bewijzen.

5.1.1. DEFINITIE. *Een topologische ruimte* $(R,\mathcal{T})$ *is een niet lege verzameling* R *met een collectie* $\mathcal{T}$ *van deelverzamelingen, die we open verzamelingen in* R *noemen, met de volgende eigenschappen:*

T1 : $\emptyset\in\mathcal{T}$, $R\in\mathcal{T}$,

T2 : $\forall_{O_1\in P(R)}\ \forall_{O_2\in P(R)}\ [(O_1\in\mathcal{T}\wedge O_2\in\mathcal{T})\Rightarrow(O_1\cap O_2\in\mathcal{T})]$,

T3 : $(\forall_{\alpha\in A}\ [O_\alpha\in\mathcal{T}])\Rightarrow(\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha\in\mathcal{T})$.

In T3 stelt A een willekeurige indexverzameling voor.
In woorden: de doorsnede van twee open verzamelingen is open (T2) en de vereniging van willekeurig veel open verzamelingen is open (T3). De elementen van R noemen we *punten* van de ruimte R. De collectie $\mathcal{T}\subset P(R)$ heet een *topologie* van R. Als in een topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ de verzameling Ω open is en $P\in R$, $P\in\Omega$, dan noemen we Ω een *omgeving* van P. Sommige auteurs nemen de definitie van omgeving nog ruimer en noemen $V\in P(R)$ een omgeving van P als er een open verzameling Ω is met $P\in\Omega\subset V$. Erg veel verschil maakt dit niet.
Een verzameling $V\in P(R)$ heet *gesloten* deelverzameling van de topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ als $R\backslash V\in\mathcal{T}$. Anders gezegd: een gesloten verzameling is het complement van een open verzameling.

5.1.2. OPGAVE. Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. Bewijs dat R en $\emptyset$ gesloten zijn. Bewijs dat de vereniging van twee gesloten verzamelingen gesloten is en dat de doorsnede van willekeurig veel gesloten verzamelingen gesloten is.

5.1.3. VOORBEELD. Laat R een willekeurige verzameling zijn. Kies $\mathcal{T}:=P(R)$. Dan is op triviale wijze aan T1, T2 en T3 voldaan. O.a. is ieder punt van R, opgevat als deelverzameling van R, een open verzameling. Men noemt dit de *discrete* topologie. Bij dezelfde R kunnen we ook $\mathcal{T}:=\{\emptyset,R\}$ nemen. Ook dan is onmiddellijk duidelijk dat T1, T2 en T3 gelden. Dit heet de *triviale* topologie. Van een verzameling R kunnen we dus op tenminste 2 manieren een topologische ruimte maken (tenzij R uit minder dan 2 elementen bestaat).

Om niet al te vreemde situaties tegen te komen zullen we iets meer van $\mathcal{T}$ moeten eisen. We doen dit als volgt.

5.1.4. DEFINITIE. *Een topologische ruimte* $(R,\mathcal{T})$ *heet Hausdorff-ruimte als bij elk puntenpaar* P_1,P_2 *uit* $R (P_1 \neq P_2)$ *omgevingen* Ω_1, Ω_2 *van* P_1 *resp.* P_2 *bestaan zo dat* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

We zullen in onderstaande voorbeelden o.a. zien dat van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ topologische ruimten gemaakt kunnen worden zó dat het woord omgeving min of meer aansluit bij de betekenis uit de omgangstaal. Voor $\mathbb{R}$ zullen dan open intervallen ook open verzamelingen zijn en gesloten intervallen gesloten verzamelingen zijn. Men spreekt daarom van de *interval-topologie* van $\mathbb{R}$.

VOORBEELDEN

5.1.5. Zij $\mathcal{T} \subset P(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$O \in \mathcal{T} \ :\Leftrightarrow\ \forall_{x \in O}\ \exists_{\delta \in \mathbb{R},\, \delta > 0}\ [\,(x-\delta, x+\delta) \subset O\,].$$

Dan is $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ een topologische ruimte. Deze $\mathcal{T}$ heet de intervaltopologie.

5.1.6. Zij $\mathcal{T} \subset P(\mathbb{R}^2)$ gedefinieerd door

$$O \in \mathcal{T} \ :\Leftrightarrow\ \forall_{(a,b) \in O}\ \exists_{\delta \in \mathbb{R},\, \delta > 0}\ \forall_{(x,y) \in \mathbb{R}^2}\ [\,(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((x,y) \in O)\,].$$

Dan is $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. Daar we $\mathbb{R}^2$ als model van $\mathbb{C}$ gebruiken is ook $(\mathbb{C},\mathcal{T})$ een topologische ruimte als we T definiëren door

$O \in T :\Leftrightarrow \forall_{a\in O}\, \exists_{\delta\in\mathbf{R},\delta>0}\, \forall_{z\in\mathbf{C}}\, [(|z-a|<\delta)\Rightarrow(z\in O)]$.

5.1.7. Zij $T\subset P(\mathbf{Z})$ gedefinieerd door

$O\in T :\Leftrightarrow O=\emptyset$ of O^* is een eindige verzameling.

Uit (1.11.12) en (1.20.5) volgen T2 en T3 onmiddellijk. $(\mathbf{Z},T)$ is een topologische ruimte. T heet de *cofiniete* topologie.

5.1.8. Zij $R:=[0,1)$ en T gedefinieerd door

$O\in T :\Leftrightarrow O=\emptyset$ of $O=[0,\alpha)$ met $0<\alpha\leq 1$.

T1 en T2 zijn triviaal. T3 volgt uit 4.5.2. (R,T) is een topologische ruimte.

De voorbeelden 5.1.5 en 5.1.6 zijn Hausdorff-ruimten, 5.1.7 en 5.1.8 niet.

5.1.9. DEFINITIE. *Zij* (R,T) *een topologische ruimte,* $S\subset R$, $S\neq\emptyset$, *en* $T|S:=\{O\cap S \mid O\in T\}$. *Dan is* $(S,T|S)$ *een topologische ruimte. We noemen* $T|S$ *de relatieve topologie of geïnduceerde topologie.*

(Het zal de lezer geen moeite kosten in te zien dat $T|S$ inderdaad een topologie voor S is.)

OPGAVEN

5.1.10. Zij $T:=\{(\alpha,\infty) \mid \alpha\in\mathbf{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbf{R}\}$. Bewijs dat $(\mathbf{R},T)$ een topologische ruimte is maar niet een Hausdorff-ruimte.

5.1.11. Zij $R:=\{a,b,c\}$. Bepaal alle topologieën van R.

We beschouwen nu rijen punten in een topologische ruimte. We zullen het begrip limiet van een rij zo invoeren dat dit voor $\mathbf{R}$ met de interval-topologie het in 4.1.8 gedefinieerde is.

5.1.12. DEFINITIE. *Zij* $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij punten van de topologische ruimte* (R,T) *en zij* $P\in R$. *We zeggen* $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ *(of* $P_n\to P$ *als* $n\to\infty$*) als voor iedere omgeving* Ω *van* P *geldt* $\exists_{k\in\mathbf{N}}\, \forall_{m\in\mathbf{N},m>k}\, [P_m\in\Omega]$.

Een rij die een limiet heeft noemen we weer een *convergente* rij.

5.1.13. OPGAVE. Bewijs dat voor $\mathbf{R}$ met de interval-topologie 4.1.8 en 5.1.12 equivalent zijn.

5.1.14. VOORBEELD. Zij (R,T) de topologische ruimte uit 5.1.8. Beschouw de rij $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met $P_n := \frac{1}{n+1}$. Als α een willekeurig punt van R is dan is $\lim_{n\to\infty} P_n = \alpha$. Immers een omgeving van α is een interval $[0,\beta)$ met $\beta>\alpha$ en voor $n+1>\beta^{-1}$ is $P_n\in[0,\beta)$.

Na dit vreemde voorbeeld is de volgende stelling geruststellend:

5.1.15. STELLING. *In een Hausdorff-ruimte heeft een convergente rij één limiet.*

Bewijs. Als $P_n\to P$ en $P_n\to Q$ dan heeft volgens 5.1.12 iedere omgeving Ω_1 van P met iedere omgeving Ω_2 van Q een niet lege doorsnede. Dus $P=Q$.

5.1.16. STELLING. *Is* (R,T) *een topologische ruimte,* $V\subset R$ *en* V *gesloten en is* $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij uit* V *die convergeert naar* P *dan is* $P\in V$.

Bewijs. Voor iedere $Q\in V^*$ is V^* een omgeving van Q die géén punten van de rij $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bevat. Volgens 5.1.12 is dan $\neg(\lim_{n\to\infty} P_n = Q)$.

We zullen in 5.3 meer over topologische ruimten zeggen. Eerst willen we een belangrijke deelklasse bespreken. De ruimten in deze klasse heten *metrische ruimten*. We zullen ons in dit boek in het algemeen beperken tot de bestudering van metrische ruimten. Toch zullen we vele eigenschappen tegenkomen die ook algemene topologische ruimten hebben. Waar nodig zullen we daar op wijzen.

5.2. Metrische ruimten

5.2.1. DEFINITIE. *Een metrische ruimte* (R,d) *is een niet lege verzameling* R *en een afbeelding* $d\colon R\times R\to\mathbf{R}$ *zo dat*

M1: $\forall_{P\in R}\ \forall_{Q\in R}\ [d(P,Q)=d(Q,P)]$, M2: $\forall_{P\in R}\,\forall_{Q\in R}\,[(P\neq Q)\Rightarrow(d(P,Q)>0)]$, $\forall_{P\in R}\,[d(P,P)=0]$,

M3: $\forall_{P_1\in R}\,\forall_{P_2\in R}\,\forall_{P_3\in R}\,[d(P_1,P_3)\leq d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)]$.

We noemen $d(P,Q)$ de *afstand* van P en Q. De functie d heet een *metriek*. De ongelijkheid in M3 heet de *driehoeksongelijkheid*. De verklaring van deze naam is de volgende. Het Cartesische vlak $\mathbf{R}^2$ met de gebruikelijke afstand is een voorbeeld van een metrische ruimte. Nu zegt M3: de lengte van een zijde van een driehoek is kleiner dan of gelijk aan de som van de lengten van de andere zijden.

VOORBEELDEN

5.2.2. Definieer d: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ door $d(x,y):=|x-y|$. Dan heeft d zoals bekend de eigenschappen M1, M2, M3. Dus $(\mathbf{R},d)$ is een metrische ruimte.

5.2.3. Definieer d: $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ door $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)):=$ $:=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$. Nu zijn M1 en M2 triviaal. Verder is voor ieder drietal punten (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3):

$$|x_1-x_3|\leq|x_1-x_2|+|x_2-x_3| \text{ en } |y_1-y_3|\leq|y_1-y_2|+|y_2-y_3|,$$

dus ook

$$|x_1-x_3| \leq \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} + \max\{|x_2-x_3|,|y_2-y_3|\}$$

enz. waaruit M3 volgt. Dus $(\mathbf{R}^2,d)$ is een metrische ruimte.

5.2.4. Zij R een willekeurige verzameling. We definiëren d: $R\times R\to\mathbf{R}$ door $d(x,y):=1$ als $x\neq y$ en $d(x,x):=0$. Op triviale wijze is aan M1 t/m M3 voldaan. Dus (R,d) is een metrische ruimte.

5.2.5. Zij R de verzameling van alle begrensde reële functies gedefinieerd op $[0,1]$. We definiëren voor $f\in R$, $g\in R$

$$d(f,g) := \sup\{|f(x)-g(x)| \mid 0\leq x\leq 1\}.$$

Weer zijn M1 en M2 triviaal. Om M3 te bewijzen beschouwen we 3 functies f, g, h uit R. Voor iedere $x\in[0,1]$ geldt
$|f(x)-h(x)|\leq|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\leq d(f,g)+d(g,h)$.
Dus is $d(f,h) = \sup\{|f(x)-h(x)| \mid 0\leq x\leq 1\}\leq d(f,g)+d(g,h)$.
Dus (R,d) is een metrische ruimte.

We zullen nu met behulp van de metriek d van de metrische ruimte (R,d) een topologie definiëren. Deze heet de *metrische* topologie.

5.2.6. DEFINITIE. *Is* (R,d) *een metrische ruimte,* $P \in R$ *en* a *een positief reëel getal dan noemen we de verzameling*

$$B_{P,a} := \{Q \in R \mid d(P,Q) < a\}$$

de open bol met middelpunt P *en straal* a.

De naam "open bol" zal na opgave 5.2.10 duidelijk zijn.

5.2.7. DEFINITIE. *Is* (R,d) *een metrische ruimte,* $V \subset R$ *en* $P \in V$ *dan noemen we* P *inwendig punt van* V *als* $\exists_{a \in \mathbb{R}, a>0} [B_{P,a} \subset V]$.

5.2.8. STELLING. *Als we in de metrische ruimte* (R,d) *iedere verzameling waarvan alle punten inwendige punten zijn open noemen, is een topologie voor* R *gedefinieerd.*

Bewijs. T1 is triviaal. Als O_1 en O_2 open zijn en $P \in O_1 \cap O_2$ kies dan a_1 zó dat $B_{P,a_1} \subset O_1$ en a_2 zó dat $B_{P,a_2} \subset O_2$.
Zij $a = \min \{a_1, a_2\}$. Dan is $B_{P,a} \subset O_1 \cap O_2$. Daar P willekeurig was is bewezen dat $O_1 \cap O_2$ open is. Daar O_1 en O_2 willekeurig waren is T2 bewezen. Is P een punt uit de vereniging van open verzamelingen dan ligt P in een van deze open verzamelingen en met P ook een open bol om P, d.w.z. T3 geldt.

In een willekeurige topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ noemt men $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ een *basis voor de topologie* als iedere $O \in \mathcal{T}$ vereniging is van verzamelingen uit $\mathcal{B}$. De metrische topologie is zo gedefinieerd dat de verzameling van alle open bollen een basis is voor de topologie (zie 5.2.10).

OPGAVEN

5.2.9. Zij (R,d) een metrische ruimte en $d' : R \times R \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\forall_{a \in R} \forall_{b \in R} \left[d'(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)} \right].$$

Dan is (R,d') een metrische ruimte. Bewijs dit. Ga na dat de twee metrieken dezelfde topologie bepalen.

5.2.10. Zij (R,d) een metrische ruimte, $P\in R$, $a\in\mathbf{R}$, $a>0$. Bewijs dat $B_{P,a}$ in de metrische topologie een open verzameling is.

5.2.11. Zij R een verzameling. Een verzameling $\mathcal{B}\subset P(R)$ is een basis voor een topologie van R dan en slechts dan als $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = R$ en

$$\forall_{B_1\in\mathcal{B}}\ \forall_{B_2\in\mathcal{B}}\ \exists_{\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}}\ [B_1\cap B_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B].$$

5.2.12. Zij (R,d) een metrische ruimte en $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij uit R. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ dan en slechts dan als

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbf{R},\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [(n>N)\Rightarrow(d(P_n,P)<\varepsilon)].$$

5.2.13. STELLING. *Een metrische ruimte* (R,d) *met de metrische topologie is een Hausdorff-ruimte.*

Bewijs. Zij $P\in R$, $Q\in R$ $(P\neq Q)$. Kies $\delta=\frac{1}{2}d(P,Q)$. Dan is $B_{P,\delta}\cap B_{Q,\delta}=\emptyset$.

5.2.14. DEFINITIE. *Een deelverzameling* V *van een metrische ruimte* (R,d) *heet begrensd als*

$$\exists_{P\in R}\ \exists_{a\in\mathbf{R},a>0}\ [V\subset B_{P,a}].$$

We kunnen nu het begrip *fundamentaalrij* 4.1.13 ook in metrische ruimten invoeren.

5.2.15. DEFINITIE. *Een rij* $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *uit een metrische ruimte* (R,d) *heet fundamentaalrij als*

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbf{R},\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{m>N}\ \forall_{n>N}\ [d(P_m,P_n)<\varepsilon].$$

Ook nu is duidelijk dat een convergente rij een fundamentaalrij is. Een analogon van 4.1.14 geldt niet. Dit is een eigenschap van $\mathbf{R}$ en niet van alle metrische ruimten. Men gaat gemakkelijk na dat $(\mathbf{Q},d)$ een metrische ruimte is waarin niet iedere fundamentaalrij een convergente rij is (als d gedefinieerd is door $d(x,y):=|x-y|$). De metrische ruimten waarvoor het analogon van 4.1.14 geldt krijgen een speciale naam:

5.2.16. DEFINITIE. *Een metrische ruimte* (R,d) *heet volledig (compleet) als iedere fundamentaalrij uit* R *convergeert.*

De lezer zal zonder al te veel moeite zien dat verschillende van de in dit hoofdstuk genoemde voorbeelden volledige metrische ruimten zijn. Een zeer belangrijk voorbeeld is 5.2.5. We komen hier in 5.6 op terug.

5.2.17. STELLING. (Banach): *Zij* (R,d) *een volledige metrische ruimte en* ϕ *een contractie van* R, *dat is een afbeelding van* R *in* R *waarvoor geldt*

$$\exists_{k\in R, k<1}\ \forall_{x\in R}\ \forall_{y\subset R}\ [d(\phi(x),\phi(y))\le kd(x,y)].$$

Dan is er één punt $a\in R$ *met* $\phi(a)=a$.

Bewijs. Zij $x_1\in R$. Definieer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ [x_{n+1}:=\phi(x_n)]$. Dan is $d(x_{n+1},x_n)\le k^{n-1}d(x_1,x_2)$. Dit volgt met volledige inductie uit de contractie-eigenschap van ϕ. Dan is

$$d(x_{n+\ell},x_n)\le d(x_{n+\ell},x_{n+\ell-1})+\ldots+d(x_{n+1},x_n)\le$$

$$\le k^{n-1}(1-k)^{-1}d(x_2,x_1).$$

Dit toont ons dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een fundamentaalrij is. Daar (R,d) volledig is convergeert x_n naar een limiet $a\in R$. Uit $d(\phi(a),x_{n+1})\le kd(a,x_n)\to 0$ als $n\to\infty$ volgt dat $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \phi(a)$. Daar $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ hebben we bewezen dat $\phi(a)=a$. Uit $\phi(a)=a$ en $\phi(b)=b$ volgt $d(a,b)=d(\phi(a),\phi(b))\le$ $\le kd(a,b)$ met $k<1$, dus $d(a,b)=0$, d.w.z. $a=b$. Hiermee is de stelling bewezen.

5.3. Topologische begrippen

In deze paragraaf voeren we een aantal begrippen in die in het vervolg een grote rol zullen spelen.

5.3.1. DEFINITIE. *Als* (R,T) *een topologische ruimte is en* $V\subset R$ *dan is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die* V *omvatten zelf een gesloten verzameling die* V *omvat. Deze noemen we de afsluiting van* V *(notatie:* $\overline{V}$*).*

Enkele eigenschappen die onmiddellijk duidelijk zijn, zijn:

(i) (V gesloten)$\Leftrightarrow$($\overline{V}=V$),

(ii) $(V_1 \subset V_2) \Rightarrow (\overline{V}_1 \subset \overline{V}_2)$.

5.3.2. STELLING. *Is* (R,d) *een metrische ruimte en beschouwen we de metrische topologie, dan is, als* $V \subset R$, *de afsluiting* $\overline{V}$ *de verzameling van de limieten van convergente rijen uit* V.

Bewijs. Als $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een convergente rij is uit V, dus ook uit $\overline{V}$, dan is $\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \overline{V}$ volgens 5.1.16. Als $P\in V$ dan is P limiet van de rij $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[P_n=P]$. We moeten dus alleen nog bewijzen dat als $P\in\overline{V}\backslash V$ er een rij $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is uit V met $\lim_{n\to\infty} P_n = P$. Als $P\in\overline{V}$ en $n\in\mathbf{N}$ dan is $B_{P,\frac{1}{n}}\cap V\neq\emptyset$ daar anders $V\subset B^*_{P,\frac{1}{n}}$ en dus $\overline{V}\subset B^*_{P,\frac{1}{n}}$ (omdat $B^*_{P,\frac{1}{n}}$ gesloten is), d.w.z. $P\notin\overline{V}$. Voor iedere $n\in\mathbf{N}$ kiezen we een punt $P_n\in B_{P,\frac{1}{n}}\cap V$. Dan is de gevraagde rij geconstrueerd ($\lim_{n\to\infty} P_n = P$ is nu triviaal).

5.3.3. DEFINITIE. *Is* (R,T) *een topologische ruimte,* $V\subset R$, *dan is de vereniging van alle open verzamelingen die in* V *bevat zijn zelf een open verzameling die in* V *bevat is. Deze noemen we het inwendige van* V *(notatie* $\overset{\circ}{V}$*).*

OPGAVEN

5.3.4. Bewijs dat het complement van de afsluiting van V gelijk is aan het inwendige van het complement van V.

5.3.5. Als (R,d) een metrische ruimte is en $V\subset R$ dan bestaat het inwendige van V uit alle inwendige punten van V. Bewijs dit.

We hebben voor een deelverzameling V van een metrische ruimte bepaalde punten de naam inwendige punten gegeven en hierboven dit begrip gegeneraliseerd. We willen nu nog enkele andere soorten punten onderscheiden:

5.3.6. DEFINITIE. *Een punt* P *in de topologische ruimte* (R,T) *heet verdichtingspunt van de deelverzameling* V *als iedere omgeving van* P *een van* P *verschillend punt van* V *bevat.*

Merk op dat niet geëist wordt dat $P\in V$! Zo is in $\mathbf{R}$ met de interval-topologie ieder punt verdichtingspunt van $\mathbf{Q}$ en 1 een verdichtingspunt van (0,1).

5.3.7. DEFINITIE. *Is* V *een deelverzameling van een topologische ruimte en* $P \in V$ *dan heet* P *geïsoleerd punt van* V *als* P *een omgeving* Ω *heeft met* $\Omega \cap V = \{P\}$.

5.3.8. DEFINITIE. *Is* V *een deelverzameling van een topologische ruimte* (R, T) *en* $P \in R$ *dan heet* P *randpunt van* V *als voor iedere omgeving* Ω *van* P *geldt* $(\Omega \cap V \neq \emptyset) \wedge (\Omega \cap V^* \neq \emptyset)$.

Aan de hand van de reeds genoemde voorbeelden kan men door geschikte V te kiezen zich vertrouwd maken met deze nieuwe begrippen.

5.3.9. OPGAVE. Zij $R := \mathbf{R}^2$, T als in 5.1.6, $V \subset R$. Ga na dat

(i) inwendige punten van V zijn verdichtingspunten van V,

(ii) geïsoleerde punten van V zijn randpunten van V,

(iii) randpunten van V zijn verdichtingspunt of geïsoleerd punt van V.

Ga na of (i), (ii) en (iii) ook gelden als T de discrete topologie is.

5.3.10. DEFINITIE. *Zij* (R, T) *een topologische ruimte,* $V \subset R$. V *heet overal dicht in* R *als* $\overline{V} = R$.

Als (R, T) een eindige of aftelbare overal dichte deelverzameling bevat dan heet (R, T) *separabel.*

We hebben boven al een voorbeeld gegeven nl. $\mathbf{Q}$ is overal dicht in $\mathbf{R}$. (Als van $\mathbf{R}$ geen topologie genoemd wordt bedoelen we steeds de interval-topologie.)

5.3.11. OPGAVE. Zij $R := [0, 1)$ met de door de interval-topologie van $\mathbf{R}$ geïnduceerde topologie. Zij $V_\theta := \{n\theta - [n\theta] \mid n \in \mathbf{N}\}$.

(N.B. Als $x \in \mathbf{R}$ dan is $[x] := \max \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}$.)
Bewijs dat als θ irrationaal is V_θ overal dicht in R ligt.

5.4. De ruimte $\mathbf{R}^n$

Naast het afstandsbegrip dat in 3.4.4 is ingevoerd voor $\mathbf{R}^n$ nemen we nog twee andere in beschouwing.

5.4.1. STELLING. *Zij in de ruimte* $\mathbf{R}^n$ *voor* $P := (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *en* $Q := (q_1, q_2, \ldots, q_n)$:

$$d_1(P,Q) := \left(\sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_2(P,Q) := \max\{|p_i-q_i| \mid 1\le i\le n\},$$

$$d_3(P,Q) := \sum_{i=1}^{n}|p_i-q_i|.$$

Dan is voor i=1,2,3 $(\mathbf{R}^n,d_i)$ *een metrische ruimte en de drie metrieken induceren dezelfde topologie.*

Bewijs. Voor d_1, d_2 en d_3 zijn M1 en M2 triviaal. Zij $R:=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$. Als $a_1,a_2,\ldots,a_n$ en $b_1,b_2,\ldots,b_n$ reële getallen zijn is $\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)^2$ een kwadratische vorm in t die voor alle t niet negatief is en dus een discriminant ≤ 0 heeft. Als we nu $a_i:=p_i-q_i$ en $b_i:=q_i-r_i$ nemen vinden we M3 voor d_1. Voor d_2 en d_3 is M3 weer triviaal gevolg van de driehoeksongelijkheid in $\mathbf{R}$ (zie 5.2.3).

Zij nu $P\in\mathbf{R}^n$, $a\in\mathbf{R}$, $a>0$. Beschouw de bol $B^{(1)}_{P,a}$ waarin we met (1) aangeven dat d_1 de metriek is. Zij $a':=n^{-\frac{1}{2}}a$. Dan is $B^{(2)}_{P,a'}\subset B^{(1)}_{P,a}$. Verder is $B^{(3)}_{P,a'}\subset B^{(2)}_{P,a'}$. Met $a'':=n^{-1}a'$ is echter $B^{(1)}_{P,a''}\subset B^{(3)}_{P,a'}$. Dit impliceert dat een verzameling die voor één van de metrieken open is dit ook voor de andere metrieken is.

We kunnen met vrucht van deze stelling gebruik maken bij bewijzen over limieten. We kunnen dan nl. met d_1 of d_2 of d_3 werken naar eigen keuze.

5.4.2. STELLING. *Voor de drie in* 5.4.1 *ingevoerde metrieken geldt:* $(\mathbf{R}^n,d_i)$ *is een volledige metrische ruimte.*

Bewijs. We kunnen ons tot d_2 beperken, omdat een fundamentaalrij voor één van de metrieken dit ook voor de andere twee is. Zij $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ een fundamentaalrij in $\mathbf{R}^n$; $P_k:=(p_1^{(k)},p_2^{(k)},\ldots,p_n^{(k)})$. Dan is blijkbaar voor iedere i $(1\le i\le n)$ de rij $(p_i^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ een fundamentaalrij in $\mathbf{R}$. Volgens 4.1.14 bestaat voor $1\le i\le n$ dus $\lim_{k\to\infty} p_i^{(k)}$. Noem deze limiet p_i en zij $P:=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$.

Nu we weten dat deze limieten bestaan volgt uit

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ \forall_{\ell>N}\ [\max_i |p_i^{(k)}-p_i^{(\ell)}|<\varepsilon]$$

door limietovergang $\ell\to\infty$ dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ [\max_i |p_i^{(k)}-p_i|\le\varepsilon]$$

en hieruit zien we dat $\lim_{k\to\infty} P_k=P$.

Een bijzonder geval van deze stelling is de uitspraak: $\mathbf{C}$ is volledig. Daarom is 4.5.22 ook voor $\mathbf{C}$ juist.

5.5. Compactheid

Veel van wat in volgende hoofdstukken aan de orde komt hangt sterk samen met het begrip "compact" dat we nu gaan definiëren. Het is voor de lezer van groot belang er voor te zorgen dat hij dit begrip werkelijk beheerst. De ervaring van de auteurs is dat men hier vaak veel moeite mee heeft en dat deze moeite steeds voortkomt uit het niet goed interpreteren van quantoren!

5.5.1. DEFINITIE. *Zij* (R,T) *een topologische ruimte en* $V\subset R$. *Als voor iedere* $\alpha\in A$ *(een indexverzameling)* O_α *een open verzameling is en* $V\subset \bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha$ *dan noemen we* $\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$ *een overdekking van* V *met open verzamelingen. Is verder* $B\subset A$ *en* $V\subset \bigcup_{\alpha\in B} O_\alpha$ *dan is ook* $\{O_\alpha \mid \alpha\in B\}$ *een overdekking van* V, *die we een deeloverdekking van de oorspronkelijke overdekking noemen. Is* B *een eindige verzameling dan heet de deeloverdekking eindig.*

5.5.2. VOORBEELD. In $\mathbf{R}^2$ zij $V:=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$. Voor $\rho\in(0,1)$ definiëren we $O_\rho:=\{(x,y)\mid x^2+y^2<\rho\}$. Dan is $\{O_\rho\mid \rho\in(0,1)\}$ een overdekking van V met open verzamelingen. Het stelsel $\{O_\rho\mid \rho\in(\frac{1}{2},1)\cap\mathbf{Q}\}$ is een deeloverdekking. Iedere deeloverdekking bestaat uit oneindig veel cirkels.

5.5.3. DEFINITIE. *Een deelverzameling* V *van een topologische ruimte* (R,T) *heet compact als iedere overdekking van* V *met open verzamelingen een eindige deeloverdekking bevat.*

Is in 5.5.3 $V=R$ dan noemen we $(R,\mathcal{T})$ een *compacte ruimte*. Is V een compacte deelverzameling van de topologische ruimte $(R,\mathcal{T})$ en $\mathcal{T}|V$ de relatieve topologie dan is $(V,\mathcal{T}|V)$ een compacte ruimte. (Ga na!)
De kracht en de moeilijkheid van het begrip zitten in het woord "iedere". Om van een verzameling V compactheid te bewijzen moeten we uitgaan van een willekeurige overdekking en aantonen dat deze een eindige deeloverdekking bevat. Is echter van V de compactheid reeds bewezen dan kunnen we zelf een overdekking van V construeren, hoe dan ook, en dan weten we dat ook deze een eindige deeloverdekking bevat. Merk op dat als $(R,\mathcal{T})$ een compacte ruimte is, A een verzameling en, voor iedere $\alpha\in A$, V_α een gesloten deelverzameling van R is het volgende geldt: Als $\bigcap_{\alpha\in A} V_\alpha=\emptyset$ dan is er een eindige deelverzameling A' van A zo dat $\bigcap_{\alpha\in A'} V_\alpha=\emptyset$. Deze uitspraak volgt uit 5.5.3 door complementvorming.
We voeren nog een tweede begrip in dat sterk verwant is met compactheid.

5.5.4. DEFINITIE. *Een deelverzameling* V *van een topologische ruimte* $(R,\mathcal{T})$ *heet rijcompact als iedere rij* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uit* V *een deelrij heeft die convergeert naar een limiet in* V.

5.5.5. STELLING. $\mathbb{R}$ *is niet compact en niet rijcompact.*

Bewijs. Voor iedere $x\in\mathbb{R}$ is $(x-1,x+1)$ een open verzameling en $\{(x-1,x+1)\mid x\in\mathbb{R}\}$ is een overdekking van $\mathbb{R}$ met open verzamelingen. Het is duidelijk dat deze geen eindige deeloverdekking bevat daar de vereniging van eindig veel intervallen $(x-1,x+1)$ een begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ is. Verder is $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ die geen convergente deelrij heeft. Op dezelfde manier is aan te tonen dat ook $\mathbb{R}^n$ niet compact en niet rijcompact is. Verder is 5.5.2 een voorbeeld van een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ die niet compact is en ook niet rijcompact (immers de rij $((1-n^{-1},0))_{n\in\mathbb{N}}$ is wel convergent in $\mathbb{R}^2$ maar de limiet $(1,0)$ ligt niet in V).

OPGAVEN

5.5.6. Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte waarbij R een eindige verzameling is. Bewijs dat $(R,\mathcal{T})$ compact is.

5.5.7. Als T de triviale topologie is dan is (R,T) compact. Bewijs dit.

5.5.8. Zij R een oneindige verzameling en T de discrete topologie. Bewijs dat (R,T) niet compact is.

De twee volgende stellingen stellen ons in staat vaak van compactheid gebruik te maken.

5.5.9. STELLING. (Heine-Borel): *Iedere gesloten begrensde deelverzameling van* $\mathbf{R}^n$ *is compact.*

Bewijs. We beperken ons in het bewijs tot $\mathbf{R}^2$ om de presentatie overzichtelijker te maken. Voor $n=1$ en $n>2$ zijn de bewijzen analoog. Merk op dat in de bewering eigenlijk tweemaal het woord iedere voorkomt! We beginnen dus met een willekeurige gesloten begrensde verzameling $V\subset\mathbf{R}^2$ en nemen aan dat $\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$ een willekeurige overdekking van V is met open verzamelingen. Daar V begrensd is is er een rechthoek $\{(x,y) \mid a_1\le x\le b_1, c_1\le y\le d_1\}$ die V omvat. We verdelen deze in vier gelijke delen $\{(x,y) \mid a_1\le x\le \frac{1}{2}(a_1+b_1), c_1\le y\le \frac{1}{2}(c_1+d_1)\}$ enz. De doorsnede van V met zo'n vierde deel wordt door $\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$ overdekt. We nemen nu aan dat $\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$ geen eindige deeloverdekking bevat. Dan moet dit ook voor tenminste één van die "vierde delen van V" gelden. De bijbehorende rechthoek noemen we $\{(x,y) \mid a_2\le x\le b_2, c_2\le y\le d_2\}$. Dit proces herhalen we. Zo ontstaan twee intervallennesten $(a_n,b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(c_n,d_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Volgens 4.1.6 is er een punt $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ dat in elke rechthoek van de door ons geconstrueerde rij ligt. Is C een cirkel om (ξ,η) dan liggen de rechthoeken van onze rij vanaf zeker rangnummer binnen C en uit de definitie van deze rechthoeken volgt dat (ξ,η) een verdichtingspunt van V is. Daar V gesloten is, is $(\xi,\eta)\in V$. Er is dus een $\alpha\in A$ zo dat $(\xi,\eta)\in O_\alpha$. Voor voldoende groot rangnummer liggen de door ons geconstrueerde rechthoeken dan ook in O_α. De doorsnede van V met zo'n rechthoek wordt overdekt door O_α. Dit is een tegenspraak met de definitie van onze rij rechthoeken! De aanname dat de overdekking $\{O_\alpha \mid \alpha\in A\}$ geen eindige deeloverdekking bevat is dus onjuist. Daar V en de overdekking willekeurig waren is de stelling hiermee bewezen.

5.5.10. STELLING. (Bolzano-Weierstrass): *Iedere gesloten begrensde deelverzameling van* $\mathbf{R}^n$ *is rijcompact.*

Bewijs. Zij V een willekeurige gesloten begrensde verzameling in $\mathbb{R}^n$ en $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij uit V. We sluiten V weer op in een rechthoek (in het geval n=2). De verdeling in vieren voeren we uit als in 5.5.9. Steeds zoeken we een vierde deel dat oneindig veel termen van de rij bevat en kiezen bij elke stap één zo'n term uit met een rangnummer groter dan die van reeds gekozen termen. Zo ontstaat een deelrij van $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die volgens 4.1.6 convergeert. Daar V gesloten is ligt de limiet van de deelrij in V (5.1.16).

OPGAVEN

5.5.11. Bewijs dat een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ gesloten en begrensd is.

5.5.12. Bewijs dat een rijcompacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ gesloten en begrensd is.

Uit 5.5.9 t/m 5.5.12 zien we dus dat in $\mathbb{R}^n$ de begrippen "compact", "rijcompact" en "gesloten en begrensd" equivalent zijn.
We zullen veel gebruik van compactheid maken in volgende paragrafen. We willen hierop vooruitlopend nu reeds enkele voorbeelden van dit gebruik geven:

5.5.13. VOORBEELD. Zij f een reële functie, gedefinieerd en continu voor $0\le x\le 1$. Uit de definitie van continuiteit volgt:

$$\forall_{x\in[0,1]}\ \exists_{\delta_x>0}\ \forall_{y\in[0,1]}\ [(y\in(x-\delta_x,x+\delta_x))\Rightarrow(|f(x)-f(y)|<1)].$$

Daar $[0,1]$ gesloten en begrensd is, dus compact, bevat de overdekking $[0,1]\subset \bigcup_{x\in[0,1]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ een eindige.
Laat $x_1,x_2,\dots,x_k$ de middens zijn van de intervallen van deze eindige overdekking.
Definieer $M := \max\{|f(x_i)|\mid 1\le i\le k\}$. Dan is voor iedere $y\in[0,1]$ nu bewezen $|f(y)|<M+1$ daar y in een van de intervallen $(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$ ligt. We zien dat we hier "eindig" nodig hebben om "max" te mogen schrijven. We hebben bewezen dat een continue functie op $[0,1]$ begrensd is. Aan $f(x):=x^{-1}$ op $(0,1)$ zien we dat dit voor $(0,1)$ niet waar is.

5.5.14. VOORBEELD. Zij V de verzameling $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ in $\mathbf{C}$. Laat aan ieder punt P van V een open cirkeltje toegevoegd zijn met middelpunt P en straal ρ_P, $(\rho_P>0)$. Dan vormen deze cirkeltjes een overdekking met open verzamelingen van V. Daar V gesloten en begrensd is bevat deze overdekking een eindige deeloverdekking. Door in een figuur V te tekenen, overdekt door eindig veel open cirkels zal de lezer direct inzien dat deze cirkels een grotere cirkel $\{(x,y) \mid x^2+y^2=r\}$, $(r>1)$ overdekken! We zullen hier later nog gebruik van maken.

Ook de volgende stelling is een voorbeeld van het gebruik van compactheid.

5.5.15. STELLING. *Als* V *en* W *niet lege gesloten deelverzamelingen van* $\mathbf{R}^n$ *zijn en* V *is begrensd dan is er een getal* $d\geq 0$ *(de afstand van* V *en* W*) zo dat geldt:*

(i) $\forall_{P\in V}\ \forall_{Q\in W}\ [d(P,Q)\geq d]$,

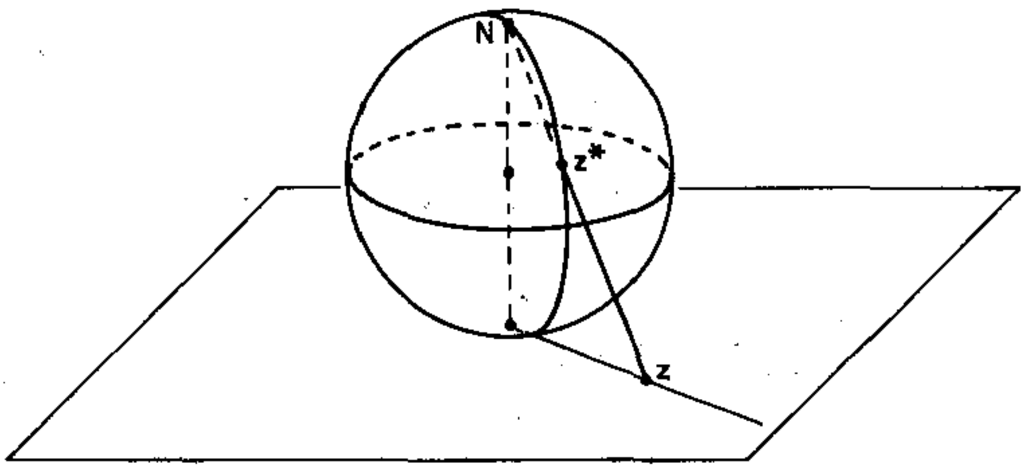
(ii) $\exists_{P\in V}\ \exists_{Q\in W}\ [d(P,Q)=d]$.

Bewijs. Definieer $d := \inf\{d(P,Q) \mid P\in V, Q\in W\}$. Dan is $d\geq 0$. Voor iedere $n\in\mathbf{N}$ geldt $\exists_{P\in V}\ \exists_{Q\in W}\ [d(P,Q)<d+\frac{1}{n}]$. Zo'n paar kiezen we en noemen we P_n, Q_n. Daar V rijcompact is heeft $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een convergente deelrij met limiet $P\in V$. Uit de definitie van P_n, Q_n volgt dat de bijbehorende deelrij van $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ begrensd is, d.w.z. in de doorsnede van W met een begrensde gesloten verzameling ligt. Deze heeft dus ook een convergente deelrij met limiet $Q\in W$. Er is dus een rij $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uit V met $\lim_{n\to\infty} A_n = P$ en een rij $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uit W met $\lim_{n\to\infty} B_n = Q$ zo dat $d\leq d(A_n,B_n)<d+\frac{1}{n}$. Uit $d\leq d(P,Q)\leq d(P,A_n)+d(A_n,B_n)+$ $+d(B_n,Q)$ volgt dan $d(P,Q)=d$ door limietovergang $n\to\infty$.

5.5.16. GEVOLG. Zij $W\subset\mathbf{C}$, W gesloten en zij $z\in\mathbf{C}$. Dan is de afstand van z tot W positief als $z\notin W$. Kies nl. $V:=\{z\}$ en pas 5.5.15 toe.

Het volgende voorbeeld is voornamelijk van belang voor ons in het speciale geval dat $R=\mathbf{C}$.

5.5.17. VOORBEELD. Zij $R:=\mathbf{R}^n$ voorzien van de gebruikelijke topologie $\mathcal{T}$. We definiëren nu $R':=R\cup\{\infty\}$ en voeren een topologie $\mathcal{T}'$ van R' in door twee soorten open verzamelingen te beschouwen: (eerste soort) iedere $O \in T$ en (tweede soort) alle $V \cup \{\infty\}$ waarin $R \backslash V$ compact is in R. We weten dat dit betekent dat $R \backslash V$ gesloten en begrensd is, dus o.a. $V \in T$. Nu is eenvoudig in te zien dat T' inderdaad een topologie voor R' is. Neem nu aan dat $\{W'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van R' is met open verzamelingen (uit T'). Tenminste één van deze moet van het tweede soort zijn daar $\{\infty\}$ anders niet overdekt wordt. Laat dit $W'_{\alpha_1} = V_1 \cup \{\infty\}$ zijn. Zij nu $W_\alpha := W'_\alpha \cap R$. Dan is blijkbaar $\{W_\alpha \mid \alpha \in A, \alpha \neq \alpha_1\}$ een overdekking van $R \backslash V_1$ met open verzamelingen. Daar $R \backslash V_1$ compact is bevat deze overdekking een eindige deeloverdekking. Dit betekent dat $\{W'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een eindige deeloverdekking (van R') bevat. Daar de gekozen overdekking van R' willekeurig was is bewezen dat R' compact is. Men noemt dit de *eenpuntscompactificatie* omdat aan R (niet compact) één punt, nl. ∞, is toegevoegd (en de topologie aangepast is!). Om een beeld te krijgen van deze toevoeging beschouwen we het volgende model van **C** (zie fig. 26).



Figuur 26

Een vlak $\mathbf{R}^2$ door O in $\mathbf{R}^3$ nemen we als model van **C** zoals in **4.4** beschreven is. Een bol raakt in O aan dit vlak. Het andere eindpunt van de middellijn door O noemen we N (noordpool). Projecteer ieder punt van **C** vanuit N op de bol (toevoeging $z \to z^*$). We noemen N het beeld van het *aan* **C** *toegevoegd punt* ∞. De hierboven beschreven topologie T' wordt na projectie op de bol niets anders dan de door de topologie van $\mathbf{R}^3$ geïnduceerde topologie! Een "omgeving van ∞" is het complement van een compacte verzameling, bijv. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$. De zogenaamde "Riemannsche Zahlenkugel" is een model van $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, een compacte ruimte. (N.B. **C** is niet compact!)

5.6. Limieten, uniforme convergentie

We zullen nu afbeeldingen van metrische ruimten in andere metrische ruimten beschouwen en het limietbegrip ook hier invoeren.

5.6.1. DEFINITIE. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$ *en* f *een afbeelding van* V *in* R'. *Als* $Q\in\overline{V}$, $A\in R'$ *dan zeggen we*

$$\lim_{P\in V, P\to Q} f(P) = A$$

als bij iedere omgeving Ω' *van* A *in* R' *een omgeving* Ω *van* Q *in* R *is zo dat* $f(\Omega\cap V)\subset\Omega'$.

We hebben hier bewust een ander symbool voor limiet gebruikt dan tot nu toe omdat de definitie verschilt van de vroegere! Is namelijk $Q\in V$ dan volgt uit $\lim\limits_{P\in V, P\to Q} f(P) = A$ dat $f(Q)=A$. Definitie 5.6.1 heeft het voordeel dat een aantal bewijzen eenvoudiger is. Definitie 5.6.3 zorgt voor de aansluiting bij het limietbegrip uit 4.3.21.

5.6.2. STELLING. *Als* $\lim\limits_{P\in V, P\to Q} f(P) = A$ *en* $\lim\limits_{P\in V, P\to Q} f(P) = B$ *dan is* $A=B$.

Bewijs. Zij Ω'_1 een omgeving van A in R' en Ω'_2 een omgeving van B in R'. Volgens 5.6.1 zijn er omgevingen Ω_1 resp. Ω_2 van Q in R zó dat $f(\Omega_1\cap V)\subset\Omega'_1$ en $f(\Omega_2\cap V)\subset\Omega'_2$. Daar $Q\in\overline{V}$ is $\Omega_1\cap\Omega_2\cap V\neq\emptyset$. Dus $f(\Omega_1\cap\Omega_2\cap V)$ is een niet lege deelverzameling van $\Omega'_1\cap\Omega'_2$. Daar R' een Hausdorff-ruimte is en Ω'_1 en Ω'_2 willekeurig waren is $A=B$.

5.6.3. DEFINITIE. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$ *en* f *een afbeelding van* V *in* R'. *Zij* Q *een verdichtingspunt van* V *en* $W:=V\setminus\{Q\}$.
We definiëren

$$\lim_{P\to Q} f(P) := \lim_{P\in W, P\to Q} f(P)$$

als deze bestaat.

Merk op dat als $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd is door $f(x):=1$ voor $x\neq 0$ en $f(0):=0$ volgens 5.6.1 $\lim\limits_{x\in\mathbf{R}, x\to 0} f(x)$ niet bestaat maar volgens 5.6.3 geldt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Zo is ook $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (4.3.31) hoewel de beschouwde functie in 0 niet is gedefinieerd.

5.6.4. STELLING. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$ *en* f *een afbeelding van* V *in* R'. *Zij* $Q\in\overline{V}$ *en* $A\in R'$. *Dan is* $\lim_{P\in V, P\to Q} f(P) = A$ *dan en slechts dan als voor iedere rij* $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *uit* V *waarvoor* $P_n\to Q$ *als* $n\to\infty$ *geldt* $f(P_n)\to A$ *als* $n\to\infty$.

Bewijs. (i) Zij $\lim_{P\in V, P\to Q} f(P) = A$ en $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij met $P_n\to Q$. Dan is er bij iedere omgeving Ω' van A in R' een omgeving Ω van Q in R met $f(\Omega\cap V)\subset\Omega'$ terwijl er bij Ω een rangnummer N is zo dat voor alle $n>N$ geldt $P_n\in\Omega$. Dus voor alle $n>N$ ook $f(P_n)\in\Omega'$. Daar dit voor iedere Ω' geldt is $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = A$.

(ii) Stel $\neg(\lim_{P\in V, P\to Q} f(P) = A)$. Dan is er een omgeving Ω' van A in R' zo dat in iedere omgeving Ω van Q in V een punt P ligt met $P\in V$ en $f(P)\notin\Omega'$. We kiezen nu $\Omega:=B_{Q,\frac{1}{n}}$ $(n=1,2,\ldots)$ en vinden bij elke n een punt P_n met $d(Q,P_n)<\frac{1}{n}$, $P_n\in V$, $f(P_n)\notin\Omega'$. Dus $\neg(\lim_{n\to\infty} f(P_n) = A)$ hoewel $\lim_{n\to\infty} P_n = Q$.

5.6.5. OPGAVE. Zij $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x):=$ $:=e^{-\frac{1}{x}}$. Zij $V:=(0,1]$ en $W:=[-1,0)$. Ga na of $\lim_{x\in V, x\to 0} f(x)$ resp. $\lim_{x\in W, x\to 0} f(x)$ bestaat.

Het begrip continuïteit waar we voor reële functies al mee vertrouwd zijn is met 5.6.1 heel eenvoudig tot algemenere functies uit te breiden. Immers 5.6.1 eist eigenlijk al continuïteit!

5.6.6. DEFINITIE. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$ *en* f *een afbeelding van* V *in* R'. *Zij* $Q\in V$. *Als* $\lim_{P\in V, P\to Q} f(P)$ *bestaat dan is deze limiet* $f(Q)$ *en we noemen* f *in* Q *continu ten opzichte van* V. *Is* Q *een verdichtingspunt van* V *dan betekent "*f *is continu in* Q *t.o.v.* V*" hetzelfde als "*$\lim_{P\to Q} f(P) = f(Q)$*". In dit laatste geval zeggen we ook "*f *is continu in* Q*".*

Als een functie in ieder punt van V continu is noemen we de functie *continu op* V.
Evenals in 4.1.11 voor rijen is gedaan kan men voor reëelwaardige functies het begrip $\limsup_{x\to a}$ resp. $\limsup_{x\to\infty}$ invoeren. Het mag de lezer niet moeilijk vallen de (analoge) definities zelf te bedenken. We geven één voorbeeld: Als f gedefinieerd is op $\mathbf{R}$ door $f(0):=0$, $f(x) = \sin(x^{-1})$ voor $x\neq 0$, dan is $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x) = 1$.
We beschouwen nog eens de metrische ruimte (R,d) uit 5.2.5. Een rij punten van R is een rij op $[0,1]$ gedefinieerde functies. Volgens 5.1.12 en 5.2.12 betekent $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dat $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{k\in\mathbf{N}}\, \forall_{n>k}\, [\sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid 0\leq x\leq 1\}<\varepsilon]$
en dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{k\in\mathbf{N}}\, \forall_{n>k}\, \forall_{x\in[0,1]}\, [\,|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon]\,.$$

Als we deze uitspraak vergelijken met
$\forall_{x\in[0,1]}\, [\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)]$, dat is

$$\forall_{x\in[0,1]}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{k\in\mathbf{N}}\, \forall_{n>k}\, [\,|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon]$$

dan zien we dat de eerste uitspraak sterker is! De tweede volgt uit de eerste en niet omgekeerd (zie ook 5.6.7). Wat in de eerste uitspraak staat noemen we *uniforme convergentie op* $[0,1]$ van de rij functies, de tweede is de definitie van *puntsgewijze convergentie op* $[0,1]$.

5.6.7. OPGAVE. Zij $f_n(x):=nx^n(1-x)$ voor $n\in\mathbf{N}$ en $x\in[0,1]$. Ga na dat $\forall_{x\in[0,1]}\, [\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0]$. Als in de ruimte (R,d) van 5.2.5 zou gelden $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ dan zou f de functie zijn die identiek nul is. Bewijs dat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\, [d(f_n,f)\geq\frac{1}{4}]$ en dus $\neg(\lim_{n\to\infty} f_n = f)$. De rij functies is wel puntsgewijs convergent maar niet uniform convergent op $[0,1]$!

We geven nu de algemene definitie:

5.6.8. DEFINITIE. *Laat* R *een verzameling en* (R',d') *een metrische ruimte zijn,* f *een afbeelding van* $V\subset R$ *in* R' *en* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij afbeeldingen van* V *in* R'. *Zij* $V_0\subset V$. *Dan zeggen we "*$f_n\to f$*, uniform op* V_0*"*
als

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbf{R},\varepsilon>0}\, \exists_{k\in\mathbf{N}}\, \forall_{n>k}\, \forall_{P\in V_0}\, [d'(f_n(P),f(P))<\varepsilon]\,.$$

Evenzo noemen we een reeks uniform convergent op V_0 als de rij partiële sommen uniform convergent is op V_0. We wijzen er nog eens met nadruk op dat bij de aanduiding "uniform convergent" een verzameling genoemd moet worden waarop de convergentie uniform is! Zo is de rij uit opgave 5.6.7 niet uniform convergent op $[0,1]$ maar wel uniform convergent op $[0,\frac{1}{2}]$.

5.6.9. STELLING. *Zij* V *een verzameling en* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij afbeeldingen van* V *in* $\mathbf{C}$. *De reeks* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *is dan en slechts dan uniform convergent op* V *als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{p\in\mathbf{N}}\ \forall_{q\in\mathbf{N}}\ \forall_{z\in V}\ \left[\left|\sum_{n=N+p}^{N+p+q} f_n(z)\right|<\varepsilon\right].$$

Bewijs. (i) Zij $S(z)$ de som van de reeks en $(s_n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ de rij partiële sommen. Als de reeks uniform convergeert is

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ \forall_{z\in V}\ [|S(z)-s_k(z)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon],$$

en dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ \forall_{\ell>N}\ \forall_{z\in V}\ [|s_k(z)-s_\ell(z)|<\varepsilon].$$

(ii) Is, omgekeerd, gegeven dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ \forall_{\ell>N}\ \forall_{z\in V}\ [|s_k(z)-s_\ell(z)|<\varepsilon],$$

dan is de rij $s_n(z)$ puntsgewijs convergent op grond van de volledigheid van $\mathbf{C}$. Noem de limietfunctie S. Dan geldt

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{k>N}\ \forall_{z\in V}\ [|s_k(z)-S(z)|\le\varepsilon],$$

waaruit de uniforme convergentie van de reeks volgt.

De lezer vergelijke dit bewijs met dat van 5.4.2. De redeneringen zijn analoog. Stelling 5.6.9 is het analogon van 4.5.22 voor uniforme convergentie.
Van alle manieren om uniforme convergentie van een reeks complexe functies aan te tonen is de volgende de meest gebruikte. De stelling volgt onmiddellijk uit 5.6.9 en 4.5.22.

5.6.10. STELLING. *Zij* V *een verzameling en* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij afbeeldingen van* V *in* $\mathbf{C}$. *Als* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *een convergente reeks positieve reële getallen is en*

$$\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \forall_{z\in V}\ [|f_n(z)|\le a_n]$$

dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *uniform convergent op* V.

Stelling 5.6.10 wordt *vergelijkingsstelling van Weierstrass* genoemd.

5.6.11. STELLING. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$, $Q\in V$. *Zij* f *een afbeelding van* V *in* R' *en* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij afbeeldingen van* V *in* R'. *Als* $f_n\to f$ *uniform op* V *en voor iedere* $n\in\mathbf{N}$ *de functie* f_n *continu is in* Q *t.o.v.* V *dan is* f *in* Q *continu t.o.v.* V.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Als $P\in V$ dan is voor $n\in\mathbf{N}$:

$d'(f(P),f(Q))\le d'(f(P),f_n(P))+d'(f_n(P),f_n(Q))+$

$+d'(f_n(Q),f(Q))$.

Daar $f_n\to f$ uniform op V kunnen we n zo kiezen dat $d'(f(P),f_n(P))<\frac{\varepsilon}{3}$ voor alle $P\in V$ (o.a. als $P=Q$). Bij deze vaste n is een omgeving Ω van Q in R zó dat voor alle $P\in\Omega\cap V$ geldt $d'(f_n(P),f_n(Q))<\frac{\varepsilon}{3}$ omdat f_n continu is in Q t.o.v. V. Dan is dus voor alle $P\in\Omega\cap V$ ook $d'(f(P),f(Q))<\varepsilon$. Daar ε willekeurig was is de continuïteit van f bewezen.

Eén van de manieren om 5.6.11 te gebruiken is de volgende: Als een rij continue functies op V convergeert (puntsgewijs) naar een niet continue functie dan kan de convergentie niet uniform op V zijn.

5.6.12. STELLING. (Dini): *Zij* (R,d) *een metrische ruimte en* V *een compacte deelverzameling van* R. *Zij* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij continue reële functies gedefinieerd op* V *waarvoor geldt:*

(i) $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,\forall_{P\in V}\,[f_n(P)\ge f_{n+1}(P)]$ en

(ii) $\forall_{P\in V}\,[\lim_{n\to\infty} f_n(P)=0]$.

Dan is de rij $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *uniform convergent op* V.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Voor iedere $P\in V$ is er volgens (ii) een $n_P\in\mathbf{N}$ zo dat $f_{n_P}(P)<\frac{\varepsilon}{2}$. Daar alle f_n continu zijn is er een bol B_{P,ρ_P} zo dat voor alle $Q\in B_{P,\rho_P}$ geldt $f_{n_P}(Q)<\varepsilon$. Dan is dus ten gevolge van (i) ook voor $n>n_P$ en $Q\in B_{P,\rho_P}$ de ongelijkheid $0\le f_n(Q)<\varepsilon$ juist. Het stelsel $\{B_{P,\rho_P}\mid P\in V\}$ is een overdekking van V met open verzamelingen. Daar V compact is bevat deze overdekking een eindige. Laat $P_1,P_2,\dots,P_k$ de middelpunten zijn van de bollen van deze eindige overdekking. Definieer $N := \max\{n_{P_i} \mid 1 \le i \le k\}$. Dan is voor $n > N$ en voor alle $Q \in V$ aangetoond $0 \le f_n(Q) < \varepsilon$. Daar ε willekeurig was hebben we bewezen dat de rij $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ op V uniform convergeert naar de nulfunctie.

5.6.13. OPGAVE. Zij $f_n(x) := x^n$ voor $x \in [0,1]$. Bewijs met de definitie dat de rij f_n op $[0,1]$ niet uniform convergeert. Bewijs dit ook met 5.6.11. Beschouw dezelfde rij op $(0,1)$. De functies zijn continu en voldoen aan de voorwaarden (i) en (ii) van 5.6.12. Is de convergentie uniform op $(0,1)$?

5.7. Continuïteit

In 5.6.6 hebben we voor afbeeldingen van metrische ruimten in metrische ruimten het begrip "continu" ingevoerd. De volgende stelling stelt ons in staat voor willekeurige topologische ruimten het begrip uit te breiden.

5.7.1. STELLING. *Zij* f *een afbeelding van de metrische ruimte* (R,d) *in de metrische ruimte* (R',d'). *De functie* f *is continu op* R *dan en slechts dan als voor iedere open verzameling* O *in* R' *het origineel* $f^{\leftarrow}(O)$ *open is in* R.

Bewijs. (i) Zij f continu op R en zij O open in R'. Als $P \in f^{\leftarrow}(O)$ dan is er volgens 5.6.1 een omgeving Ω van P in R met $f(\Omega) \subset O$, d.w.z. $\Omega \subset f^{\leftarrow}(O)$. Dus $f^{\leftarrow}(O)$ is open in R.

(ii) Zij $P \in R$. Als voor iedere omgeving O van f(P) in R' het origineel $f^{\leftarrow}(O)$ open is in R dan is volgens de definitie 5.6.1 de functie f continu in P. Daar P willekeurig was is f continu op R.

We nemen nu de eigenschap van 5.7.1 als definitie van continuïteit:

5.7.2. DEFINITIE. *Zij* f *een afbeelding van de topologische ruimte* $(R,\mathcal{T})$ *in de topologische ruimte* $(R',\mathcal{T}')$. *Als voor iedere open verzameling* O *in* R' *het origineel* $f^{\leftarrow}(O)$ *open is in* R *noemen we* f *continu op* R.

Als we functies beschouwen op deelverzamelingen van R dan geldt dezelfde definitie 5.7.2 waarbij de geïnduceerde topologie dan voor $\mathcal{T}$ in de plaats komt.

5.7.3. STELLING. *Laten* (R,d), (R',d') *en* (R'',d'') *metrische ruimten zijn,* $V \subset R$, $W \subset R'$ *en* f *een afbeelding van* V *in* W, g *een afbeelding van* W *in* R". *Als* $Q\in V$, f *continu in* Q *t.o.v.* V *en* g *continu in* f(Q) *t.o.v.* W *dan is* $g\circ f$ *continu in* Q *t.o.v.* V.

Bewijs. Zij $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij punten van V waarvoor $P_n\to Q$ als $n\to\infty$. Volgens 5.6.4 is $f(P_n)\to f(Q)$ als $n\to\infty$ en dan is ook $(g\circ f)(P_n)\to(g\circ f)(Q)$ als $n\to\infty$. Daar $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ willekeurig was is volgens 5.6.4 $g\circ f$ continu in Q t.o.v. V (zie 5.10.54).

We voeren nu ook voor continue functies een begrip uniformiteit in. Weer dient men goed in te zien dat "continu in ieder punt van V" d.w.z. "continu op V" minder zegt dan het nu in te voeren begrip "uniform continu op V"!

5.7.4. DEFINITIE. *Als* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$ *en* f *een afbeelding van* V *in* R', *dan heet* f *uniform continu op* V *als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{P\in V}\ \forall_{Q\in V}\ [(d(P,Q)<\delta)\Rightarrow(d'(f(P),f(Q))<\varepsilon)].$$

5.7.5. VOORBEELD. Zij $f(x):=x^2$ voor $x\in[0,1]$. Als $\varepsilon>0$, $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$ en $x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$ dan is

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x+y||x-y|<2|x-y|<\varepsilon$$

als $|x-y|<\delta$.

5.7.6. OPGAVE. Zij $f(x)=x^{-1}$ voor $x\in(0,1)$. Toon aan dat f continu is in ieder punt van (0,1) maar niet uniform continu op (0,1).

5.7.7. STELLING. *Laten* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn,* $V\subset R$, f *een afbeelding van* V *in* R'. *Als* V *compact is en* f *continu op* V *dan is* f *uniform continu op* V.

Bewijs. f is continu in ieder punt van V, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{P\in V}\ \exists_{\delta(P)>0}\ \forall_{Q\in B_{P,\delta(P)}}\ [d'(f(P),f(Q))<\tfrac{\varepsilon}{2}].$$

Het stelsel $\{B_{P,\frac{1}{2}\delta(P)}\mid P\in V\}$ is een overdekking van V met open verzamelingen. Deze bevat een eindige deeloverdekking. Laten $P_1,P_2,\ldots,P_k$ de middelpunten van de bollen van deze deeloverdekking zijn en $\delta:=\min\{\frac{1}{2}\delta_{P_i}\mid 1\le i\le k\}$. Dan volgt uit $d(A,B)<\delta$ dat A en B in éénzelfde bol van het stelsel $\{B_{P_i,\delta(P_i)}\mid 1\le i\le k\}$ liggen en dus $d'(f(A),f(B))<\varepsilon$. Hiermee is aangetoond dat bij iedere $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ is met de in 5.7.4 geëiste eigenschap.

In het bijzonder betekent 5.7.7 dat iedere reële functie f die continu is op een gesloten en begrensd interval ook uniform continu is op dat interval. We zullen dit nog vaak gebruiken.

5.7.8. STELLING. *Als* (R,d) *en* (R',d') *metrische ruimten zijn* $V \subset R$, V *compact en* f *een continue afbeelding van* V *in* R' *dan is* $f(V)$ *compact in* R'.

Bewijs. Zij $\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van $f(V)$ met open verzamelingen. Dan is volgens 5.7.1 $\{f^{\leftarrow}(O_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van V met open verzamelingen in de relatieve topologie van V. Deze bevat een eindige deeloverdekking en dus heeft de gegeven overdekking van $f(V)$ een eindige deeloverdekking. Daar we uitgingen van een willekeurige overdekking van $f(V)$ is bewezen dat $f(V)$ compact is.

5.7.9. STELLING. *Zij* (R,d) *een metrische ruimte,* V *een compacte deelverzameling van* R, f *een afbeelding van* V *in* $\mathbf{R}$ *en* f *continu op* V. *Dan is er een* $Q \in V$ *met de eigenschap*

$$\forall_{P \in V}\, [f(P) \leq f(Q)],$$

d.w.z. f *neemt in* Q *een maximum aan.*

Bewijs. Volgens 5.7.8 is $f(V)$ een compacte deelverzameling van $\mathbf{R}$, dat is volgens 5.5.11 een gesloten, begrensde verzameling. Dus bestaat $\max f(V)$ en ieder punt Q van het origineel van dit punt heeft de gewenste eigenschap.

5.7.10. GEVOLG. Uit 5.7.9 zien we dat als een complexe functie f continu is op een gesloten, begrensde verzameling $V \subset \mathbf{C}$ er een punt $z \in V$ is waar $|f(z)|$ maximaal is.

Eén van de eigenschappen van continue functies die bij een eerste behandeling steeds genoemd worden en min of meer intuïtief duidelijk moeten zijn is de "doorlopendheid" van een continue functie. Deze eigenschap is nu eenvoudig te bewijzen:

5.7.11. STELLING. *Als* f *een continue reële functie is, gedefinieerd op* $[0,1]$ *en als* $f(0)<0<f(1)$ *dan is er een* $c \in [0,1]$ *met* $f(c)=0$.

Bewijs. Uit $f(0)<0$ en de continuïteit van f volgt dat er een "rechteromgeving" van 0 is waar $f(x)<0$ is. Dat wil zeggen $N:=\{a \in \mathbf{R} \mid \forall_{x \in [0,a)} [f(x)>0]\}$ is niet leeg en daar $1 \notin N$, weer op grond van de continuïteit, is N naar boven begrensd. Zij $c := \sup N$. Als $f(c)<0$ dan is er een omgeving $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ van c waar $f(x)<0$. In deze omgeving ligt een $a\in N$. Dan zou ook $c+\varepsilon\in N$, in strijd met de definitie van c. Evenzo voert $f(c)>0$ tot een tegenspraak. Dus $f(c)=0$.

Het begrip "samenhang" dat we nu invoeren had ook al in 5.3 besproken kunnen worden. In verband met stelling 5.7.13 hebben we de invoering tot hier uitgesteld.

5.7.12. DEFINITIE. *Zij* (R,T) *een topologische ruimte. We noemen* (R,T) *samenhangend als* R *niet de vereniging is van twee disjuncte niet lege open verzamelingen, d.w.z. als* $\emptyset$ *en* R *de enige verzamelingen in* R *zijn die zowel open als gesloten zijn. Een deelverzameling* V *van* R *heet samenhangend als* $(V,T|V)$ *een samenhangende ruimte is. Een niet lege open samenhangende verzameling in* $\mathbb{R}^n$ *noemen we een gebied.*

We hebben uit het dagelijks spraakgebruik ook een gevoel van wat samenhang is. Zo zullen we een deelverzameling V van $\mathbb{R}^2$ samenhangend noemen als ieder puntenpaar P, Q uit V te verbinden is door een kromme die in V ligt. Dat dit intuïtieve begrip niet in strijd is met 5.7.12 volgt uit de volgende stelling.

5.7.13. STELLING. *Zij* $V\subset\mathbb{R}^n$, V *open,* $V\neq\emptyset$. V *is dan en slechts dan samenhangend als er voor iedere* $P\in V$ *en iedere* $Q\in V$ *een continue afbeelding* f *van* $[0,1]$ *in* V *is met* $f(0)=P$ *en* $f(1)=Q$.

Bewijs. (i) Stel dat $V=O_1\cup O_2$, $O_1\cap O_2=\emptyset$ waarin O_1 en O_2 open en niet leeg zijn. Definieer g op V door $g(A):=0$ als $A\in O_1$ en $g(A):=1$ als $A\in O_2$ (d.w.z. $g=\chi_{O_2}$). Dan is triviaal dat g continu is daar voor iedere open verzameling in $\mathbb{R}$ het origineel $\emptyset$, V of O_1 of O_2 is. Zij $P\in O_1$ en $Q\in O_2$. Als er een continue afbeelding f van $[0,1]$ in V bestond met $f(0)=P$ en $f(1)=Q$ dan zou $g\circ f$ een continue reële functie zijn, volgens 5.7.3, die $[0,1]$ afbeeldt in $\{0,1\}$. Dit is in strijd met 5.7.11.

(ii) Neem nu aan dat V samenhangend is en zij $P\in V$. Een punt $Q\in V$ waarvoor een functie f met de in de stelling genoemde eigenschap bestaat noemen we "vanuit P bereikbaar".
Zij Q een bereikbaar punt, f de bijbehorende functie. Kies δ zo dat $B_{Q,\delta}\subset V$ (V is open) en kies een punt R in deze bol. Nu definiëren we f^* door

$f^*(x) := f(2x)$ voor $x\in[0,\frac{1}{2}]$,

$f^*(x) := Q+(2x-1)(R-Q)$ voor $x\in(\frac{1}{2},1]$, (waarin we gebruiken dat $\mathbf{R}^n$ een vectorruimte is). We zien zonder moeite in dat f^* een continue afbeelding is van $[0,1]$ in V met $f^*(0)=P$ en $f^*(1)=R$, d.w.z. R is vanuit P bereikbaar. We hebben hiermee aangetoond dat de vanuit P bereikbare punten een open verzameling vormen. Analoog toont men aan dat de niet bereikbare punten een open verzameling vormen. Daar dit twee disjuncte open verzamelingen zijn waarvan de vereniging V is en de eerste niet leeg is moet de tweede leeg zijn! Dus: ieder punt van V is vanuit P bereikbaar.

OPGAVEN

5.7.14. Zij V een gebied in $\mathbf{R}$. Bewijs dat V een interval is.

5.7.15. Laten $(R,\mathcal{T})$ en $(R',\mathcal{T}')$ topologische ruimten zijn, $V\subset R$ en f een continue afbeelding van V in R'. Als V samenhangend is is dan ook f(V) samenhangend?

Als een reële functie f in een punt c niet continu is kan het gedrag in de buurt van c zeer grillig zijn zoals bijvoorbeeld bij $f(x) := \sin(x^{-1})$ voor $x\neq 0$, $f(0):=0$ het geval is. Het dan nog meest redelijke gedrag zullen we in de volgende definitie een aparte naam geven.

5.7.16. DEFINITIE. *Als* f *een reële functie is waarvoor* $\lim\limits_{x\uparrow c} f(x)$ *en* $\lim\limits_{x\downarrow c} f(x)$ *bestaan en verschillend zijn dan zeggen we dat* f *in* c *een discontinuïteit van de eerste soort heeft en we noemen* $\lim\limits_{x\downarrow c} f(x) - \lim\limits_{x\uparrow c} f(x)$ *de sprong van* f *in* c.

Het kan ook gebeuren dat linker- en rechterlimiet gelijk zijn maar van f(c) verschillen. Door de waarde van f in c te veranderen kunnen we er voor zorgen dat f continu is in c. We noemen dit een discontinuïteit die *ophefbaar* is. Zo spreekt men slordig wel van de functie $\frac{\sin x}{x}$ waarbij dan stilzwijgend aangenomen wordt dat de functie in 0 de waarde 1 heeft (zie 4.3.30).

5.7.17. STELLING. *Als* f *een monotone niet-dalende reële functie is, gedefinieerd op* (a,b) *en* $c\in(a,b)$ *dan bestaan de linker- en rechterlimiet van* f *in* c *en*

$$\lim_{x\uparrow c} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\downarrow c} f(x).$$

Bewijs. Definieer $f(c-0) := \sup\{f(x) \mid a<x<c\}$ en $f(c+0) := \inf\{f(x) \mid c<x<b\}$. Zij $\varepsilon>0$. Er is een $x_0 \in (a,c)$ met $f(x_0)>f(c-0)-\varepsilon$. Dan is
$f(c-0)-\varepsilon<f(x)\leq f(c-0)\leq f(c)$ voor $x_0<x<c$.
Daar ε willekeurig was is bewezen dat
$\lim_{x\uparrow c} f(x) = f(c-0) \leq f(c)$.
Analoog toont men aan dat $\lim_{x\downarrow c} f(x) = f(c+0) \geq f(c)$.

We zien dus dat een monotone functie gedefinieerd op (a,b) in (a,b) continu is met uitzondering van discontinuiteiten van de eerste soort.

OPGAVEN

5.7.18. Bewijs dat de verzameling punten van (a,b) waar een monotone functie een discontinuïteit van de eerste soort heeft, aftelbaar is of eindig.

5.7.19. Ook bij topologische ruimten komt een begrip voor analoog met "isomorfisme" dat in dit geval *homeomorfisme* heet. Laten (R,T) en (R',T') topologische ruimten zijn. Een homeomorfisme van (R,T) op (R',T') is een één-éénduidige afbeelding f van R op R' zó dat de bijbehorende afbeelding $f: P(R)\to P(R')$ voldoet aan $f(T)=T'$.
(a) Bewijs dat een één-éénduidige afbeelding f van R op R' dan en slechts dan een homeomorfisme is als f continu is en $\overleftarrow{f}$ continu is.
(b) Een *isometrie* van een metrische ruimte (R,d) op een metrische ruimte (R',d') is een één-éénduidige afbeelding f van R op R' zo dat
$\forall_{x\in R}\ \forall_{y\in R}\ [d'(f(x),f(y))=d(x,y)]$.
Bewijs dat een isometrie een homeomorfisme is.

5.8. De approximatiestelling van Weierstrass

We zullen in deze paragraaf aantonen dat een willekeurige continue reële functie op $[a,b]$ uniform willekeurig goed benaderd kan worden met behulp van polynomen. We hebben eerst een hulpstelling nodig:

5.8.1. *Voor* $x\in\mathbf{R}$ *geldt*

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)\leq \tfrac{1}{4}n.$$

Bewijs. Volgens 1.27.12 is voor iedere $x\in\mathbf{R}$ en iedere $y\in\mathbf{R}$

(i) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$

Hieruit volgt door differentiëren van beide leden naar x en vermenigvuldiging met x (de lezer die het begrip differentiëren nog niet kent kan eerst hoofdstuk VI lezen of onderstaande formules met volledige inductie bewijzen):

(ii) $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1},$$

en door nogmaals differentiëren, nu naar y en vermenigvuldigen met y

(iii) $$\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = n(n-1)xy(x+y)^{n-2}.$$

Door een geschikte lineaire combinatie van (i), (ii) en (iii) te nemen, met $y=1-x$, vinden we het gewenste resultaat. (Dat $nx(1-x) \leq \frac{1}{4}n$ is triviaal.)

5.8.2. DEFINITIE. *Als* f *een op* $[0,1]$ *gedefinieerde begrensde functie is dan heet het polynoom* $B_n f$ *gedefinieerd door*

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

het n^{de} *Bernstein polynoom van de functie* f.

5.8.3. OPGAVE. Bepaal $(B_n f)(x)$ als $f(x):=x$ resp. $f(x):=x^2$.

5.8.4. STELLING. *Als* f *continu is op* $[0,1]$ *dan is de rij* $((B_n f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *op* $[0,1]$ *uniform convergent met limiet* $f(x)$.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Volgens 5.7.7 is er een $\delta>0$ zo dat $\forall_{x\in[0,1]} \forall_{y\in[0,1]} [(|x-y|<\delta)\Rightarrow(|f(x)-f(y)|<\varepsilon)]$. Nu is $|(B_n f)(x)-f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(x)-f(\frac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ als $x\in[0,1]$; (volgens 5.8.1(i) is namelijk $f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.)
Deze som splitsen we in twee gedeelten nl. een som over die termen waarvoor $|x-\frac{k}{n}|<\delta$ en een som over de overige termen.
Als $|x-\frac{k}{n}|<\delta$ kunnen we gebruiken dat dan $|f(x)-f(\frac{k}{n})|<\varepsilon$ is. Daar f begrensd is op $[0,1]$, $|f(x)|\leq M$ voor $x\in[0,1]$ (zie 5.5.13), is voor alle x en alle k voldaan aan

$|f(x)-f(\frac{k}{n})|\le 2M$. In de tweede som vervangen we het getal $2M$ dan nog door het grotere getal $2M\delta^{-2}(x-\frac{k}{n})^2$. Dan vinden we, nadat we beide sommen nog vergroten door over alle k te sommeren,

$$|(B_n f)(x)-f(x)|\le \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+2M\delta^{-2}\sum_{k=0}^{n}(x-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le$$

$$\le \varepsilon+2M\delta^{-2}n^{-2}(\tfrac{1}{4}n) = \varepsilon+\tfrac{1}{2}M\delta^{-2}n^{-1}$$

volgens 5.8.1. Het rechterlid is $<2\varepsilon$ als n voldoende groot is. Daar ε willekeurig was is het gestelde bewezen.

5.8.5. STELLING (Weierstrass): *Als* f *een op* $[a,b]$ *gedefinieerde continue functie is en* $\varepsilon>0$ *dan is er een polynoom* P *zo dat*

$$\forall_{x\in[a,b]}\ [\,|f(x)-P(x)|<\varepsilon].$$

Bewijs. Definieer g op $[0,1]$ door $g(y):=f(a+y(b-a))$. Dan is er in de rij $(B_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ een polynoom met $\forall_{y\in[0,1]}\ [\,|(B_n g)(y)-g(y)|<\varepsilon]$. Definieer dan $P(x):=(B_n g)(\frac{x-a}{b-a})$. Dan heeft P de gewenste eigenschap.

Beschouwen we nog eens de in 5.2.5 besproken metrische ruimte (R,d) en de deelruimte (R',d) van alle continue functies op $[0,1]$ dan weten we nu dat de verzameling van alle polynomen overal dicht in R' ligt. Dit volgt uit 5.8.4. Dat 5.8.5 alleen voor continue functies geldt volgt uit 5.6.11. R' is dus de afsluiting van de verzameling der polynomen.
We hebben 5.8.5 voor reële functies op $[a,b]$ behandeld. Uit het bewijs van de stelling is te zien dat de stelling ook voor complexe functies van een reële veranderlijke geldt.

5.9. Convexiteit, ongelijkheden

We herhalen de in 3.20.8 gegeven definitie:

5.9.1. DEFINITIE. *Een verzameling* $V\subset\mathbb{R}^n$ *heet convex als*

$$\forall_{P\in V}\ \forall_{Q\in V}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ [(\lambda P+(1-\lambda)Q)\in V].$$

5.9.2. DEFINITIE. *Als* $V \subset \mathbf{R}^n$ *een convexe verzameling is en* f *een afbeelding van* V *in* **R** *dan heet* f *convex op* V *als*

$$\forall_{P\in V}\ \forall_{Q\in V}\ \forall_{\lambda\in[0,1]}\ [f(\lambda P+(1-\lambda)Q)\le\lambda f(P)+(1-\lambda)f(Q)].$$

5.9.3. VOORBEELD. Zij C convex in $\mathbf{R}^n$ en f gedefinieerd op $\mathbf{R}^n$ door $f(x):=d(x,C)$, de afstand van x tot C, d.w.z. $f(x) = \inf\{d(x,P) \mid P\in C\}$. Als $P\in\mathbf{R}^n$ en $Q\in\mathbf{R}^n$, $\lambda\in[0,1]$ en $\varepsilon>0$ willekeurig dan is er een punt $P'\in C$ met $f(P)\le$ $\le d(P,P')\le f(P)+\varepsilon$ en evenzo een $Q'\in C$ met $f(Q)\le d(Q,Q')\le$ $\le f(Q)+\varepsilon$. Volgens 3.21.38 geldt

$$f(\lambda P+(1-\lambda)Q)\le d(\lambda P+(1-\lambda)Q,\lambda P'+(1-\lambda)Q')\le\lambda d(P,P')+$$
$$+(1-\lambda)d(Q,Q')\le\lambda f(P)+(1-\lambda)f(Q)+\varepsilon$$

en daar $\varepsilon>0$ willekeurig was geldt zelfs $f(\lambda P+(1-\lambda)Q)\le\lambda f(P)+(1-\lambda)f(Q)$. Daar P, Q en λ willekeurig waren is aangetoond dat f convex is op $\mathbf{R}^n$.

Een analogon van 5.9.1 en 5.9.2 met meer dan twee punten volgt eenvoudig uit deze definities m.b.v. volledige inductie.

5.9.4. STELLING. *Zij* $C\subset\mathbf{R}^n$ *een convexe verzameling,* $f\colon C\to\mathbf{R}$, f *convex op* C *en laten* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *niet-negatieve getallen zijn met* $\sum_{i=1}^k\alpha_i=1$. *Dan is voor ieder* k-*tal punten* $P_1,P_2,\ldots,P_k$ *van* C *:*

(i) $$\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i \in C,$$

(ii) $$f\Big(\sum_{i=1}^k \alpha_i P_i\Big) \le \sum_{i=1}^k \alpha_i f(P_i).$$

Bewijs. We bewijzen het gestelde met volledige inductie. Voor k=2 is het niets anders dan 5.9.1 en 5.9.2. Neem aan dat 5.9.4 voor zekere k geldt. Laat nu $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k+1}$ een (k+1)-tal niet-negatieve getallen met $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1$ zijn en $P_1,P_2,\ldots,P_{k+1}$ een (k+1)-tal punten van C. Als alle α_i, op één na, 0 zijn is 5.9.4 triviaal. Neem aan dat $0<\alpha_{k+1}<1$. Dan is

$$\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\ldots+\alpha_{k+1}P_{k+1} =$$
$$= (1-\alpha_{k+1})\Big(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{k+1}}P_1+\ldots+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_{k+1}}P_k\Big)+\alpha_{k+1}P_{k+1}.$$

Het gestelde volgt nu uit 5.9.1, 5.9.2 en de inductieveronderstelling omdat $\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}} = 1$.

5.9.5. STELLING. *Zij* C *open en convex in* $\mathbb{R}^n$ *en* f *convex op* C. *Dan is* f *continu op* C.

Bewijs. Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat $O \in C$, $f(O)=0$ (dit is door translatie en vermeerderen van f met een constante te bereiken). We tonen aan dat f in O continu is. Beschouw een bol om O in C en daarbinnen een simplex waarvan O inwendig punt is, dat is een (n+1)-tal punten $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, niet gelegen in een (n-1)-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^n$, zó dat O te schrijven is als $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P_i$ met $\alpha_i > 0$ en $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ (zie 3.20.10). Iedere Q in het simplex is te schrijven als $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i$ met $\lambda_i \geq 0$ en $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ en dus geldt

$f(Q) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(P_i) \leq \max\{f(P_i) \mid 1 \leq i \leq n+1\} =: \alpha$. Zij nu $B_{O,\rho}$ een bol gelegen binnen het simplex. Zij $\varepsilon > 0$.
Als $Q \in B_{O,\rho\varepsilon}$ dan is $\frac{1}{\varepsilon} Q \in B_{O,\rho}$ en dus $f(\frac{1}{\varepsilon} Q) \leq \alpha$.

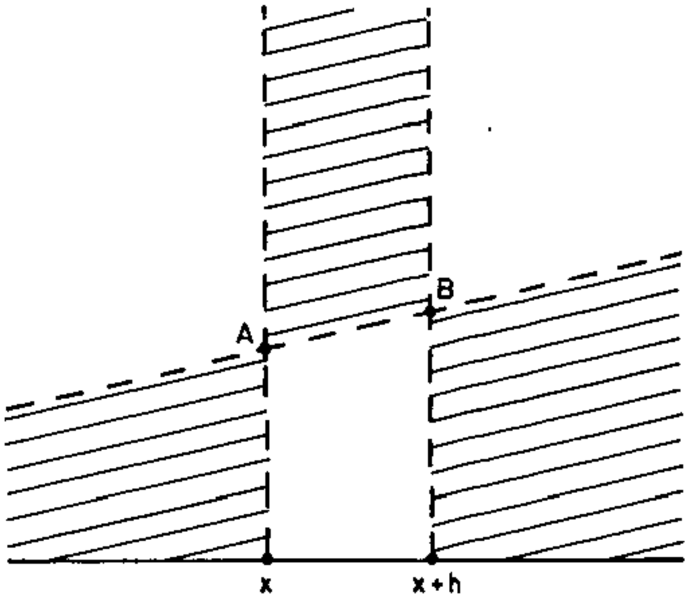
$$f(Q) = f((1-\varepsilon)O + \varepsilon \tfrac{1}{\varepsilon} Q) \leq (1-\varepsilon) f(O) + \varepsilon f(\tfrac{1}{\varepsilon} Q) \leq \varepsilon\alpha.$$

Verder is

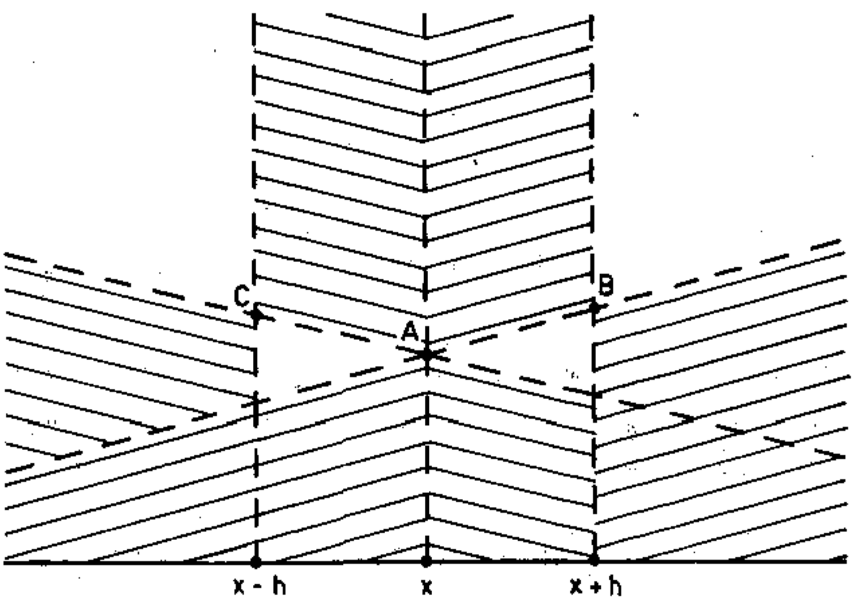
$$0 = f(O) = f(\tfrac{1}{1+\varepsilon} Q + \tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-\tfrac{1}{\varepsilon} Q)) \leq \tfrac{1}{1+\varepsilon} f(Q) + \tfrac{\varepsilon\alpha}{1+\varepsilon},$$

dus $f(Q) \geq -\varepsilon\alpha$. Hiermee is aangetoond dat $|f(Q)| \leq \varepsilon\alpha$ als $Q \in B_{O,\rho\varepsilon}$. Daar $\varepsilon > 0$ willekeurig was is aangetoond dat f in O continu is.

Voor convexe functies gedefinieërd op een convexe deelverzameling van $\mathbb{R}$ is de continuïteit eenvoudiger te bewijzen. Beschouw een functie f gedefinieerd op $\mathbb{R}$ en laat f convex zijn. In fig. 27 stelt A het punt (x,f(x)) van de grafiek van f voor, B het punt (x+h,f(x+h)). Uit 5.9.2 volgt dat in het gearceerde deel van het vlak géén punten van de grafiek van f kunnen liggen. Als we nu deze redenering herhalen met het punt C=(x-h,f(x-h)) dan vinden we de situatie van fig. 28.
In een omgeving van A ligt de grafiek van f in het niet-gearceerde trechtervormige gebied. Dit betekent dat f continu is in x. We zien zelfs nog meer aan deze figuur. Als $h \downarrow 0$ neemt de hellingshoek van de lijn AB af. Deze hoek is naar beneden begrensd en heeft dus een limiet voor $h \downarrow 0$, d.w.z. f is in x rechts- (en links-) differentieerbaar. (De lezer die deze begrippen nog niet kent leze



figuur 27



figuur 28

eerst hoofdstuk 6.) Zelfs zien we dat, indien f een afgeleide heeft deze functie f' niet-dalend is. Immers, de hellingshoek van de raaklijn aan de grafiek van f in A is kleiner dan de hoek die AB maakt met de x-as, in B is deze hellingshoek groter zoals we in figuur 27 zien. Hoewel we pas in hoofdstuk 6 differentieerbaarheid uitgebreid behandelen geven we hier nog een bewijs van de laatste bewering zonder van figuur 27 gebruik te maken:

5.9.6. STELLING. *Als* f *gedefinieerd is op* $\mathbb{R}$ *en* f *is differentieerbaar dan is* f *dan en slechts dan convex als* f' *monotoon niet-dalend is.*

Bewijs. (i) Zij f' niet-dalend, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $p<q$. Dan is er (zie 6.4.2) voor $0<\lambda<1$ een ξ met $p<\xi<\lambda p+(1-\lambda)q$ zó dat:

$$f(\lambda p+(1-\lambda)q)-f(p) = (1-\lambda)(q-p)f'(\xi)$$

en een η met $\lambda p+(1-\lambda)q<\eta<q$ zó dat

$$f(q)-f(\lambda p+(1-\lambda)q) = \lambda(q-p)f'(\eta).$$

Daar $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ volgt hieruit

$$f(\lambda p+(1-\lambda)q) \leq \lambda f(p)+(1-\lambda)f(q).$$

(ii) Zij f convex. Zij $p<q$. Uit $f(\lambda p+(1-\lambda)q) \leq \lambda f(p)+(1-\lambda)f(q)$ volgt

$$\frac{f(\lambda p+(1-\lambda)q)-f(p)}{(1-\lambda)(q-p)} \leq \frac{f(q)-f(\lambda p+(1-\lambda)q)}{\lambda(q-p)}$$

waaruit door $\lambda \downarrow 0$ resp. $\lambda \uparrow 1$ volgt

$$f'(p) \leq \frac{f(q)-f(p)}{q-p} \leq f'(q).$$

We gebruiken deze stelling vaak als volgt: Als een functie f gedefinieerd op (a,b) tweemaal differentieerbaar is en $f''(x)>0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is f convex op (a,b). Vaak kan men ongelijkheden bewijzen door ze zo op te schrijven dat ze de vorm van 5.9.4 (ii) krijgen en dan van de er in voorkomende functie de convexiteit te bewijzen via 5.9.6. We illustreren dit aan enkele zeer bekende ongelijkheden.

5.9.7. STELLING. *Als* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *positieve getallen zijn en* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *niet-negatieve getallen waarvoor* $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ *dan is*

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Bewijs. Daar $(-\log x)'' = x^{-2}>0$ voor $x>0$ is volgens 5.9.6 $-\log x$ een convexe functie. Volgens 5.9.4 (ii) is

$$-\log(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n) \leq -\alpha_1 \log x_1 - \alpha_2 \log x_2 + \ldots$$

$$\ldots - \alpha_n \log x_n$$

waaruit het gestelde volgt omdat de logarithme een monotoon stijgende functie is.

Het speciale geval $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=n^{-1}$ heeft de vorm $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ en heet ongelijkheid van het *rekenkundig* en *meetkundig gemiddelde*. Een eenvoudige toepassing is de volgende. Een rechthoekig blok met totale oppervlakte O heeft inhoud $\leq(\frac{1}{6}O)^{3/2}$. Immers, als x, y en z de lengten van de ribben zijn dan is $O=2(xy+xz+yz)$. Als we in 5.9.7 nemen $n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$ en $x_1=xy$, $x_2=xz$, $x_3=yz$ dan volgt het gestelde.

5.9.8. STELLING. *(Ongelijkheid van Hölder): Laat* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *niet-negatieve getallen zijn en* $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *eveneens niet-negatief; laat verder* λ *en* μ *positieve getallen zijn met som* 1.
Dan is

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/\mu}\right)^{\mu}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{1/\lambda}\right)^{\lambda}.$$

Bewijs. Als een van de factoren in het rechterlid 0 is is het bewijs triviaal. Zo niet dan is $a := \sum_{k=1}^n a_k^{1/\mu} > 0$ en $b := \sum_{k=1}^n b_k^{1/\lambda} > 0$. Uit 5.9.7 volgt met $n=2$ (voor $x>0$ en $y>0$): $x^\mu y^\lambda \leq \mu x+\lambda y$. Neem nu $x:=a^{-1}a_i^{1/\mu}$ en $y:=b^{-1}b_i^{1/\lambda}$. Door invullen en sommatie over i ($i=1,2,\ldots,n$) vinden we $a^{-\mu}b^{-\lambda}\sum_{i=1}^n a_ib_i \leq 1$, hetgeen te bewijzen was.

Het speciale geval $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ heet *ongelijkheid van Cauchy* (ook wel *Cauchy-Schwarz-Buniakowski*). Deze ongelijkheid kunnen we opvatten als vectorongelijkheid in $\mathbf{R}^n$: het inwendig product van twee vectoren is kleiner dan het product van de lengten van de vectoren (zie 3.17.8).

Sommige auteurs noemen een functie f convex als voor alle x en y uit het definitiegebied geldt $f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$. Er zijn functies die aan deze ongelijkheid voldoen en niet continu zijn. Dat deze eis echter niet veel zwakker is dan 5.9.2 blijkt uit de volgende stelling.

5.9.9. STELLING. *Als* f *gedefinieerd is op* $\mathbf{R}$ *en continu dan volgt uit*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2}f(y) \quad (x,y\in\mathbf{R}) \qquad (*)$$

dat f convex is.

Bewijs. Als $n=2^k$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reële getallen zijn dan volgt uit (*) met volledige inductie

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \quad (**)$$

Als voor zekere n de ongelijkheid (**) geldt en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zijn reële getallen dan passen we (**) toe met $x_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right) = f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})}{n} + \frac{1}{n} f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right),$$

d.w.z. (**) geldt ook voor n-1. Dus is (**) voor alle $n \in \mathbf{N}$ bewezen. Als λ rationaal is, $0<\lambda<1$, $\lambda=t/n$ met $t \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ en $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ dan definiëren we $x_1=x_2=\ldots=x_t=x$ en $x_{t+1}=x_{t+2}=\ldots=x_n=y$ en passen (**) toe. We vinden

$$\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \forall_{y\in\mathbf{R}}\ \forall_{\lambda\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}\ [f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)].$$

Daar f continu is geldt de ongelijkheid dan ook voor alle $\lambda \in [0,1]$.

5.9.10. DEFINITIE. *Een functie* f *heet logarithmisch convex als* log f *convex is.*

Merk op dat dan $f(x)>0$ op de definitieverzameling.

5.9.11. STELLING. *Als* f *logarithmisch convex is dan is* f *convex.*

Bewijs. Als $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $0 \le \lambda \le 1$ dan is, indien f logarithmisch convex is,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

volgens 5.9.7.

5.9.12. STELLING. *Als* f *en* g *logarithmisch convex zijn dan is ook* f+g *logarithmisch convex.*

Bewijs. Als f logarithmisch convex is, $\lambda>0$, $\mu>0$ en $\lambda+\mu=1$ is volgens 5.9.2 en 5.9.10, voor alle x en alle y, $f(\lambda x+\mu y) \le [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{\mu}$. Een analoge ongelijkheid geldt voor g. Nu passen we 5.9.8 toe met $n=2$, $b_1:=[f(x)]^{\lambda}$, $a_1:=[f(y)]^{\mu}$, $b_2:=[g(x)]^{\lambda}$, $a_2:=[g(y)]^{\mu}$. We vinden dan met bovenstaande ongelijkheden

$$f(\lambda x+\mu y)+g(\lambda x+\mu y) \le [f(x)+g(x)]^{\lambda}[f(y)+g(y)]^{\mu},$$

d.w.z. f+g is logarithmisch convex.

We zullen nu het idee van "gemiddelde" generaliseren zó dat het rekenkundig gemiddelde en meetkundig gemiddelde speciale gevallen zijn van het nieuwe begrip.

5.9.13. DEFINITIE. *Als* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *positieve reële getallen zijn,* $\mathbf{a}:=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ *dan definiëren we voor* $r\neq 0$:

$$M_r(\mathbf{a}) := \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} .$$

5.9.14. STELLING. *Voor de in* 5.9.13 *gedefinieerde functie geldt*

$$\lim_{r\to 0} M_r(\mathbf{a}) = (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} =: M_0(\mathbf{a})$$

(dat is het meetkundig gemiddelde).

Bewijs. Volgens 4.3.29 en 4.3.33 geldt

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}(a_i^r-1) = \log(a_1a_2\cdots a_n)$$

en $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\log(1+u)}{u} = 1$, dus

$$\lim_{r\to 0}\log M_r(\mathbf{a}) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\log[1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^r-1)] =$$

$$= \frac{1}{n}\log(a_1a_2\cdots a_n).$$

Door 5.9.13 en 5.9.14 is voor vaste $\mathbf{a}$ de functie $M_r(\mathbf{a})$ een continue functie van r op $\mathbf{R}$. Als we $(a_1^{-1},a_2^{-1},\ldots,a_n^{-1})$ afkorten met $\mathbf{a}^{-1}$ dan volgt uit 5.9.13 direct $M_{-r}(\mathbf{a})=[M_r(\mathbf{a}^{-1})]^{-1}$. We merken nog op dat $M_1(\mathbf{a})$ het rekenkundig gemiddelde is van de getallen $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

5.9.15. STELLING. $[M_r(\mathbf{a})]^r$ *is een logarithmisch convexe functie van* r.

Bewijs. Voor iedere i is a_i^r een logarithmisch convexe functie van r. Het gestelde volgt nu uit 5.9.12.

5.9.16. STELLING. $M_r(\mathbf{a})$ *is een monotoon niet-dalende functie van* r.

Bewijs. We beperken ons tot $0<x<y$ en bewijzen dat $M_x(\mathbf{a}) \leq M_y(\mathbf{a})$. De andere gevallen bewijst men analoog.

Uit 5.9.15 volgt, omdat $x=(1-\frac{x}{y})\cdot 0+\frac{x}{y}\cdot y$

$$\log[M_x(\mathbf{a})]^x \leq \frac{x}{y}\log[M_y(\mathbf{a})]^y,$$

dus $M_x(\mathbf{a}) \leq M_y(\mathbf{a})$.

Merk op dat $M_1(\mathbf{a}) \leq M_2(\mathbf{a})$ ook uit de ongelijkheid van Cauchy volgt en dat $M_0(\mathbf{a}) \leq M_1(\mathbf{a})$ in 5.9.7 is bewezen.

5.9.17. OPGAVE. Bewijs dat als $\mathbf{a}:=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

$$\lim_{r\to\infty} M_r(\mathbf{a}) = \max\{a_i \mid 1\leq i\leq n\},$$

$$\lim_{r\to-\infty} M_r(\mathbf{a}) = \min\{a_i \mid 1\leq i\leq n\}.$$

5.10. Opgaven over hoofdstuk 5

5.10.1. Zij R een verzameling, $a\in R$. Definieer $\mathcal{T}\subset P(R)$ door

$$O\in\mathcal{T} :\Leftrightarrow ((O=\emptyset)\vee(a\in O)).$$

Bewijs dat $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte is. Is $(R,\mathcal{T})$ een Hausdorff-ruimte?

5.10.2. Zij $\mathcal{T}:=\{O\in P(\mathbf{N}) \mid (n\in O)\Rightarrow(\forall_{m\in\mathbf{N}}[(m|n)\Rightarrow(m\in O)])\}$, waarin $m|n$ te lezen is als m is een deler van n. Bewijs dat $(\mathbf{N},\mathcal{T})$ een topologische ruimte is en dat $\mathcal{T}$ niet de discrete topologie van $\mathbf{N}$ voorstelt.

5.10.3. Als voor iedere $\alpha\in A$ het stelsel $\mathcal{T}_\alpha$ een topologie van R is dan is $(R, \bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha)$ een topologische ruimte. Bewijs dit.

5.10.4. Voor $r\in\mathbf{Q}$ definiëren we $O_r:=\{\alpha\in\mathbf{R} \mid \alpha>r\}$. Zij $\mathcal{T}:=\{O_r \mid r\in\mathbf{Q}\}\cup\{\emptyset,\mathbf{R}\}$. Ga na of $(\mathbf{R},\mathcal{T})$ een topologische ruimte is.

5.10.5. Als in de ruimte (R,T) van 5.10.1 geldt $\lim_{n\to\infty} P_n = A$ en $\lim_{n\to\infty} P_n = B$, waarin $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij uit R is, is dan A=B?

5.10.6. In de intervaltopologie van $\mathbf{R}$ is iedere open verzameling vereniging van aftelbaar of eindig veel disjuncte open intervallen. Bewijs dit.

5.10.7. Definieer d door

$$\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \forall_{y\in\mathbf{R}}\ [d(x,y) := \min\{|x-y|,1\}].$$

(i) Bewijs dat $(\mathbf{R},d)$ een metrische ruimte is.

(ii) Ga na welke topologie door d wordt voortgebracht.

(iii) Is $(\mathbf{R},d)$ volledig?

5.10.8. Ga nà dat de in 5.2.4 gedefinieerde metriek de discrete topologie voortbrengt.

5.10.9. Zij (R,d) een metrische ruimte. Als twee open bollen $B_{P,a}$ en $B_{Q,b}$ een niet lege doorsnede D hebben dan is D vereniging van open bollen. Bewijs dit (zie ook 5.2.11).

5.10.10. Zij $R:=\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Als $\mathbf{a}:=(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\in R$ en $\mathbf{b}:=(b_n)_{n\in\mathbf{N}}\in R$ dan definiëren we

$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) := 0$ als $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, d.w.z. $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [a_n=b_n]$,

$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) := (\max\{n\in\mathbf{N} \mid \forall_{k<n}\ [a_k=b_k]\})^{-1}$ als $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$.

Bewijs dat (R,d) een volledige metrische ruimte is.

5.10.11. Zij (R,d) een metrische ruimte. Voor alle $P\in R$ en alle $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha\geq 0$ definiëren we $B'_{P,\alpha}:=\{Q\in R \mid d(P,Q)\leq\alpha\}$.

(i) Bewijs dat $B'_{P,\alpha}$ gesloten is.

(ii) Bewijs dat $B'_{P,\alpha}\setminus B_{P,\alpha}$ gesloten is.

(iii) Geef een voorbeeld waarin $B'_{P,\alpha}\neq\overline{B_{P,\alpha}}$.

5.10.12. Zij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij reële getallen. We noemen $a\in\mathbf{R}$ een verdichtingspunt van de rij als a verdichtingspunt is van $\{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ of $\{n\in\mathbf{N} \mid a_n=a\}$ een oneindige verzameling is.
Bewijs dat een begrensde rij een grootste verdichtingspunt heeft.

5.10.13. Voor alle $n\in\mathbf{N}$ definiëren we $O_n:=\{k\in\mathbf{N} \mid k\geq n\}$. Zij $\mathcal{T}:=\{O_n \mid n\in\mathbf{N}\}\cup\{\emptyset\}$. Bewijs dat $(\mathbf{N},\mathcal{T})$ een topologische ruimte is en ga na welke deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ overal dicht in $\mathbf{N}$ liggen.

5.10.14. Zij $R:=\mathbf{R}^2$; d_1 als in 5.4.1 gedefinieerd. We definiëren $\forall_{(x,y)\in R}\,[p(x,y):=x]$. Dan is p een afbeelding van R in $\mathbf{R}$.

(i) Bewijs: (O open in R)$\Rightarrow$(p(O) open in $\mathbf{R}$).

(ii) Toon met een voorbeeld aan dat
$\neg$((O gesloten in R)$\Rightarrow$(p(O) gesloten in $\mathbf{R}$)).

5.10.15. (Hilbert-ruimte). Zij
$H:=\{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2$ is convergent$\}$.
We definiëren een afbeelding van H×H in H, genaamd optelling door $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}+(y_n)_{n\in\mathbf{N}}:=(x_n+y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, (zie 1.26.2).
Verder definiëren we een afbeelding van $\mathbf{C}$×H in H door $\alpha(x_n)_{n\in\mathbf{N}}:=(\alpha x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Tenslotte definiëren we een afbeelding (,) van H×H in $\mathbf{C}$ door

$$((x_n)_{n\in\mathbf{N}},(y_n)_{n\in\mathbf{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n.$$

(i) Bewijs dat deze definities zinvol zijn.

(ii) Bewijs dat H een vectorruimte over $\mathbf{C}$ is.

(iii) Bewijs dat voor (,) geldt:

(a) $(a,b) = \overline{(b,a)}$,

(b) $(\lambda a,b) = \lambda(a,b)$,

(c) $(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$,

(d) $(a\neq 0) \Rightarrow ((a,a)>0)$,

als a, b en c elementen van H zijn en $\lambda\in\mathbf{C}$.

(iv) Als $\forall_{a\in H}\,\forall_{b\in H}\,[d(a,b):=(a-b,a-b)^{\frac{1}{2}}]$

dan is (H,d) een metrische ruimte. Bewijs dit.

(v) Bewijs dat (H,d) volledig is.

5.10.16. Bewijs dat in een Hausdorff-ruimte iedere compacte verzameling gesloten is.

5.10.17. Bewijs dat iedere gesloten deelverzameling van een compacte topologische ruimte compact is.

5.10.18. Beschouw de topologie van $\mathbf{Q}$ voortgebracht door de afstand $d(x,y):=|x-y|$. Zij $V:=\{x\in\mathbf{Q} \mid x^2<2\}$.
Definieer $f: V\to\mathbf{R}$ door $f(x) := \frac{2-x^2}{2|x|+2}$ voor alle $x\in V$.
Definieer $O_x:=(x-f(x),x+f(x))$ voor alle $x\in V$.

(i) Bewijs dat V gesloten is en dat V open is.

(ii) Bewijs dat $\{O_x \mid x\in V\}$ een overdekking van V met open verzamelingen is.

(iii) Bewijs dat V niet compact is. (Merk op dat 5.5.9 dus niet geldt als we $\mathbf{R}^n$ door $\mathbf{Q}$ vervangen.)

(iv) Bewijs dat de topologie in $(\mathbf{Q},d)$ de geïnduceerde van $(\mathbf{R},d)$ is.

5.10.19. (*Discontinuum van Cantor*). Zij C de deelverzameling van $\mathbf{R}$ bestaande uit de getallen die geschreven kunnen worden als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 3^{-n}$ met $a_n=0$ of 2 voor alle $n\in\mathbf{N}$ (zie 4.5.23).

(i) Bewijs dat er een 1-1 afbeelding van C op $[0,1]$ is.

(ii) Bewijs dat C niet aftelbaar is.

(iii) Bewijs dat $C=\overline{C}$.

(iv) Bewijs dat $[0,1]\setminus C$ overal dicht in $[0,1]$ is.

(v) Bewijs dat er bij iedere $\varepsilon>0$ een stelsel intervallen $[a_k,b_k]$ is met $C\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$ en $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k|<\varepsilon$.

5.10.20. Zij f een reële functie, gedefinieerd op $[0,1]$, met de eigenschap $\forall_{x\in[0,1]}\ [\lim_{t\to x} f(t)$ bestaat$]$.
Bewijs dat f begrensd is op $[0,1]$.

5.10.21. Zij $\mathbf{R}^3$ voorzien van de metrische topologie en zij $R:=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ en T de geïnduceerde topologie van R. Bewijs dat (R,T) een compacte topologische ruimte is.

5.10.22. Laat A(x) een beweringsvorm zijn met $\mathbf{C}$ als individuenverzameling en laat B(x) de beweringsvorm

$$B(x) :\Leftrightarrow \exists_{\delta>0}\ \forall_{z\in\mathbf{C}}\ [(|z-x|<\delta)\Rightarrow A(z)]$$

zijn. Zij

$$R := \sup\{\rho\in\mathbf{R} \mid \forall_{z\in\mathbf{C}}\ [(|z|<\rho)\Rightarrow B(z)]\}$$

(We nemen aan dat A zó is dat dit supremum bestaat.)
Bewijs dat

$$\exists_{z\in\mathbf{C}}\ [(|z|=R)\wedge(\neg B(z))].$$

5.10.23. Zij $V\subset\mathbf{C}$ en $\forall_{z\in V}\ [|z|<1]$. Als V een oneindige verzameling is heeft V een verdichtingspunt. Bewijs dit.

5.10.24. Zij f gedefinieerd op $R:=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ door $f(x,y):=xy(x^2+y^2)^{-1}$. Ga na of $\lim_{(x,y)\in V,(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat in de volgende gevallen:

(i) $V := \{(x,y)\in R \mid x=y\}$,

(ii) $V := R$,

(iii) $V := \{(x,y)\in R \mid (x-1)^2+y^2=1\}$,

(iv) $V := \{(x,y)\in R \mid |y|<x^2\}$.

Vervang nu R door $\mathbf{R}^2$ en definieer f als boven met de aanvulling $f(0,0):=0$. Beantwoord weer de bovenstaande vragen.

5.10.25. Zij $R_1:=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ en $R_2:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\neq 0\}$. Ga na of de volgende limieten bestaan:

(i) $\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\in R_1,y\to 0} x\sin\frac{1}{y}\}$,

(ii) $\lim_{y\in R_1,y\to 0}\{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\}$,

(iii) $\lim_{(x,y)\in R_2,(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y}$.

5.10.26. Als (R,d) en (R',d') metrische ruimten zijn, $V\subset R$, f een afbeelding van V in R' en Q een geïsoleerd punt van V dan is f continu in Q t.o.v. V. Bewijs dit.

5.10.27. Als in 5.6.8 de functies f_n reëelwaardig en begrensd zijn op V dan is ook f begrensd op V en

$$\lim_{n\to\infty}[\sup\{f_n(P) \mid P\in V\}] = \sup\{f(P) \mid P\in V\}.$$

Bewijs dit.

5.10.28. Bewijs dat

(i) $\forall_{\rho\in(0,1)}[\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ is uniform convergent op $\{z\in\mathbf{C} \mid |z|\leq\rho\}]$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ is niet uniform convergent op $\{z\in\mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

5.10.29. Zij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1+x^n}$ uniform convergeert op $[0,\infty)$.

5.10.30. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ uniform convergeert op $[-1,1]$.

5.10.31. Zij $C([0,1])$ de verzameling continue reële functies gedefinieerd op $[0,1]$. Voor alle $f\in C([0,1])$ en $g\in C([0,1])$ definiëren we $d(f,g) :=$
$:= \max\{|f(x)-g(x)| \mid x\in[0,1]\}$.
Bewijs dat $(C([0,1]),d)$ een volledige metrische ruimte is.

5.10.32. Zij R de verzameling van de functies, gedefinieerd op $[0,1]$, die op $[0,1]$ slechts eindig veel discontinuïteiten hebben, allemaal van de eerste soort. We definiëren een afstand als in 5.2.5. Als $0=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n=1$ en als op elk van de intervallen (a_{i-1},a_i) de functie f constant is noemen we f een trapfunctie. Bewijs dat de trapfuncties overal dicht in R liggen.

5.10.33. Zij g een continue reële functie gedefinieerd op $\mathbf{R}$ en zij $\alpha\in\mathbf{R}$. Bewijs dat $\{x\in\mathbf{R} \mid g(x)>\alpha\}$ een open verzameling is.

5.10.34. Zij $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij continue afbeeldingen van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ met de volgende eigenschappen:

(i) $\exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [\,|f_n(x)|<M]$,

(ii) $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [f_n(x)\le f_{n+1}(x)]$,

(in woorden: de rij is uniform begrensd en puntsgewijs monotoon niet-dalend). Bewijs dat, voor alle $x\in\mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat. Zij f gedefinieerd door $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Bewijs dat voor iedere $\alpha\in\mathbf{R}$ geldt: $\{x\in\mathbf{R} \mid f(x)>\alpha\}$ is een open verzameling.

5.10.35. Zij f een continue reële functie, gedefinieerd op $[0,1]$. Als $\forall_{x\notin\mathbf{Q}\cap[0,1]}\ [f(x)=0]$ dan is

$\forall_{x\in[0,1]}\,[f(x)=0]$. Bewijs dit.

5.10.36. De functie f is gedefinieerd door
$f(x):=0$ als $x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\}$,
$f(x):=n^{-1}$ als $x\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $x=mn^{-1}$ met $(m,n)=1$, $(n>0)$.
Ga na of er punten zijn waar f continu is.

5.10.37. Zij f gedefinieerd op $\mathbb{R}$, f continu in 1 en verder: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\forall_{y\in\mathbb{R}}\,[f(x+y)=f(x)+f(y)]$.
Bewijs: $\exists_{a\in\mathbb{R}}\,\forall_{x\in\mathbb{R}}\,[f(x)=ax]$.

5.10.38. Zij $(R,\mathcal{T})$ een topologische ruimte, $f: R\to\mathbb{R}$ een continue functie. Zij $S:=\{P\in R\mid f(P)=0\}$. Bewijs dat S gesloten is.

5.10.39. Zij $(R,\mathcal{T})$ een compacte topologische ruimte, $(R',\mathcal{T}')$ een compacte Hausdorff-ruimte en zij f een continue 1-1 afbeelding van R op R'. Bewijs dat de inverse functie $f^{\leftarrow}$ continu is op R'.

5.10.40. Zij f een reële functie, gedefinieerd op $[0,1]$, met de eigenschap $\forall_{y\in\mathbb{R}}$ [de vergelijking $f(x)=y$ heeft 0 of 2 oplossingen].
Bewijs dat f op $[0,1]$ niet continu is.

5.10.41. (*Urysohn*) Zij (R,d) een metrische ruimte en laten A en B niet lege gesloten deelverzamelingen van R zijn en $A\cap B=\emptyset$. Bewijs dat er een functie $f: R\to\mathbb{R}$ is met de volgende eigenschappen:

(i) f is continu.

(ii) $\forall_{P\in A}\,[f(P)=0]$,

(iii) $\forall_{P\in B}\,[f(P)=1]$,

(iv) $\forall_{P\in R\backslash(A\cup B)}\,[0<f(P)<1]$.

5.10.42. Bewijs dat de vergelijking $\sin x + x\log(1+x^2) = x^3$ een positieve reële wortel heeft.

5.10.43. Zij $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ voor $x>0$. Ga na of f uniform continu is op $(0,\infty)$.

5.10.44. Laten $f_1,f_2,\ldots,f_m$ afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ zijn en zij $f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ gedefinieerd door

$f(P):=(f_1(P),f_2(P),\ldots,f_m(P))$ voor alle $P\in\mathbf{R}^n$. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als alle componentfuncties $f_1,f_2,\ldots,f_m$ continu zijn.

5.10.45. Bewijs stelling 5.7.3 voor het geval dat de drie er in voorkomende ruimten topologische ruimten zijn.

5.10.46. Zij f een continue reële functie gedefinieerd op $[0,1]$. In 5.5.13 is aangetoond dat f begrensd is. Zij $M := \sup\{f(x) \mid x\in[0,1]\}$. Neem aan dat er géén $x\in[0,1]$ is met $f(x)=M$. Ga na dat dan

$$\forall_{x\in[0,1]}\ \exists_{\delta(x)}\ \forall_{y\in[0,1]}\ [(|x-y|<\delta(x))\Rightarrow(f(y)<\frac{M+f(x)}{2})].$$

Toon daarmee aan dat er wel een $x\in[0,1]$ is met $f(x)=M$.

5.10.47. Zij $f(x):=x^3$ voor $0<x<2$. Bewijs dat f uniform continu is op $(0,2)$.

5.10.48. Zij f uniform continu op $(0,1)$. Bewijs dat $\lim\limits_{x\in(0,1),x\to 0} f(x)$ bestaat.

5.10.49. Zij f een afbeelding van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Zij f uniform continu op $\mathbf{R}$. Bewijs

$$\exists_{a>0}\ \exists_{b>0}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [|f(x)|<a|x|+b].$$

5.10.50. Zij R de vectorruimte (over $\mathbf{R}$) van de reële continue functies gedefinieerd op $[0,1]$. Voor iedere $n\in\mathbf{N}$ is de in 5.8.2 gedefinieerde afbeelding B_n een lineaire afbeelding van R in R. Bewijs dat er bij iedere $n\in\mathbf{N}$ functies f bestaan zó dat $B_nf=f$. Bepaal deze functies.

5.10.51. Zij f een continue reële functie gedefinieerd op $[0,1]$. Bewijs dat er bij iedere $\varepsilon>0$ een polynoom P is zo dat

$$\forall_{x\in[0,1]}\ [f(x)\le P(x)\le f(x)+\varepsilon].$$

5.10.52. Zij $f(x):=x^2$ voor $0\le x\le 1$. Bepaal B_1f en bepaal $P(x):=ax+b$ zó dat $d(f,P)$, in de zin van 5.10.31, minimaal is.

5.10.53. De polynomen p_n worden voor $n=0,1,2,\ldots$ en $0\le t\le 1$ gedefinieerd door

$$p_0(t) := 0,$$
$$p_{n+1}(t) := p_n(t)+\tfrac{1}{2}[t-\{p_n(t)\}^2],\ (n\ge 0).$$

Bewijs dat

(i) $\forall_{t\in[0,1]}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [p_{n-1}(t)\le p_n(t)\le t^{\frac{1}{2}}]$,

(ii) $\forall_{t\in[0,1]}\ [\lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) = t^{\frac{1}{2}}]$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) = t^{\frac{1}{2}}$ uniform op $[0,1]$.

5.10.54. Geef het bewijs dat met behulp van fig. 27 is gegeven zonder de figuur te gebruiken.

5.10.55. Zij f convex op $\mathbf{R}$. Bewijs dat

$$\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \exists_{a\in\mathbf{R}}\ \forall_{y\in\mathbf{R}}\ [f(y)\ge f(x)+a(y-x)].$$

5.10.56. Als f en g convexe functies zijn, gedefinieerd op $\mathbf{R}$ en f is bovendien monotoon niet-dalend dan is ook $f\circ g$ convex. Bewijs dit.

5.10.57. Zij f convex en begrensd op $\mathbf{R}$. Bewijs dat f constant is.

5.10.58. Bewijs dat voor alle a, b, c, $d\in\mathbf{R}$ geldt

(i) $(a^2-b^2)(c^2-d^2) \le (ac-bd)^2$,

(ii) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$

en dat het gelijkteken alleen geldt als ad=bc.

5.10.59. Bewijs dat

$$\forall_{a>0}\ \forall_{b>0}\ [\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \le (ab)^{\frac{1}{2}}].$$

Wanneer geldt het gelijkteken?

5.10.60. Bewijs dat

$$\forall_{a\in\mathbf{R}}\ \forall_{b\in\mathbf{R}}\ \forall_{c\in\mathbf{R}}\ [a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca].$$

Wanneer geldt het gelijkteken?

5.10.61. Bepaal alle oplossingen van de vergelijking

$$x^4-4xy^3+3y^4 = 0$$

(a) rechtstreeks,

(b) met behulp van 5.9.7.

5.10.62. Zij $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge 0$, $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\ge 0$.

Bewijs dat

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

5.10.63. *(Ongelijkheid van Minkowski)* Laten $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ twee rijen complexe getallen zijn, $p\in\mathbf{R}$, $p\geq 1$. Als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ en $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p$ convergent zijn dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p$ convergent en dan geldt:

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Bewijs dit.

5.10.64. Als x, y, a en b positieve reële getallen zijn dan is

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} \geq (x+y)\log \frac{x+y}{a+b}.$$

Bewijs dit.

5.10.65. Bewijs met behulp van 5.9.7 dat $(1+\frac{1}{n})^n$ monotoon stijgend is.

5.10.66. In de hoofdstukken 4 en 5 is een aantal stellingen bewezen over $\mathbf{R}$ die allemaal $\mathbf{R}$ karakteriseren. We noemen de eigenschappen hier nog eens. Laat $(K,+,\cdot,<)$ een archimedisch geordend commutatief lichaam zijn. Bewijs dat als één van de volgende beweringen juist is dan alle beweringen juist zijn, d.w.z. dat het lichaam $\mathbf{R}$ is.

(i) Iedere snede bepaalt een element c als in 4.1.5,

(ii) Ieder intervallennest heeft een niet-lege doorsnede (4.1.6),

(iii) Iedere monotone begrensde rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in K is convergent (4.1.12),

(iv) Iedere fundamentaalrij in K is convergent (4.1.14),

(v) Iedere gesloten begrensde verzameling in K is compact (5.5.9),

(vi) Iedere begrensde rij in K heeft een convergente deelrij (5.5.10),

(vii) K is Dedekinds geordend.

(De topologie in K wordt gedefinieerd door m.b.v. de ordening absolute waarde te definiëren en dan de intervaltopologie precies als dat voor $\mathbf{R}$ gebeurde.)

6 Differentieerbaarheid

6.1. De symbolen O en o van Landau

We voeren in deze paragraaf enkele veel gebruikte notaties in die in het vervolg het schrijfwerk aanzienlijk zullen beperken. De lezer wordt aangeraden zich door een aantal voorbeelden te bestuderen vertrouwd te maken met deze symbolen. Dit is te meer van belang omdat gewoonlijk nogal slordig met deze symbolen wordt omgesprongen. De compacte notatie kan tot vergissingen leiden en alleen routine helpt dit te voorkomen.

6.1.1. DEFINITIE. *Laten* f *en* g *afbeeldingen van een verzameling* V *in* **C** *zijn. We schrijven*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ op } V$$

als

$$\exists_{K\in\mathbb{R}^+} \forall_{x\in V} [\,|f(x)|\le K|g(x)|\,].$$

(Spreek uit: f is grote O van g op V.)

Als in 6.1.1 de functie g op V de waarde 0 niet aanneemt is door $\phi(x):=f(x)/g(x)$ ook een afbeelding van V in **C** gegeven en 6.1.1 betekent dan niets anders dan de begrensdheid van ϕ op V.

6.1.2. VOORBEELD. Zij $f(x) := 1 - \cos x$ op $\mathbb{R}$ en $g(x):=x^2$ op $\mathbb{R}$ dan is $f(x)=O(g(x))$ op $\mathbb{R}$. Immers voor $x=0$ zijn beide functies 0; daar $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ is er een omgeving $\Omega:=(-a,a)$ van 0 zo dat voor $x\in\Omega\setminus\{0\}$ geldt $0 < \frac{1-\cos x}{x^2} < 1$, en tenslotte geldt voor $|x|\ge a$: $\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \le \frac{2}{a^2}$. Dus is met $K := \max\{1,2a^{-2}\}$ aan de eis in 6.1.1 voldaan. Eén van de dingen die we in dit voorbeeld willen tonen is dat men geen moeite moet doen om K zo klein mogelijk (als dit al zou kunnen) te kiezen. Voor alle $x\in\mathbf{R}$ geldt $1 - \cos x \leq \frac{1}{2}x^2$ maar het heeft geen zin dit te bewijzen als men slechts $1 - \cos x = O(x^2)$ wil aantonen!

6.1.3. DEFINITIE. *Zij* (R,d) *een metrische ruimte,* $V\subset R$, $a\in\overline{V}$. *Laten* f *en* g *afbeeldingen van* V *in* **C** *zijn. We zeggen*

$$f(x) = O(g(x)),\ (x\to a)$$

als er een omgeving Ω *van* a *in* R *is zo dat*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ op } \Omega\cap V.$$

Spreek uit: "f(x) is grote O van g(x) als x nadert tot a".

6.1.4. VOORBEELD. Zij $f(x):=1-x$ op $V:=[0,1]$ en $g(x):=x$ op $[0,1]$. Dan geldt niet "$f(x)=O(g(x))$ op V" en ook niet "$g(x)=O(f(x))$ op V" maar wel "$f(x)=O(g(x)),\ (x\to 1)$" en "$g(x)=O(f(x)),\ (x\to 0)$".

6.1.5. DEFINITIE. *Zij* $a\in\mathbf{R}$ *en laten* f *en* g *afbeeldingen van* (a,∞) *in* **C** *zijn. We zeggen*

$$f(x) = O(g(x)),\ (x\to\infty)$$

als er een $b\in\mathbf{R}$ *is zo dat*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ op } (b,\infty).$$

6.1.6. VOORBEELD. Zij $f(x)=x^2$ en $g(x)=x^3$ voor alle reële x. Dan is $f(x)=O(g(x)),\ (x\to\infty)$ maar niet $g(x)=O(f(x)),\ (x\to\infty)$.

In het vervolg zullen we ons veroorloven uitspraken als in 6.1.6 zó op te schrijven:

(a) $x^2 = O(x^3),\ (x\to\infty)$,

(b) $O(x^2) = O(x^3),\ (x\to\infty)$,

(c) $O(x)+O(x^2) = O(x),\ (x\to 0)$.

Bij de uitspraken in (b) en (c) worden de beschouwde functies niet meer expliciet genoemd. Men moet (b) lezen als:
Als $|f(x)|\leq Kx^2$ voor $x>b$ dan is er een b_1 en een K_1 zo dat $|f(x)|\leq K_1x^3$ voor $x>b_1$. Eén van de gevaren van de notatie is het feit dat men de uitdrukkingen aan linker- en rechterkant van het gelijkteken niet mag verwisselen!

6.1.7. DEFINITIE. *Zij* (R,d) *een metrische ruimte,* $a\in R$. *Zij* $f: R\to\mathbf{C}$, $g: R\to\mathbf{C}$. *We zeggen*

$$f(x) = o(g(x)),\ (x\to a)$$

als

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\text{omgeving } \Omega \text{ van } a}\ \forall_{x\in\Omega\setminus\{a\}}\ [\,|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|\,].$$

(Spreek uit: f is kleine o van g als x nadert tot a.)

Meestal nemen we voor g een functie die overal niet-negatief is. Als $R=\mathbf{R}$ geldt voor $x\to\infty$ een analoge definitie (vergelijk 6.1.5).
De notatie van 6.1.7 heeft o.a. tot gevolg dat we nu in plaats van "$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$" kunnen schrijven "$f(x)=\ell+o(1)$, $(x\to a)$".

6.1.8. VOORBEELD. We werken als volgt met de symbolen.
Daar $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ is $\sin x = x+o(|x|)$, $(x\to 0)$. Dus is
$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x = 1 - 2\{\frac{1}{2}x+o(|x|)\}^2 =$
$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + O(x^2)$, $(x\to 0)$. Verder is
$e^x=1+x+o(|x|)$, $(x\to 0)$ omdat $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.
Dus is

$$\frac{e^x - \cos x}{\sin 2x} = \frac{1+x+o(|x|)-1+O(x^2)}{2x+o(|x|)} = \frac{x+o(|x|)}{2x+o(|x|)} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{2+o(1)} \to \tfrac{1}{2} \text{ voor } x\to 0.$$

OPGAVEN

6.1.9. Bewijs dat

(a) $\forall_{p>0}\ [\,x^p=O(e^x), (x\to\infty)\,]$,

(b) $\forall_{p>0}\ [\,x^p=o(e^x), (x\to\infty)\,]$,

(c) $\forall_{p>0}\ [\,\log x = o(x^p), (x\to\infty)\,]$.

6.1.10. Bewijs dat op $(0,\infty)$ geldt

$$x^{-1}O(1) = O(1)+O(x^{-2}).$$

6.1.11. Geef het bewijs van 5.9.14 met de O,o-notatie.

6.1.12. Laten $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rijen reële getallen zijn. Als f een reële functie is waarvoor geldt:

$$\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [\,f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + O(x^{n+1}), (x\to 0)\,] \text{ en}$$

$$\forall_{n\in\mathbf{N}} [f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^k + O(x^{n+1}), (x\to 0)]$$

dan is $\forall_{n\in\mathbf{N}} [a_n=b_n]$. Bewijs dit.

We merken nog op dat men bij het gebruiken van de O,o-symbolen voor functies van meer veranderlijken voorzichtig moet zijn. Zo is, voor iedere $y>0$,
$\sup\{|\frac{\sin(xy)}{x}| \mid x>0\} = y$, d.w.z. met $K:=y$ geldt
$|\sin(xy)|\le Kx$ op $(0,\infty)$, of $\sin(xy) = O(x)$ op $(0,\infty)$.
Als we $\sin(xy)$ en x beschouwen als afbeeldingen van $V:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0, y>0\}$ in $\mathbf{R}$ dan geldt niet $\sin(xy) = O(x)$ op V, immers $x^{-1}\sin(xy)$ is niet begrensd op V.
Als er een $K\in\mathbf{R}$ is zó dat voor alle $y\in V_1$ en alle $x\in V_2$ geldt $|f(x,y)|\le Kg(x)$ dan zeggen we dat $f(x,y)=O(g(x))$ op V_2, *uniform* in y op V_1.

6.2. De afgeleide

Hoewel we aannemen dat de lezer het begrip *afgeleide* van een functie reeds kent geven we enige definities hier nog eens weer. In de volgende paragraaf zullen we een aantal eigenschappen opsommen die ook bekend dienen te zijn.

6.2.1. DEFINITIE. *Zij* f *een reële functie gedefinieerd op* $[a,b]$ *en zij* $c\in[a,b)$. *We noemen* f *in* c *rechts-differentieerbaar als* $\lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ *bestaat. Dit getal heet de rechter-afgeleide van* f *in* c *en het wordt aangegeven met* $f'_+(c)$. *De linker-afgeleide wordt op analoge wijze gedefinieerd. Als de rechter- en linker-afgeleide van* f *in* c $(c\in(a,b))$ *gelijk zijn heet* f *in* c *differentieerbaar. We schrijven dan* $f'(c):=f'_+(c)=f'_-(c)$.

6.2.2. GEVOLG. Met de notatie van 6.1.7 kunnen we "f is differentieerbaar in c met afgeleide $f'(c)$" schrijven als "$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+o(|h|)$, $(h\to 0)$". Bij tal van bewijzen heeft deze schrijfwijze voordelen boven die van 6.2.1.

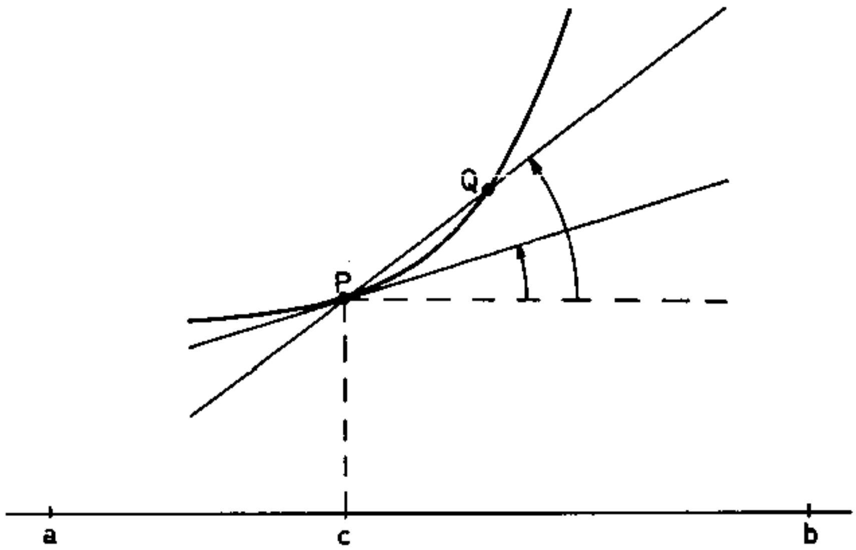
6.2.3. STELLING. *Als* f *differentieerbaar is in* c *dan is* f *continu in* c.

Bewijs. Als $f(c+h) = f(c)+hf'(c)+o(|h|)$, $(h\to 0)$ dan is

$$f(c+h) = f(c)+O(h),\ (h\to 0),$$

dus $$f(c+h) = f(c)+o(1),\ (h\to 0),$$
d.w.z. f is continu in c.

In 6.2.2 is het essentiële van differentieerbaarheid (de basis voor latere generalisaties) weergegeven nl. het feit dat $f(x)-f(c)$ in een omgeving van c "goed" door een lineaire functie wordt benaderd.



Figuur 29

In fig. 29 is P het punt $(c,f(c))$ van de grafiek van f en Q het punt $(c+h,f(c+h))$. We zien dat $f'(c)$ de limiet is (voor $h\to 0$) van de tangens van de hoek die PQ maakt met een rechte door P, $/\!\!/$ x-as. Meetkundig geformuleerd: de grafiek heeft in P een niet-verticale raaklijn. De raaklijn in P is de grafiek van de functie gegeven door $f(c)+(x-c)f'(c)$. Het verschil van f en deze functie is $o(|x-c|)$ voor $x\to c$.

6.2.4. NOTATIES. Als f differentieerbaar is in elk punt van een verzameling V dan noemen we f differentieerbaar op V en geven met f' de functie aan die in ieder punt c van V de waarde $f'(c)$ heeft. Als $V:=[a,b]$ dan bedoelen we met "differentieerbaar op V" steeds "differentieerbaar op (a,b), rechts-differentieerbaar in a en links-differentieerbaar in b". De functie f' heet *afgeleide* van f. Dikwijls worden ook andere notaties gebruikt zoals Df en $\frac{df}{dx}$.

Voordat we eigenschappen van de afgeleide bestuderen zullen we een voorbeeld geven van een continue functie die nergens differentieerbaar is!

6.2.5. VOORBEELD. Zij g gedefinieerd op $\mathbb{R}$ door $g(x):=2|x|$ voor $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$, g periodiek met periode 1. Definieer $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}g(4^n x)$. Daar $|g(x)|\le 1$ voor alle x is volgens 5.6.10 de reeks uniform convergent

en dus volgens 5.6.11 f continu op **R**.
Zij $c \in \mathbf{R}$. Als f differentieerbaar is in c dan is er bij iedere $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ zo dat voor 3 getallen a_1, a_2 en a_3 die voldoen aan $c-\delta<a_1\le c<a_2<c+\delta$, $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}$, geldt

$$f(a_i) = f(c)+(a_i-c)f'(c)+\eta(a_i)$$

waarin $|\eta(a_i)|<\varepsilon(a_2-a_1)$, en dus

$$(*) \qquad |f(a_1)+f(a_2)-2f(\tfrac{a_1+a_2}{2})|<4\varepsilon(a_2-a_1).$$

Voor voldoende grote m is er een gehele k zo dat $c-\delta<\frac{k}{4^m}\le c<\frac{k+1}{4^m}<c+\delta$ en $2^m>2\varepsilon$. Kies $a_1=\frac{k}{4^m}$, $a_2=\frac{k+1}{4^m}$.
De definitie van f is zo dat het linkerlid van (*) de som is van een reeks waarvan alle termen nul zijn behalve de term

$$|2^{-m}\{g(k+1)+g(k)-2g(k+\tfrac12)\}|=2^{-m+1}=2^{m+1}(a_2-a_1)>4\varepsilon(a_2-a_1)$$

in strijd met (*). Blijkbaar is f niet differentieerbaar in c en daar c willekeurig was is aangetoond dat f nergens differentieerbaar is.

6.3. Afgeleiden (herhaling)

Het bepalen van afgeleiden kan men vaak terugbrengen tot het bepalen van afgeleiden van elementaire functies met behulp van de volgende stellingen.

6.3.1. STELLING. *Als* f *en* g *reële functies zijn die differentieerbaar zijn in* c *dan zijn ook* f+g *en* fg *differentieerbaar in* c *en*

$$(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c),$$

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c)+g'(c)f(c).$$

Bewijs. Uit $f(c+h)=f(c)+hf'(c)+o(|h|)$ en $g(c+h)=g(c)+hg'(c)+o(|h|)$ volgt

$$f(c+h)+g(c+h) = \{f(c)+g(c)\}+h\{f'(c)+g'(c)\}+o(|h|)$$

waarmee de eerste bewering bewezen is, en

$$f(c+h)g(c+h) = f(c)g(c)+h\{f'(c)g(c)+f(c)g'(c)\}+r(h),$$

waarin

$$r(h) = \{f(c)+hf'(c)\}o(|h|)+\{g(c)+hg'(c)\}o(|h|)+O(h^2) =$$
$$= O(1)o(|h|)+O(1)o(|h|)+o(|h|) = o(|h|),$$

waarmee de tweede bewering is aangetoond. (In dit bewijs zijn alle O,o-symbolen bedoeld voor $h\to 0$.)

Daar constante functies differentieerbaar zijn en afgeleide 0 hebben is met 6.3.1 bewezen dat D een lineaire afbeelding is van de differentieerbare functies in de reële functies.

6.3.2. STELLING. *Als* f *differentieerbaar is in* c *en* $f(c)\neq 0$ *is ook* $(f)^{-1}$ *differentieerbaar in* c *en*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -f'(c)/\{f(c)\}^2.$$

Bewijs. Daar f continu is in c is $f(x)\neq 0$ in een omgeving van c. We gebruiken 6.2.1.

$$h^{-1}\left\{\frac{1}{f(c+h)}-\frac{1}{f(c)}\right\} = \frac{h^{-1}\{f(c)-f(c+h)\}}{f(c)f(c+h)}$$

en voor $h\to 0$ heeft de teller de limiet $-f'(c)$ en de noemer de limiet $\{f(c)\}^2$.

6.3.3. STELLING. *(Kettingregel): Zij* f *differentieerbaar in* c *en* g *differentieerbaar in* f(c). *Dan is de samengestelde functie* $g\circ f$ *differentieerbaar in* c *en*

$$(g\circ f)'(c) = g'(f(c))\cdot f'(c).$$

Bewijs. We weten

$$f(c+h) = f(c)+hf'(c)+o(|h|),\ (h\to 0)$$

en

$$g(f(c)+k) = g(f(c))+kg'(f(c))+o(|k|),\ (k\to 0).$$

Neem nu $k:=f(c+h)-f(c)$. Dan is $k=hf'(c)+o(|h|)$ en dus geldt $k=O(h)$ en dus is

$$g(f(c+h)) = g(f(c))+hg'(f(c))\cdot f'(c)+o(|h|)O(1)+o(|k|) =$$
$$= g(f(c))+hg'(f(c))\cdot f'(c)+o(|h|),$$

waarmee het gestelde is bewezen.

6.3.4. STELLING. *Zij* f *monotoon en continu in een omgeving van* c, $\gamma:=f(c)$ *en laat* f *differentieerbaar zijn in* c, $f'(c)\neq 0$. *Dan is de inverse functie* $f^{\leftarrow}$ *differentieerbaar in* γ *en*

$$(f^{\leftarrow})'(\gamma) = \{f'(c)\}^{-1}.$$

Bewijs. Voor voldoende kleine k definiëren we h door $c+h:=f^{\leftarrow}(\gamma+k)$. Dan is $\lim_{k\to 0}\frac{k}{h} = f'(c) \neq 0$, dus $h=O(k)$, $(k\to 0)$.

Daar

$$f(c+h) = f(c)+hf'(c)+o(|h|),\ (h\to 0),$$

geldt

$$\gamma+k = \gamma+\{f^{\leftarrow}(\gamma+k)-f^{\leftarrow}(\gamma)\}f'(c)+o(|k|),$$

d.w.z.

$$f^{\leftarrow}(\gamma+k) = f^{\leftarrow}(\gamma)+k/f'(c)+o(|k|), \quad (k\to 0).$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Van een aantal elementaire functies dient men de afgeleide te kennen. Daar men deze kennis ook in het volgende hoofdstuk nodig heeft dient men de volgende regels zó te leren dat men bij gegeven linker-leden de rechter-leden weet èn *omgekeerd*! Men bewijze onderstaande regels zelf. We sluiten ons in het volgende aan bij de gewoonte om (sin x)' te schrijven in plaats van sin'(x) enz. Ook schrijven we wel eens f(x) als we eigenlijk f bedoelen.

6.3.5. *Afgeleiden van elementaire functies*

	functie	afgeleide
a	e^x	e^x
b	$\log\|x\|$	x^{-1}
c	x^a	ax^{a-1}
d	$\sin x$	$\cos x$
e	$\cos x$	$-\sin x$
f	$\tan x$	$(\cos x)^{-2}$
g	$\arcsin x$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
h	$\arctan x$	$(1+x^2)^{-1}$
i	$\log\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\}$	$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$
j	$\log\|x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\|$	$(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$
k	$\log\|\tan \frac{1}{2}x\|$	$(\sin x)^{-1}$

Bovenstaande formules gelden voor alle x waarvoor de voorkomende functies gedefinieerd zijn.

OPGAVEN

6.3.6. Bepaal de afgeleide van arccos x.

6.3.7. Bepaal de afgeleide van x^x.

6.3.8. Bepaal de afgeleide van $\log\{\arctan(1+x^2)\}$.

6.3.9. Bepaal de afgeleide van $xe^{\sin x}$.

Het is mogelijk dat een functie f, gedefinieerd op een verzameling V, een afgeleide f' heeft die op V differentieerbaar is. We schrijven f" i.p.v. (f')' en noemen dit de *tweede afgeleide* van f. Hiervoor worden ook de notaties

$$f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} = D^2f \text{ gebruikt.}$$

Dit proces kan men voortzetten zo lang als de optredende functies differentieerbaar zijn. De functies die zo verkregen worden heten *hogere afgeleiden* van f. We gebruiken de volgende notaties: $f''=f^{(2)}$ en voor $n>2$

$$f^{(n)}:=(f^{(n-1)})'; \quad f^{(n)} = \frac{d^nf}{dx^n} = D^nf \text{ (zie 1.27.15).}$$

Als $f^{(n)}$ bestaat heet f n-keer differentieerbaar.

Als f gedefinieerd is op $[a,b]$ en als $f^{(n)}$ bestaat en bovendien continu is op $[a,b]$ dan zullen we dit aangeven met de notatie: $f\in C^n([a,b])$. We noemen f n-keer continu differentieerbaar. (N.B. In hoofdstuk 5 gaven we met $C([0,1])$ de continue functies op $[0,1]$ aan.)

Als $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[f\in C^n([a,b])]$ noemt men f ook wel oneindig vaak differentieerbaar.

OPGAVEN

6.3.10. *(Formule van Leibniz.)*
Als u en v functies zijn die n-keer differentieerbaar zijn dan is voor $n\in\mathbf{N}$:

(i) $$(u+v)^{(n)} = u^{(n)}+v^{(n)},$$

(ii) $$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(i)}v^{(n-i)},$$

waarbij $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, $u^{(1)}=u'$, $v^{(1)}=v'$. Bewijs dit.

6.3.11. Zij $f(x) := \arcsin x$ op $(-1,1)$. Bewijs dat voor alle $x\in(-1,1)$ en voor alle $n\in\mathbf{N}$ geldt

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x)+n^2f^{(n)}(x).$$

6.3.12. Met de notatie van 1.27.8 geldt voor de functie $f(x):=(1+x)^a$

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{a}{n}(1+x)^{a-n}.$$

Bewijs dit.

6.4. Eigenschappen van differentiëerbare functies

In deze paragraaf beschouwen we weer reële functies gedefinieerd op een deelverzameling V van $\mathbf{R}$ (meestal een interval).

6.4.1. STELLING (Rolle): *Als* f *continu is op* $[a,b]$ *en differentieerbaar op* (a,b) *en als* $f(a)=f(b)$ *dan is er een* $c\in(a,b)$ *met* $f'(c)=0$.

Bewijs. Volgens 5.7.9 neemt f op $[a,b]$ een maximum en een minimum aan. Daar $f(a)=f(b)$ moet tenminste één van deze extrema ook in een inwendig punt van $[a,b]$ worden aangenomen. Laat dit punt c zijn en neem aan dat het een minimum is (geen beperking van de algemeenheid). Daar f differentieerbaar is in c geldt

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)+o(1), \quad (h\to 0).$$

Als $|h|$ voldoende klein is, $h\neq 0$, is de teller van het linkerlid niet negatief, dus is het linkerlid ≤ 0 als $h<0$ en ≥ 0 als $h>0$. Dan moet $f'(c)=0$ zijn.

Uit het bewijs volgt nog dat de punten van $[a,b]$ waar f een maximum, resp. minimum aanneemt een deelverzameling zijn van $\{x\in[a,b] \mid f'(x)=0\}\cup\{a,b\}$ als f differentieerbaar is op (a,b).

6.4.2. STELLING *(Gemiddelde theorema). Als* f *continu is op* $[a,b]$ *en differentieerbaar op* (a,b) *dan is er een* $c\in(a,b)$ *met* $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Bewijs. Zij $g(x):=f(x)-\{f(b)-f(a)\}\frac{x-a}{b-a}$ op $[a,b]$.
Daar $g(a)=g(b)=f(a)$ volgt het gestelde uit 6.4.1.

We wijzen op het grote belang van deze stelling voor het schatten van ingewikkelde uitdrukkingen die de vorm $f(x)-f(y)$ hebben. Is nl. f differentieerbaar en f' begrensd ($|f'(c)|\leq M$ voor alle c) dan is volgens 6.4.2: $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$. Zo volgt de uniforme continuïteit van $\log x$ op $(1,\infty)$ uit $|\log x - \log y| =$
$= |x-y|\,|\frac{1}{c}|<|x-y|\leq\varepsilon$ als $|x-y|<\delta=\varepsilon$, omdat c een punt tussen x en y is, dus $c>1$.

6.4.3. STELLING. *Als* f *differentieerbaar is op* (a,b) *en* $\forall_{x\in(a,b)}\,[f'(x)=0]$ *dan is* f *constant op* (a,b).

Bewijs. Kies p vast in (a,b) en laat q een willekeurig punt van (a,b) zijn. Dan is volgens 6.4.2: $f(q)-f(p)=0$.

6.4.4. STELLING. *Als* f *en* g *continu zijn op* [a,b], f *en* g *differentieerbaar op* (a,b) *en* $\forall_{x\in(a,b)}\,[g'(x)\neq 0]$ *dan is er een* $c\in(a,b)$ *met*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bewijs. Uit 6.4.1 en $g'(x)\neq 0$ volgt dat $g(b)\neq g(a)$. We kunnen dan λ zo kiezen dat $f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$. Pas nu 6.4.1 toe op $f(x)-\lambda g(x)$.

6.4.5. STELLING. *Als* f *differentieerbaar is op* (a,b) *en* $\forall_{x\in(a,b)}\,[f'(x)>0]$ *dan is* f *monotoon stijgend op* (a,b).

Bewijs. Als $a<p<q<b$ is volgens 6.4.2:

$$f(q)-f(p) = (q-p)f'(c)>0.$$

6.4.6. STELLING. *Als* f *differentieerbaar is op* (a,b) *en monotoon niet-dalend dan is* $\forall_{x\in(a,b)}\,[f'(x)\geq 0]$.

Bewijs. Zij $c\in(a,b)$, $h>0$, $c+h\in(a,b)$.
Dan is $h^{-1}\{f(c+h)-f(c)\}\geq 0$ dus volgens 6.2.1 ook $f'(c)\geq 0$.

De opmerking na 6.4.1 en de stellingen 6.4.5 en 6.4.6 stellen ons in staat het gedrag van allerlei functies te bestuderen en grafieken te schetsen.

OPGAVEN

6.4.7. (a) Bewijs dat $\forall_{x>0}\,[\log x\leq x-1]$,
(b) Bewijs dat $\forall_{x>0}\,\forall_{\alpha\in(0,1)}\,[x^{\alpha}-\alpha x\leq 1-\alpha]$.

6.4.8. (Darboux) Zij f differentieerbaar op (a,b). Bewijs dat f' doorlopend is, d.w.z. als $x_1\in(a,b)$ en $x_2\in(a,b)$ en $f'(x_1)<\eta<f'(x_2)$ dan is er een ξ tussen x_1 en x_2 met $f'(\xi)=\eta$.

6.4.9. Zij $g(x)=x^3$ op $\mathbb{R}$. Schets de grafiek van de functie f gedefinieerd door $f(x):=g^{\leftarrow}(x^2)-g^{\leftarrow}(x^2-1)$.

De volgende stelling is soms nuttig. Andere methoden om limieten te bepalen verdienen echter meestal de voorkeur.

6.4.10. STELLING (l'Hôpital). *Als* f *en* g *differentieerbaar zijn op* (a,b), $\forall_{x\in(a,b)}\,[g'(x)\neq 0]$ *en* $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0$, *terwijl*

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

dan is

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Bewijs. Door $f(a)=g(a)=0$ te definiëren worden f en g in a rechts-continu. Voor $x\in(a,b)$ is er volgens 6.4.4 een $c\in(a,x)$ met

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell+o(1),\quad (x\downarrow a).$$

OPGAVEN

6.4.11. Bewijs het analogon van 6.4.10 voor limieten met $x\to\infty$.

6.4.12. Bepaal $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + 2\cos x - \log(1+x) - 3}{\sin x - \arctan x}$.

6.4.13. Zij $f(x) := e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$ en $g(x) := e^{-x}(\cos x + \sin x)$ voor alle $x\in\mathbb{R}$. Toon aan dat niet geldt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

6.4.14. Bepaal $\lim_{x\to 1} \dfrac{(2x-x^4)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{3}{4}}}$.

We hebben nu een functie die n+1 keer differentieerbaar is en bewijzen een uitbreiding van het gemiddelde theorema (6.4.2), nl. de zogenaamde *formule van Taylor*:

6.4.15. STELLING. *Zij* $f\in C^n([a,b])$ *en laat* $f^{(n+1)}$ *bestaan op* (a,b). *Dan is er een* $c\in(a,b)$ *zo dat*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Bewijs. Definieer R door

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ R := f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

en definieer dan ϕ op $[a,b]$ door

$$\phi(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\ R.$$

Dan is ϕ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) en verder is $\phi(a)=\phi(b)=f(b)$. Dus is er volgens 6.4.1 een $c\in(a,b)$ waarvoor $\phi'(c)=0$.

Nu is $\phi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\{f^{(n+1)}(x)-R\}$. Dus is er een $c\in(a,b)$ met $R=f^{(n+1)}(c)$. Hiermee is het gestelde bewezen.

6.4.16. VOORBEELD. *Zij* $n\in\mathbb{N}$, $a=0$, $b=x>0$, $f(x)=e^x$. *Dan is* aan de voorwaarden van 6.4.15 voldaan. Er is dus een getal $\theta\in(0,1)$ zo dat

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{\theta x}.$$

Dit geldt ook voor $x<0$. (Bewijs precies als 6.4.15.) Daar bovenstaande geldt voor alle $n\in\mathbb{N}$ kunnen we bij vaste x nagaan wat er gebeurt als $n\to\infty$. Uit 4.5.9 volgt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{\theta x} = 0$.

Als gevolg van de formule van Taylor hebben we bewezen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ voor } x\in\mathbb{R} \text{ (zie § 6.8).}$$

OPGAVEN

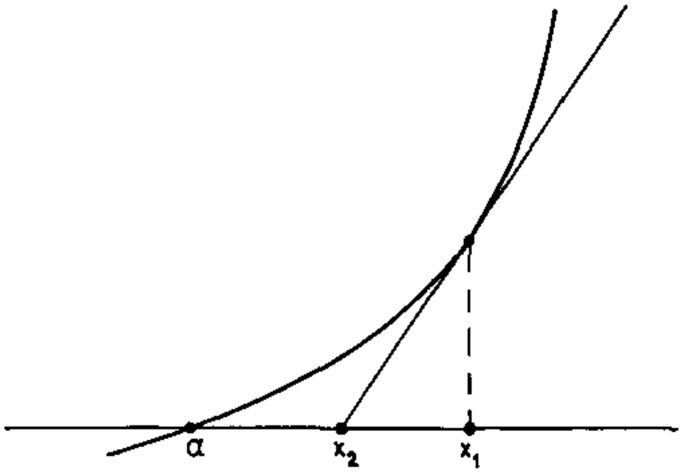
6.4.17. Bewijs dat

(i) $\sin x = x + O(x^3)$, $(x\to 0)$ en

(ii) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, $(x\to 0)$.

6.4.18. Bepaal door 6.4.15 op geschikte functies toe te passen de getallen e, π en $\log 2$ in 2 decimalen nauwkeurig.

We willen nog wijzen op een ander gebruik van de afgeleide bij benaderingen. Laat f een differentieerbare functie zijn en laat een oplossing α van de vergelijking $f(x)=0$ gezocht worden. Figuur 30 illustreert een procédé om benaderingen voor een oplossing te vinden.



Figuur 30

Het punt x_1 is een eerste benadering voor α. De raaklijn in $(x_1, f(x_1))$ aan de grafiek van f snijdt de X-as in het punt x_2. Dit zet men voort. Dit wordt de *methode van Newton-Raphson* genoemd. De rij $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is gedefinieerd door $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Als x_1 dicht genoeg bij α ligt zal de rij $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeren naar α. We bewijzen dit in 6.4.19. We merken nog op dat het in de praktijk alleen zinvol is deze methode te gebruiken als de bepaling van $f'(x_k)$ niet te moeilijk is (dat is: te veel tijd kost bij gebruik van rekenmachines).

6.4.19. STELLING. *Zij* $f\in C^2([a,b])$, $\alpha\in(a,b)$, $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$. *Dan is er een interval* $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ *zo dat als* $x_1\in[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ *en* $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}]$ *geldt* $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Bewijs. Daar $f(\alpha)f''(\alpha)\{f'(\alpha)\}^{-2}=0$ is er een interval $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ waarop $|f(x)f''(x)|\{f'(x)\}^{-2}\leq\frac{1}{2}$. Dit interval is, met de gewone afstand, een complete metrische ruimte (4.1.14).

Definieer ϕ op $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ door $\phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dan is er volgens 6.4.2 een c tussen x en y met

$|\phi(x)-\phi(y)| = |f(c)f''(c)\{f'(c)\}^{-2}|\cdot|x-y|\leq\frac{1}{2}|x-y|$.

Door $y=\alpha$ te nemen zien we dat ϕ een afbeelding van $[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ in zichzelf is en wel een contractie. Volgens 5.2.17 convergeert de rij x_n naar het punt α omdat $\phi(\alpha)=\alpha$.

6.5. Functies van meer variabelen

We zullen in deze paragraaf het begrip differentieerbaarheid uitbreiden tot functies van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. We zullen eerst de beschouwing beperken tot functies van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ en daarna het algemene geval bekijken.

6.5.1. DEFINITIE. *Zij* V *een omgeving van* (a,b) *in* $\mathbb{R}^2$ *en* f: V→$\mathbb{R}$. *In een omgeving van* a *in* $\mathbb{R}$ *is de functie* g *gedefinieerd door* g(x):=f(x,b). *Als* g *in* a *differentieerbaar is dan noemen we* g'(a) *de partiële afgeleide van* f *naar de eerste veranderlijke in* (a,b). *De volgende notaties worden gebruikt:*

$$g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b).$$

Merk op dat de notatie berust op de gewoonte een functie van twee veranderlijken met f(x,y) aan te geven. Dan is x de eerste veranderlijke. Sommige auteurs schrijven f'_x in plaats van f_x. Op dezelfde wijze definieert men $\frac{\partial f}{\partial y}$. We wijzen er op dat de nu volgende definitie méér zegt dan dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan!

6.5.2. DEFINITIE. *Zij* f *een reële functie gedefinieerd in een omgeving van* (a,b). *We noemen* f *(totaal-) differentieerbaar in* (a,b) *als er getallen* A *en* B *zijn zo dat*

$$f(x,y) = f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+o(\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}),$$
$$((x,y)\to(a,b)).$$

Merk op dat uit deze definitie volgt

$$f(x,b) = f(a,b)+A(x-a)+o(|x-a|), \quad (x\to a),$$

d.w.z. (volgens 6.2.2) $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. Evenzo $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Bovendien is

$$f(x,y) = f(a,b)+o(1), \quad ((x,y)\to(a,b)),$$

d.w.z. f is continu in (a,b).

We vragen ons nu af of uit het bestaan van $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ volgt dat f totaal-differentieerbaar is. Het is niet moeilijk voorbeelden te bedenken waaruit het tegendeel blijkt. Wel geldt:

6.5.3. STELLING. *Zij* f *gedefinieerd op een omgeving van* (a,b) *in* $\mathbf{R}^2$ *en laat in deze omgeving* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *en* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *bestaan. Als* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *en* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continu zijn in* (a,b) *dan is* f *in* (a,b) *(totaal-) differentieerbaar.*

Bewijs. Volgens 6.4.2 zijn er getallen ξ (tussen x en a) en η (tussen y en b) zó dat

$$f(x,y)-f(a,b) = f(x,y)-f(a,y)+f(a,y)-f(a,b) =$$
$$= (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,\eta).$$

Gegeven is dat $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+o(1)$, $((x,y)\to(a,b))$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+o(1)$, $((x,y)\to(a,b))$. Als we dit invullen volgt het gestelde.

6.5.4. OPGAVE. Zij f: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(0,0):=0$ en $f(x,y):=x^2y^2(x^2+y^2)^{-1}$ als $(x,y)\neq(0,0)$. Toon met 6.5.2 en ook met 6.5.3 aan dat f totaal-differentieerbaar is op $\mathbf{R}^2$.

Hogere partiële afgeleiden worden gedefinieerd als in 6.3 met de methode van 6.5.1. Met $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ geven we aan $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, enz. We bewijzen hiervoor één stelling die zeer vaak gebruikt wordt. Zolang we ons beperken tot afgeleiden die continu zijn verlost deze stelling ons van veel moeilijkheden die bij de notatie zouden kunnen optreden.

6.5.5. STELLING. *Zij* f *een reële functie gedefinieerd in een omgeving van* (a,b) *in* $\mathbf{R}^2$ *en laat in deze omgeving* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en* $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ *bestaan. Als* $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ *continu is in* (a,b) *dan bestaat ook* $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ *in* (a,b) *en dan geldt* $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Bewijs. Als h en k voldoende klein zijn zijn er volgens 6.4.2 getallen θ en η (afhankelijk van h en k) met $0<\theta<1$ en $0<\eta<1$ en

$$\{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)\}-\{f(a,b+k)-f(a,b)\} =$$
$$= h\{\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h,b)\} = kh\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h,b+\eta k).$$

Dus is

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{-1}\{\lim_{k\to 0} [\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}]\} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h,b+\eta k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),$$

waarmee het gestelde bewezen is.

We beschouwen nu afbeeldingen van $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$. De punten van $\mathbf{R}^n$ geven we aan als $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en de punten van $\mathbf{R}^m$ als $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ (zie 3.14.1). We noemen de afbeelding nu ook wel *vectorfunctie*. We schrijven $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Bij deze functie $\mathbf{f}$ noemen we de f_i gedefinieerd door $y_i=:f_i(\mathbf{x})$ weer *componentfuncties* van $\mathbf{f}$. De lengte van een vector $\mathbf{h}$ uit $\mathbf{R}^n$ resp. $\mathbf{R}^m$ geven we aan met $|\mathbf{h}|$ (zie 3.17.4).

6.5.6. DEFINITIE. *Zij* $\mathbf{f}$ *een vectorfunctie van een omgeving van* $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ *in* $\mathbf{R}^m$. *We noemen* $\mathbf{f}$ *differentieerbaar in* $\mathbf{a}$ *als er een lineaire afbeelding* A *van* $\mathbf{R}^n$ *in* $\mathbf{R}^m$ *bestaat zo dat* $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})=\mathbf{f}(\mathbf{a})+A\mathbf{h}+\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})$ *waarbij* $|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})|=o(|\mathbf{h}|)$ *als* $|\mathbf{h}|\to 0$.

Evenals na 6.5.2 kunnen we nu een componentfunctie f_i beschouwen en alle variabelen op één na constant houden, d.w.z. ons beperken tot $\mathbf{h}=(0,0,\ldots,h_j,0,\ldots,0)$. Als (a_{ij}), $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ de matrix van A is t.o.v. de standaardbases in $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ dan is

$$f_i(a_1,a_2,\ldots,a_j+h,\ldots,a_n)=f_i(a_1,a_2,\ldots,a_n)+a_{ij}h+o(|h|),$$
$(h\to 0)$.

Hieruit volgt dat $a_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

We noemen de lineaire afbeelding A de *functionaaloperator* van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$. De matrix A heet de *functionaalmatrix*. Voor het bijzondere geval m=n kan men van deze matrix de determinant bepalen. Deze heet *functionaaldeterminant* of *determinant* van *Jacobi* of *Jacobiaan* van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$. We gebruiken voor deze determinant de notatie $\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(\mathbf{a})$.

6.5.7. VOORBEELD. De plaats van een punt (x,y) in $\mathbf{R}^2$ kan ook beschreven worden met *poolcoördinaten*, gedefinieerd door $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ met $r\ge 0$, $-\pi<\phi\le\pi$ evenals in 4.4.1. We kunnen dit ook opvatten als een afbeelding van $\{(r,\phi)\in\mathbf{R}^2 \mid r\ge 0, -\pi<\phi\le\pi\}$ in $\mathbf{R}^2$. Dan is $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}(\rho,\alpha)=\rho$.

OPGAVEN

6.5.8. De afbeelding $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ is gedefinieerd door

$f_1(\mathbf{x}) := x_1x_2x_3$, $f_2(\mathbf{x}) := x_1x_2 - x_1x_2x_3$, $f_3(\mathbf{x}) := x_2 - x_1x_2$.

Toon aan dat $\mathbf{f}$ differentieerbaar is en bepaal de functionaaldeterminant van $\mathbf{f}$.

6.5.9. Ga na wat de meetkundige interpretatie is van een vectorfunctie $\mathbf{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ die differentieerbaar is. Wat stelt de functionaalmatrix voor?

We bewijzen nu het analogon van de kettingregel 6.3.3.

6.5.10. STELLING. *(Kettingregel) Zij* $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *differentieerbaar in* $\mathbf{a}$ *met functionaaloperator* A *en zij* $\mathbf{g}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ *differentieerbaar in* $\mathbf{b} := \mathbf{f}(\mathbf{a})$ *met functionaaloperator* B. *Dan is* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *differentieerbaar in* $\mathbf{a}$ *met functionaaloperator* BA.

Bewijs. Het bewijs verloopt precies als bij 6.3.3. Er geldt

$$\begin{aligned}\mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})] &= \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{a}) + A\mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h})] = \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{b}) + BA\mathbf{h} + B\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2(A\mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h}))\end{aligned}$$

waarbij $|\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h})| = o(|\mathbf{h}|)$ als $|\mathbf{h}| \to 0$ en $|\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})| = o(|\mathbf{k}|)$ als $|\mathbf{k}| \to 0$. Het gestelde volgt nu uit 3.17.32, immers

$|B\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2(A\mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{h}))| = o(|\mathbf{h}|)$ als $|\mathbf{h}| \to 0$.

VOORBEELDEN

6.5.11. Zij $x: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $y: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en $z: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Dan is door

$$\mathbf{f}(u,v) := (x(u,v), y(u,v))$$

een afbeelding van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ gegeven. Samenstellen met z geeft dan de afbeelding g gegeven door

$$g(u,v) := z(\mathbf{f}(u,v)) = z(x(u,v), y(u,v)).$$

Volgens 6.5.10 is

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

6.5.12. Beschouw in $\mathbf{C}$ de ellips $z = \cos\phi + 2i\sin\phi$ $(0 \le \phi \le 2\pi)$. Zij $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ gegeven door $f(z) := z^2$. Schrijf $z = x+iy$, $f(z) = u+iv$. Dan zijn u en v functies van x en y, terwijl x en y functies van ϕ zijn. Voor de samengegestelde functie geldt:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{d\phi} \\ \\ \frac{dv}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\phi} \\ \\ \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \\ 2\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\sin 2\phi \\ \\ 4\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

6.5.13. OPGAVE. Ga na wat de meetkundige betekenis is van de functionaaloperatoren in 6.5.12.

6.5.14. DEFINITIE. *Zij* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *De functionaaloperator noemen we de gradiënt van* f *(notatie:* grad f*). De functionaalmatrix t.o.v. de basis* $(1,0,\ldots,0),\ldots(0,0,\ldots,0,1)$ *is* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, *dat is een rijvector.*

Als we in $\mathbf{R}^n$ een rechte $\mathbf{a}+t\mathbf{v}$ (met $|\mathbf{v}|=1$) door $\mathbf{a}$ beschouwen dan is $g(t):=f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ een functie g gegeven waarvan de afgeleide in $t=0$ ons informatie geeft over afname resp. toename van de functie f in de richting van $\mathbf{v}$ (in het punt $\mathbf{a}$) (zie 6.4.5). Volgens 6.5.10 geldt in $t=0$

$$\frac{dg}{dt} = (\text{grad } f) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\text{grad } f, \mathbf{v})$$

waarbij de waarde van grad f in $\mathbf{a}$ genomen moet worden. We noemen dit inwendig product de *richtingsafgeleide* van f in de richting van $\mathbf{v}$. De richtingsafgeleide is maximaal als $\mathbf{v}$ de richting van $(\text{grad } f)(\mathbf{a})$ heeft. Is f gedefinieerd op $V \subset \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{a}$ inwendig punt van V dan is grad f $= \mathbf{0}$ blijkbaar een nodige voorwaarde voor de uitspraak "f heeft in $\mathbf{a}$ een extremum". (N.B. niet een voldoende voorwaarde!) We noemen een punt waar grad f $= \mathbf{0}$ een *stationair punt*. Op de bepaling van extrema gaan we in 6.5.19 nader in.

6.5.15. OPGAVE. Zij C een convexe deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ en zij $f\colon C \to \mathbf{R}$ een differentieerbare functie op C. Als grad f $= \mathbf{0}$ op C dan is f constant. Bewijs dit.

Een analogon van stelling 6.5.3 voor vectorfuncties is

6.5.16. STELLING. *Zij* **f** *een vectorfunctie van een omgeving van* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ *in* $\mathbf{R}^m$. *Als alle partiële afgeleiden* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *in deze omgeving bestaan en als deze afgeleiden continu zijn in* $\mathbf{a}$ *dan is* **f** *differentieerbaar in* $\mathbf{a}$.

Bewijs. Opgave 6.5.17.

6.5.17. OPGAVE. Bewijs 6.5.16.

We kunnen de formule van Taylor 6.4.15 ook generaliseren tot functies van meer variabelen. We beperken ons tot functie van 2 variabelen.
Laat $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ een functie van 2 variabelen zijn waarvan alle partiële afgeleiden van alle orden bestaan (en dus ook alle continu zijn). Zij $(h,k) \in \mathbf{R}^2$. Beschouw voor $n \in \mathbf{N}$ de functie $g_n\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$g_n(\alpha,\beta) := \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^{n-j} k^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(\alpha,\beta)$$

(de notatie voor de hogere afgeleiden is geoorloofd volgens 6.5.5).

We zullen i.p.v. g_n de symbolische notatie $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f$ gebruiken.

6.5.18. STELLING. *Zij* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *een functie waarvan alle partiële afgeleiden van alle orden bestaan. Zij* $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $(h,k) \in \mathbf{R}^2$. *Dan is er een* $\theta \in \mathbf{R}$ *met* $0<\theta<1$ *zo dat*

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} [(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f](a,b) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} [(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{m+1} f](a+\theta h, b+\theta k).$$

Bewijs. Definieer $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door $g(t) := f(a+ht, b+kt)$.
Door herhaalde toepassing van 6.5.10 vinden we voor deze samengestelde functie $g^{(n)}(t) = g_n(a+ht, b+kt)$ (volledige inductie!). De bewering is dan niets anders dan een toepassing van 6.4.15 nl.

$$g(1) = g(0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\theta).$$

Als niet alle partiële afgeleiden van f bestaan geldt 6.5.18 voor die m waarvoor de afgeleiden van de orde m+1 nog continu zijn. We kunnen met deze stelling het gedrag van een functie in de buurt van een punt waar we een extremum verwachten bestuderen.

6.5.19. STELLING. *Laat* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *continue partiële afgeleiden van de tweede orde hebben. Laat* (a,b) *een stationair punt van* f *zijn.*
Zij Δ *de waarde van* $f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ *in* (a,b). *Dan heeft* f

in (a,b)

(i) *een maximum als* $\Delta>0$ *en* $f_{xx}(a,b)<0$,

(ii) *een minimum als* $\Delta>0$ *en* $f_{xx}(a,b)>0$,

(iii) *géén extremum als* $\Delta<0$.

(We bedoelen hier locale extrema.)

Bewijs. De elementen van de matrix $M := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ zijn continue functies in een omgeving van (a,b). Als de determinant van M in (a,b) positief resp. negatief is geldt dit ook in een omgeving van (a,b). Volgens 6.5.18 geldt

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+(h,k)M(a+\theta h,b+\theta k)\binom{h}{k}.$$

Als de determinant van M positief is is de kwadratische vorm $(h,k)M\binom{h}{k}$ positief, resp. negatief definiet afhankelijk van het teken van $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Hiermee zijn (i) en (ii) bewezen. Analoog is in te zien dat in geval (iii) géén extremum aanwezig is en alleen als de determinant van M in (a,b) 0 is kunnen we nog geen uitspraak over extrema doen. Merk op dat de beperking tot functies van twee veriabelen hier niet wezenlijk is en de redenering voor meer variabelen precies hetzelfde is.

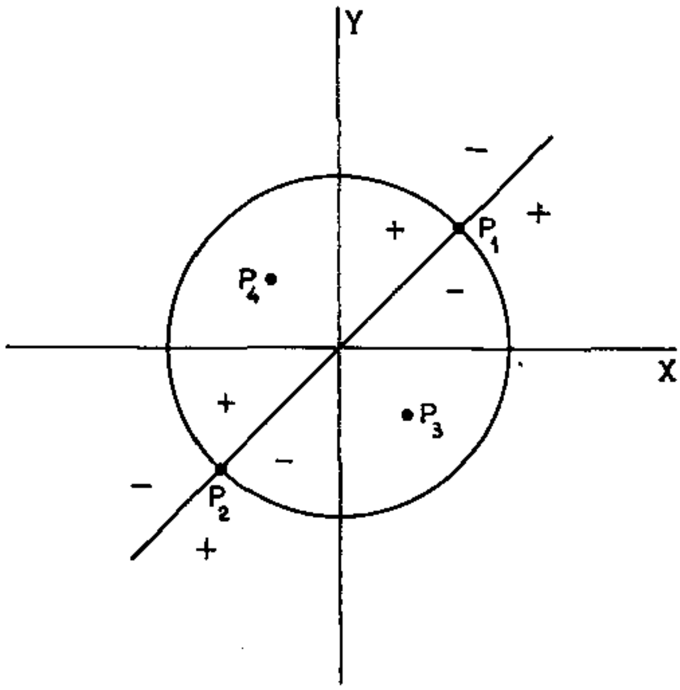
6.5.20. OPGAVE. Bepaal de extrema van $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als

(a) $f(x,y) = x^2+xy+y^2+x+y$,

(b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$,

(c) $f(x,y) = x^2+y^2+e^{xy}$.

Vaak kunnen we het rekenwerk nodig voor een toepassing van 6.5.19 besparen door gebruik te maken van de stelling dat een continue functie op een compacte verzameling in $\mathbb{R}^2$ een maximum en minimum aanneemt (5.7.9).
Beschouwt men bijv. $f(x,y):=(x-y)(x^2+y^2-1)$ dan blijken de stationaire punten: $P_1=(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $P_2=(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $P_3=(\frac{1}{6}\sqrt{6},-\frac{1}{6}\sqrt{6})$ en $P_4=(-\frac{1}{6}\sqrt{6},\frac{1}{6}\sqrt{6})$ (ga na). We merken op dat $f(x,y)=0$ is op de rechte met vergelijking $y=x$ en op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2=1$. De rechte en de cirkel verdelen het vlak in vier delen en op elk van deze stukken in $f(x,y)$ tekenvast. In figuur 31 hebben we de stationaire punten en de gebieden waar $f(x,y)$ tekenvast is getekend.



Figuur 31

We zien meteen dat de functie in elke omgeving van P_1 zowel als van P_2 positieve en negatieve waarden aanneemt. Noch in P_1 noch in P_2 heeft de functie dus een extremum; beide zijn zgn. *zadelpunten*. Op de compacte verzameling $V:=\{(x,y) \mid x \geq y, x^2+y^2 \leq 1\}$ is $f(x,y) \leq 0$; op de rand van deze verzameling is $f(x,y)=0$; f moet dus een minimum hebben in een inwendig punt van V; de enige kandidaat is P_3. Daar heeft f dus een minimum; evenzo heeft f in P_4 een maximum.
We merken op dat de differentiaalrekening geen hulp biedt bij het bepalen van extrema die optreden in randpunten van de definitieverzameling van de functie.

OPGAVEN

6.5.21. Bepaal de extrema van de functie $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ als

$$f(x,y) = (x^2+4y^2-1)(4x^2+y^2-1).$$

6.5.22. Beschouw de functie $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y)=x^2+y$.

(a) Bepaal de extrema van f op de verzameling $D:=$ $:=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) Eveneens op de verzameling $E:=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$.

6.6. Impliciete functies

Beschouw de vergelijking $2-x^2-y^2=0$. We kunnen dit opvatten als de vergelijking van een kromme in $\mathbf{R}^2$. Op deze kromme ligt het punt (1,1). Nu zien we dat in een voldoende kleine omgeving van (1,1) de kromme de eigenschap heeft dat bij iedere x_1 er precies één y_1 is zó dat (x_1,y_1) op de kromme ligt. Er is dus een functie f gedefinieerd in een voldoende kleine omgeving van 1 zo dat $2-x^2-\{f(x)\}^2=0$. Dit is nl. de functie f gegeven door $f(x):=(2-x^2)^{\frac{1}{2}}$. We zeggen dat f *impliciet* gegeven is door de vergelijking $2-x^2-y^2=0$. We willen nu voorwaarden hebben waaronder door een vergelijking een functie impliciet is gegeven en de functie differentieerbaar is. Bovendien willen we de afgeleide van een impliciet gegeven functie bepalen. We beschouwen meteen het algemene geval van vectorfuncties. We beschouwen een afbeelding $\mathbf{F}$ van een deelverzameling van $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^m$. Bij vaste $\mathbf{x}$ is dit een afbeelding van $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^m$. De Jacobiaan van deze afbeelding geven we aan met $J(\mathbf{x};\mathbf{y})$. We beschouwen de vergelijking $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$.

6.6.1. STELLING. *Zij* G *een gebied in* $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ *en laat* $\mathbf{F}:G\to\mathbf{R}^m$ *een functie zijn die differentieerbaar is op* G *met continue partiële afgeleiden. Zij* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in G$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{0}$ *en* $J(\mathbf{x}_0;\mathbf{y}_0)\neq 0$. *Dan is er een bol* $B:=B_{\mathbf{x}_0,\alpha}\subset\mathbf{R}^n$ *en een functie* $\mathbf{f}:B\to\mathbf{R}^m$ *die differentieerbaar is in* B *met continue partiële afgeleiden zo dat*

(i) $\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0,$

(ii) $\qquad \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ voor $\mathbf{x}\in B$.

Bewijs. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=(\mathbf{0},\mathbf{0})$ nemen. Uit de gegevens volgt dat $J(\mathbf{x};\mathbf{y})\neq 0$ in een omgeving van $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Verder is $\mathbf{F}$ differentieerbaar. Er zijn dus lineaire afbeeldingen A_1 van $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ en A_2 van $\mathbf{R}^m$ in $\mathbf{R}^m$ zó dat

$$(*) \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A_1\mathbf{x}+A_2\mathbf{y}+\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

met $|\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|=o(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)$ als $(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})$.
Daar J de determinant van A_2 is, is A_2 regulier, d.w.z. de inverse $\overleftarrow{A_2}$ van A_2 bestaat. We kunnen $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ nu ook schrijven als

$$\mathbf{y} = -\overleftarrow{A_2}A_1\mathbf{x}-\overleftarrow{A_2}\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\mathbf{x}+\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

met $A:=-\overleftarrow{A_2}A_1$ en $|\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{x},\mathbf{y})|=o(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)$ voor $(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Bij vaste A_1 en A_2 (waarde van de functionaaloperator in (0,0)) is (*) definitie van de functie ε_1 die continue partiële afgeleiden heeft die allemaal 0 zijn in (0,0). Dit geldt ook voor ε_2. Dus is er bij iedere $\varepsilon>0$ een omgeving Ω_ε van (0,0) in G zo dat voor $(x_1,y_1)\in\Omega_\varepsilon$ en $(x_2,y_2)\in\Omega_\varepsilon$ geldt

$$|\varepsilon_2(x_1,y_1)-\varepsilon_2(x_2,y_2)|\le\varepsilon|x_1-x_2|+\varepsilon|y_1-y_2|$$

(zie ook 6.9.19). Volgens 3.17.32 is er een getal $M\in\mathbf{R}^+$ zo dat $|Ax|\le M|x|$ voor $x\in\mathbf{R}^n$. Kies nu $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ zo dat $\beta\ge(2M+1)\alpha$ en zo dat $D:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m \mid |x|\le\alpha, |y|\le\beta\}\subset\Omega_{\frac12}$ en zo dat $|\varepsilon_2(x,y)|\le\frac12(|x|+|y|)$ op D. We definiëren R := verzameling van alle continue functies g (in $\mathbf{R}^m$), gedefinieerd op $\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|\le\alpha\}$, waarvoor geldt: $\|g\| := \sup\{|g(x)| \mid |x|\le\alpha\}\le\beta$. Definieer:

$$\forall_{g_1\in R}\ \forall_{g_2\in R}\ [d(g_1,g_2) := \|g_1-g_2\|].$$

Dan is (R,d) een volledige metrische ruimte (zie 5.10.31). We definiëren een afbeelding ϕ op R door

$$\phi(g)(x) := Ax+\varepsilon_2(x,g(x)).$$

Dan is

$$\|\phi(g)\| = \sup\{|Ax+\varepsilon_2(x,g(x))| \mid |x|\le\alpha\} \le$$
$$\le M|x|+\tfrac12|x|+\tfrac12|g(x)|\le(M+\tfrac12)\alpha+\tfrac12\beta\le\beta,$$

d.w.z. $\phi(g)\in R$. Bovendien geldt voor $g_1\in R$, $g_2\in R$.

$$\|\phi(g_1)-\phi(g_2)\| = \sup\{|\varepsilon_2(x,g_1(x))-\varepsilon_2(x,g_2(x))| \mid |x|\le\alpha\} \le$$
$$\le \tfrac12\|g_1-g_2\|,$$

d.w.z. $d(\phi(g_1),\phi(g_2))\le\frac12 d(g_1,g_2)$;
anders gezegd: ϕ is een contractie van R.
Volgens (5.2.17) is er één $f\in R$ zo dat $\phi(f)=f$, dus

$$(**)\qquad f(x) = Ax+\varepsilon_2(x,f(x)).$$

Dit betekent hetzelfde als

$$F(x,f(x)) = 0 \text{ als } x\in B_{x_0,\alpha}.$$

Daar

$$|f(0)| = |\varepsilon_2(0,f(0))|\le\tfrac12|f(0)|$$

is $f(0)=0$.
Uit (**) volgt

$$|f(x)|\le M|x|+\tfrac12(|x|+|f(x)|),$$

dus $|f(x)|=O(|x|)$ als $x\to0$. Dan is volgens (**)

$$f(x) = Ax+\varepsilon(x),$$

met $|\varepsilon(\mathbf{x})|=o(|\mathbf{x}|)$ als $|\mathbf{x}|\to 0$, met andere woorden: $\mathbf{f}$ is differentieerbaar in $\mathbf{0}$ met functionaaloperator A. Uit de definitie van A volgt de continuïteit van alle partiële afgeleiden. Hiermee is de stelling bewezen.

VOORBEELDEN

6.6.2. We beschouwen het triviale voorbeeld $F(x,y)=$ $=xy-x+y=0$ met als oplossing $y=x(1+x)^{-1}$. Neem $(x_0,y_0)=$ $=(0,0)$. Als we het bewijs van 6.6.1 nu nog eens helemaal nalopen, vinden we:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y-1, \text{ dus } A_1=-1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x+1, \text{ dus } A_2=1,\ J=1\neq 0,$$

$$A=1,\ \varepsilon_2(x,y) = -xy,\ M=1.$$

Als we $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=\frac{3}{5}$ nemen is aan de overige eisen voldaan. Voor $g\in R$ is nu $\phi(g)(x)=x-xg(x)$. De functie f construeren we op de manier van het bewijs van 5.2.17. Zij $g_1(x)=x$ en $\forall_{n\in\mathbf{N}}[g_{n+1}:=\phi(g_n)]$. Dan is f de limiet van de rij functies $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$. We vinden $g_n(x)=\frac{x}{1+x}\{1+(-1)^{n-1}x^n\}$, dus $f(x)=\frac{x}{1+x}$ hetgeen we al wisten.

6.6.3. Zij $F\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ een continu differentieerbare functie en (x_0,y_0,z_0) een oplossing van $F(x,y,z)=0$. In de notatie van 6.6.1 is $A_1=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})(x_0,y_0,z_0)$ en $A_2=\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$. Als $A_2\neq 0$ is er in een omgeving van (x_0,y_0) een functie f gedefinieerd met $f(x_0,y_0)=z_0$ en $F(x,y,f(x,y))=0$. Volgens 6.6.1 vinden we voor de functionaalmatrix in (x_0,y_0) nu $-A_2^{\leftarrow}A_1$, d.w.z. $-(\frac{\partial F}{\partial z})^{-1}(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})$. We kunnen dit ook vinden door op de identiteit $F(x,y,f(x,y))=0$ de kettingregel 6.5.10 toe te passen:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0).$$

6.6.4. Zij $\boldsymbol{\psi}\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ een continu differentieerbare functie en $\boldsymbol{\psi}(x_0,y_0)=(u_0,v_0)$. We willen weten of in een omgeving van (u_0,v_0) een inverse $\boldsymbol{\psi}^{\leftarrow}$ bestaat als we eisen dat de omgeving door $\boldsymbol{\psi}^{\leftarrow}$ wordt afgebeeld op een omgeving van (x_0,y_0). We willen dus (x,y) oplossen uit de vergelijking $\boldsymbol{\psi}(x,y)=(u,v)$ voor (u,v) in een omgeving van (u_0,v_0). Zij $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door $F_1(u,v;x,y):=u-\psi_1(x,y)$,

$F_2(u,v;x,y):=v-\psi_2(x,y)$. Dan is de functie $\boldsymbol{\psi}^{\leftarrow}$ indien hij bestaat impliciet gegeven door $\mathbf{F}(u,v;x,y)=(0,0)$. Volgens de notatie van 6.6.1 is

$$(u,v;x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_1(u,v;x,y),$$

en de stelling zegt dat $\boldsymbol{\psi}^{\leftarrow}$ in een omgeving van (u_0,v_0) bestaat en differentieerbaar is als de Jacobiaan van $\boldsymbol{\psi}$ in (x_0,y_0) niet 0 is.

6.6.5. OPMERKING. Als $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continu differentieerbaar is en als $F(x,y)=0$ niet expliciet op te lossen is dan is in een omgeving van de oplossing (x_0,y_0) de procedure van 6.6.1 een manier om numeriek een benaderde oplossing te vinden via de in 5.2.17 beschreven iteratie.

OPGAVEN

6.6.6. Zij $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gegeven door:

$$F_1(x;y,z) := x^2+y^2-z^2,$$

$$F_2(x;y,z) := x+y+z-1.$$

$F_1(x;y,z)=0$ is de vergelijking van een kegel in $\mathbf{R}^3$ en $F_2(x;y,z)=0$ is de vergelijking van een vlak. Bepaal de parametervoorstelling van de snijkromme en de vergelijking van de raaklijn aan deze kromme in $(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{5}{12})$. Zijn er punten waar (met de notatie van 6.6.1) geldt $J=0$?

6.6.7. Zij $g\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ gegeven door $g(z)=e^z$. Bepaal een afbeelding $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ gedefinieerd in een omgeving van 1 zo dat $f(g(z))=1$ in een omgeving van 0.

Nu we over stelling 6.6.1 beschikken kunnen we één van de zeer vaak voorkomende problemen uit de analyse bespreken namelijk het bepalen van extrema van functies met *nevenvoorwaarden*. We zullen eerst enkele eenvoudige voorbeelden beschouwen. Door $y-x^2=0$ is een parabool in $\mathbf{R}^2$ beschreven. Als we de afstand van het punt $(5,-1)$ tot deze parabool willen bepalen moeten we het minimum bepalen van de functie gegeven door $(x-5)^2+(y+1)^2$ (en dan hiervan de wortel nemen. Bij de bepaling van het minimum geldt echter de nevenvoorwaarde dat alleen punten (x,y) beschouwd worden met $y-x^2=0$. Daar deze vergelijking eenvoudig is op te lossen vinden we dat we van $(x-5)^2+(x^2+1)^2$ het minimum moeten zoeken. Dit minimum is 20 (en de gevraagde afstand dus $2\sqrt{5}$) voor $x=1$. We kunnen echter dit minimum ook vinden zonder y uit $y-x^2=0$ op te lossen. We proberen dan het getal λ zó te bepalen dat de door $(x-5)^2+(y+1)^2-\lambda(y-x^2)$ gegeven functie een minimum aanneemt in een punt (x_0,y_0) dat op de parabool ligt. Dan is ons probleem ook opgelost. Dit leidt tot de vergelijkingen

$$2x_0-10+2\lambda x_0 = 0,$$

$$2y_0+2-\lambda = 0,$$

$$y_0-x_0^2 = 0,$$

waaruit we vinden $x_0=y_0=1$, $\lambda=4$.
Beschouw nu, iets algemener, de vergelijking $F(x,y)=0$ en de functie f, waarin F en f continue partiële afgeleiden van de tweede orde hebben. Als $f-\lambda F$ in (x_0,y_0) extremaal is en $F(x_0,y_0)=0$ dan is (x_0,y_0) een punt waar f extremaal is onder de nevenvoorwaarde $F(x,y)=0$. Is omgekeerd (x_0,y_0) een punt met $F(x_0,y_0)=0$ en heeft f onder de nevenvoorwaarde $F(x,y)=0$ een extremum in (x_0,y_0) dan kunnen we te werk gaan als in het zojuist gegeven voorbeeld als grad F in (x_0,y_0) niet $\mathbf{0}$ is. Laat bijvoorbeeld $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ zijn. Dan is er een functie ϕ (volgens 6.6.1) gedefinieerd in een omgeving van x_0 zó dat $\phi(x_0)=y_0$ en $F(x,\phi(x))=0$. Dus geldt $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\phi'=0$ en omdat f in (x_0,y_0) extremaal is geldt $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\phi'=0$ in (x_0,y_0). Hieruit volgt dat $\det\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ f_x & f_y \end{pmatrix}=0$ in (x_0,y_0) en dus is er een getal λ zó dat $F_x+\lambda f_x$ èn $F_y+\lambda f_y$ in (x_0,y_0) beide 0 zijn, d.w.z. (x_0,y_0) is stationair punt van $F+\lambda f$.

Na deze lange inleiding zal hopelijk het bewijs van de stelling voor het algemene geval niet zó gecompliceerd lijken.

6.6.8. STELLING. *Zij* V *een gebied in* $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$. *We geven de punten van* V *aan met* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. *Laten* $f\colon V\to\mathbf{R}$ *en* $\mathbf{F}\colon V\to\mathbf{R}^n$ *functies zijn waarvan alle partiële afgeleiden continu zijn. We schrijven* $\mathbf{F}=(F_1,F_2,\ldots,F_n)$. *Zij* $W:=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in V \mid \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}\}$.

Neem aan dat $J := \dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}$ *op* V *niet* 0 *is.*

Zij $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in W$. *Dan geldt: Als* f, *beschouwd als functie op* W, *een extremum heeft in* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *dan zijn er getallen* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *zó dat* $f+\Sigma_{i=1}^n\lambda_i F_i$, *beschouwd* *als functie op* V, *in* $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ *een stationair punt heeft.*

Bewijs. (i) Als voor alle $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ uit een omgeving Ω van $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ in V geldt $f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq f(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)+$ $+\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ dan is voor alle $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ uit $\Omega\cap W$ ook $f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq f(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ waarmee is aangetoond dat de voorwaarde voldoende is.

(ii) Laat f in $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ een extremum hebben onder de nevenvoorwaarden $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$. Daar $J\neq 0$ is, is er volgens stelling 6.6.1 een omgeving Ω van $\mathbf{x}_0$ in $\mathbf{R}^m$ en een functie $\boldsymbol{\phi}$ op Ω zó dat $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{y}_0$ en $\mathbf{F}(\mathbf{x},\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}))=\mathbf{0}$ op Ω. Dus geldt op Ω ook:

$$(*)\quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_j}=0\quad (j=1,2,\ldots,m;\ i=1,2,\ldots,n).$$

Daar f extremaal is in $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ geldt in dit punt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\cdot\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_j}=0\quad (j=1,2,\ldots,m).$$

Daar $\dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\neq 0$ heeft volgens 3.16.12 het stelsel $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial F_i}{\partial y_\nu}A_i=-\dfrac{\partial f}{\partial y_\nu}$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ een oplossing $A_1,A_2,\ldots,A_n$ (functies gedefinieerd op Ω). Nu vermenigvuldigen we beide leden van $(*)$ met A_i en sommeren over i. Als we nu ook nog definiëren $\lambda_i:=A_i(\mathbf{x}_0)$ en in deze som $\mathbf{x}_0$ invullen is het resultaat:
$\dfrac{\partial}{\partial x_j}(f+\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i)$ is 0 voor $j=1,2,\ldots,m$ in het punt $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$. Hiermee is het gestelde bewezen.

6.6.9. VOORBEELD. Zij $f(x,y,z):=2x+3y+z$. We beschouwen de functie op de cirkel in $\mathbf{R}^3$ bepaald door $x^2+y^2+z^2=5$ en $x-y+z=1$. Volgens 6.6.8 vinden we de extrema van f door op te lossen:

$$\begin{cases} 2+2\lambda_1 x+\lambda_2=0,\\ 3+2\lambda_1 y-\lambda_2=0,\\ 1+2\lambda_1 z+\lambda_2=0,\\ x^2+y^2+z^2=5,\\ x-y+z=1.\end{cases}$$

We vinden de punten $(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}-\sqrt{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}+\sqrt{3}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3})$. Daar we weten dat f een maximum en minimum aanneemt (waarom?) is het probleem opgelost. Merk op dat de waarden van λ_1 en λ_2 ons niet interesseren.

Het zoeken van extrema van een functie met nevenvoorwaarden met behulp van 6.6.8 heet de *multiplicatorenmethode van Lagrange*; de hulpvariabelen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ heten de multiplicatoren.

6.6.10. OPGAVE. Bepaal de afstand van het punt (2,3,4) tot de ellipsoïde met vergelijking $x^2+2y^2+3z^2=6$.

6.7. Differentieerbare complexe functies

Is f een afbeelding van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ dan is f te schrijven als u+iv waarbij u en v afbeeldingen van $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ zijn. Evenals in 6.2.1 en 6.2.2 is te definiëren wanneer we f differentieerbaar zullen noemen. Het komt er op neer dat u en v differentieerbaar zijn en f'=u'+iv'.
We zullen het begrip differentieerbaarheid nu ook voor afbeeldingen van $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$ invoeren. De definitie is een uitbreiding van 6.2.2. We wijzen er bij voorbaat op dat in 6.7.1 meer geëist wordt dan in 6.5.6 voor afbeeldingen van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ nl. behalve het bestaan van A ook nog dat A de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ heeft. (Ga dit na, na lezing van 6.7.1).

6.7.1. DEFINITIE. *Zij* Ω *een omgeving van* $a\in\mathbf{C}$ *en* $f\colon \Omega\to\mathbf{C}$. *We noemen* f *differentieerbaar in* a *als er een getal* $\alpha\in\mathbf{C}$ *is zo dat* $f(a+h)=f(a)+\alpha h+o(|h|)$, $(h\to 0)$.
We noemen α *de afgeleide van* f *in* a *en schrijven* $\alpha=:f'(a)$.

Nu geldt stelling 6.2.3 ook voor complexe functies (zelfde bewijs!). Evenals in 6.2.4 noemen we een functie f die differentieerbaar is in elk punt van een verzameling V weer differentieerbaar op V en noemen f' de *afgeleide* van f. Een functie f die op een gebied G differentieerbaar is noemt men ook *holomorf* op G, of *regulier* op G en ook *analytisch* op G. We gebruiken deze woorden door elkaar. Als we alleen over differentieerbaarheid in één punt spreken zullen we slechts het woord "differentieerbaar" gebruiken.

6.7.2. DEFINITIE. *Een functie* $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ *heet analytisch in het punt* a *als er een omgeving* Ω *van* a *is zo dat* f *differentieerbaar is in ieder punt van* Ω. *Een functie heet analytisch op een kromme* K *als* f *analytisch is in ieder punt van* K.

VOORBEELDEN

6.7.3. Zij $f(z):=z^n$ waarbij $n\in\mathbf{N}$. Dan is volgens 1.27.12

$$(z+h)^n = z^n+nz^{n-1}h+h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2}z^{n-k}.$$

De som in het rechterlid is bij vaste z een continue functie van h die in h=0 de waarde $\binom{n}{2}z^{n-2}$ heeft. Dus geldt

$$(z+h)^n = z^n+nz^{n-1}h+O(|h|^2),\ (h\to 0)$$
$$= z^n+nz^{n-1}h+o(|h|),\ (h\to 0).$$

Hiermee is aangetoond dat f differentieerbaar is op **C** met afgeleide f' gegeven door $f'(z):=nz^{n-1}$ (zie 6.3.5 c).

6.7.4. Zij $f(z):=e^z$ op **C**. We tonen nu aan dat f op **C** analytisch is met afgeleide f'=f (zie 6.3.5 a). Volgens 4.4.9 geldt

$$e^{z+h} = e^z+he^z+e^z(e^h-1-h).$$

Schrijf $h=\xi+i\eta$. Volgens 6.4.16 en 6.4.17 geldt

$$e^h-1-h = e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta)-1-(\xi+i\eta) =$$
$$= i\xi\eta+O(\xi^2)+O(\eta^2) = O(\xi^2+\eta^2) =$$
$$= O(|h|^2),\ (|h|\to 0).$$

Dus is $e^{z+h}=e^z+he^z+o(|h|),\ (|h|\to 0)$.

6.7.5. OPGAVE. Bewijs dat de stellingen 6.3.1, 6.3.2 en 6.3.3 ook gelden voor differentieerbare complexe functies.

Beschouw een complexe functie f gedefinieerd in een omgeving Ω van $a\in\mathbf{C}$. We kunnen dit ook opvatten als een afbeelding f van $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$; (als we punten in Ω aangeven met $z=x+iy$ en $f(z)=u+iv$ schrijven dan zijn u en v functies van x en y). Als f differentieerbaar is in $a=x_0+iy_0$ dan is volgens 6.7.1, als we $f'(a)=\xi+i\eta$ schrijven en h+ik i.p.v. h:

$$\begin{pmatrix} u(x_0+h,y_0+k) \\ v(x_0+h,y_0+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o((h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}),$$
$$((h,k)\to(0,0)).$$

Dit betekent dat **f** in (x_0,y_0) differentieerbaar is met functionaalmatrix $\begin{pmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{pmatrix}$.

Hiermee is bewezen:

6.7.6. STELLING. *Zij* f *differentieerbaar in* $a=x_0+iy_0$ *en* $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ *dan is in* (x_0,y_0)

(i) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $(= \operatorname{Re} f'(a))$,

(ii) $\qquad -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ $(= \operatorname{Im} f'(a))$.

Men noemt (i) en (ii) de *differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann.* Merk op dat de Jacobiaan van f (in bovenstaande notatie) gelijk is aan $\xi^2+\eta^2=|f'(a)|^2$. Is omgekeerd aan 6.7.6 (i) en (ii) voldaan in een gebied G en zijn $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ in G continu dan is volgens 6.5.16 f differentieerbaar op G en op grond van (i) en (ii) is zelfs f differentieerbaar op G (als complexe functie van z). Immers de functionaaloperator is dan een vermenigvuldiging met het complexe getal $f'(z)$.

OPGAVEN

6.7.7. Zij $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ een analytische functie en (als $z=x+iy$) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2$. Verder zij $f(0)=i$. Bepaal f.

6.7.8. Zij $f(z):=\bar{z}$ voor $z\in\mathbf{C}$. Bewijs dat f niet differentieerbaar is. Laat zien dat f, opgevat als vectorfunctie van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ wel differentieerbaar is!

6.7.9. Zij $f(z):=z^2$ voor $z\in\mathbf{C}$. Beschouw de krommen $K_a:=\{f(z) \mid \operatorname{Re} z=a\}$ en $L_b:=\{f(z) \mid \operatorname{Im} z=b\}$. Bepaal de hoek die de raaklijnen in $(a+ib)^2$ aan K_a resp. L_b met elkaar maken.

6.7.10. Zij $V:=\{z=x+iy\in\mathbf{C} \mid x>0\}$. We definiëren een functie f op V door $f:=u+iv$ met $u(x,y) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

$$v(x,y) := \arctan(yx^{-1}).$$

Bewijs dat f een reguliere functie is op V en bepaal $f'(z)$.

We zullen in hoofdstuk 8 (zie 8.3.21) bewijzen dat als f in een gebied G differentieerbaar is ook f' differentieerbaar is. Hieruit volgt dat (als we weer $f=u+iv$ schrijven) u en v twee keer (zelfs willekeurig vaak) continu differentieerbaar zijn. Volgens 6.5.5 is dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ en $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ op G. Met 6.7.6 volgt hier tenslotte uit:

6.7.11. STELLING. *Als* G *een gebied in* $\mathbf{C}$ *is*, $f\colon G\to\mathbf{C}$ *holomorf op* G *en* $f=u+iv$ *dan is op* G:

(i) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

(ii) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Een functie $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ waarvoor $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ heet een *harmonische* functie. In 6.7.11 staat dus: het reële en het imaginaire deel van een analytische functie zijn harmonische functies.

6.8. Machtreeksen

In voorbeeld 6.4.16 hebben we gezien dat e^x is te ontwikkelen in een *machtreeks*, dat is een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ waarin voor iedere n de term $u_n(x)$ de vorm $a_n(x-a)^n$ heeft met $a_n\in\mathbf{C}$, $a\in\mathbf{C}$. We zullen nu onderzoeken voor welke functies dit ook kan en algemene eigenschappen van machtreeksen bekijken. We beperken ons eerst tot reële functies gedefinieerd op $\mathbf{R}$.

6.8.1. STELLING. *Zij* f *gedefinieerd op* $\Omega:=(a-\ell,a+\ell)$ *en* f *oneindig vaak differentieerbaar op* Ω. *Zij* $0<\rho<\ell$ *en*

$$M^{(n)}(a,\rho) := \max\{|f^{(n)}(x)|\mid |x-a|\le\rho\}.$$

Als $\rho^n M^{(n)}(a,\rho)/n!\to 0$ *voor* $n\to\infty$ *dan is de reeks*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

uniform convergent op $[a-\rho,a+\rho]$ *met som* $f(x)$.

Bewijs. Volgens 6.4.15 is er een c tussen a en x zo dat $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|=\left|\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)\right|\le\frac{\rho^n}{n!}M^{(n)}(a,\rho)$ voor $|x-a|\le\rho$. Hieruit volgt het gestelde.

Men noemt $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ de *Taylorreeksontwikkeling* van f rond a (ontwikkeling naar machten van x-a). Het speciale geval a=0 wordt ook wel reeks van *Maclaurin* genoemd.

VOORBEELDEN

6.8.2. Zij $f(x) := \sin x$ voor $x\in\mathbf{R}$. Dan is $f^{(2n)}(0)=0$ en $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$. Daar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho^n}{n!} = 0$ voor alle $\rho\in\mathbf{R}$ is

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x\in\mathbf{R}).$$

Deze reeks is uniform convergent op $[-\rho,\rho]$ voor iedere $\rho\in\mathbf{R}$ maar niet uniform convergent op $\mathbf{R}$.

6.8.3. Voor cos x vinden we op precies dezelfde manier

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x\in\mathbf{R}).$$

6.8.4. Zij $f(x):=(1+x)^a$ voor $|x|<1$ en zij $k\in\mathbf{N}$ zo dat $|a|\le k$.

Daar $\left|\binom{a}{n}\right| = \left|\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\right| \le \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} =$

$$= \frac{1}{(k-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)<(n+k)^k$$

geldt voor $\rho<\frac{1}{2}$ volgens 6.3.12

$\frac{\rho^n}{n!}M^{(n)}(0,\rho)<(n+k)^k(1-\rho)^{-k}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^n\to 0$ als $n\to\infty$.

Volgens 6.8.1 is dus, voor $|x|<\frac{1}{2}$, $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k$.

We zullen in 6.8.14 aantonen dat deze ontwikkeling zelfs voor $|x|<1$ geldt.

6.8.5. Zij $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(0):=0$, $f(x):=e^{-x^{-2}}$ voor $x\neq 0$. Dan is $f'(x)=2x^{-3}e^{-x^{-2}}$ voor $x\neq 0$ en $f'(0)=$ $= \lim\limits_{h\to 0} h^{-1}e^{-h^{-2}} = \lim\limits_{y\to\infty} y^{\frac{1}{2}}e^{-y} = 0$. We tonen nu met volledige inductie aan dat f oneindig vaak differentieerbaar is en wel $f^{(n)}(x)=p_{3n}(x^{-1})e^{-x^{-2}}$ voor $x\neq 0$, waarin p_{3n} een polynoom van de graad 3n is, en $f^{(n)}(0)=0$.

Voor n=1 hebben we dit al bewezen. Uit de juistheid voor n volgt

$$f^{(n+1)}(x) = -x^{-2}p'_{3n}(x^{-1})e^{-x^{-2}}+2x^{-3}p_{3n}(x^{-1})e^{-x^{-2}} =$$

$$=: p_{3n+3}(x^{-1})e^{-x^{-2}} \quad \text{voor } x\neq 0$$

en

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} h^{-1}p_{3n}(h^{-1})e^{-h^{-2}} = \lim_{y\to\infty} y^{\frac{1}{2}}p_{3n}(y^{\frac{1}{2}})e^{-y} = 0$$

(zie 6.1.9 b).
De in 6.8.1 genoemde Taylorreeks van f is convergent voor alle x (immers $f^{(n)}(0)=0$ voor alle n) maar de som van de reeks is niet gelijk aan f(x) behalve voor x=0.

We beschouwen nu machtreeksen in het algemeen en wel met machten van z waarbij $z\in\mathbf{C}$.

6.8.6. STELLING. *Zij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij complexe getallen en* $\ell := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. *Zij* $R:=\ell^{-1}$ *als* $0<\ell<\infty$, $R:=0$ *als* $\ell=\infty$, $R:=\infty$ *als* $\ell=0$. *Als* $0\le\rho<R$ *dan is de reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *absoluut en uniform convergent op* $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\le\rho\}$ *en divergent op* $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|>R\}$.

Bewijs. (i) Als $\ell=\infty$ en $|z|\neq 0$ dan is $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|}=\infty$ en dan is volgens (4.3.12) de reeks divergent. Als $\ell=\infty$ is de reeks alleen voor z=0 convergent.
(ii) Als $|z|>R$ is $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|}=|z|\ell>1$ en dus is de reeks divergent.
(iii) Kies r zó dat $\ell<r^{-1}<\rho^{-1}$. Dan is er volgens 4.1.10 een N zo dat voor n>N geldt $\sqrt[n]{|a_n|}<r^{-1}$, dus $|a_n z^n|<(\rho/r)^n$ als $|z|\le\rho$. Het gestelde volgt nu uit 5.6.10.

We zien dus dat een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergeert (a) alleen in z=0 ŏf (b) voor alle z ŏf (c) binnen een cirkel en op een deelverzameling (soms $\emptyset$) van de rand van die cirkel. Men noemt dit de *convergentiecirkel* en R de *convergentiestraal*.

6.8.7. VOORBEELD. Beschouw de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n$. Daar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-1}} = 1 = \ell$ (4.5.12) is $\ell^{-1}=R=1$. De reeks is convergent voor $|z|<1$, divergent voor $|z|>1$. Voor z=1 is de reeks divergent (4.3.10). We zullen nu aantonen dat de reeks convergeert op $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\le 1, z\neq 1\}$. Als $|z|=1$, $z\neq 1$ is $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ een reeks met begrensde partiële sommen en $(n^{-1})_{n\in\mathbf{N}}$ een rij die monotoon daalt met limiet 0.

Volgens de stelling van Dirichlet (4.5.26) is $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n$ dan convergent.

6.8.8. OPGAVE. Bepaal de convergentiestraal en het gedrag op de convergentiecirkel van de volgende reeksen:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}z^n,$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\cosh n)z^n.$$

Een van de onuitroeibare misvattingen waar wij (hoewel we weinig succes verwachten) op wijzen is het idee dat een machtreeks uniform convergeert binnen de convergentiecirkel. In 5.10.28 is al een tegenvoorbeeld gegeven.
Als dit wel zo was dan zou de invoering van ρ in 6.8.6 overbodig geweest zijn! Desondanks kunnen we op grond van 5.6.11 concluderen dat de som van een machtreeks binnen de convergentiecirkel continu is. Is immers $|z|<R$ dan is er een ρ met $|z|<\rho<R$ en volgens 6.8.6 is aan de voorwaarden van 5.6.11 voldaan.
Het is wel zo dat als een machtreeks convergeert in een punt z_0 op de convergentiecirkel de reeks uniform convergeert op $\{tz_0 \mid 0\le t\le 1\}$ zoals uit de volgende stelling blijkt.

6.8.9. STELLING (Abel). *Zij* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een rij complexe getallen waarvoor* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergeert. Dan is* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *uniform convergent op* $[0,1]$.

Bewijs. Zij $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Zij $\varepsilon>0$. Kies N zo groot dat voor $n>N$ geldt $|s_n-s_N|<\frac{\varepsilon}{3}$. Zij $\sigma_n:=s_n-s_N$ voor $n\ge N$.
We passen nu de sommatiemethode van Abel toe (4.5.25).
Met $\ell\ge k\ge 1$ is:

$$\left|\sum_{n=N+k}^{N+\ell} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=N+k}^{N+\ell} (\sigma_n-\sigma_{n-1})x^n\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=N+k}^{N+\ell} \sigma_n(x^n-x^{n+1})+\sigma_{N+\ell}x^{N+\ell+1}-\sigma_{N+k-1}x^{N+k}\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3}\sum_{n=N+k}^{N+\ell}(x^n-x^{n+1}) + \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}(x^{N+k}-x^{N+\ell+1}+2)<\varepsilon.$$

Het gestelde volgt nu uit 5.6.9.

We hebben in 5.10.30 reeds een voorbeeld gezien.

6.8.10. OPGAVE. Zij $V:=\{z=x+iy \mid 0\le x\le 1,\ |y|\le \frac{1}{2}(1-x)\}$. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ uniform convergent op V. Bewijs dit.

We hebben al opgemerkt dat een machtreeks binnen de convergentiecirkel een continue functie voorstelt. We tonen nu aan dat de somfunctie zelfs holomorf is binnen de convergentiecirkel.

6.8.11. STELLING. *Zij* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *convergent met som* $f(z)$ *voor* $|z|<R$. *Dan is* f *holomorf op* $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R\}$ *en* $f'(z)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$.

Bewijs. Daar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ hebben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n$ dezelfde convergentiestraal en dus is ook $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ convergent voor $|z|<R$. Noem de som $g(z)$. Evenals in 6.7.3 en 6.7.4 proberen we nu aan te tonen dat $f(z+h)=$ $=f(z)+hg(z)+O(|h|^2)$, $(h\to 0)$. Volgens 6.7.1 is het gestelde dan bewezen. Zij $|z|<R$. Kies ρ zo klein dat $\rho_1:=|z|+\rho<R$. Voor $|h|\le\rho$ geldt

$$|f(z+h)-f(z)-hg(z)| = \Big|\sum_{n=2}^{\infty}\Big(a_n \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k}\Big)\Big| \le$$

$$\le |h|^2 \sum_{n=2}^{\infty}\Big(|a_n| \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\rho^{k-2}|z|^{n-k}\Big) \le$$

$$\le |h|^2\rho^{-2} \sum_{n=0}^{\infty}\Big(|a_n| \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\rho^{k}|z|^{n-k}\Big) =$$

$$= |h|^2\rho^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho_1^n = O(|h|^2),\ (h\to 0)$$

omdat $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\rho_1^n$ volgens 6.8.6 een convergente reeks is.

We zien dus dat de som van een machtreeks binnen de convergentiecirkel een oneindig vaak differentieerbare functie is!

VOORBEELDEN

6.8.12. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ is convergent voor $|z|<1$ (zelfs voor $|z|\le 1$, $z\ne -1$). Voor de somfunctie f geldt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = (1+z)^{-1}$. Als $x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$ dan is door $g(x) := \log(1+x)$ een differentieerbare functie g gegeven met $g'(x)=(1+x)^{-1}$ en dus is $f-g$ op $(-1,1)$ differentieerbaar met afgeleide 0. Volgens 6.4.3 is $f(x)=g(x)$ op $(-1,1)$, d.w.z. $f(x) = \log(1+x)$. Dus

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \text{ voor } x\in(-1,1).$$

6.8.13. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}$ is convergent voor $|z|<1$.
Voor de somfunctie f geldt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{2n-2} = (1+z^2)^{-1}$. Daar $(\arctan x)'=(1+x^2)^{-1}$ vinden we precies als in 6.8.12 $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ voor $x\in(-1,1)$.

6.8.14. De in 6.8.4 behandelde machtreeks $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}z^k$ heeft convergentiestraal ≥ 1. Laat $f(z)$ de som zijn. Dan is $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}k\binom{a}{k}z^{k-1}$. Dus is

$$(1+z)f'(z) = a + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{k\binom{a}{k}+(k-1)\binom{a}{k-1}\right\}z^{k-1} =$$

$$= a\sum_{k=1}^{\infty}\binom{a}{k-1}z^{k-1} = af(z).$$

Voor $-1<x<1$ volgt hieruit:

$$[(1+x)^{-a}f(x)]' = -a(1+x)^{-a-1}f(x)+(1+x)^{-a}f'(x) =$$

$$= (1+x)^{-a-1}(-af(x)+af(x)) = 0,$$

d.w.z. $(1+x)^{-a}f(x)$ is constant. We wisten al dat deze functie voor $|x|<\frac{1}{2}$ constant 1 was, dus geldt dit op $(-1,1)$.

In hoofdstuk 4 is de functie e^z ingevoerd met behulp van de sinus en de cosinus die met meetkundige hulpmiddelen waren gedefinieerd. We tonen nu aan dat dit vermeden kan worden. Volgens 6.8.6 en 4.5.9 heeft de reeks

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ convergentiestraal ∞. De somfunctie noemen we $\exp(z)$. Deze functie is holomorf op $\mathbf{C}$ en volgens 6.8.11 geldt $(\exp(z))' = \exp(z)$. Als f holomorf is op $\mathbf{C}$ en $f'=f$ dan geldt $[\exp(-z)f(z)]'=0$, dus $f(z)=f(0)\{\exp(-z)\}^{-1}$. Daar $[\exp(z+a)]' = \exp(z+a)$ is nu bewezen dat $\forall_{z_1\in\mathbf{C}}\ \forall_{z_2\in\mathbf{C}}\ [\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)]$ en dat $\forall_{z\in\mathbf{C}}\ [\exp(z)\neq 0]$. We hadden, op grond van 6.4.16 de exponentiële functie dus kunnen definiëren m.b.v. de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. De eigenschappen die we in 4.3.27 en 4.3.30 van e^z hebben bewezen tonen (met bovenstaande) aan dat $e^z = \exp(z)$ voor alle $z\in\mathbf{C}$. Na invoering van e^z langs deze weg kan men via 4.4.8 de sinus en cosinus definiëren waarna alle bekende eigenschappen volgen zonder de meetkundige interpretatie van sinus en cosinus te gebruiken. Men definieert dan ook $e := \exp(1)$ en $\pi := \min\{x\in\mathbf{R} \mid (x>0)\wedge(\sin x = 0)\}$.
We bewijzen nog het analogon van 4.3.29:

6.8.15. STELLING. *Voor* $z\in\mathbf{C}$ *geldt* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = \exp(z)$.

Bewijs. Bij vaste z en $\varepsilon>0$ is er een N zo dat voor $n>N$ geldt $\sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k/k! < \frac{\varepsilon}{3}$ en daar $\binom{n}{k}n^{-k} < \frac{1}{k!}$ ook $\sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{n}{k}\left|\frac{z}{n}\right|^k < \frac{\varepsilon}{3}$.
Nu is voor $n>N$:

$$\left|(1+\tfrac{z}{n})^n - \exp(z)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{N}\{\binom{n}{k}n^{-k} - \tfrac{1}{k!}\}z^k\right| + \sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\left|\tfrac{z}{n}\right|^k + \\ + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.$$

Daar $\lim\limits_{n\to\infty}\{\binom{n}{k}n^{-k} - \frac{1}{k!}\} = 0$ is er een N_1 zó dat voor $n>N_1$ geldt

$\left|\sum_{k=0}^{N}\{\binom{n}{k}n^{-k} - \frac{1}{k!}\}z^k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, d.w.z. voor $n\ge\max\{N,N_1\}$ geldt

$\left|(1+\frac{z}{n})^n - \exp(z)\right| < \varepsilon$ waarmee het gestelde bewezen is.

6.9. Opgaven over hoofdstuk 6

6.9.1. Bewijs dat $\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)^k = O(x^{-k})$ voor $x\in(1,\infty)$ uniform in k op $(0,\infty)$.

6.9.2. Bewijs dat $\frac{k^2}{1+kx^2} = O(x^{-1})$, $(x\to\infty)$, maar niet uniform in k op $(0,\infty)$.

6.9.3. Bewijs dat $e^{o(|x|)} = 1+o(|x|)$, $(x\to 0)$.

6.9.4. Zij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij reële getallen waarvoor geldt $a_n = O(1)$.
Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = O(\frac{1}{1-x})$ op $[0,1)$.

6.9.5. Zij $f(x) := x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ voor $x\in[-1,1]$.
Bewijs dat f in 1 links-differentieerbaar is.

6.9.6. Zij $f(x) := x^2\sin(x^{-1})$ voor $x\neq 0$, $f(0):=0$. Bewijs dat f differentieerbaar is.

6.9.7. Zij $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door
$f(x):=0$ als $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\cup\{0\}$,
$f(x):=q^{-2}$ als $x\in\mathbf{R}$, $x=pq^{-1}$ met $(p,q)=1$, $(q>0)$.
Bewijs dat f differentieerbaar is in 0.

6.9.8. Zij $f\in C^1([0,1])$. Bewijs dat
$\alpha := \inf\{\frac{f(x)-f(0)}{x} \mid x\in(0,1]\}$ bestaat en dat er een punt $c\in[0,1]$ is waar $f'(c)=\alpha$. (Als $c=0$ is de rechter-afgeleide bedoeld.) Wat is de meetkundige betekenis van deze uitspraak?

6.9.9. Definieer $\forall_{x\in\mathbf{R}}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [P_n(x) := \frac{1}{2^n\cdot n!} D^n\{(x^2-1)^n\}]$.
Men noemt P_n het n-de *polynoom van Legendre*.
(i) Bewijs dat P_n de graad n heeft en n verschillende nulpunten heeft die tussen -1 en 1 liggen.
(ii) Bewijs dat
$\forall_{n\in\mathbf{N}}\ \forall_{x\in\mathbf{R}}\ [(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0]$.
(Dit heet de *differentiaalvergelijking van Legendre*.)

6.9.10. Schets de grafieken van de volgende functies:

(a) $f(x) := x^2 \log x$ voor $x>0$, $f(0):=0$.

(b) $g(x) := x^x$ voor $x>0$, $g(0):=0$.

6.9.11. Bepaal $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

6.9.12. Als $f\in C^1([a,b])$ dan is f te schrijven als het verschil van twee monotone functies. Bewijs dit.

6.9.13. Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b).
Als $\lim\limits_{x\downarrow a} f'(x) = \ell$ dan is f in a rechts-differentieerbaar met rechterafgeleide ℓ. Bewijs dit.

6.9.14. Zij P een polynoom. Als $P(a)=P'(a)=0$ dan is er een polynoom Q zo dat $P(x)=(x-a)^2Q(x)$. Bewijs dit.

6.9.15. Bewijs dat $\arctan x \le \frac{x^2+\log(1+x^2)}{2x}$ voor $x>0$.

6.9.16. Zij $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x) := \frac{1}{2}\cos x + \log(1+x^2)$. Bewijs dat f een contractie is.

6.9.17. Laten f en g reële functies zijn, gedefinieerd op $\mathbf{R}$ met

(i) $\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[g(x)=x]$,

(ii) f is differentieerbaar en $\exists_{M>0}\,\forall_{x\in\mathbf{R}}\,[|f'(x)|<M]$.

Bewijs dat $\exists_{m>0}\,\forall_{\delta\in\mathbf{R}}\,[(|\delta|<m)\Rightarrow(g+\delta f \text{ is een-eenduidig})]$.

6.9.18. Zij $f\in C^2([-1,1])$, $f''(0)=1$. Bewijs dat er een $\delta>0$ is zo dat er bij iedere $x\in(0,\delta]$ precies één y is met $0<y<x$ en $f'(y)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Bepaal dan $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}y$.

6.9.19. Zij $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ (totaal-)differentieerbaar. Bewijs dat er op het verbindingslijnstuk van de punten (a,b) en $(a+h,b+k)$ een punt (c,d) ligt zo dat

$f(a+h,b+k)-f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(c,d)+k\frac{\partial f}{\partial y}(c,d)$,

(gemiddelde theorema voor 2 variabelen).

6.9.20. Zij f gedefinieerd in een omgeving van (0,0) in $\mathbf{R}^2$ door $f(x,y):=(1+xy)^{-1}\sin(xe^y)$. Bewijs dat

$$f(x,y) = x+xy-x^2y+\tfrac{1}{2}xy^2-\frac{1}{6}x^3+O(|(x,y)|^4),\ (|(x,y)|\to 0).$$

6.9.21. Zij $V:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2\}$.
Zij $f\colon V\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y):=x^3+y^3-3xy$.
Bepaal maximum en minimum van f.

6.9.22. Definieer $f\colon \mathbf{R}^{n^2}\to\mathbf{R}$ door $f(\mathbf{x}) := \det(a_{ij})$ waarin $a_{ij}:=x_{i(n-1)+j}$ $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n)$. Bewijs dat $\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ de minor van a_{ij} is.

6.9.23. We definiëren als in 6.7.10 een afbeelding $\mathbf{f}\colon \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0\}\to\mathbf{R}^2$ door $\mathbf{f}:=(u,v)$ met $u := \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ en $v := \arctan(yx^{-1})$. Zij $\mathbf{g}\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door $\mathbf{g}=(\xi,\eta)$ met $\xi = e^u\cos v$, $\eta = e^u\sin v$.
Bepaal de functionaalmatrix van de samengestelde functie $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$. Wat kunt U uit Uw antwoord concluderen?

6.9.24. Zij $V:=\{z\in\mathbf{C} \mid |z|\leq 1\}$ en $f\colon V\to\mathbf{C}$ gedefinieerd door $f(z):=z^2+1$.

(a) Bepaal z_0 zo dat $f'(z_0)=0$.

(b) Bepaal het maximum van $|f(z)|$ op V en het minimum van $|f(z)|$ op V.

6.9.25. Zij $V:=\mathbf{C}\setminus\{-3\}$ en $f\colon V\to\mathbf{C}$ gedefinieerd door $f(z):=(2z+1)(z+3)^{-1}$.

(a) Is f holomorf op V?

(b) Als K een cirkel in V is dan is f(K) een cirkel. Bewijs dit.

6.9.26. Bewijs dat

(i) $(0<x) \Rightarrow (\sin x < x)$,

(ii) $(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\sin x \geq 2x/\pi)$,

(iii) $(0<x<\frac{\pi}{2}) \Rightarrow (x < \tan x)$,

(iv) $(0<x) \Rightarrow (\cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2)$,

(v) $(0<x) \Rightarrow (\sin x > x - \frac{1}{6}x^3)$.

6.9.27. Bewijs dat

(i) $(0<x<1) \Rightarrow (e^{2x} < \frac{1+x}{1-x})$,

(ii) $(0<x<\frac{\pi}{2}) \Rightarrow (e^{-x^2} > (\cos x)^2)$.

6.9.28. *Stelling van Tauber.* Zij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij reële getallen met $a_n=o(n^{-1})$, $(n\to\infty)$.

(i) Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ convergeert voor $|x|<1$.

(ii) Als $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ voor $|x|<1$ en $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = a$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$.

6.9.29. Zij $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ waarbij beide reeksen voor $|z|<1$ convergeren. Definieer $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergeert voor $|z|<1$ met som $f(z)g(z)$.

6.9.30. Zij $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ waarin $a_0:=1$ en de convergentiestraal van de machtreeks 1. Definieer de rij $b_0, b_1, b_2, \ldots$ door $b_0:=1$ en $\forall_{n\in\mathbf{N}} [\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=0]$.
Zij $C := 1 + \sup\{ \sqrt[n]{|a_n|} \mid n\in\mathbf{N}\}$. Dan is $C\geq 2$.

(i) Bewijs dat $\forall_{n\in\mathbf{N}} [|b_n|\leq C^{2n}]$.

(ii) Bewijs m.b.v. 6.9.29 dat $\{f(z)\}^{-1}$ te ontwikkelen is in een machtreeks met positieve convergentiestraal.

7 Integraalrekening

7.1. De onbepaalde integraal

In 6.2.1 en 6.2.4 is een afbeelding D gedefinieerd van de verzameling van alle op V differentieerbare reële functies in de verzameling reële functies op V (voor de triviale uitbreiding tot complexe functies zie § 6.7). In de verzameling van differentieerbare functies op V definiëren we een equivalentie ~ door:

$$f \sim g \;:\Leftrightarrow\; \exists_{c\in\mathbf{R}}\, \forall_{x\in V}\, [f(x)=g(x)+c].$$

Volgens 6.4.3 en 6.3.1 is D dan een 1-1 afbeelding van de verzameling equivalentieklassen in de reële functies (ga dit na!). Voor sommige reële functies f op V is dan $D^{\leftarrow}(\{f\})$ een niet lege verzameling, te weten één van de zojuist genoemde equivalentieklassen. Een representant van deze klasse geven we aan door $D^{-1}f$ of door het symbool $\int f(x)dx$. Om historische redenen wordt dit laatste symbool (een ongelukkige notatie!) meestal gebruikt. Recapitulerend:

7.1.1. DEFINITIE. *Met* $\int f(x)dx$ *geven we een functie aan waarvoor geldt* $(\int f(x)dx)'=f$.

We noemen $\int f(x)dx$ *een onbepaalde integraal* van de functie f; $\int f(x)dx$ wordt ook wel *een primitieve functie* van f genoemd. Daar het nu eenmaal gewoonte is zullen we bij het gebruik van dit symbool een functie f aangeven door in plaats van f te schrijven f(x). Bijvoorbeeld:

(a) $\int x dx = \frac{1}{2}x^2$,

(b) $\int \sin x\, dx = 3 - \cos x$.

(c) Als $g(x) = \int f(x)dx$ dan is $\{g+C \mid C\in\mathbf{R}\}$ de verzameling van alle reële functies met afgeleide f.

Sommige auteurs gebruiken tegenwoordig de notatie $\int f(x)dx$ i.p.v. $D^{\leftarrow}(\{f\})$. Dit gebruik is nogal slordig daar $D^{\leftarrow}(\{f\})$ een verzameling is, terwijl met $\int f(x)dx$ een representant van deze verzameling wordt aangegeven. We zullen echter weldra zien dat het aanhangsel "dx" enig voordeel heeft. Het bepalen van $\int f(x)dx$ bij gegeven f heet *integreren*. We waarschuwen de lezer die reeds iets over integraalrekening heeft gelezen dat de meeste auteurs een andere afspraak maken en wel als volgt: de schrijfwijze $\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$ is te lezen als "als $f'(x)=x$ dan is er een $C\in\mathbb{R}$ zó dat $f(x)=\frac{1}{2}x^2+C$". Daar wij over equivalentieklassen spreken is de constante C overbodig. Beide afspraken maken het mogelijk vergissingen te maken!
Daar integreren de inverse operatie van differentiëren is zijn in hoofdstuk 6 reeds vele stellingen over het integreren bewezen die we nu slechts in de nieuwe notatie behoeven op te schrijven. Bijvoorbeeld:

7.1.2. STELLING. *Als* $\int f(x)dx$ *en* $\int g(x)dx$ *bestaan dan is*

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

Bewijs. Dit is de eerste bewering uit 6.3.1.

Op analoge wijze ziet men dat $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$ als $c\in\mathbb{R}$. Van een aantal elementaire functies kennen we de integraal reeds. Immers tabel 6.3.5 is even goed voor $D^{\leftarrow}$ als voor D te gebruiken. Zo staat in 6.3.5 a dat e^x een onbepaalde integraal van e^x is.
De tweede bewering uit 6.3.1 geeft aanleiding tot een proces dat *partieel integreren* wordt genoemd.

7.1.3. STELLING. *Als* f *en* g *differentieerbare functies zijn en* $\int f'(x)g(x)dx$ *bestaat dan is*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx.$$

Bewijs. Volgens 6.3.1 en 7.1.1 is de afgeleide van het rechterlid

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

VOORBEELDEN. (In het vervolg beschouwen we $\int f(x)dx$ steeds alleen voor die waarden van x waarvoor de beschouwde functies zinvol zijn.)

7.1.4.
$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= \int (x)' \arcsin x\, dx = \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

7.1.5. $g(x) := \int e^x \sin 2x\,dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx =$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4g(x),$$

dus $g(x) = \frac{1}{5} e^x \sin 2x - \frac{2}{5} e^x \cos 2x.$

We beperken ons in dit hoofdstuk tot reële functies. We hebben al opgemerkt dat dit niet nodig is. Men kan, met complexe functies op $\mathbb{R}$ rekenend, schrijven:

$$\int e^x \sin 2x\,dx = \int \mathrm{Im}(e^{(1+2i)x})dx =$$

$$= \mathrm{Im}\int e^{(1+2i)x}dx = \mathrm{Im}(\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}) =$$

$$= \frac{1}{5}\,\mathrm{Im}((1-2i)e^{(1+2i)x}) =$$

$$= \frac{1}{5}\,e^x(\sin 2x - 2\cos 2x).$$

De lezer merke op dat deze complexe rekenwijze vlugger is dan partieel integreren.

7.1.6. Voor $n\in\mathbb{N}$ definiëren we $I_n(x) := \int e^{-x}x^n dx$. Dan is

$$I_n(x) = -e^{-x}x^n + n\int e^{-x}x^{n-1}dx =$$

$$= -e^{-x}x^n + nI_{n-1}(x).$$

Daar $I_1(x) = -e^{-x}x + \int e^{-x}dx = -e^{-x}x - e^{-x}$ vinden we

$$I_n(x) = -e^{-x}p_n(x)$$

waarin de rij polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gedefinieerd is door

$p_1(x) := (1+x)$,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[p_{n+1}(x) := x^{n+1} + (n+1)p_n(x)].$$

7.1.7. Om alle functies f, gedefinieerd op $\mathbb{R}$, die voldoen aan $f'(x)=x+f(x)$ te vinden schrijven we $g(x) := e^{-x}f(x)$. Dan is

$$g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = xe^{-x}.$$

Met behulp van 7.1.6 vinden we dan

$$g(x) = -(1+x)e^{-x} + C$$

waarin C een constante is. De gevraagde functies zijn dus

$$\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(x)=Ce^x-1-x,\ C\in\mathbf{R}\}.$$

De lezer doet er goed aan na te gaan waarom g is ingevoerd en hoe hij deze truc vaker kan gebruiken!

7.1.8. OPGAVE. Zij $n\in\mathbf{N}$, $J_n(x):=\int(1+x^2)^{-n}dx$.
Vind een reductieformule voor $J_n(x)$.

De in 6.3.3 bewezen kettingregel is een veel gebruikt hulpmiddel in de integraalrekening en wel onder de naam: "*methode van substitutie*".

7.1.9. STELLING. *Als* f *en* g *differentieerbare functies zijn dan is*

$$\int g'(f(x))f'(x)dx = (g\circ f)(x).$$

Bewijs. Dit is 6.3.3.

VOORBEELDEN

7.1.10. $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}.$

7.1.11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{\log x}(\log x)'dx = \log\log x.$

Om gemakkelijker met deze methode te werken gebruikt men de volgende formele *substitutie* (in 7.1.9):

(a) Schrijf df i.p.v. $f'(x)dx$ en vervang overal $f(x)$ door f,

(b) Bepaal $\int g'(f)df$,

(c) Vervang f door $f(x)$.

VOORBEELDEN

7.1.12. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ gaat door de substitutie $f=e^x$ over in $\displaystyle\int \frac{df}{1+f^2}$. Volgens 6.3.5 h is dit arctan f. Dus is een gevraagde integraal gelijk aan $\arctan(e^x)$.

7.1.13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(\sin x)'\,dx$ gaat door de substitutie $f=\sin x$ over in $\displaystyle\int \frac{df}{1-f^2}$.

Daar $\displaystyle\int \frac{df}{1-f^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-f}+\frac{1}{1+f}\right)df = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+f}{1-f}\right|$ is een gevraagde primitieve $\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$ (zie 6.3.5 k).

OPGAVEN

7.1.14. Bepaal $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx$.

7.1.15. Bepaal reductieformules waarmee voor gehele p en q de primitieve $\int(\cos x)^p(\sin x)^q dx$ kan worden bepaald.

7.1.16. Bepaal $\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$.

7.2. De Riemann-integraal

Alle functies in deze paragraaf zijn reële functies gedefinieerd en begrensd op een gesloten interval. Onder een *verdeling* $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ zullen we verstaan een eindige rij getallen $x_0,x_1,\ldots,x_n$ met $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. We noemen $\Delta(V):=\max\{x_i-x_{i-1} \mid 1\le i\le n\}$ de *wijdte* van de verdeling.

7.2.1. DEFINITIE. *Als* f *een begrensde functie op* [a,b] *is en* $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ *een verdeling van* [a,b] *dan heet*

$$S_V f := \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})\sup\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

de bovensom van f *bij de verdeling* V *van* [a,b] *en*

$$s_V f := \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})\inf\{f(x) \mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

de ondersom van f *bij de verdeling* V *van* [a,b].

Merk op dat als $m:=\inf\{f(x) \mid a\le x\le b\}$ en $M:=\sup\{f(x) \mid a\le x\le b\}$ en V een verdeling van [a,b] is dan $m(b-a)\le s_V f\le S_V f\le M(b-a)$. Dit rechtvaardigt de volgende definitie.

7.2.2. DEFINITIE. *Als* f *een begrensde functie op* [a,b] *is dan heet*

$$\bar{\int}_a^b f(x)dx := \inf\{S_V f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\}$$

de bovenintegraal van f *over* [a,b] *en*

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx := \sup\{s_V f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\}$$

de onderintegraal van f *over* [a,b].
We definiëren ook nog

$$\underline{\int}_a^a f(x)dx := \overline{\int}_a^a f(x)dx := 0,$$

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx := -\overline{\int}_b^a f(x)dx \text{ als } b<a \text{ (analoog voor } \underline{\int}\text{)}.$$

7.2.3. STELLING. *Als* V *en* W *verdelingen van* [a,b] *zijn en* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *is begrensd op* [a,b] *dan is*

$$s_V f \le S_W f.$$

Bewijs. Zij $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$. Laat $y\in(x_{i-1},x_i)$ en beschouw dan $V':=[x_0,x_1,\dots,x_{i-1},y,x_i,\dots,x_n]$. Daar

$$\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le y\}\le\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

en

$$\sup\{f(x)\mid y\le x\le x_i\}\le\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

is $S_{V'}f\le S_V f$. Evenzo is $s_{V'}f\ge s_V f$. Beschouw nu de verdeling van [a,b] die ontstaat door alle deelpunten van V en W te nemen. Noem deze $V\cup W$. Door herhaling van de bovenstaande redenering volgt nu m.b.v. 7.2.1

$$s_V f \le s_{V\cup W} f \le S_{V\cup W} f \le S_W f$$

waarmee het gestelde bewezen is.

7.2.4. GEVOLG. Als $m:=\inf\{f(x)\mid a\le x\le b\}$ en $M:=\sup\{f(x)\mid a\le x\le b\}$ dan is

$$m(b-a) \le \underline{\int}_a^b f(x)dx \le \overline{\int}_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7.2.5. STELLING. $\underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_b^c f(x)dx = \underline{\int}_a^c f(x)dx.$

Bewijs. Het is voldoende het geval $a<b<c$ te beschouwen daar de andere gevallen m.b.v. 7.2.2 door verwisseling van grenzen hieruit volgen. Zij V een verdeling van [a,b], W een verdeling van [b,c]. De deelpunten van V en W vormen een verdeling $V\cup W$ van [a,c] en er geldt: $s_{V\cup W}=s_V+s_W$. Hieruit volgt

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_b^c f(x)dx \le \underline{\int}_a^c f(x)dx.$$

Iedere verdeling V' van [a,c] kan door zonodig b als deelpunt toe te voegen (waardoor de ondersom toeneemt!) uitgebreid worden tot $V \cup W$ waarin V een verdeling van [a,b] en W een verdeling van [b,c] is. Dit betekent:

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx + \underline{\int}_b^c f(x)dx \ge \underline{\int}_a^c f(x)dx.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Als we in 7.2.5 alle onderintegralen door bovenintegralen vervangen ontstaat een juiste bewering.
We beschouwen nu niet de "som" van twee intervallen maar de som van twee functies. Ook dan is de boven- resp. onderintegraal additief. Bij vermenigvuldiging met een constante <0 gaan onderintegralen in bovenintegralen over. We vatten deze uitspraken samen in

7.2.6. STELLING. *Als* b>a *dan is*

(i) $\overline{\int}_a^b \{f(x)+g(x)\}dx \le \overline{\int}_a^b f(x)dx + \overline{\int}_a^b g(x)dx,$

(ii) $$\overline{\int}_a^b \lambda f(x)dx = \begin{cases} \lambda \overline{\int}_a^b f(x)dx \text{ als } \lambda \ge 0, \\ \lambda \underline{\int}_a^b f(x)dx \text{ als } \lambda < 0, \end{cases}$$

(analoog voor onderintegralen).

Bewijs. (i) Is $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van [a,b] dan is

$$\sup\{f(x)+g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \le \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} + \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

waaruit het gestelde reeds volgt.

(ii) Evenzo is als $\lambda \ge 0$

$$\sup\{\lambda f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \lambda \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

en als $\lambda < 0$

$$\sup\{\lambda f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \lambda \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}.$$

Laat $S_V^* f$ de bovensom van λf bij de verdeling V zijn en $s_V f$ de ondersom van f bij de verdeling van V.

Als $\lambda<0$ geldt

$$
\begin{aligned}
\underline{\int}_a^b f(x)dx &= \sup\{s_V f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\} = \\
&= \sup\{\lambda^{-1} S_V^* f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\} = \\
&= \lambda^{-1} \inf\{S_V^* f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\} = \\
&= \lambda^{-1} \overline{\int}_a^b \{\lambda f(x)\}dx
\end{aligned}
$$

waarmee ook de tweede bewering in 7.2.6 (ii) is bewezen.

Alle tot nu toe bewezen stellingen over onderintegralen en bovenintegralen dienden als voorbereiding voor het nu in te voeren begrip van "*integreerbare functie*":

7.2.7. DEFINITIE. *Een op* $[a,b]$ *gedefinieerde begrensde functie* f *heet integreerbaar over* $[a,b]$ *als*

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx.$$

De gemeenschappelijke waarde van onder- en bovenintegraal geven we aan met $\int_a^b f(x)dx$. *We noemen dit de integraal van* f *over* $[a,b]$; f *noemt men de integrand.*

In vele opzichten is $\int_a^b f$ een betere notatie dan $\int_a^b f(x)dx$. We zullen ons echter aan de gebruikelijke notatie houden. De lezer bedenke echter dat de uitdrukking $\int_a^b f(x)dx$ *niet* van x afhangt. Evengoed kan men $\int_a^b f(t)dt$ schrijven.
Merk op dat uit 7.2.4 en 7.2.5 volgt dat als f integreerbaar is over $[a,b]$ dan f ook over ieder deelinterval integreerbaar is. Men zegt ook wel: "f is een op $[a,b]$ integreerbare functie". Bovendien volgt uit 7.2.4 dat als $\forall_{x\in[a,b]}\ [f(x)=c]$ dat dan f integreerbaar is over $[a,b]$ en $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. We passen dit vaak als volgt toe:

Als $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $t\in[\alpha,\beta]$ dan is $\int_a^b f(t)dx = (b-a)f(t)$

(zie bijv. het bewijs van 7.2.31).

7.2.8. STELLING. *Als* f *integreerbaar is over* [a,b] *en over* [b,c] *dan ook over* [a,c] *en dan is*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Bewijs. Dit volgt uit 7.2.5 en 7.2.7.

7.2.9. STELLING. *Als* f *en* g *integreerbaar zijn over* [a,b], $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mu\in\mathbf{R}$, *dan is ook* $\lambda f+\mu g$ *integreerbaar over* [a,b] *en*

$$\int_a^b \{\lambda f(x)+\mu g(x)\}dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Bewijs. Dit volgt uit 7.2.6 en 7.2.7.

VOORBEELDEN

7.2.10. Zij $0<a<b$, $f(x):=x^{-2}$ op [a,b] en $V:[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van [a,b]. Dan is $S_Vf = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})x_{i-1}^{-2}$ en $s_Vf = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})x_i^{-2}$. Dus geldt

$$S_Vf-s_Vf = \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})(x_{i-1}^{-2}-x_i^{-2}) \le \frac{2b}{a^4} n\{\Delta(V)\}^2.$$

Is V een verdeling van [a,b] in n gelijke delen dan is $S_Vf-s_Vf=O(n^{-1})$ en dus is $\underline{\int}_a^b x^{-2}dx = \overline{\int}_a^b x^{-2}dx$. Bovendien geldt

$$s_Vf \le \sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})(x_ix_{i-1})^{-1} \le S_Vf \text{ en daar}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1})(x_ix_{i-1})^{-1} = \sum_{i=1}^n (x_{i-1}^{-1}-x_i^{-1}) = a^{-1}-b^{-1}$$

is hiermee bewezen

$$\int_a^b x^{-2}dx = a^{-1}-b^{-1} \quad (\text{als } 0<a<b).$$

7.2.11. Zij $0<a<b$, $p\in\mathbf{N}$ en $f(x):=x^p$ voor $x\in[a,b]$. Voor $n\in\mathbf{N}$ definiëren we $\zeta_n:=\sqrt[n]{ba^{-1}}$ en de verdeling V(n) van [a,b] door $V(n):=[a,a\zeta_n,a\zeta_n^2,\ldots,a\zeta_n^n=b]$. We vinden dan

$$S_V f = \sum_{i=1}^{n} (a\zeta_n^{i} - a\zeta_n^{i-1})(a\zeta_n^{i})^p =$$

$$= a^{p+1}(1-\zeta_n^{-1})\zeta_n^{p+1} \sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_n^{p+1})^j =$$

$$= (b^{p+1}-a^{p+1})(1+\zeta_n^{-1}+\zeta_n^{-2}+\ldots+\zeta_n^{-p})^{-1}.$$

Daar $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = 1$, (4.3.5), weten we nu $\overline{\int_a^b} x^p dx \le \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$. Precies zo toont men aan dat $\underline{\int_a^b} x^p dx \ge \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ waarna uit 7.2.4 volgt dat

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \quad (p\in\mathbb{N}).$$

Deze twee voorbeelden leiden ons naar een eerste criterium om integreerbaarheid aan te tonen:

7.2.12. STELLING. *De functie* f *gedefinieerd op* [a,b] *is integreerbaar over* [a,b] *dan en slechts dan als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\text{verdeling } V \text{ van } [a,b]}\ [S_V f - s_V f < \varepsilon].$$

Bewijs. (i) Zij f integreerbaar over [a,b] en $\varepsilon>0$. Daar $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ het infimum is van de bovensommen van f over [a,b] is $\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ géén ondergrens van alle bovensommen d.w.z. er is een verdeling V_1 van [a,b] met $S_{V_1} f < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$. Evenzo is er een verdeling V_2 van [a,b] met $s_{V_2} f > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$. Evenals in het bewijs van 7.2.3 vinden we voor $V := V_1 \cup V_2$ dan $-\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f(x)dx < s_{V_2} f \le s_V f \le S_V f \le S_{V_1} f < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ waaruit volgt $S_V f - s_V f < \varepsilon$.

(ii) Als bij iedere $\varepsilon>0$ een verdeling V bestaat met $S_V f - s_V f < \varepsilon$ dan is volgens 7.2.2 (definitie)

$$0 \le \bar{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx < \varepsilon \text{ voor iedere } \varepsilon>0,$$

$$\text{d.w.z. } \bar{\int}_a^b f(x)dx = \underline{\int}_a^b f(x)dx.$$

Met dit criterium kunnen we van een grote klasse functies de integreerbaarheid aantonen. Soms is een ander criterium leuker om te gebruiken. We voeren daartoe eerst het begrip *schommeling* in. Onder de *schommeling* $\Delta(f;\, a,b)$ van de functie f over het interval $[a,b]$ verstaan we het verschil van het supremum van f en het infimum van f over $[a,b]$. Merk op dat de in het begin van deze paragraaf gedefinieerde wijdte $\Delta(V)$ het maximum is van de getallen $\Delta(i;x_{k-1},x_k)$, waarin $i(x):=x$ op $[a,b]$.

7.2.13. STELLING. *De functie* f *is dan en slechts dan integreerbaar over* $[a,b]$ *als er bij iedere* $\sigma>0$ *en bij iedere* $\eta>0$ *een verdeling* V *van* $[a,b]$ *is zó dat de som van de lengten van die deelintervallen* $[x_{i-1},x_i]$ *van* V *waarvoor* $\Delta(f;x_{i-1},x_i)>\sigma$ *is, kleiner dan* η *is.*

Bewijs. (i) Zij f integreerbaar over $[a,b]$, $\sigma>0$, $\eta>0$. Kies $\varepsilon=\sigma\eta$. Volgens 7.2.12 is er een verdeling V van $[a,b]$ met $S_Vf-s_Vf<\varepsilon$. Voor deze V geldt het gestelde.

(ii) Laat bij iedere $\sigma>0$ en iedere $\eta>0$ een verdeling V van bovengenoemde soort bestaan. Zij $m:=\inf\{f(x) \mid a\le x\le b\}$ en $M:=\sup\{f(x) \mid a\le x\le b\}$. Zij $\varepsilon>0$. Kies $\sigma<\frac{\varepsilon}{2}(b-a)^{-1}$ en $\eta<\frac{\varepsilon}{2}(M-m)^{-1}$. Voor een bij σ en η behorende verdeling V van bovengenoemde soort geldt $S_Vf-s_Vf\le(M-m)\eta+\sigma(b-a)<\varepsilon$. Daar ε willekeurig was, is f integreerbaar volgens 7.2.12.

7.2.14. VOORBEELD. Als f continu is op $[a,b]$, $\sigma>0$, $\eta>0$ dan is er omdat f uniform continu is (5.7.7) een verdeling V van $[a,b]$ zó dat op géén enkel deelinterval van V de schommeling van f groter dan σ is. Aan de eis van 7.2.13 is voldaan en dus is f integreerbaar. Een iets sterkere uitspraak vinden we in 7.2.25.

7.2.15. OPGAVE. Bewijs met behulp van 7.2.13 dat als f en g integreerbaar over $[a,b]$ zijn ook fg integreerbaar over $[a,b]$ is.

In de voorbeelden 7.2.10 en 7.2.11 hebben we al gezien dat het niet altijd nodig is alle verdelingen van $[a,b]$ te beschouwen om tot integreerbaarheid van f te besluiten. Welke dan wel? De volgende stelling geeft niet alleen antwoord op deze vraag maar is bovendien een hulpmiddel bij de bepaling van integralen resp. limieten en geeft tevens een aanwijzing over mogelijke generalisaties van het integraalbegrip (zie ook 7.4.4).

7.2.16. STELLING. *Laat de functie* f *integreerbaar over* $[a,b]$ *zijn. Dan is er bij iedere* $\varepsilon>0$ *een* $\delta>0$ *zo dat voor iedere verdeling* $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$ *van* $[a,b]$ *met* $\Delta(V)<\delta$ *en voor iedere keuze van* $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *met* $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ *geldt*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. In het bewijs van 7.2.12 hebben we gezien dat er een verdeling $W:=[x_0,x_1,\dots,x_k]$ van $[a,b]$ is met

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f(x)dx\le s_W f\le S_W f\le\int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Zij $m:=\inf\{f(x)\mid a\le x\le b\}$, $M:=\sup\{f(x)\mid a\le x\le b\}$. Kies δ zó dat $2k(M-m)\delta<\varepsilon$. Zij V een verdeling van $[a,b]$ met $\Delta(V)<\delta$. Ten hoogste k-1 deelintervallen van V bevatten deelpunten van W die niet tot V behoren. Alle andere deelintervallen dragen evenveel bij tot $S_V f$ als tot $S_{V\cup W}f$. Dus geldt (vergelijk met bewijs van 7.2.3): $S_W f\ge S_{V\cup W}f>$ $>S_V f-k\delta(M-m)>S_V f-\frac{\varepsilon}{2}$, d.w.z. $S_V f<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon$. Evenzo geldt $s_V f>\int_a^b f(x)dx-\varepsilon$. Daar voor iedere keuze van $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ met $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ geldt $s_V f\le\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)\le S_V f$ is het gestelde hiermee bewezen.

We noemen de som $\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$ een *tussensom* of *Riemann-som* van f bij de verdeling V van $[a,b]$.

OPGAVEN

7.2.17. Zij f gedefinieerd op $[a,b]$, $I\in\mathbb{R}$. Als er bij iedere $\varepsilon>0$ een $\delta>0$ is zó dat voor iedere verdeling $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$ van $[a,b]$ met $\Delta(V)<\delta$ en voor iedere keuze van $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ met $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$

geldt $|\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - I| < \varepsilon$ dan is f integreerbaar over [a,b] en $\int_a^b f(x)dx = I$. Bewijs dit.

7.2.18. Bepaal met behulp van Riemann-sommen $\int_a^b e^x dx$.

7.2.19. Bepaal $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n}{n})$.

We zullen nog vaak situaties tegenkomen waarin integralen voorkomen die we niet kunnen of willen bepalen maar waar een min of meer nauwkeurige schatting voldoende is. In § 7.5 gaan we hier diep op in maar nu geven we vast een aantal grove schattingen die vaak goed genoeg zullen blijken. In 7.2.4 hebben we een eerste voorbeeld gezien (het meest gebruikte!).

7.2.20. STELLING. *Als* f *en* g *integreerbaar over* [a,b] *zijn en* $\forall_{x\in[a,b]}\ [f(x)\le g(x)]$ *dan is*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Bewijs. Voor iedere verdeling V van [a,b] is de bijbehorende bovensom van f kleiner dan of gelijk aan die van V, dus ook

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

7.2.21. STELLING. *Als* f *integreerbaar is over* [a,b], *dan ook* $|f|$ *en*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bewijs. Als V een verdeling van [a,b] is dan geldt, voor elk deelinterval $[x_{i-1},x_i]$ van V, $\Delta(|f|;x_{i-1},x_i) \le$ $\le \Delta(f;x_{i-1},x_i)$. De integreerbaarheid van $|f|$ volgt dan uit 7.2.13 en de ongelijkheid uit 7.2.20 daar $\forall_{x\in[a,b]}\ [-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|]$.

Bij het gebruik van 7.2.21 voor integralen $\int_\alpha^\beta \phi(t)dt$ bedenke men dat de ongelijkheid alleen geldt als $\alpha\le\beta$.

7.2.22. OPMERKING. Als $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ een complexe functie is en $f(x)=u(x)+iv(x)$ waarin u en v reële functies zijn

dan definiëren we $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx$ als beide integralen bestaan.
De stellingen 7.2.8, 7.2.9 en 7.2.16 gelden nu ook (ga dit na!) evenals een generalisatie van 7.2.17. De ongelijkheid 7.2.20 heeft voor complexe functies geen zin maar 7.2.21 geldt wel:

7.2.23. OPGAVE. Zij $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ integreerbaar over $[a,b]$. Bewijs dat $|f|$ ook integreerbaar is over $[a,b]$ en dat

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

7.2.24. STELLING. *Als* f *en* g *integreerbaar zijn over* $[a,b]$, $\forall_{x\in[a,b]}\ [m\le f(x)\le M]$ *en* $\forall_{x\in[a,b]}\ [g(x)\ge 0]$ *dan is er een* $\mu\in[m,M]$ *zo dat* $\int_a^b f(t)g(t)dt = \mu \int_a^b g(t)dt$.

Bewijs. Uit het gegeven en 7.2.20 volgt $\int_a^b (mg(t))dt \le$ $\le \int_a^b f(t)g(t)dt \le \int_a^b (Mg(t))dt$ waarna het gestelde volgt uit 7.2.9.

Als f continu is op $[a,b]$ volgt uit 5.7.11 dat er een $\xi\in[a,b]$ is zo dat in 7.2.24 $\mu=f(\xi)$.
We zullen nu van 3 klassen functies de integreerbaarheid aantonen.

7.2.25. STELLING. *Zij* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *begrensd en continu op* $[a,b]$ *met uitzondering van een eindig aantal punten. Dan is* f *integreerbaar over* $[a,b]$.

Bewijs. Laat het aantal punten waar f niet continu is N zijn. Noem deze punten $x_1,x_2,\ldots,x_N$. Zij $\sigma>0$, $\eta>0$.
De verzameling $I := [a,b] \setminus \cup_{i=1}^N (x_i - \frac{\eta}{2N}, x_i + \frac{\eta}{2N})$ is compact en f is continu op I, dus volgens 5.7.7 zelfs uniform continu. Dus is er een $\delta>0$ zo dat $\forall_{x\in I}\ \forall_{y\in I}$ $[|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\sigma]$. Zij V een verdeling van $[a,b]$ met $\Delta(V)<\delta$ en zo dat de punten $x_i \pm \frac{\eta}{2N}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ tot V behoren, behalve uiteraard die welke buiten $[a,b]$ liggen. De som van de lengten van de deelintervallen van V waarvoor de schommeling van f groter dan σ is is dan ten hoogste $N(\frac{\eta}{N}) = \eta$. Volgens 7.2.13 is f integreerbaar over $[a,b]$.

7.2.26. STELLING. *Zij* f *monotoon op* [a,b]. *Dan is* f *integreerbaar over* [a,b].

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid nemen we f monotoon niet-dalend. Zij $n\in\mathbb{N}$ en V de verdeling van [a,b] in n gelijke delen.

$$S_V f - s_V f = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + i\,\frac{b-a}{n}) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + i\,\frac{b-a}{n}) =$$

$$= n^{-1}(b-a)\{f(b)-f(a)\}.$$

Het gestelde volgt dan uit 7.2.12.

Alvorens de derde klasse te bespreken eerst enkele definities.
Als f gedefinieerd is op [a,b] en begrensd op [a,b] en $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ is een verdeling van [a,b] dan voeren we de volgende notatie in:

$$\mathrm{var}_V f := \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

7.2.27. DEFINITIE. *De functie* f *heet van begrensde variatie op* [a,b] *als*

$$\exists_{S\in\mathbb{R}}\ \forall_{V,\text{ verdeling van }[a,b]}\ [\mathrm{var}_V f\le S].$$

We noemen $\sup\{\mathrm{var}_V f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\}$ *de totale variatie van* f *over* [a,b].

De volgende stelling karakteriseert de functies van begrensde variatie.

7.2.28. STELLING. *De functie* f *is dan en slechts dan van begrensde variatie op* [a,b] *als* f *het verschil is van twee niet-dalende functies op* [a,b].

Bewijs. (i) Zij $x\in[a,b]$, $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van [a,x].

Definieer $p_V(f;a,x) := \sum_{i=1}^{n} \max\{f(x_i)-f(x_{i-1}),0\}$

en $n_V(f;a,x) := -\sum_{i=1}^{n} \min\{f(x_i)-f(x_{i-1}),0\}$.

Dan geldt

$p_V(f;a,x)-n_V(f;a,x) = f(x)-f(a)$,

$p_V(f;a,x)+n_V(f;a,x) = \mathrm{var}_V f$.

Definiëren we nu de functies p en n door
$p(x) := \sup\{p_V(f;a,x) \mid V \text{ verdeling van } [a,x]\}$,
$n(x) := \sup\{n_V(f;a,x) \mid V \text{ verdeling van } [a,x]\}$,
dan is gemakkelijk in te zien dat p en n monotoon niet-dalend zijn en dat $p(x)-n(x)=f(x)-f(a)$, dus $f(x)=\{f(a)+p(x)\}-n(x)$ waarmee het gestelde bewezen is. (Merk op dat als f continu is ook p en n continue functies zijn!)

(ii) Dat het verschil van twee niet-dalende functies een functie van begrensde variatie is, is triviaal.

Merk op dat niet iedere continue functie van begrensde variatie is! (Zie 7.10.17.)

7.2.29. STELLING. *Als* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *van begrensde variatie op* $[a,b]$ *is dan is* f *integreerbaar over* $[a,b]$.

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit 7.2.28, 7.2.26 en 7.2.9.

Nu we het begrip integreerbaarheid kennen en ook eenvoudige criteria om vast te stellen of een functie integreerbaar is (althans voor een grote klasse veel voorkomende functies) gaan we aandacht schenken aan het bepalen van integralen. Slechts zelden zal het nodig zijn m.b.v. de definitie of 7.2.16 te werk te gaan. We zullen het bepalen van $\int_a^b f(x)dx$ terugbrengen tot het vinden van $\int f(x)dx$. Dit opent een nieuwe mogelijkheid om limieten te bepalen. Is nl. $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij reële getallen zó dat er een functie f is, gedefinieerd op $[a,b]$ en integreerbaar over $[a,b]$, waarvoor bij iedere n een verdeling V_n $[a,b]$ bestaat zo dat s_n een bij V_n behorende Riemann-som van f is dan is volgens 7.2.16 $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_a^b f(x)dx$ als $\lim_{n\to\infty} \Delta(V_n) = 0$. In 7.2.19 is dit principe bruikbaar. De volgende stellingen stellen ons in staat $\int_a^b f(x)dx$ op een eenvoudige manier te bepalen.

7.2.30. STELLING. *Als de functie* f *integreerbaar is op* $[a,b]$ *dan is de functie* $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, *gedefinieerd door*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \textit{ continu op } [a,b].$$

Bewijs. Na 7.2.7 hadden we al opgemerkt dat de definitie van F zinvol is. Zij $M:=\sup\{|f(x)|\,|\,a\le x\le b\}$; (neem aan $M>0$). Zij $\varepsilon>0$. Als $x\in[a,b]$, $y\in[a,b]$ en $|x-y|<\varepsilon M^{-1}$ dan is volgens 7.2.8, 7.2.21 en 7.2.4

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \le \left|\int_y^x |f(t)|dt\right| \le M|x-y| < \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was is hiermee zelfs de uniforme continuïteit van F op $[a,b]$ bewezen.

7.2.31. STELLING. *Als* f *continu is op* $[a,b]$ *en* $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ *gedefinieerd door* $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ *dan is* F *differentieerbaar op* (a,b) *en* $F'=f$. *Ook geldt* $F'_+(a)=f(a)$, $F'_-(b)=f(b)$.

Bewijs. Zij $x\in(a,b)$. Dan is als $x+h\in(a,b)$:

$$F(x+h)=F(x)+\int_x^{x+h} f(t)dt=F(x)+hf(x)+\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))dt.$$

Zij $\varepsilon>0$. Daar f continu is op $[a,b]$, dus uniform continu op $[a,b]$ is er een $\delta>0$ zo dat voor $|h|<\delta$ en $|t-x|\le|h|$ geldt $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ en dus $\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))dt\right|<\varepsilon\,|h|$ volgens 7.2.4. Daar $\varepsilon>0$ willekeurig was is aangetoond: voor $x\in(a,b)$, $x+h\in(a,b)$

$$F(x+h) = F(x)+hf(x)+o(|h|), \quad (h\to 0),$$

waarmee volgens 6.2.2 het gestelde is bewezen. (De rechts- resp. linksdifferentieerbaarheid in a resp. b bewijst men precies zo.)

7.2.32. STELLING. *Als* f *integreerbaar is over* $[a,b]$ *en* $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ *een functie waarvoor* $\forall_{x\in[a,b]}\,[F'(x)=f(x)]$, *d.w.z.* F *is een primitieve functie van* f, *dan is* $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Bewijs. Zij $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$ een verdeling van $[a,b]$. Volgens 6.4.2 is er voor $i=1,2,\dots,n$ een $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ zo dat $F(x_i)-F(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$. Daar $\sum_{i=1}^n (F(x_i)-F(x_{i-1})) = F(b)-F(a)$ is er bij iedere verdeling V van $[a,b]$ een Riemann-som die gelijk is aan $F(b)-F(a)$. Het gestelde volgt nu uit 7.2.16.
Men schrijft ook wel $F(x)\Big]_a^b$ i.p.v. $F(b)-F(a)$.

Door stelling 7.2.32 is het bepalen van $\int_a^b f(x)dx$ teruggebracht tot het vinden van F hetgeen in § 7.1 is behandeld. Men kan diverse stellingen uit § 7.1 nu vertalen in stellingen over integralen (in tegenstelling tot § 7.1 spreekt men nu van *bepaalde integralen*, de getallen a en b noemt men de *integratiegrenzen*). We laten dit aan de lezer over. We geven slechts één voorbeeld. De lezer kan er zo veel zelf bedenken als hij nodig heeft om de techniek van het integreren onder de knie te krijgen.

7.2.33. VOORBEELD. We willen $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx$ bepalen. Er geldt (volgens 7.2.9):

$$\int_1^3 \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 \left\{\frac{1}{x+1} + \frac{7x-1}{x^2-2x+5}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{dx}{x+1} + \frac{7}{8}\int_1^3 \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5}\,dx + \frac{3}{4}\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2+4}\,.$$

Volgens 6.3.5 b en 7.2.32 is

$$\int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \log|x+1|\Big]_1^3 = \log 4 - \log 2 = \log 2$$

en evenzo volgens de kettingregel of 7.1.9:

$$\int_1^3 \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5}\,dx = \log(x^2-2x+5)\Big]_1^3 = \log 8 - \log 4 = \log 2.$$

In de derde integraal passen we de substitutie x-1=2u toe (zie 7.1.9 en na 7.1.11 bedenk dat de integratiegrenzen veranderen):

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \int_0^1 \frac{2}{4u^2+4}\,du = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1}\,.$$

Volgens 6.3.5 h en 7.2.32 is

$$\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \arctan u\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\pi$$

De gevraagde integraal is dus $\frac{1}{4}\log 2 + \frac{7}{8}\log 2 +$
$+ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{9}{8}\log 2 + \frac{3}{32}\pi$.

OPGAVEN

7.2.34. Laten p en q niet negatieve gehele getallen zijn. Definieer nu het symbool $n!!$ door $-1!!=0!!=1$ en $\forall_{n\in\mathbb{N}}\,[n!!:=n\{(n-2)!!\}]$ en definieer $c(p,q) := \frac{\pi}{2}$ als p en q even zijn, anders $c(p,q):=1$.

(i) Bewijs dat:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^p(\sin x)^q dx = \frac{(p-1)!!(q-1)!!}{(p+q)!!}\, c(p,q).$$

(ii) Bewijs hieruit met behulp van het feit dat $(\sin x)^{2n+1}<(\sin x)^{2n}<(\sin x)^{2n-1}$ voor $0<x<\frac{1}{2}\pi$ dat

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^2 = \pi \text{ (Wallis).}$$

7.2.35. *(Partieel integreren.)* Als $f\in C^1([a,b])$ en en $g\in C^1([a,b])$ dan is

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big]_a^b$$

Bewijs dit.

7.2.36. Bepaal $\int_4^5 (x\log x)^{-1}(\log\log x)^{-1}dx$.

7.2.37. Zij $f\in C^1([0,1])$. Bewijs dat

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}\{f(1)+f(0)\} - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx.$$

7.3. Oneigenlijke integralen

We willen het integraalbegrip dat in § 7.2 is ingevoerd voor begrensde functies op een begrensd interval nu uitbreiden door beide eisen van begrensdheid te laten vallen. We zullen de definitie zó kiezen dat allerlei generalisaties van het integraalbegrip er onder vallen, zelfs die waarvoor men oneindig vaak een beroep op deze definitie moet doen!

7.3.1. DEFINITIE. *Zij* $b\in\mathbb{R}$ *of* $b=\infty$. *Zij* $a\in\mathbb{R}$. *Zij* $f:[a,b)\to\mathbb{R}$. *Als voor ieder deelinterval* $[a,c]$ *van* $[a,b)$ f *integreerbaar is over* $[a,c]$ *en als* $\lim_{c\uparrow b}\int_a^c f(x)dx$ *bestaat dan definiëren we*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx$$ *en we noemen f integreerbaar over [a,b].*

De definitie voor oneigenlijk gedrag in een ondergrens resp. voor de ondergrens $-\infty$ *is analoog.*

Als $\int_a^b f(x)dx$ *en* $\int_b^d f(x)dx$ *bestaan dan definiëren we*

$$\int_a^d f(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \int_b^d f(x)dx.$$

Indien $\int_a^b f(x)dx$ reeds gedefinieerd is op grond van § 7.2 dan is volgens 7.2.30 $\lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)dx$ inderdaad gelijk aan $\int_a^b f(x)dx$. Dus is 7.3.1 een uitbreiding van het integraalbegrip (vergelijk ook 7.2.8).

VOORBEELDEN

7.3.2. Zij $f(x):=x^{-\frac{1}{2}}$ voor $0<x\leq 1$. Als $0<c\leq 1$ dan is volgens 6.3.5 c en 7.2.32, daar f continu is,

$$\int_c^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_c^1 = 2(1-c^{\frac{1}{2}}).$$

Daar $\lim_{c\downarrow 0} c^{\frac{1}{2}} = 0$ is volgens 7.3.1 $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2$.

7.3.3. Zij $f(x):=x^{-2}$ voor $x\geq 1$. Daar f continu is is f integreerbaar over $[1,c]$ voor $c>1$. Uit 6.3.5 c en 7.2.32 volgt dan $\int_1^c x^{-2}dx = 1-c^{-1}$. Volgens 7.3.1 is dus $\int_1^\infty x^{-2}dx = 1$.

7.3.4. Zij f gedefinieerd op $(0,1]$ door

$$f(n^{-1}) = 0 \quad (n\in\mathbf{N}),$$

$$f(x) = (nx-1)^{-\frac{1}{2}} \text{ voor } \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1} \quad (n=2,3,\ldots).$$

Voor $c\in(\frac{1}{2},1]$ geldt $\int_c^1 f(x)dx = 1-(2c-1)^{\frac{1}{2}}$ en dus is volgens 7.3.1 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 1$. Daar $\int_d^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ bestaat als $\frac{1}{3}<d<\frac{1}{2}$ op grond van 7.2.26 is volgens 7.3.1 nu ook $\int_d^1 f(x)dx$ gedefinieerd voor $\frac{1}{3} < d \leq 1$ en

$\lim_{d\downarrow 1/3} \int_d^1 f(x)dx = \lim_{d\downarrow 1/3} \{1+\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3d-1}\} = 1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dus is volgens 7.3.1 $\int_{1/3}^1 f(x)dx = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Met volledige inductie vinden we voor $n\in\mathbf{N}$ dan $\int_{1/n}^1 f(x)dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\sqrt{k-1}}$.
Dus is nu $\int_c^1 f(x)dx$ gedefinieerd voor iedere $c\in(0,1]$ en deze integraal is een continue functie van c op $(0,1]$ volgens o.a. 7.2.30 en 7.3.1. Daar $\sum_{k=2}^\infty \frac{2}{k\sqrt{k-1}}$ convergeert is volgens 7.3.1 ook $\int_0^1 f(x)dx$ gedefinieerd en gelijk aan de som van deze reeks.

Integralen die volgens 7.3.1 en niet volgens § 7.2 gedefinieerd zijn noemen we *oneigenlijke* integralen. In plaats van "$\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat" zeggen we ook wel dat de integraal "convergeert". Enkele stellingen uit § 7.2 zijn ook geldig voor oneigenlijke integralen zoals bijvoorbeeld 7.2.20. Uit 7.3.1 volgt onmiddellijk dat ook 7.2.30 geldig blijft. De generalisatie van 7.2.21 geldt alleen als gegeven is dat $\int_a^b f(x)dx$ en $\int_a^b |f(x)|dx$ beide bestaan. We maken dit duidelijk aan de hand van het volgende voorbeeld. (Zie ook 7.3.13 en 7.3.14.)

7.3.5. VOORBEELD. Zij f gedefinieerd op $[1,\infty)$ door $f(x):=(-1)^{n-1}n^{-1}$ als $n\le x<n+1$ $(n=1,2,\ldots)$. Op ieder interval $[1,c]$ bestaat $\int_1^c f(x)dx$ volgens 7.2.25 en $\lim_{c\to\infty} \int_1^c f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}n^{-1}$. Evenzo bestaat $\int_1^c |f(x)|dx$ en $\int_1^c |f(x)|dx \to \infty$ als $c\to\infty$, dus $\int_1^\infty |f(x)|dx$ bestaat niet!

We kunnen nu ook 7.2.32 generaliseren:

7.3.6. STELLING. *Zij* f *begrensd en integreerbaar op* $[a,c]$ *voor iedere* $c\in[a,b)$ *en zij* F *continu op* $[a,b]$, *differentieerbaar op* (a,b) *en* $\forall_{x\in(a,b)}$ $[F'(x)=f(x)]$. *Dan is* f *integreerbaar over* $[a,b]$ *en* $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Bewijs. Volgens 7.2.32 is $\int_a^c f(x)dx = F(c)-F(a)$ voor iedere $c\in[a,b)$. Het gestelde volgt nu uit 7.3.1 en de continuïteit van F in b.

7.3.7. VOORBEELD. $\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \arcsin x \Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ op grond van 6.3.5 g en 7.3.6.

Daar de vraag naar de existentie van een oneigenlijke integraal neerkomt op het bestaan van een limiet kan 4.1.16 een belangrijk hulpmiddel zijn. We passen dit o.a. toe om de volgende belangrijke criteria te bewijzen.

7.3.8. STELLING. *Als* f *integreerbaar is op* $[a,c]$ *voor alle* $c>a$ *en* $\exists_{\alpha>1}\ [f(x)=O(x^{-\alpha}),\ (x\to\infty)]$ *dan bestaat* $\int_a^\infty f(x)dx$.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Volgens het gegeven is er een $\alpha>1$ en een $K>0$ en een b zo dat voor $x>b$ geldt $|f(x)|\le Kx^{-\alpha}$. Zij $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Dan is als $q>p>$ $>\max\{(\frac{\varepsilon(\alpha-1)}{K})^{1/(1-\alpha)},b\}$

$$|F(q)-F(p)| \le \int_p^q \Big|f(t)\Big|dt \le K\int_p^\infty t^{-\alpha}dt = \frac{K}{\alpha-1}\,p^{1-\alpha} < \varepsilon.$$

Volgens 4.1.16 bestaat $\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt$, hetgeen te bewijzen was.

7.3.9. STELLING. *Als* f *integreerbaar is over* $[a,c]$ *voor alle* $c\in[a,b)$ *en* $\exists_{\alpha<1}\ [f(x)=O((b-x)^{-\alpha}),\ (x\uparrow b)]$ *dan bestaat* $\int_a^b f(x)dx$.

Bewijs. Volgens het gegeven is er een $\alpha<1$ en een $K>0$ en een $d\in[a,b)$ zó dat voor $x\in[d,b)$ geldt $|f(x)|\le$ $\le K(b-x)^{-\alpha}$. Zij $\varepsilon>0$. Kies $\delta:=(\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{K})^{1/(1-\alpha)}$. Dan is als $b>q>p>\max\{d,b-\delta\}$

$$\left|\int_p^q f(x)dx\right| \le K\int_p^b (b-x)^{-\alpha}dx = K\int_0^{b-p} u^{-\alpha}du =$$
$$= \frac{K(b-p)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{K\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was bestaat volgens 4.1.16 $\lim_{t\uparrow b} \int_a^t f(x)dx$, hetgeen te bewijzen was.

Een analoge stelling geldt voor integralen waarbij de moeilijkheid aan het begin van het interval zit.

VOORBEELDEN

7.3.10. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ bestaat omdat de integrand continu is op $[1,\infty)$ en $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} = O(x^{-3/2})$, $(x\to\infty)$.

7.3.11. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ bestaat omdat de integrand continu is op $(0,1]$ en volgens 4.3.31 geldt $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}} = O(x^{-\frac{1}{2}})$, $(x\downarrow 0)$.

7.3.12. Om na te gaan of $\int_1^\infty x^{-1} \arctan x\,dx$ bestaat kan men niet 7.3.8 gebruiken. Daar $\arctan x > \frac{\pi}{4}$ voor $x>1$ is $\int_1^t x^{-1} \arctan x\,dx > \frac{\pi}{4}\log t \to \infty$ als $t\to\infty$. De integraal bestaat dus niet.

7.3.13. Evenzo is 7.3.8 niet direct bruikbaar om na te gaan of $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ bestaat. In zulke gevallen kan het vaak nuttig zijn een keer partieel te integreren. Merk op dat $x^{-1}\sin x$ continu is op $[0,\infty)$ als we weer afspreken dat $x^{-1}\sin x$ in 0 de waarde 1 heeft. Verder is

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx - t^{-1}\cos t - \int_{\pi/2}^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Daar $x^{-2}\cos x = O(x^{-2})$, $(x\to\infty)$ en $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\cos t = 0$ heeft het rechterlid een limiet als $t\to\infty$ (volgens 7.3.8). Dus bestaat $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. (Zie ook 7.6.22.)

7.3.14. We tonen nu aan dat $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ niet bestaat.
Omdat $|\sin x|$ periodiek is met periode π geldt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}\,.$$

Daar $\sum_{k=0}^\infty (k+1)^{-1}$ divergeert geldt $\int_0^t \frac{|\sin x|}{x}\,dx \to \infty$ als $t\to\infty$.

OPGAVEN

7.3.15. Bestaat $\int_0^\infty (|x^3-x|)^{-\frac{1}{2}}dx$?

7.3.16. Bestaat $\int_0^\infty x(e^{2x}-1)^{-\frac{1}{2}}dx$?

7.3.17. Toon aan dat $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$

7.3.18. Bewijs dat $\int_0^1 (1-x)^{-3/2}\log x\,dx$ bestaat.

7.3.19. Bewijs dat $\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx$ bestaat en bereken de integraal.

7.3.20. (i) Bewijs dat $1-x^2<e^{-x^2}<(1+x^2)^{-1}$ voor $0<x<1$.
Hieruit volgt $\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx <$ $< \int_0^\infty (1+x^2)^{-n}dx$.

(ii) Bewijs nu door in deze integralen geschikte substituties uit te voeren en 7.2.34 te gebruiken dat

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

7.4. De Riemann-Stieltjes integraal

We behandelen nu een verdere uitbreiding van het integraalbegrip. In deze paragraaf zijn de beschouwde functies weer begrensd op een interval [a,b].

7.4.1. DEFINITIE. *Zij* f *een begrensde functie op* [a,b] *en* g *een monotoon niet-dalende functie op* [a,b].

Zij $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$ *een verdeling van* $[a,b]$. *We noemen*

$$S_{V,g}f := \sum_{i=1}^{n} (g(x_i)-g(x_{i-1}))\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\}$$

de bovensom van f *ten opzichte van* g *bij de verdeling* V *van* $[a,b]$.

Men definieert de ondersom $s_{V,g}f$ op analoge wijze. Evenals in 7.2.2 definiëren we nu:

7.4.2. DEFINITIE. $\overline{\int_a^b} f(x)dg(x) := \inf\{S_{V,g}f \mid V \text{ is verdeling van } [a,b]\}$.

De onderintegraal ten opzichte van g wordt op analoge wijze gedefinieerd (zie 7.2.2). Merk op dat deze definities overeenstemmen met 7.2.1 en 7.2.2 als $g(x)=x$ op $[a,b]$.

7.4.3. DEFINITIE. f *heet integreerbaar ten opzichte van* g *over* $[a,b]$ *als* $\overline{\int_a^b} f(x)dg(x) = \underline{\int_a^b} f(x)dg(x)$. *De gemeenschappelijke waarde van onder- en bovenintegraal schrijven we als* $\int_a^b f(x)dg(x)$ *en we noemen dit de Riemann-Stieltjes integraal van* f *ten opzichte van* g. *Op voor de hand liggende wijze breiden we dit uit tot functies* g *die van begrensde variatie op* $[a,b]$ *zijn via* 7.2.28.

We kunnen nu nagaan welke stellingen uit § 7.2 een analogon hebben voor Riemann-Stieltjes integralen. Het zal de lezer niet moeilijk vallen zelf de bewijzen te geven van de generalisaties van 7.2.3, 7.2.5, 7.2.6, 7.2.8, 7.2.9 en 7.2.12. Daar in 7.4.1 de lengten van de deelintervallen niet voorkomen moet de formulering van 7.2.13 aangepast worden om als generalisatie voor Riemann-Stieltjes integralen te dienen. Ook dit is niet moeilijk. Stelling 7.2.16 suggereert een verdere uitbreiding van het integraalbegrip. De volgende definitie stemt overeen met § 7.2 indien $g(x)=x$ zoals in 7.2.17 is vermeld.

7.4.4. DEFINITIE. *Laten* f *en* g *begrensde functies op* $[a,b]$ *zijn en* $I\in\mathbb{R}$. *Laat* $\int_a^b f(x)dg(x)$ *nog niet gedefinieerd zijn op grond van één van de voorafgaande definities. Als er bij iedere* $\varepsilon>0$ *een* $\delta>0$ *is zo dat voor iedere verdeling* $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n]$ *van* $[a,b]$ *met* $\Delta(V)<\delta$ *en voor iedere keuze van* $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *met* $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ *geldt*

$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})) - I|<\varepsilon$ *dan definiëren we*

$$\int_a^b f(x)dg(x) := I.$$

De lezer ga nu zelf na dat als g monotoon niet-dalend is en als f en g voldoen aan de voorwaarde van 7.4.4 de integraal $\int_a^b f(x)dg(x)$ bestaat in de zin van 7.4.3 en gelijk is aan het getal I uit 7.4.4. De reden waarom in 7.4.4 is geëist dan $\int_a^b f(x)dg(x)$ nog niet door vroegere definities bepaald was blijkt uit het voorbeeld $f(x):=0$ op $[0,1)$ en $f(x):=1$ op $[1,2]$, $g(x):=0$ op $[0,1]$ en $g(x):=1$ op $(1,2]$. Dan is volgens 7.4.3 $\int_0^2 f(x)dg(x) = 1$ maar er is géén getal I dat aan de voorwaarde van 7.4.4 voldoet! Desondanks kunnen we 7.4.4 gebruiken als uitbreiding van het integraalbegrip als géén van de andere definities uitkomst biedt.
We noemen de in 7.4.4 gedefinieerde integraal ook een Riemann-Stieltjes integraal. Generalisaties van stellingen als 7.2.20 en 7.2.21 zijn alleen mogelijk als de functie g monotoon niet-dalend is. De bewijzen zijn dan vrijwel gelijk aan die van 7.2.20 en 7.2.21. Ook dit kan de lezer eenvoudig controleren. Het laatste deel van § 7.2 handelde over de existentie van integralen en de berekening van integralen. We beschouwen analoge vragen nu voor Riemann-Stieltjes integralen.

7.4.5. STELLING. *Als* f *continu is op* $[a,b]$ *en* g *van begrensde variatie op* $[a,b]$ *dan bestaat* $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Bewijs. Op grond van 7.2.28 en 7.4.3 is het voldoende de stelling te bewijzen voor het geval dat g monotoon niet-dalend is. We kunnen dus met definitie 7.4.3 werken. Zij $\varepsilon>0$. Kies η zó dat $(g(b)-g(a))\eta<\varepsilon$. Daar f continu is op $[a,b]$ is f uniform continu op $[a,b]$ en dus is er een $\delta>0$ zo dat voor iedere verdeling $V:=$ $:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ met $\Delta(V)<\delta$ geldt dat voor elk deelinterval de schommeling van f kleiner dan η is. Dan is $S_{V,g}f-s_{V,g}f < \eta \sum_{i=1}^{n} \{g(x_i)-g(x_{i-1})\}<\varepsilon$. Dus is $\bar{\int}_a^b f(x)dg(x) - \underline{\int}_a^b f(x)dg(x) < \varepsilon$. Daar ε willekeurig was zijn onderintegraal en bovenintegraal gelijk.

Merk op dat de methode van 7.4.4 (via Riemann-sommen) hier ook van toepassing is (ga na!). Het bewijs van 7.4.5

geeft ons nog geen inzicht over de waarde van $\int_a^b f(x)dg(x)$. Daartoe analyseren we de integraal nu nauwkeuriger. Als g monotoon stijgend en continu is op $[a,b]$ dan heeft g een monotoon stijgende continue inverse $g^{\leftarrow}$ gedefinieerd op $[g(a),g(b)]$. Zij $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van $[a,b]$ en $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Definieer $\bar{x}_i:=g(x_i)$ $\bar{\xi}_i:=g(\xi_i)\in[\bar{x}_{i-1},\bar{x}_i]$. Dan is $[\bar{x}_0,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n]$ een verdeling van $[g(a),g(b)]$ waarvan de wijdte klein is als $\Delta(V)$ voldoende klein is (immers g is uniform continu op $[a,b]$). Verder is

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{g(x_i)-g(x_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(g^{\leftarrow}(\bar{\xi}_i))(\bar{x}_i-\bar{x}_{i-1}).$$

We zien dat in dit geval, op grond van de continuïteit van $f\circ g^{\leftarrow}$ en 7.2.16, geldt $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f\{g^{\leftarrow}(t)\}dt$. Een tweede geval dat eenvoudig te analyseren is, is als g een constante functie is. Iedere som $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\times$ $\times\{g(x_i)-g(x_{i-1})\}$ is dan 0 en dus $\int_a^b f(x)dg(x) = 0$.

Zij nu g een monotoon niet-dalende functie op $[a,b]$. Volgens 5.7.18 heeft g op $[a,b]$ eindig veel of aftelbaar veel discontinuïteiten van de eerste soort en is g elders continu. We beschouwen een aftelling van de sprongen s_k en wel zo dat $s_1\geq s_2\geq s_3\geq\ldots$. Laat y_k het punt in $[a,b]$ zijn waar g de sprong s_k heeft $(k=1,2,\ldots)$. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen we dat a en b niet sprongpunten van g zijn. Definieer $\tilde{g}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} s_k\times$ $\times\chi_{(a,x]}(y_k)$ voor $a\leq x\leq b$. Dan is $\tilde{g}$ monotoon op $[a,b]$ en $\tilde{g}$ heeft dezelfde sprongpunten als g met dezelfde sprongen. Definieer nu nog $\hat{g}$ op $[a,b]$ door $\hat{g}(a):=\hat{g}(b)=0$, $\hat{g}(x):=0$ als $\neg(\exists_{k\in\mathbb{N}}[x=y_k])$ en $\hat{g}(y_k):=g(y_k+0)-g(y_k)$ als $y_k\in(a,b)$. Dan is $\hat{g}(x)=0$ op $[a,b]$ met uitzondering van ten hoogste aftelbaar veel punten en bovendien is $\sum_{k=1}^{\infty}\hat{g}(y_k)$ convergent. Daar f continu is op $[a,b]$ dus uniform continu op $[a,b]$ is er bij gegeven $\varepsilon>0$ een verdeling $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ zo dat de schommeling van f op elk deelinterval $<\frac{1}{2}\varepsilon$ is. Als $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ geldt dan $|f(\xi_i)-f(\xi_{i+1})|<\varepsilon$. Dan is

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{\hat{g}(x_i)-\hat{g}(x_{i-1})\} + \hat{g}(a)f(a)-\hat{g}(b)f(b)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}(x_i)\{f(\xi_i)-f(\xi_{i+1})\} + \hat{g}(a)\{f(a)-f(\xi_1)\} +\right.$$

$$\left. + \hat{g}(b)\{f(\xi_n)-f(b)\}\right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}(y_k) + \tfrac{\varepsilon}{2}\hat{g}(a) + \tfrac{\varepsilon}{2}\hat{g}(b).$$

Hieruit volgt: $\int_a^b f(x)d\hat{g}(x) = \hat{g}(b)f(b)-\hat{g}(a)f(a) = 0$.
Daar $g-\tilde{g}+\hat{g}$ monotoon en continu is op $(a,b]$ is door de voorgaande analyse nu alleen nog te bestuderen $\int_a^b f(x)d\tilde{g}(x)$ waarin nog steeds f continu op $[a,b]$ is. Zij $\varepsilon>0$. Daar f uniform continu is op $[a,b]$ is er een verdeling $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ zo dat de schommeling van f op elk deelinterval van V kleiner is dan $\varepsilon_1:=\varepsilon/(\tilde{g}(b)-\tilde{g}(a))$.
Dan is

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\tilde{g}(x_i)-\tilde{g}(x_{i-1})\} - \sum_{k=1}^{\infty} f(y_k)s_k\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sum_{k=1}^{\infty} s_k\chi_{(x_{i-1},x_i]}(y_k)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} f(y_k)s_k\chi_{(x_{i-1},x_i]}(y_k)\right|<$$

$$< \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{\infty} s_k = \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was is bewezen dat $\int_a^b f(x)d\tilde{g}(x) =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} s_k f(y_k)$.
We zien dus dat een reeks geschreven kan worden als een Riemann-Stieltjes integraal! We geven nog enkele voorbeelden als toelichting op bovenstaande analyse.

VOORBEELDEN

7.4.6. Zij $g:[0,3]\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $g(x):=x^2$ voor $0\le x<1$, $g(x):=1$ voor $1\le x<2$, $g(x):=x$ voor $2\le x\le 3$.
Zij f continu op $[0,3]$. In de notatie van voorgaande analyse is $\hat{g}(x)=0$ voor $0\le x\le 3$, $\tilde{g}(x)=0$ voor $0\le x<2$ en $\tilde{g}(x)=1$ voor $2\le x\le 3$. Er is één sprongpunt $y_1=2$ met $s_1=1$.
Daar $g-\tilde{g}$ constant is op $[1,2]$ is $\int_1^2 f(x)d(g-\tilde{g})(x) = 0$.
We vinden

$$\int_1^3 f(x)dg(x) = \int_0^1 f(t^{\frac{1}{2}})dt + \int_2^3 f(t)dt + f(2).$$

7.4.7. Zij $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continu. Zij $g(x):=[x]:=\max\{n\in\mathbf{Z}\mid n\le x\}$ voor $x\in[0,\infty)$. Dan is met de hiervoor gebruikte notatie $\tilde{g}(x)=g(x)$ op $[0,\infty)$ en $\hat{g}(x)=0$ op $[0,\infty)$. De sprongpunten van g zijn de punten $y_k=k$ $(k=1,2,\ldots)$ elk met sprong 1. Dus geldt

$$\int_0^n f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^n f(k).$$

Als $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ convergeert kunnen we dit op de gebruikelijke manier generaliseren tot $\int_0^\infty f(x)d[x] = \sum_{k=1}^\infty f(k)$.

7.4.8. Laten $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ rijen reële getallen zijn. Definieer $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ door $f(x):=0$ op $[0,\frac{1}{2})$ en $\forall_{n\in\mathbf{N}}$ $[f(x):=a_n$ op $[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})]]$; $g:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ door $g(x):=$ $:=\sum_{k=1}^\infty b_k\chi_{(0,x]}(k)$. Dan zijn f en g trapfuncties. De sprongpunten van g zijn $y_k=k$ en de sprong in y_k is b_k. Dan is $\int_0^n f(x)dg(x)=\sum_{k=1}^n a_kb_k$. Hoewel f niet continu is bestaat deze Riemann-Stieltjes integraal omdat ieder sprongpunt van f ligt in een interval waar g constant is.

De oplettende lezer zal wellicht enige angst voor de mogelijkheid van verwarring gevoeld hebben bij definitie 7.4.3 resp. 7.4.4 in verband met de na 7.1.11 gemaakte afspraak "$df=f'(x)dx$" die we ook bij bepaalde integralen hebben gebruikt (zie voorbeeld 7.2.33). De volgende stelling zal hem geruststellen.

7.4.9. STELLING. *Zij* $f\in C([a,b])$, $g\in C^1([a,b])$. *Dan is*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Bewijs. Volgens 7.2.25 bestaat $\int_a^b f(x)g'(x)dx$. Het is eenvoudig in te zien dat g van begrensde variatie is (zie opgave 7.10.18). Dus bestaat $\int_a^b f(x)dg(x)$ volgens 7.4.5. Zoals reeds na het bewijs van 7.4.5 is opgemerkt kunnen we het bewijs met behulp van Riemann-sommen geven. Zij $\varepsilon>0$. Zij $M:=\max\{|g'(x)|\mid a\le x\le b\}$. Daar f uniform continu is op $[a,b]$ is er volgens 7.2.16 een verdeling

$V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ zo dat de schommeling van f op elk deelinterval van V kleiner dan $\varepsilon(2M(b-a))^{-1}$ is èn iedere bij V behorende Riemann-som van fg' minder dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ van $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ verschilt. Laat, voor $i=1,2,\ldots,n$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Volgens het gemiddelde theorema 6.4.2 is er voor $i=1,2,\ldots,n$ een $\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$ met $g(x_i)-g(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})g'(\eta_i)$. Dan is

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{g(x_i)-g(x_{i-1})\} - \int_a^b f(x)g'(x)dx\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\cdot M\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was is het gestelde bewezen.

Deze stelling geeft de aansluiting van de nieuwe begrippen bij wat we "de methode van substitutie" genoemd hebben. Ook "partieel integreren" is te generaliseren tot Riemann-Stieltjes integralen en wel zeer eenvoudig:

7.4.10. STELLING. *Als* f *en* g *beide continu en van begrensde variatie op* $[a,b]$ *zijn dan is*

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

Bewijs. Beide integralen in het linkerlid bestaan volgens 7.4.5. Zij $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van $[a,b]$. Kies $\xi_i:=x_i$ en $\eta_i:=x_{i-1}$ voor $i=1,2,\ldots,n$. Dan is

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\{g(x_i)-g(x_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{n} g(\eta_i)\{f(x_i)-f(x_{i-1})\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\} = f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

waaruit het gestelde volgt.

7.4.11. OPMERKINGEN. (i) Door 7.4.10 toe te passen op de integraal uit voorbeeld 7.4.8 vinden we de formule uit 4.5.25 terug. De sommatie-methode van Abel is niets anders dan het partieel integreren van een geschikte Riemann-Stieltjes integraal.

(ii) Combinatie van 7.4.9 en 7.4.10 geeft ons 7.2.35 nog eens.

7.4.12. OPGAVE. Bewijs dat 7.4.10 ook geldt als slechts gegeven is dat f continu is op [a,b] en g van begrensde variatie op [a,b].

7.5. Benadering van integralen

Het zal in de praktijk vaak voorkomen dat een integraal niet expliciet kan worden bepaald. We moeten dan met een benadering genoegen nemen (die we soms met een rekenmachine zullen bepalen). Volgens 7.2.16 kunnen we $\int_a^b f(x)dx$ benaderen met behulp van Riemann-sommen maar we hebben hier pas wat aan als we in staat zijn de fout in de benadering te schatten. We beschouwen eerst enige eenvoudige methoden.

7.5.1. STELLING. *(Trapeziumregel.) Als* f *begrensd en integreerbaar is op* [a,b], $n\in\mathbf{N}$ *en* $y_i^{(n)}:=f(a+i(\frac{b-a}{n}))$ *voor* $i=0,1,\ldots,n$ *dan is*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\{y_0^{(n)}+2y_1^{(n)}+2y_2^{(n)}+\ldots+2y_{n-1}^{(n)}+y_n^{(n)}\}.$$

Bewijs. Door in 7.2.16 voor V te kiezen een verdeling van [a,b] in n gelijke delen en dan $\xi_i:=x_{i-1}$ resp. $\xi_i:=x_i$ te nemen vinden we twee Riemann-sommen, waarvan de som $\frac{b-a}{n}\{y_0^{(n)}+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i^{(n)}+y_n^{(n)}\}$ is.

In $\mathbf{R}^2$ heeft het trapezium met hoekpunten $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(x_{i-1},y_{i-1}^{(n)})$, $(x_i,y_i^{(n)})$ de oppervlakte $\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{i-1}^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}$.
(We nemen hier gemakshalve aan dat $y_{i-1}^{(n)}$ en $y_i^{(n)}$ beide positief zijn.) Dit verklaart de naam van 7.5.1. Zie verder ook 7.5.14.
Men kan 7.5.1 ook als volgt opvatten. Verdeel [a,b] in n

gelijke delen en bepaal $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ zo dat in de deelpunten x_i geldt $f(x_i)=g(x_i)$ en zo dat op ieder interval g lineair is, d.w.z. $g(x)=\alpha_i x+\beta_i$ voor $x_{i-1}\le x\le x_i$. Dan is de integraal $\int_a^b g(x)dx$ een benadering voor $\int_a^b f(x)dx$ d.w.z. de gemaakte fout $\to 0$ als $n\to\infty$. Men kan hopen een betere benadering te krijgen op de volgende manier. Verdeel $[a,b]$ in $2n$ gelijke delen en noem de deelpunten $x_0,x_1,\dots,x_{2n}$ en de bijbehorende waarden van f weer y_i. Definieer de functie g op $[a,b]$ door $g(x_i)=y_i$ voor $i=0,1,2,\dots,2n$ en door de eis dat g op $[x_{2k-2},x_{2k}]$ een kwadratische functie is $(k=1,2,\dots,n)$. Een eenvoudige berekening leert dat dan $\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k})$. Deze benadering is bekend als de regel van Simpson.

7.5.2. STELLING. *(Regel van Simpson.) Als* f *begrensd en integreerbaar is op* $[a,b]$, $n\in\mathbf{N}$ *en* $y_i^{(n)}:=f(a+\frac{i}{2n}(b-a))$ *voor* $i=0,1,\dots,2n$ *dan is*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}(y_{2k-2}^{(n)}+4y_{2k-1}^{(n)}+y_{2k}^{(n)}).$$

Bewijs. Het gestelde volgt uit 7.2.16 door lineaire combinatie van de Riemann-sommen $\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} y_k^{(n)}$, $\frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{2n} y_k^{(n)}$ en $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1}^{(n)}$.

We analyseren nu nog eens wat we in 7.5.1 en 7.5.2 hebben gedaan. In beide gevallen is $[a,b]$ in een aantal gelijke delen verdeeld en op elk deelinterval is de functie f benaderd door resp. een lineaire en een kwadratische functie. Door de substitutie $x=:x_{i-1}+t(x_i-x_{i-1})$ gaat $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ over in een integraal over $[0,1]$. We beperken ons nu tot een functie f begrensd en integreerbaar op $[0,1]$. Neem nu bovendien aan dat $f\in C^1([0,1])$. Dan is (zie 7.2.37):

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\} - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx.$$

Als f een lineaire functie is, dus f' een constante, dan is de integraal in het rechterlid 0. Als f "goed" benaderd wordt door een lineaire functie zal de integraal in het rechterlid "klein" zijn. Als we de integraal weglaten vinden we de trapeziumregel terug. In plaats van het procédé van 7.5.2 te volgen proberen we het idee van partiële integratie verder uit te buiten. Daartoe zoeken we een functie p op $[0,1]$ met $p'(x)=x-\frac{1}{2}$. Dan is als $f\in C^2([0,1])$:

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\}-p(x)f'(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 p(x)f''(x)dx.$$

We willen $\int_0^1 f(x)dx$ benaderen door de integraal in het rechterlid weg te laten. Als f een lineaire functie is kan dat. Het zou prettig zijn als deze integraal ook 0 is voor het geval dat f kwadratisch is, d.w.z. f" een constante. Daar $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+C$ is $\int_0^1 p(x)dx = 0$ als $C=1/12$. We kunnen bij deze keuze van C weer zeggen dat de integraal $\int_0^1 p(x)f''(x)dx$ klein zal zijn als f goed benaderd wordt door een kwadratische functie. We voeren de volgende notaties in: $B_0(x):=1$, $B_1(x):=x-\frac{1}{2}$, $B_2(x):=x^2-x+\frac{1}{6}$ voor $x\in\mathbf{R}$. De voorgaande analyse kunnen we nu samenvatten: Als $f\in C^2([0,1])$ is

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 B_0(x)f(x)dx = B_1(x)f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\} - \frac{1}{2!} B_2(x)f'(x)\Big]_0^1 + \frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\} - \frac{1}{12}\{f'(1)-f'(0)\} + \frac{1}{2!}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx.$$

Als we dit proces verder kunnen voortzetten ontstaat een rij polynomen $B_0, B_1, B_2, \ldots$ waarbij we B_n steeds zo kiezen dat $B_n'=nB_{n-1}$ en $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$. De rij is hierdoor bepaald. We zullen nu deze rij langs een volkomen andere weg construeren, enige eigenschappen bewijzen en daarna terugkeren tot integratieformules.

7.5.3. DEFINITIE. *Voor* $n\in\mathbf{N}$, $t\in\mathbf{R}$ *definiëren we* $B_n(t)$ *door*

$$ze^{zt}(e^z-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{z^n}{n!}.$$

In 8.4.8 wordt aangetoond dat de convergentiestraal van deze machtreeks 2π is. Voorlopig weten we niet meer dan dat de convergentiestraal $\geq\frac{1}{4}$ is, door toepassing van 6.9.30 op $f(z) := \frac{e^z-1}{z}$ en door toepassing van 6.9.29 (ga dit na!). We kunnen hieruit eigenschappen van de coëfficiënten $B_n(t)$ in deze Taylorreeks afleiden waaruit we achteraf kunnen aantonen dat de convergentiestraal inderdaad 2π is zonder van de theorie van hoofdstuk 8 gebruik te maken. De coëfficiënten $B_n(t)$ heten *polynomen van Bernoulli* (dat het inderdaad polynomen zijn tonen we in 7.5.7 (i) aan).

7.5.4. DEFINITIE. *De rij* $B_0, B_1, B_2, \ldots$, *genaamd getallen van Bernoulli wordt gedefinieerd door*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = z(e^z-1)^{-1},$$

dus $B_n := B_n(0)$.

We vinden zo o.a. $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_5=0$. We wijzen er op dat in sommige boeken een andere notatie wordt gebruikt. We zullen bewijzen dat $B_3=B_5=B_7=\ldots=0$. Daarom nummert men wel eens alleen de andere getallen van Bernoulli.

7.5.5. STELLING. *Voor de getallen van Bernoulli geldt:*

(i) $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ *voor* $n\geq 2$;

(ii) $\forall_{n\in\mathbf{N}} [B_{2n+1}=0]$.

Bewijs. (i) Uit 7.5.4 volgt

$$z = (e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right).$$

Hieruit volgt volgens 6.9.29 voor $n\geq 2$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k},$$

dus

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

(ii) De functie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gegeven door $g(x):=x(e^x-1)^{-1}+\frac{1}{2}x$ is een even functie (ga dit na!). Dus is $g^{(2n-1)}(x)=$ $=-g^{(2n-1)}(-x)$ voor $n\in\mathbf{N}$ (kettingregel!), waaruit volgt $g^{(2n-1)}(0)=0$ voor $n\in\mathbf{N}$. Volgens 6.8.1 zijn de coëfficiënten met oneven index in de Taylorreeks van g allemaal 0.

7.5.6. OPGAVE. Bewijs dat in een omgeving van 0 geldt

(i) $$\frac{z}{\tan z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!},$$

(ii) $$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}.$$

7.5.7. STELLING. *Voor de polynomen van Bernoulli geldt:*

(i) $$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}t^k,$$

(ii) $B_n(1) = B_n$ *voor* $n\geq 2$,

(iii) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$ *voor* $n\geq 1$,

(iv) $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ *voor* $n\geq 1$.

Bewijs. (i) Uit 7.5.3 en 7.5.4 volgt met 6.9.29

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} z^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} B_m\frac{z^m}{m!}\right),$$

dus $\frac{1}{n!} B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}$ waaruit (i) volgt. Hierdoor wordt de naam polynomen van Bernoulli gerechtvaardigd.

(ii) Neem in (i) t=1 en pas 7.5.5 (i) toe.

(iii) Uit (i) volgt door differentiëren

$$B_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}B_{n-k}t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}t^{k-1} =$$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}B_{n-1-\ell}t^{\ell} = nB_{n-1}(t).$$

(iv) Uit (ii) en (iii) volgt met 7.2.32

$$\int_0^1 B_n(t)dt = \frac{1}{n+1} \left. B_{n+1}(t)\right]_0^1 = 0 \text{ als } n\geq 1.$$

7.5.8. OPGAVE. Bewijs dat

(i) $B_n(t+1)-B_n(t) = nt^{n-1}$ voor $n\geq 0$.

(ii) $B_n^{(\ell)}(1) = B_n^{(\ell)}(0) = n!\,\frac{B_{n-\ell}}{(n-\ell)!}$ voor $\ell<n-1$,

$B_n^{(n-1)}(1) = B_n^{(n-1)}(0)+n! = \frac{1}{2}n!$

De volgende stelling zullen we in deze paragraaf niet gebruiken. We plaatsen de stelling hier om alle informatie over Bernoulli-polynomen bij elkaar te hebben.

7.5.9. STELLING. *Voor* $0\leq x\leq 1$ *geldt*

$$B_n(x) = \begin{cases} n!(2\pi)^{-n}(-1)^{\frac{1}{2}n+1}\, 2\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2\pi kx)}{k^n} & \textit{als } n\geq 0 \textit{ en } n \textit{ even,} \\[2ex] n!(2\pi)^{-n}(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\, 2\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2\pi kx)}{k^n} & \textit{als } n\geq 3 \textit{ en } n \textit{ oneven.} \end{cases}$$

Bewijs. We gebruiken enige resultaten van § 7.6 en § 7.8. In 7.8.14 wordt bewezen dat $x^2 = \frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(kx)}{k^2}$ voor $-\pi\leq x\leq\pi$. Door hierin $x=2\pi t-\pi$ te stellen volgt 7.5.9 voor $n=2$. Daar de reeks uniform convergeert kunnen we met volledige inductie de andere ontwikkelingen bewijzen door termsgewijs integreren hetgeen volgens 7.6.2 geoorloofd is.

Merk op dat de ontwikkeling in 7.5.9 volgens 7.8.13 ook voor $n=1$ geldt als $0<x<1$. Merk ook op dat voor even n geldt: $\max\{|B_n(x)|\,|\,0\leq x\leq 1\} = |B_n|$.

7.5.10. OPGAVE. De functie $\zeta:\{z\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Re}\, z > 1\}\to\mathbf{C}$ wordt gedefinieerd door $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s\log n}$.

(i) Bewijs dat deze reeks inderdaad convergent is en toon aan dat voor $m\in\mathbf{N}$ geldt

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m}\,\frac{B_{2m}}{(2m)!}\ .$$

(ii) Bewijs hiermee dat de reeks in 7.5.4 convergentiestraal 2π heeft.

Nu we genoeg kennis over de polynomen van Bernoulli hebben verzameld keren we terug tot integratieformules.

7.5.11. STELLING. *Als* $f \in C^{2m}([0,1])$ *dan is*

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{2}\{f(0)+f(1)\} +$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\} + \int_0^1 f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx$$

Bewijs. Voor m=1 hebben we deze formule al bewezen. We passen nu volledige inductie toe. Als de formule voor $m \in \mathbf{N}$ juist is en $f \in C^{2m+2}([0,1])$ dan is volgens 7.2.35, 7.5.7 (ii) en (iii) en 7.5.5 (ii):

$$\int_0^1 f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx =$$

$$= f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m+1}(x)}{(2m+1)!}\Big]_0^1 - \int_0^1 f^{(2m+1)}(x)\frac{B_{2m+1}(x)}{(2m+1)!}\,dx =$$

$$= -f^{(2m+1)}(x)\frac{B_{2m+2}(x)}{(2m+2)!}\Big]_0^1 + \int_0^1 f^{(2m+2)}(x)\frac{B_{2m+2}(x)}{(2m+2)!}\,dx,$$

d.w.z. de formule is juist voor m+1.

Merk op dat als in 7.5.11 de functie een polynoom is van de graad 2m, dus $f^{(2m)}$ een constante, de integraal in het rechterlid 0 is volgens 7.5.7 (iv). We kunnen door herhaalde toepassing van 7.5.11 tot een uitspraak over partiële sommen van reeksen komen nl.:

7.5.12. STELLING. *(Euler-Maclaurin.) Zij* $f \in C^{2m}([1,n])$ *en*

$$C := \tfrac{1}{2}f(1) - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, f^{(2k-1)}(1).$$

Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_1^n f(x)dx + C + R(n),$$

waarin

$$R(n) := \tfrac{1}{2}f(n) + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) +$$

$$- \int_1^n f^{(2m)}(x)\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}\, dx$$

(*hierin is* $[x]:=max\{n\in\mathbf{Z} \mid n\leq x\}$).

Bewijs. Definieer voor $i=1,2,\ldots,n-1$ de functie f_i op $[0,1]$ door $f_i(x):=f(x+i)$. Pas 7.5.11 toe en sommeer voor $i=1,\ldots,n-1$.

In vele toepassingen van 7.5.12 zal m vast zijn en $n\to\infty$. We zullen de kracht van de stellingen 7.5.11 en 7.5.12 nu illustreren met een aantal voorbeelden.

VOORBEELDEN

7.5.13. Neem aan dat we $\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ (zie 7.5.10) willen bepalen in 10 decimalen nauwkeurig. Daar $\sum_{n=N}^{\infty} n^{-2} > \int_N^{\infty} x^{-2}dx = N^{-1}$ hebben we meer dan $2\cdot 10^{10}$ termen van de reeks nodig! In plaats daarvan passen we nu 7.5.12 toe om $\sum_{i=100}^{\infty} i^{-2}$ te schatten. We nemen dus in 7.5.12 $f(x):=x^{-2}$ en laten de index i bij $i=100$ beginnen. Kies $m=2$. Door 7.5.12 op te schrijven voor $\sum_{i=100}^{n} i^{-2}$ en dan $n\to\infty$ vinden we, daar

$$f^{(\ell)}(x) = (-1)^{\ell}(\ell+1)!\, x^{-\ell-2},$$

$$C = \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}+\frac{B_2}{2!}\cdot 2\cdot 10^{-6}+\frac{B_4}{4!}\cdot 24\cdot 10^{-10}$$

en

$$R := \lim_{n\to\infty} R(n) = \int_{100}^{\infty} \frac{5!}{x^6}\,\frac{B_4(x-[x])}{4!}\, dx.$$

Door berekening met 7.5.7 (i) en 7.5.4 volgt $|B_4(x-[x])| \leq \frac{1}{30}$ (dit volgt ook uit 7.5.9), dus is $|R| \leq \frac{1}{6}\int_{100}^{\infty} x^{-6}dx = \frac{1}{3}\cdot 10^{-11}$. Het resultaat is $\sum_{i=100}^{\infty} i^{-2} = 0{,}0100501667$

waarbij het laatste cijfer ontstaat door afronding naar boven. De fout is kleiner dan 4.10^{-11}. We vinden nu $\frac{1}{6}\pi^2$ in 10 decimalen nauwkeurig door de eerste 99 termen van $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ bij het hiervoor gevonden getal op te tellen.

7.5.14. Door de substitutie $f(t)=g(a+ht)$ gaat 7.5.11 over in

$$\int_a^{a+h} g(x)dx = \tfrac{1}{2}h\{g(a)+g(a+h)\} +$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k}\{g^{(2k-1)}(a+h)-g^{(2k-1)}(a)\} +$$

$$+ h^{2m}\int_a^{a+h} g^{(2m)}(x)\frac{1}{(2m)!} B_{2m}(\tfrac{x-a}{h})\,dx.$$

Verdelen we $[0,1]$ in n gelijke delen van de lengte $h=n^{-1}$ en definiëren we (evenals in 7.5.1) $y_i^{(n)}=g(ih)$ voor $i=0,1,\ldots,n$ dan vinden we met behulp van bovenstaande formule

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2n}\{y_0^{(n)} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i^{(n)} + y_n^{(n)}\} +$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k}\{g^{(2k-1)}(1)-g^{(2k-1)}(0)\} + R$$

$$\text{met } |R| \le h^{2m}\frac{|B_{2m}|}{(2m)!}\int_0^1 |g^{(2m)}(x)|dx.$$

Als we dit toepassen voor $\int_0^1 (1+x^2)^{-1}dx$ met $n=4$, $m=2$ en de term R weglaten dan vinden we (volgens 7.2.32 en 6.3.5 h)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\{1 + \frac{32}{17} + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{1}{2}\} + \frac{1}{384} = 0{,}785398,$$

een antwoord dat in 6 decimalen nauwkeurig is!

7.5.15 Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks met partiële sommen s_n gedefinieerd door

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n. \text{ Dan is}$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} + \log(1-\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2}) \quad (n\to\infty)$$

volgens 6.8.12. Dan is volgens 5.6.10 de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent d.w.z. $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \log n)$ bestaat. Deze limiet heet de *constante van Euler* en wordt aangegeven met de letter γ, (γ=0,5772157...).
Daar $\sum_{k=2}^{n} k^{-1} < \int_1^n t^{-1}dt < \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ geldt $0<\gamma<1$. Om nauwkeuriger informatie te krijgen over de rij $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ passen we 7.5.12 toe met $f(x):=x^{-1}$. In $R(n)$ schrijven we de integraal over $[1,n]$ als verschil van integralen over $[1,\infty)$ en $[n,\infty)$. We vinden dan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k}n^{-2k}+\int_n^{\infty} x^{-2m-1}B_{2m}(x-[x])dx =$$

$$= \log n + \gamma+\frac{1}{2n}-\sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{2k}n^{-2k}+O(n^{-2m}), \quad (n\to\infty).$$

Merk op dat uit 7.5.12 in eerste instantie deze formule zou volgen met een "constante" C_m i.p.v. γ. Daar we weten dat $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$ als $n\to\infty$ is deze C_m blijkbaar niet van m afhankelijk (nl. $C_m=\gamma$).

7.5.16. Beschouw de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ met partiële sommen s_n gedefinieerd door $s_n := \log(n!) - (n+\frac{1}{2}) \log n + n$. Dan is $a_n=s_n-s_{n-1}=(n-\frac{1}{2})\log(1 - \frac{1}{n})+1=O(n^{-2})$ $(n\to\infty)$ volgens 6.8.12. Hieruit volgt volgens 5.6.10 dat de reeks convergeert. Hiermee is bewezen dat $\lim_{n\to\infty} n!e^n n^{-n-\frac{1}{2}}$ bestaat. Noem deze limiet C. Dan is

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\left\{\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}^2 = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \frac{2^{4n}\{n!\}^4}{\{(2n)!\}^2} = \tfrac{1}{2}C^2,$$

en dus is volgens 7.2.34 (ii) $C=(2\pi)^{\frac{1}{2}}$. Hiermee is bewezen

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1)), \quad (n\to\infty).$$

Dit wordt de *formule van Stirling* genoemd.
Om meer informatie te krijgen over de term o(1) passen we 7.5.12 toe op $f(x) := \log x$. Zij

$$C_m := 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)} + \frac{1}{2m}\int_1^\infty x^{-2m}B_{2m}(x-[x])dx.$$

We vinden dan

$$\log(n!) = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + C_m +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}n^{1-2k} - \frac{1}{2m}\int_n^\infty x^{-2m}B_{2m}(x-[x])dx.$$

Uit de formule van Stirling volgt dat $C_m = \frac{1}{2}\log(2\pi)$ voor alle m. We hebben dan de volgende verscherping gevonden

$$\log(n!) = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) +$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}n^{1-2k} + O(n^{1-2m}) \text{ voor } n\to\infty.$$

De lezer kan zelf gemakkelijk nagaan hoe veel werk het is om door achtereenvolgende vermenigvuldigingen een getal als 100! te bepalen. Passen we echter de verscherpte formule van Stirling toe met m=3 en laten we de O-term weg dan is de fout in log(100!) kleiner dan

$$\frac{1}{6}B_6\int_{100}^\infty x^{-6}dx < 10^{-13}$$

7.6. Integralen met een parameter

Naast het begrip limiet zelf hebben we begrippen bestudeerd die op het limietbegrip rusten, nl. continuïteit en differentieerbaarheid. In zekere zin berust ook integreerbaarheid (zie 7.2.16) op het limietbegrip. Eén van de voor de hand liggende vragen is of twee zulke limieten verwisseld mogen worden. Vragen van dit type hebben we o.a. gezien in 5.10.25, 5.6.11 en 6.5.5. In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met het verwisselen van "lim" en $\int$.

7.6.1. STELLING. *Zij* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *een rij op* [a,b] *integreerbare begrensde functies en neem aan dat* $f_n\to f$ *als* $n\to\infty$, *uniform op* $[a,b]$. *Dan is* f *op* $[a,b]$ *integreerbaar en*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bewijs. (i) Zij $\sigma>0$, $\eta>0$. Er is een $n\in\mathbf{N}$ zo dat voor alle $x\in[a,b]$ geldt $|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{3}\sigma$. Er is volgens 7.2.13 een verdeling $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ zō dat de som van de lengten van de deelintervallen $[x_{i-1},x_i]$ van V waarvoor $\Delta(f_n;x_{i-1},x_i)>\frac{1}{3}\sigma$ is, kleiner dan η is. Als $\Delta(f_n;x_{i-1},x_i)<\frac{1}{3}\sigma$ dan is $\Delta(f;x_{i-1},x_i)<\sigma$. Er is aan de voorwaarden van 7.2.13 voldaan. Dus f is integreerbaar over $[a,b]$.

(ii) Zij $\varepsilon>0$. Er is een $N\in\mathbf{N}$ zō dat voor alle $n>N$ en voor alle $x\in[a,b]$ geldt $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon(b-a)^{-1}$. Volgens 7.2.20 en 7.2.21 is

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx < \varepsilon \text{ voor } n>N.$$

Daar ε willekeurig was is het gestelde bewezen.

Een bijzonder geval van deze stelling kunnen we zo vaak toepassen dat we het apart noemen:

7.6.2. STELLING. *Als voor alle* $n\in\mathbf{N}$ *de functie* u_n *continu is op* $[a,b]$ *en* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *uniform convergeert op* $[a,b]$ *dan is* $\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

Bewijs. Voor iedere $N\in\mathbf{N}$ is $\sum_{n=1}^{N} u_n$ een continue en dus integreerbare functie op $[a,b]$. Het gestelde volgt dan uit 7.6.1.

VOORBEELDEN

7.6.3. Zij $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f_n(x) := nx^2 \sin\frac{1}{nx}$ voor $x\neq 0$ en $f_n(0):=0$ $(n=1,2\ldots)$. Volgens 6.4.15 geldt, voor $y\in\mathbf{R}$, $\sin y = y - \frac{1}{2}y^2 \sin(\theta y)$ met $0<\theta<1$. Dus geldt

$$\left|x - nx^2 \sin\frac{1}{nx}\right| = nx^2\left|\frac{1}{nx} - \sin\frac{1}{nx}\right| \le nx^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{(nx)^2} = \frac{1}{2n}.$$

Hieruit volgt, met $f(x):=x$ op $\mathbb{R}$, dat $f_n \to f$ uniform op $\mathbb{R}$. Uit 7.6.1 volgt dan $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$.

7.6.4. Om $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx$ te bepalen gaan we als volgt te werk. Ten eerste bestaat de integraal omdat de integrand op $(0,1)$ continu is, $\lim_{x\downarrow 0} \frac{\log(1-x)}{x} = -1$ en voor $x\uparrow 1$ geldt $\frac{\log(1-x)}{x} = O((1-x)^{-\frac{1}{2}})$. (Zie 4.3.4 en 7.3.9.) Volgens 6.8.6 is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ uniform convergent op $[0,a]$ als $0<a<1$. We vinden, volgens 6.8.1 en 7.6.2

$$\int_0^a \frac{\log(1-x)}{x} dx = - \int_0^a \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} .$$

Daar $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ convergeert met som $\frac{1}{6}\pi^2$ (7.5.10) is volgens 7.3.1 en de stelling van Abel (6.8.9)

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = \lim_{a\uparrow 1} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} \right) = - \frac{1}{6}\pi^2 .$$

Merk op dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ niet uniform convergeert op $[0,1)$ zodat we 7.6.2 niet rechtstreeks konden toepassen.

OPGAVEN

7.6.5. Bewijs dat $\int_0^1 \frac{x+\log(1-x)}{x^2} dx$ bestaat en bepaal deze integraal.

7.6.6. Bepaal $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{4}\right)^n \right) dx$.

7.6.7. Als $u_n \in C^1([a,b])$ voor $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ convergent is en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ uniform convergent is op $[a,b]$ dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergent voor $x\in[a,b]$ en $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$. Bewijs dit.

Naast 7.6.1 en 7.6.2 zijn er nog vele stellingen betreffende verwisseling van limiet en integratie waarin uniforme convergentie niet geëist wordt. Voor deze stellingen zijn eenvoudige bewijzen pas mogelijk als we het integraalbegrip uitbreiden (Lebesgue-integraal, zie [20], [25]). We volstaan met enkele van deze stellingen te noemen. De geïnteresseerde lezer kan bijv. in [20] bewijzen vinden.

7.6.8. (Levi, Lebesgue). Als de rij $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ op [a,b] integreerbare functies monotoon convergeert naar een op [a,b] integreerbare functie u dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

7.6.9. (Arzelà). Als de rij $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ op [a,b] integreerbare functies uniform begrensd is op [a,b] en convergeert naar een integreerbare functie u op [a,b] dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

We zullen nog enkele voorbeelden behandelen waaruit men enig idee kan krijgen hoe te handelen als géén van de beschikbare stellingen een verwisseling van limieten rechtvaardigt.

VOORBEELDEN

7.6.10. Zij $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f_n(x):=n(e^{xn^{-\frac{1}{2}}}-1-xn^{-\frac{1}{2}})$.

Door de substitutie $t=ne^{xn^{-\frac{1}{2}}}$ vinden we met 7.3.17 $n! = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f_n(x)}dx$. Volgens 6.4.15 geldt $f_n(x)=$ $=\frac{1}{2}x^2e^{\theta xn^{-\frac{1}{2}}}$ met $0<\theta<1$ en dus is $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{2}x^2$. Volgens 7.3.20 is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}$. We hebben dus een tweede bewijs voor de in 7.5.16 bewezen formule van Stirling als we kunnen aantonen dat

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f_n(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty} e^{-f_n(x)}\right)dx.$$

We tonen dit aan voor de integraal over $[0,\infty)$ en laten het (volkomen analoge) stuk $(-\infty,0]$ aan de lezer over.

Daar volgens 6.4.16 geldt $f_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} n^{1-\frac{1}{2}k}$ is op $[0,\infty)$ voor iedere x de rij $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ dalend met limiet $\frac{1}{2}x^2$. Zij $\varepsilon>0$. Er is een $a\in[0,\infty)$ zo dat $\int_a^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx < \frac{1}{3}\varepsilon$ en dan is dus ook $\int_a^\infty e^{-f_n(x)}dx < \frac{1}{3}\varepsilon$ voor alle $n\in\mathbf{N}$. Omdat de rij f_n op $[0,a]$ monotoon is (puntsgewijs), iedere f_n continu is en ook de limietfunctie continu is, is volgens 5.6.12 (Dini) de rij $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ op $[0,a]$ uniform convergent. Er is dus een $N\in\mathbf{N}$ zó dat voor alle $n>N$ geldt

$$\left|\int_0^a e^{-f_n(x)}dx - \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right| < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ (volgens 7.6.1).}$$

Dan is $\left|\int_0^\infty e^{-f_n(x)}dx - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right| < \varepsilon$ voor $n>N$.

7.6.11. (Hardy). Als $\sum_{n=0}^\infty a_n$ een convergente reeks is dan is

$$\int_0^\infty \left(e^{-x}\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{x^n}{n!}\right)dx = \sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty e^{-x}\frac{x^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Om dit te bewijzen merken we op dat $a_n=O(1)$, $(n\to\infty)$.

Dus is $\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{x^n}{n!}$ uniform convergent op $[0,A]$ als $A>0$ volgens 6.8.6. Volgens 7.6.2 geldt

$$\int_0^A (e^{-x}\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{x^n}{n!})dx = \sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^A e^{-x}\frac{x^n}{n!}dx =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty a_n - \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\int_A^\infty e^{-x}x^n dx.$$

We moeten dus bewijzen dat $\lim_{A\to\infty}\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\int_A^\infty e^{-x}x^n dx = 0.$

Merk op dat $\int_A^\infty e^{-x}x^n dx = n!e^{-A}\sum_{m=0}^{n}\frac{A^m}{m!}$. Zij $s_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Dan is

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_A^\infty e^{-x}x^n dx = e^{-A}\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s_{n+1})\sum_{m=0}^{n}\frac{A^m}{m!} =$$

$$= e^{-A}\sum_{n=0}^{\infty} s_n\frac{A^n}{n!}.$$

Zij $\varepsilon>0$. Er is een $N\in\mathbf{N}$ zo dat voor $n>N$ geldt $|s_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ (omdat $\sum_{n=0}^\infty a_n$ convergent is). Zij $M:=\sup\{|s_n| \mid n\geq 0\}$. Dan is $|e^{-A}\sum_{n=0}^{\infty} s_n\frac{A^n}{n!}| \leq Me^{-A}\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!} + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ als A voldoende groot is. Hiermee is het gestelde bewezen.

OPGAVEN

7.6.12. Bepaal $\int_0^\infty e^{-x}\cos(ax)dx$ door $\cos(ax)$ in een Taylorreeks te ontwikkelen. Ga door directe integratie na voor welke waarden van a het resultaat geldig is.

7.6.13. (Fejér). Laten f en g continue functies zijn gedefinieerd op $\mathbf{R}$ en zij g periodiek met periode 1 (d.w.z. $\forall_{x\in\mathbf{R}}[g(x+1)=g(x)]$). Definieer voor $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$, $1\leq k\leq n$

$$I_k(n) := \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)g(nx)dx$$

en

$$J_k(n) := \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(\tfrac{k}{n})g(nx)dx.$$

(i) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|I_k(n)-J_k(n)| = 0$.

(ii) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx =$

$$= (\int_0^1 f(x)dx)(\int_0^1 g(x)dx).$$

7.6.14. Bepaal $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx$.

We beschouwen nu integralen die van een parameter t afhangen. Zij $T \subset \mathbf{R}$ en $f:[a,b]\times T \to \mathbf{R}$. Laat voor iedere $t \in T$ de functie gegeven door $f(x,t)$ continu zijn op $[a,b]$. Dan bestaat de integraal $\int_a^b f(x,t)dx$ voor iedere $t \in T$, d.w.z. $F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ is een functie op T gedefinieerd. Meestal zullen we voor T een interval nemen. In de tot nu toe behandelde speciale gevallen was $T=\mathbf{N}$. We gaan weer na of het integreren met limietbepaling kan worden verwisseld.

7.6.15. STELLING. *Zij* $f:[a,b]\times T \to \mathbf{R}$ *een functie zo dat voor iedere* $t \in T$ *door* $f(x,t)$ *een continue functie op* $[a,b]$ *is gegeven. Zij* $\ell:[a,b]\to\mathbf{R}$. *Als* τ *een verdichtingspunt van* T *is en*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in[a,b]}\ \forall_{t\in T}\ [(0<|t-\tau|<\delta)\Rightarrow(|f(x,t)-\ell(x)|<\varepsilon)],$$

d.w.z. $\lim_{t\to\tau} f(x,t) = \ell(x)$ *uniform in* x *op* $[a,b]$, *dan is*

$$\lim_{t\to\tau} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \ell(x)dx.$$

Bewijs. Uit het gegeven volgt evenals in 5.6.11 dat ook ℓ continu is op $[a,b]$ dus integreerbaar over $[a,b]$. Zij $\varepsilon>0$. Kies $\delta>0$ zo dat op $[a,b]$ geldt $|f(x,t)-\ell(x)|<\varepsilon(b-a)^{-1}$ als $0<|t-\tau|<\delta$. Dan is $\left|\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b \ell(x)dx\right| < \varepsilon$ als $0<|t-\tau|<\delta$ waarmee het gestelde bewezen is.

7.6.16. VOORBEELD. Zij $f: [a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$ een continue functie. Dan is door $F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ een continue functie op $[c,d]$ gedefinieerd. Immers de integraal bestaat en als $\tau\in[c,d]$, $\ell(x)=f(x,\tau)$ dan is aan de voorwaarden van 7.6.15 voldaan omdat $[a,b]\times[c,d]$ compact in $\mathbf{R}^2$ is en dus f uniform continu op deze rechthoek (5.7.7).

7.6.17. STELLING. *Zij* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$ *een continue functie en zij voor iedere* $t\in[c,d]$ *door* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)$ *een continue functie op* $[a,b]$ *bepaald. Als*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in[a,b]}\ \forall_{t_1\in[c,d]}\ \forall_{t_2\in[c,d]}\ [(|t_1-t_2|<\delta)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,t_2)|<\varepsilon)]$$

en als F *op* $[c,d]$ *is gedefinieerd door* $F(y) := \int_a^b f(x,y)dx$ *dan geldt voor iedere* $t\in[c,d]$

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx.$$

Bewijs. Op grond van de continuïteit van de integranden bestaan alle beschouwde integralen. Zij $t\in[c,d]$, $t+h\in[c,d]$. Dan is

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_a^b h^{-1}\{f(x,t+h)-f(x,t)\}dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,t+\theta h)dx$$

waarin volgens 6.4.2 geldt $0<\theta<1$ (θ afhankelijk van x, t en h). Zij $\varepsilon>0$. Kies $\delta>0$ zo dat op $[a,b]$ geldt $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t_1)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,t_2)|<\varepsilon(b-a)^{-1}$ als $|t_1-t_2|<\delta$.
Dan is als $|h|<\delta$

$$\left|\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,t+\theta h)dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx\right| < \varepsilon$$

waarmee het gestelde bewezen is.

7.6.18. VOORBEELD. We willen $I := \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ bepalen.
Daartoe definiëren we, voor $0\le y\le 2$, $F(y) :=$
$:= \int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{1+x^2}dx$. Daar de partiële afgeleide van de integrand naar y, die we kunnen schrijven als
$\frac{-y}{(1+y^2)(1+xy)} + \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)}$ uniform continu is op $[0,1]\times[0,2]$ is aan alle voorwaarden van 7.6.17 voldaan. Dus is

$$F'(y) = \int_0^1 \left\{\frac{-y}{(1+y^2)(1+xy)} + \frac{x+y}{(1+y^2)(1+x^2)}\right\}dx =$$

$$= -\frac{\log(1+y)}{1+y^2} + \frac{\frac{1}{2}\log 2}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y}{1+y^2}.$$

Daar $F(0)=0$ volgt nu uit 7.2.32

$$I = F(1) = \int_0^1 F'(y)dy = -I + \frac{\pi}{8}\log 2 + \frac{\pi}{8}\log 2,$$

dus $I = \frac{\pi}{8}\log 2$.

Hoewel 7.6.15 en 7.6.17 nuttig zijn hebben we er niet genoeg aan omdat de meeste voor de praktijk interessante integralen over het interval $(0,\infty)$ handelen. Daar bij de bewijzen van 7.6.15 en 7.6.17 gebruik is gemaakt van 7.2.4 zullen we voor oneigenlijke integralen anders te werk moeten gaan. We zullen ons beperken tot integralen over een interval (a,∞). *Als het gaat om oneigenlijke* integralen over een eindig interval gelden analoge definities en stellingen. De lezer kan deze zelf vinden na bestudering van het volgende. We willen de bewijzen van de generalisaties van 7.6.15 en 7.6.17 terugbrengen tot deze stellingen. Daartoe moeten we van stukken $\int_b^\infty f(x,y)dx$ af zien te komen. Daartoe de volgende definitie.

7.6.19. DEFINITIE. *Zij* $T\subset\mathbf{R}$ *en* $f:[a,\infty)\times T\to\mathbf{R}$. *Als voor iedere* $t\in T$ *de integraal* $\int_a^\infty f(x,t)dx$ *bestaat en bovendien*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{A\in\mathbf{R}}\ \forall_{t\in T}\ \forall_{b>A}\ [\,|\int_b^\infty f(x,t)dx| < \varepsilon]$$

dan zeggen we dat $\int_a^\infty f(x,t)dx$ *uniform convergeert op* T.

We kunnen nu 7.6.15 generaliseren.

7.6.20. STELLING. *Zij* $f:[a,\infty)\times T\to\mathbf{R}$. *Als voor iedere* $b>a$ *op* $[a,b]$ *aan de voorwaarden van* 7.6.15 *is voldaan en als* $\int_a^\infty f(x,t)dx$ *op* T *uniform convergeert dan is*

$$\lim_{t\to\tau}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty \ell(x)dx.$$

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Er is een $A\in\mathbf{R}$ zo dat voor alle $b>A$, alle $c>b$ en alle $t\in T$ geldt $|\int_b^c f(x,t)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$. Bij iedere b en c kunnen we volgens de voorwaarden van 7.6.15 t zó kiezen dat op $[b,c]$ geldt $|f(x,t)-\ell(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon(c-b)^{-1}$. Dan is, voor $c>b>A$, $|\int_b^c \ell(x)dx| < \varepsilon$.

Daar ε willekeurig was bestaat $\int_a^\infty \ell(x)dx$ volgens 4.1.16.

Zij $\varepsilon_1>0$ (willekeurig). Kies b zó dat $|\int_b^\infty \ell(x)dx| < \frac{1}{3}\varepsilon_1$ en $|\int_b^\infty f(x,t)dx| < \frac{1}{3}\varepsilon_1$ voor alle $t\in T$. Volgens 7.6.15 is er een $\delta>0$ zo dat $|\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b \ell(x)dx| < \frac{1}{3}\varepsilon_1$ als $0<|t-\tau|<\delta$. Dan is, als $0<|t-\tau|<\delta$, $|\int_a^\infty f(x,t)dx +$

$- \int_a^\infty \ell(x)dx| < \varepsilon_1$ en daar ε_1 willekeurig was is het gestelde bewezen.

Evenzo geldt als generalisatie van 7.6.17

7.6.21. STELLING. *Zij* $f:[a,\infty)\times[c,d]\to\mathbf{R}$. *Als*

(i) *voor iedere* $b>a$ *aan de voorwaarden van* 7.6.17 *voldaan is,*

(ii) $F(y) := \int_a^\infty f(x,y)dx$ *convergeert voor* $y\in[c,d]$,

(iii) $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx$ *uniform convergeert op* $c\le t\le d$, *dan geldt voor* $t\in[c,d]$

$$F'(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx.$$

Bewijs. Voor $n\in\mathbf{N}$ is op $c\le t\le d$ door $u_n(t) := \int_{a+n-1}^{a+n} f(x,t)dx$ een continue functie gedefinieerd (volgens 7.6.16). Volgens 7.6.17 is $u_n'(t) = \int_{a+n-1}^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx$ als $t\in[c,d]$ en ook u_n' is continu. Volgens gegeven (ii) geldt $F(y) = \sum_{n=1}^\infty u_n(y)$. Volgens gegeven (iii) is de reeks $\sum_{n=1}^\infty u_n'(t)$ op $c\le t\le d$ uniform convergent met som $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx$. Het gestelde is nu een gevolg van 7.6.7.

De lezer ga zelf na dat we 7.6.21 ook op de manier van 7.6.20 hadden kunnen bewijzen.

7.6.22. VOORBEELD. Voor $t\ge 0$ definiëren we $F(t) :=$ $:= \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$. De integraal bestaat voor $t=0$ volgens 7.3.13 en voor $t>0$ op grond van 7.3.8. Zoals gewoonlijk definiëren we dat de integrand 1 is als $x=0$. Zij $b>0$ en $T:=[0,1]$. Daar de integrand uniform continu is op $[0,b]\times[0,1]$ is, met $\ell(x) := \frac{\sin x}{x}$, $\tau:=0$, aan de voorwaarden van 7.6.15 voldaan op $[0,b]$ voor iedere $b>0$. (Dit is ook direct in te zien daar $|e^{-tx}\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x}{x}| \le t$ als $x>0$.) Volgens 7.6.20 geldt

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \qquad (*)$$

als we nog kunnen aantonen dat $\int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ uniform convergeert op T. Zij $\varepsilon>0$. Als $b>4\varepsilon^{-1}$ dan is

$$\left|\int_b^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\operatorname{Im}\int_b^\infty \frac{e^{(-t+i)x}}{x}\,dx\right| =$$

$$= \left|\left.\frac{-e^{-tx}(\cos x + t\sin x)}{x(1+t^2)}\right]_b^\infty - \int_b^\infty \frac{e^{-tx}(\cos x + t\sin x)}{x^2(1+t^2)}\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{2}{b} + 2\int_b^\infty x^{-2}dx = \frac{4}{b} < \varepsilon,$$

waarmee (*) bewezen is.

Op dit zelfde voorbeeld passen we 7.6.21 toe. Zij $t_0>0$. Definieer $T_1:=[\frac{1}{2}t_0,2t_0]$. Als $b>0$ is de functie gegeven door $-e^{-tx}\sin x$ uniform continu op $[0,b]\times T_1$. Verder is $|\int_b^\infty e^{-tx}\sin x\,dx| < t^{-1}e^{-tb} < 2t_0^{-1}e^{-\frac{1}{2}t_0 b} < \varepsilon$ als b voldoende groot is. Aan alle voorwaarden van 7.6.21 is voldaan. We vinden dus

$$F'(t_0) = -\int_0^\infty e^{-t_0 x}\sin x\,dx = -(1+t_0^2)^{-1} \text{ voor } t_0>0.$$

Daar $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ (ga na) is voor $t>0$ nu bewezen $F(t) = \frac{1}{2}\pi - \arctan t$ (6.3.5 h). Volgens (*) is nu bewezen

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \arctan t\right) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

7.6.23. OPGAVE. Bepaal op analoge wijze $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$ door op $F(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-tx}-e^{-2x}}{x}\,dx$ de stellingen 7.6.20 en 7.6.21 toe te passen.

Met behulp van de stellingen en methoden van deze paragraaf zijn we nu in staat een belangrijke functie te bestuderen, te weten de *gammafunctie* gedefinieerd door:

7.6.24. DEFINITIE. $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad (x>0)$.

Volgens 7.3.8 en 7.3.9 bestaat de integraal in 7.6.24 voor $x>0$ (voor $0<x<1$ is de integraal ook bij $t=0$ oneigenlijk).

7.6.25. STELLING. *Voor* $x>1$ *geldt*

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

Bewijs. Dit volgt door één keer partieel integreren van de integraal in 7.6.24.

7.6.26. STELLING. *De gammafunctie is continu op* $(0,\infty)$.
Bewijs. Zij $0<a<b$. Voor $a\le x\le b$ geldt:

$$0 < e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t}t^{a-1} \text{ als } 0<t\le 1,$$

$$0 < e^{-t}t^{x-1} \le e^{-t}t^{b-1} \text{ als } t\ge 1.$$

Daar $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}dt$ en $\int_1^\infty e^{-t}t^{b-1}dt$ bestaan is

$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ uniform convergent op $a\le x\le b$. Als $0<c<d$ dan

is door $e^{-t}t^{x-1}$ een uniform continue functie gegeven op $\{(t,x)\mid c\le t\le d,\ a\le x\le b\}$. Aan de voorwaarden van 7.6.20 is voldaan dus is de gammafunctie continu op $[a,b]$. Daar a en b willekeurig waren is de stelling bewezen.

Uit 7.3.17 en 7.6.25 volgt dat $\Gamma(n)=(n-1)!$ voor $n\in\mathbb{N}$. De gammafunctie is dus een continue generalisatie van de faculteit.

7.6.27. STELLING. *Voor* $x>0$ *geldt*

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} \log t\, dt.$$

Bewijs. Voor iedere $x_0>0$ kunnen we $\Gamma(x)$ weer beschouwen op een deelinterval van $(0,\infty)$ bijv. $\tfrac{1}{2}x_0\le x\le 2x_0$. Precies als in 7.6.26 tonen we de uniforme convergentie van

$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} \log t\, dt$ aan.

De bewering volgt dan uit 7.6.21 daar $e^{-t}\, t^{x-1} \log t$ continu is op $\{(t,x)\mid t>0,\ x>0\}$.

Ook de volgende stelling is een mooie toepassing van de methoden waaraan deze paragraaf gewijd is.

7.6.28. STELLING. *Voor* $x>0$ *geldt*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} .$$

Bewijs. We gebruiken 4.3.29. Door 6.4.2 toe te passen op $e^x(1-\frac{x}{n})^n$ vinden we voor $0<t\le n$:

$$\left|1-e^t(1-\frac{t}{n})^n\right| = e^{\theta t}\,\frac{\theta t^2}{n}(1-\frac{\theta t}{n})^{n-1} =$$

$$= \left(e^{\frac{\theta t}{n}}(1-\frac{\theta t}{n})\right)^{n-1} e^{\frac{\theta t}{n}}\,\frac{\theta t^2}{n} \le e\,\frac{t^2}{n} .$$

Dus is

$$\left|\int_0^n e^{-t}t^{x-1}dt - \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt\right| \le$$

$$\le \frac{e}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}dt = O(n^{-1})$$

als $n\to\infty$ (x vast). Dus geldt $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt$ waarna het gestelde volgt door n keer partieel integreren van deze integraal.

Merk op dat de limiet in 7.6.28 bestaat voor alle $x\in\mathbf{C}$ behalve $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, ... We kunnen dus zo de gammafunctie definiëren voor alle complexe getallen behalve $0, -1, -2, \ldots$. Zie verder 8.6.13.

7.6.29. OPGAVE. *(Verdubbelingsformule)*. Bewijs dat

$$\Gamma(2x) = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) \quad (x>0).$$

We kunnen 7.6.28 door de logarithme te beschouwen schrijven als

$$\log\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\{x\log n - \log x - \sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k})\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{-\log x - \sum_{k=1}^{n}(\log(1+\frac{x}{k}) - \frac{x}{k}) +$$

$$- x\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \log n\right)\} =$$

$$= - \log x - \gamma x - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$$

waarbij we gebruiken dat $\log(1 + \frac{x}{k}) - \frac{x}{k} = O(k^{-2})$ om in te zien dat de reeks convergeert.
Als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij positieve getallen is dan hebben we het product van de eerste n termen van deze rij aangegeven met $\Pi_{k=1}^{n} a_k$. Afspraak: als dit product een positieve limiet heeft voor $n\to\infty$ spreken we van een convergent *oneindig product.*

7.6.30. STELLING. *Voor* $x>0$ *geldt*

$$x\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \{(1 + \frac{x}{k})^{-1} e^{x/k}\}.$$

Bewijs. Dit volgt uit de hierboven afgeleide betrekking voor $\log\Gamma(x)$.

Als laatste toepassing van stellingen uit deze paragraaf op de gammafunctie nog

7.6.31. STELLING. *Voor* $x>0$ *geldt*

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = - x^{-1} - \gamma + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)} .$$

Bewijs. Op ieder interval $[0,a]$ is de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}$ een uniform convergente reeks continue functies. Het gestelde is dus een toepassing van 7.6.7 op de voor 7.6.30 afgeleide reeks voor $\log \Gamma(x)$.

7.6.32. GEVOLG. $\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt = -\gamma$.

7.6.33. OPGAVE. (i) Bewijs dat de gammafunctie logarithmisch convex is op $(0,\infty)$.

(ii) Bepaal met behulp van 7.5.16 $\int_1^2 \log \Gamma(x)\, dx$.

We hebben ons tot nu toe vrijwel steeds beperkt tot integralen van reële functies. Voor een complexe functie van een reële variabele kan men het reële deel en het imaginaire deel apart behandelen. We zullen nu één voorbeeld behandelen waarin een complexe functie voorkomt, niet alleen als voorbeeld maar ook vanwege het grote belang van de integraal in de analyse. We beschouwen een integreerbare reële functie f en beschouwen dan

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

voor die $s \in \mathbf{C}$ waarvoor de integraal convergeert (als zulke s er zijn). F heet *Laplace-integraal* of *Laplace-getransformeerde* van f en wordt ook wel aangegeven met $\mathcal{L}f$.

7.6.34. STELLING. *Als* $\int_0^\infty |e^{-s_0 t} f(t)|dt$ *convergeert dan is* $\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|dt$ *convergent voor alle* s *met* Re s $\geq$ Re s_0.

Bewijs. Zij Re s $\geq$ Re s_0. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een $A \in \mathbf{R}$ zo dat voor $A<p<q$ geldt $\int_p^q |e^{-s_0 t} f(t)|dt < \varepsilon$. Dan is ook

$$\int_p^q |e^{-st} f(t)|dt = \int_p^q |e^{-s_0 t} f(t)| \cdot |e^{-(s-s_0)t}|dt \leq$$

$$\leq \int_p^q |e^{-s_0 t} f(t)|dt < \varepsilon \text{ als } A<p<q.$$

De integraal $\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|dt$ is dus uniform convergent op $\{s \in \mathbf{C} \mid \text{Re } s \geq \text{Re } s_0\}$.

Uit 7.6.34 volgt dat de Laplace-integraal absoluut convergeert in een halfvlak of voor alle $s \in \mathbf{C}$ of nergens.

7.6.35. STELLING. *Als* $\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)dt$ *convergeert dan is door* $F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ *een holomorfe functie gedefinieerd op* $\{s \in \mathbf{C} \mid \text{Re } s > \text{Re } s_0\}$.

Bewijs. Zij $\Phi(t) := \int_0^t e^{-s_0 \tau} f(\tau)d\tau$. Volgens 7.2.30 is

Φ continu en daar $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)$ bestaat is $|\Phi|$ begrensd. Zij $M:=\sup\{|\Phi(t)|\mid t\geq 0\}$. Door partiële integratie vinden we (voor $a>0$):

$$\int_0^a e^{-st}f(t)dt = \int_0^a e^{-(s-s_0)t}\, e^{-s_0 t} f(t)dt =$$

$$= e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)\Big]_0^a + (s-s_0)\int_0^a e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)dt.$$

Daar $|\Phi(t)|\leq M$ voor alle t is $\int_0^\infty |e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)|dt$ convergent als $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ en daar $\Phi(0)=0$ is hiermee bewezen (door $a\to\infty$): $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)dt$ voor $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Hieruit volgt o.a. dat de Laplace-integraal convergeert in een halfvlak of overal of nergens. Zij $\psi(s) := -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt$. We zullen nu bewijzen dat $F'(s)=\psi(s)$. Door partiële integratie van ψ vinden we:

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)dt - (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}t\Phi(t)dt.$$

Zij $\xi:=\frac{1}{2}(\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} s_0)$. Dan geldt voor $|h|<\xi$.

$$D(h) := \frac{F(s+h)-F(s)}{h} - \psi(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}(e^{-ht}-1)\Phi(t)dt +$$

$$+ (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\Phi(t)\left\{\frac{e^{-ht}-1}{h} + t\right\}dt.$$

Uit

$$|e^{-ht}-1| \leq |h|t\left(1 + \frac{|h|t}{2!} + \frac{|h|^2t^2}{3!} + \dots\right) < |h|te^{\xi t}$$

en

$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{h} + t\right| \leq |h|t^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{|h|t}{3!} + \dots\right) < |h|t^2e^{\xi t}$$

volgt dan

$$|D(h)| \leq M|h|\{\textstyle\int_0^\infty te^{-\xi t}dt + |s-s_0|\int_0^\infty t^2e^{-\xi t}dt\} =$$

$= O(|h|) = o(1)$ als $|h| \to 0$ waarmee het gestelde bewezen is.

We merken nog op dat met volledige inductie te bewijzen is dat $F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)dt$. We gaan niet verder in op de theorie van de Laplace-integraal. Een zeer uitgebreide verhandeling is [5].

7.6.36. OPGAVE. Druk de Laplace getransformeerde van f' uit in die van f.

7.7. Meervoudige integralen

We kunnen het in § 7.2 voor begrensde functies van één variabele ingevoerde integraalbegrip generaliseren tot functies van meer variabelen met vrijwel dezelfde definities. We zullen dit kort schetsen. Daarbij beperken we ons gemakshalve tot functies van twee variabelen waarmee de theorie helemaal te illustreren is. We beperken ons tot een functie $f:B \to \mathbf{R}$ waarin $B := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ een rechthoek in $\mathbf{R}^2$ is. We nemen weer aan dat f begrensd is op B. De generalisaties van 7.2.1 t/m 7.2.7 liggen voor de hand. Een verdeling $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n; y_0, y_1, \ldots, y_m]$ van B is bepaald door $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ en $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Hierdoor denken we ons B verdeeld in nm rechthoeken. We definiëren

$$S_V f := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \times$$
$$\times \sup\{f(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

en noemen dit weer de *bovensom* van f bij V.

Evenals in 7.2.2 wordt $\overline{\int}_B f(x,y)dxdy$ gedefinieerd als het infimum van $S_V f$ over alle verdelingen. Op analoge wijze wordt $\underline{\int}_B f(x,y)dxdy$ gedefinieerd en daarna noemen we f integreerbaar over B als onder- en bovenintegraal gelijk zijn. In plaats van $\int_B f(x,y)dxdy$ schrijft men ook wel $\iint_B f(x,y)dxdy$ en ook $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$. Het aanvullen van de details van verdere generalisaties laten we aan de lezer over. We gaan direct over op een generalisatie van 7.2.25. Daartoe is eerst een definitie nodig. Hierin zal met "rechthoek" steeds een verzameling van het type $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \alpha\le x\le\beta,\ \gamma\le y\le\delta\}$ bedoeld zijn.

7.7.1. DEFINITIE. *Als voor iedere* $\varepsilon>0$ *de verzameling* $A\subset\mathbf{R}^2$ *bevat is in de vereniging van eindig veel rechthoeken waarvan de som van de oppervlakten* $<\varepsilon$ *is dan heet* A *een nulverzameling in* $\mathbf{R}^2$.

7.7.2. VOORBEELD. Zij $f\in C([0,1])$. Dan is de grafiek van f, $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ y=f(x)\}$, een nulverzameling. Immers, als $\varepsilon>0$ is er volgens 7.2.25 en 7.2.12 een verdeling $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ van $[a,b]$ met $S_Vf-s_Vf<\varepsilon$. Dan is de grafiek bevat in $\cup_{i=1}^n \{(x,y)\mid x_{i-1}\le x\le x_i,\ m_i\le y\le M_i\}$ waarin m_i resp. M_i het infimum resp. supremum van f op $[x_{i-1},x_i]$ zijn. De som van de oppervlakten van deze n rechthoeken is S_Vf-s_Vf.

We kunnen nu 7.2.25 als volgt generaliseren:

7.7.3. STELLING. *Als* f *een begrensde functie is op* $B:=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ *en* f *is op* B *continu met uitzondering van de punten van een nulverzameling dan is* f *integreerbaar over* B.

Bewijs. Zij $\varepsilon>0$. Zij $M:=\sup\{|f(x,y)| \mid (x,y)\in B\}$. Zij O de oppervlakte van $B=(b-a)(d-c)$. We kunnen de verzameling punten waar f niet continu is opsluiten in A, een vereniging van rechthoeken waarvan de som van de oppervlakten $<\frac{1}{4}\varepsilon M^{-1}$ is. Op $B\backslash\mathring{A}$ is f uniform continu volgens 5.5.9 en 5.7.7. Er is dus een $\delta>0$ zo dat $|f(\xi,\eta)-f(\alpha,\beta)|<\frac{1}{2}\varepsilon O^{-1}$ als $|\xi-\alpha|<\delta$ en $|\eta-\beta|<\delta$ en zowel (α,β) als (ξ,η) in $B\backslash\mathring{A}$ ligt. Kies nu $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ en $c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$ zo dat $x_i-x_{i-1}<\delta$ $(i=1,\ldots,n)$ en $y_j-y_{j-1}<\delta$ $(j=1,\ldots,m)$ en zo dat de resulterende verdeling van B in rechthoeken alle begrenzende lijnen van de rechthoeken van A bevat. Voor deze verdeling van V geldt

$$S_Vf-s_Vf < (\tfrac{1}{2}\varepsilon O^{-1})O+2M(\tfrac{1}{4}\varepsilon M^{-1}) = \varepsilon.$$

Evenals in 7.2.12 volgt hieruit dat f integreerbaar is over B. (N.B. Merk op dat de redenering in dit bewijs precies dezelfde is als in 7.2.25!)

We willen nu ook integralen definiëren van functies gedefinieerd op een begrensde verzameling A. Dit gaat als

volgt: Als $A\subset\mathbf{R}^2$, $f:A\to\mathbf{R}$, B een rechthoek en $B\supset A$ dan definiëren we $g:B\to\mathbf{R}$ door $g(x,y):=f(x,y)$ als $(x,y)\in A$ en $g(x,y):=0$ als $(x,y)\in B\setminus A$. Als g integreerbaar is over B dan definiëren we $\int_A f(x,y)dxdy := \int_B g(x,y)dxdy$. Is $A\subset\mathbf{R}^2$ een begrensde verzameling waarvan de rand een nulverzameling is en f continu op A dan is volgens 7.7.3 f integreerbaar over A.
We noemen nog één generalisatie.

7.7.4. STELLING. *Zij* B *de rechthoek* $\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ *en* f *begrensd en integreerbaar op* B. *Dan is er bij iedere* $\varepsilon>0$ *een* $\delta>0$ *zo dat voor iedere verdeling*
$V:=[x_0,x_1,\dots,x_n;\ y_0,y_1,\dots,y_m]$ *met*
$\max\{x_i-x_{i-1}\mid 1\le i\le n\}<\delta$ *en*
$\max\{y_j-y_{j-1}\mid 1\le j\le m\}<\delta$ *en voor iedere keuze van*
$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *en* $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ *met* $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$
en $y_{j-1}\le\eta_j\le y_j$ $(j=1,2,\dots,m)$ *geldt*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})f(\xi_i,\eta_j) - \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\right| < \varepsilon .$$

Bewijs. 7.7.5.

7.7.5. OPGAVE. Bewijs stelling 7.7.4 door het bewijs van 7.2.16 op voor de hand liggende manier te generaliseren.

Hoewel we de meeste details aan de lezer hebben overgelaten zal nu duidelijk zijn dat de theorie van de integralen van functies van 2 variabelen helemaal parallel loopt met wat we in § 7.2 hebben gedaan tot het punt waar we de integralen willen bepalen. Stellingen als 7.2.30 en 7.2.31 laten zich niet zo gemakkelijk generaliseren. We zullen nu bewijzen dat het bepalen van integralen van functies van meer variabelen kan worden teruggebracht tot het bepalen van een aantal integralen van functies van één variabele.

7.7.6. STELLING. *Als* f *begrensd is en integreerbaar over de rechthoek* $B:=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ *dan is*

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\bar{\int_c^d} f(x,y)dy\right)dx.$$

Bewijs. Zij $I := \int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$. Zij $\varepsilon>0$. Er is een verdeling $V:=[x_0,x_1,\dots,x_n;\ y_0,y_1,\dots,y_m]$ van B zo dat $I-\varepsilon<s_Vf\le S_Vf<I+\varepsilon$. Zij $M_{ij}:=\sup\{f(x,y)\mid x_{i-1}\le x\le x_i,\ y_{j-1}\le y\le y_j\}$,

$(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$. Als $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ dan geldt:

$$\bar{\int}_c^d f(\xi_i,y)dy \le \sum_{j=1}^{m} (y_j-y_{j-1})\sup\{f(\xi_i,y) \mid y_{j-1} \le y \le y_j\} \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} (y_j-y_{j-1})M_{ij}.$$

Dus is

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1}) \bar{\int}_c^d f(\xi_i,y)dy \le S_V f$$

en hieruit volgt

$$\bar{\int}_a^b \left(\bar{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx < I+\varepsilon.$$

Evenzo bewijst men

$$\underline{\int}_a^b \left(\underline{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx > I-\varepsilon.$$

Daar

$$\underline{\int}_a^b \left(\underline{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx \le \underline{\int}_a^b \left(\bar{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx \le$$
$$\le \bar{\int}_a^b \left(\bar{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

en ε willekeurig was is hiermee aangetoond dat $\int_a^b \left(\bar{\int}_c^d f(x,y)dy\right)dx$ bestaat en gelijk is aan I.

Als voor iedere $x\in[a,b]$ de integraal $\int_c^d f(x,y)dy$ bestaat kunnen we in 7.7.6 in plaats van $\bar{\int}_c^d$ ook $\int_c^d$ schrijven. Op precies dezelfde manier bewijst men dat $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy =$ $= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ als $\int_a^b f(x,y)dx$ bestaat voor alle $y\in[c,d]$. We noemen dit *herhaalde integralen*. We bepalen dus dubbelintegralen door op herhaalde integralen over te gaan.
We hebben hiermee aangetoond dat als f begrensd en integreerbaar is en de volgende integralen bestaan geldt

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Dit wordt de *stelling van Fubini* genoemd.

VOORBEELDEN

7.7.7. $\int_0^1 \int_0^1 xe^{xy}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy}dy\right)dx = \int_0^1 (e^x-1)dx =$

$$= e^x-x\Big]_0^1 = e-2.$$

7.7.8. Om de oppervlakte van de cirkel $C:=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1\}$ te bepalen definiëren we f op $B:=\{(x,y)|\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ door $f(x,y):=1$ als $x^2+y^2\le 1$ en $f(x,y)=0$ als $x^2+y^2>1$ (dus f is de karakteristieke functie van C).
Daar de rand van C volgens 7.7.2 (de vereniging van twee nulverzamelingen is een nulverzameling!) een nulverzameling is bestaat $\int_B f(x,y)dxdy$. Volgens 7.7.6 is

$$O := \int_B f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy\right)dx = \int_{-1}^1 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = 4x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 + 4\int_0^1 x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 4\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx - 4\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 4 \arcsin 1 - O$$

dus $O=\pi$.

7.7.9. OPGAVE. Bepaal $\int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(x+y)e^{\sin y}\,dy\right)dx$.

Men kan nu ook oneigenlijke integralen definiëren voor functies van meer variabelen. De methode ligt weer voor de hand. We geven het alleen aan voor een oneindig gebied.

7.7.10. DEFINITIE. *Als* $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$ *bestaat voor alle* $b>a$ *en alle* $d>c$ *en als voor* $I\in\mathbb{R}$ *geldt*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{A\in\mathbb{R}}\ \forall_{b>A}\ \forall_{d>A}\ \left[\left|I-\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy\right| < \varepsilon\right]$$

dan definiëren we:

$$\int_a^\infty \int_c^\infty f(x,y)dxdy = I.$$

In andere gevallen zijn de definities analoog.

7.7.11. VOORBEELD. Zij $f(x,y):=e^{-x^2-y^2}$ voor $x\geq 0$, $y\geq 0$. Dan is

$$\int_0^\alpha \int_0^\beta f(x,y)dxdy = \int_0^\alpha \left(\int_0^\beta e^{-x^2-y^2}dy\right)dx =$$

$$= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\beta e^{-y^2}dy\right) \to \frac{\pi}{4}$$

als $\alpha\to\infty$ èn $\beta\to\infty$, volgens 7.3.20. Dus is volgens 7.7.10 $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{1}{4}\pi$. Zelfs zonder 7.3.20 kunnen we concluderen dat $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy$ bestaat en gelijk is $\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt\right)^2$.

We gaan nu niet verder in op de theorie van oneigenlijke meervoudige integralen. Indien men meer wil weten hierover zie bijv. [16], [25].
Om een idee te krijgen van de moeilijkheden die zich voordoen kan men proberen de volgende opgave te maken.

7.7.12. OPGAVE. Bewijs dat de manipulaties met meervoudige en herhaalde integralen in het volgende bewijs geoorloofd zijn: Volgens 7.3.8 en 7.3.9 bestaat voor $0<\alpha<1$

$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{v^{-\alpha}}{1+v}\,dv = \int_0^\infty \frac{v^{-\alpha}}{1+v}\left(\int_0^\infty e^{-w}dw\right)dv =$$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{-\alpha}}{1+v}\left(\int_0^\infty e^{-t(1+v)}\,(1+v)dt\right)dv =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty v^{-\alpha}e^{-tv}dv\right)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}du\right)dt =$$

$= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ volgens 7.6.24

Ook bij meervoudige integralen is er een eenvoudige regel voor de overgang op nieuwe variabelen zoals in 7.1.9. Een volledig bewijs hiervan is zo lang dat we er van af zien het te geven. We noemen alleen de stelling.

7.7.13. STELLING. *Laten* $G_1 \subset \mathbf{R}^2$ *en* $G_2 \subset \mathbf{R}^2$ *gebieden zijn waarvan de randen nulverzamelingen zijn,* $\mathbf{F}: G_1 \to G_2$ *een één-éénduidige afbeelding van* G_1 *op* G_2 *met continue partiële afgeleiden. Zij* $\mathbf{F}$ *gegeven door*

$$\forall_{(u,v)\in G_1} \; [(x,y) := \mathbf{F}(u,v) := (f_1(u,v), f_2(u,v))].$$

Zij $\phi: G_2 \to \mathbf{R}$ *integreerbaar over* G_2. *Dan geldt:*

$$\int_{G_2} \phi(x,y)\,dxdy = \int_{G_1} \phi(f_1(u,v), f_2(u,v)) \left|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Voor een bewijs zie bijv. [16].

7.7.14. VOORBEELD. We kunnen de integraal van 7.7.8 nu ook berekenen met behulp van poolcoördinaten (r,ϕ) waarin $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ en $0\le r\le 1$, $0\le\phi\le 2\pi$. Nemen we $G_1 := \{(r,\phi)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<r<1,\ 0<\phi<2\pi\}$ en $G_2 := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1\} \setminus \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x<1,\ y=0\}$ en $\phi=1$ dan is aan de voorwaarden van 7.7.13 voldaan. Daar een integraal niet van waarde verandert als aan het gebied een nulverzameling wordt toegevoegd of een nulverzameling wordt weggelaten vinden we met behulp van 7.7.13 voor de oppervlakte O van de cirkel

$$O = \int_{G_2} dxdy = \int_{G_1} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right| drd\phi = \int_{G_1} rdrd\phi =$$

$$= \int_0^1 \left\{r \int_0^{2\pi} d\phi\right\} dr = \pi.$$

7.8. Fourierreeksen

In deze paragraaf beschouwen we periodieke functies met periode 2π. We zullen de functies steeds op het interval $[-\pi,\pi)$ gegeven denken en verder gedefinieerd door de eis van periodiciteit. We zullen alleen functies beschouwen die op $[-\pi,\pi]$ integreerbaar zijn. Deze functies vormen een vectorruimte (7.2.9, 3.14.3). Deze noemen we $P(-\pi,\pi)$.

7.8.1. DEFINITIE. *Als* f *en* g *twee periodieke functies met periode* 2π *zijn die integreerbaar zijn over* $[-\pi,\pi]$ *dan definiëren we*

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

en

$$\|f\| := (f,f)^{\frac{1}{2}}$$

Het is eenvoudig in te zien dat $(\ ,\ \cdot)$ in de vectorruimte $P(-\pi,\pi)$ een inwendig product is (zie 3.17.1). Als we ons beperken tot continue functies kunnen we deze verzameling ook in verband brengen met § 5.2.
Zij $CP([-\pi,\pi]):=C([-\pi,\pi])\cap P(-\pi,\pi)$. Definieer in $CP([-\pi,\pi])$ een afstand door $d(f,g):=\|f-g\|$. Dan is $(CP([-\pi,\pi]),d)$ een metrische ruimte (7.8.2).

7.8.2. OPGAVE. Bewijs dat door $d(f,g):=\|f-g\|$ in $CP([-\pi,\pi])$ een metriek is gedefinieerd.
Laat ook zien dat $\|f-g\|$ in $P(-\pi,\pi)$ geen metriek is.

7.8.3. DEFINITIE. *Een rij* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $P(-\pi,\pi)$ *heet een orthonormaal stelsel als* $(\phi_k,\phi_\ell)=\delta_{k\ell}$.

Deze definitie stemt overeen met 3.17.19 voor vectorruimten.

7.8.4. *De rij* $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$, $\pi^{-\frac{1}{2}}\cos x$, $\pi^{-\frac{1}{2}}\sin x$, $\pi^{-\frac{1}{2}}\cos 2x$, $\pi^{-\frac{1}{2}}\sin 2x$, ... *is een orthonormaal stelsel in* $P(-\pi,\pi)$.

Bewijs. (i) $\int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{-1}dx = 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \pi^{-1}(\cos nx)^2dx = \int_{-\pi}^{\pi} \pi^{-1}(\sin nx)^2dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^{-1}\{(\cos nx)^2+(\sin nx)^2\}dx = 1.$$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} 2^{-\frac{1}{2}}\pi^{-1}e^{inx}dx = 0$ dus $((2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}}\cos nx) =$

$$= ((2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}}\sin nx) = 0.$$

(iii) Daar

$$2\cos nx \sin mx = \sin(n+m)x - \sin(n-m)x,$$
$$2\cos nx \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$
$$2\sin nx \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x$$

en $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = 0$ als $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ zijn alle overige inwendige producten 0.

We kunnen nu de in 3.17.26 bewezen *ongelijkheid van Bessel* generaliseren.

7.8.5. STELLING. *Als* $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een orthonormaal stelsel in* $P(-\pi,\pi)$ *is dan geldt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f,\phi_k)^2 \le (f,f).$$

Bewijs. Zij $n\in\mathbf{N}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n$, dan is

$$(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\phi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\phi_k) = (f,f) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f,\phi_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = (f,f) - \sum_{k=1}^{n} (f,\phi_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} \{\alpha_k-(f,\phi_k)\}^2 \ge 0.$$

Deze uitdrukking is minimaal als $\alpha_k=(f,\phi_k)$ voor $k=1,2,\ldots,n$. We zien dat alle partiële sommen van $\sum_{k=1}^{\infty} (f,\phi_k)^2$ ten hoogste (f,f) zijn. Daar de reeks uit niet-negatieve termen bestaat is de reeks convergent met een som $\le(f,f)$.

7.8.6. GEVOLG. *Voor* $f\in P(-\pi,\pi)$ *en voor ieder orthonormaal stelsel* $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ geldt $\lim_{n\to\infty}(f,\phi_n)=0$.

We leiden hieruit een stelling af die we later nodig zullen hebben.

7.8.7. STELLING. (Riemann-Lebesgue). *Als* f *begrensd en integreerbaar is over* [a,b] *dan is*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin((n+\tfrac{1}{2})t)dt = 0.$$

Bewijs. We mogen aannemen dat $-\pi\le a\le b\le\pi$ daar dit anders door substitutie te bereiken is. Als we g op $[-\pi,\pi]$ definiëren door $g(x):=f(x)$ als $a\le x\le b$ en $g(x)=0$ als $x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi]$ dan volgt het gestelde uit 7.8.4 en 7.8.6. Immers

$$\int_a^b f(t)\sin[(n+\tfrac{1}{2})t]dt = \int_{-\pi}^{\pi} \{g(t)\cos(\tfrac{1}{2}t)\}\sin(nt)dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \{g(t)\sin(\tfrac{1}{2}t)\}\cos(nt)dt.$$

7.8.8. OPGAVE. Zij f begrensd en integreerbaar op $[a,b]$.

Bewijs dat $\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)e^{-ixt}dt = 0$.

Het ligt nu voor de hand om te vragen of iedere functie in $P(-\pi,\pi)$ is te schrijven als "oneindige lineaire combinatie" van de functies van het stelsel 7.8.4 (denk aan het begrip "basis" uit hoofdstuk 3). Evenzo kan men vragen of voor $f\in P(-\pi,\pi)$ kan worden aangetoond dat $\sum_{k=1}^{\infty} (f,\phi_k)^2 = (f,f)$.
Een andere zich opdringende vraag is of functies uit $P(-\pi,\pi)$ "goed" benaderd kunnen worden door eindige lineaire combinaties van elementen van het stelsel 7.8.4. Met deze vragen zullen we ons in de rest van deze paragraaf bezighouden. Om een idee te krijgen hoe we een functie uit $P(-\pi,\pi)$ in de "basis-elementen" kunnen uitdrukken gaan we uit van een functie f die al in deze vorm is gegeven. We stellen voorlopig een te zware eis om een gemakkelijk begin te hebben.

7.8.9. STELLING. *Zij* $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *een orthonormaal stelsel in* $P(-\pi,\pi)$ *en zij* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ *uniform convergent op* $[-\pi,\pi]$ *met som* $f(x)$. *Dan is voor* $n\in\mathbf{N}$

$$c_n = (f,\phi_n).$$

Bewijs. Volgens 7.6.1 is $f\in P(-\pi,\pi)$ en geldt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n\phi_n(x)\phi_k(x)dx = c_k.$$

Samen met 7.8.4 rechtvaardigt dit de volgende definitie.

7.8.10. DEFINITIE. *Als* $f\in P(-\pi,\pi)$ *dan definiëren we de rij* $a_0,a_1,a_2,\ldots$ *en de rij* $b_1,b_2,\ldots$ *door*

$$a_n := \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n := \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

We noemen de getallen a_n *en* b_n *de Fouriercoëfficiënten van* f. *We geven dit in het vervolg aan met*

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)).$$

Het rechterlid heet de Fourier-reeks van f.

Het is duidelijk dat we graag "=" i.p.v. "~" zouden schrijven en nu dus zullen pogen te bewijzen dat dit geoorloofd is. Niet voor alle elementen van $P(-\pi,\pi)$ is dit waar. We zullen een deelverzameling beschouwen waarvoor het bewijs niet moeilijk is.

7.8.11. DEFINITIE. *Als* $f\in P(-\pi,\pi)$ *en* $\xi\in\mathbb{R}$ *dan zeggen we dat* f *in* ξ *voldoet aan de Dirichlet-condities als*

(i) $f(\xi+0)$ *en* $f(\xi-0)$ *bestaan,*

(ii) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{f(\xi+h)-f(\xi+0)}{h}$ *en* $\lim\limits_{h\uparrow 0} \dfrac{f(\xi+h)-f(\xi-0)}{h}$ *bestaan.*

7.8.12. STELLING. *Als* $f\in P(-\pi,\pi)$ *en als* f *in* ξ *voldoet aan Dirichlet-condities dan is de Fourier-reeks van* f *in* ξ *convergent met som* $\dfrac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}$.

Bewijs. Zij $S_N(\xi) := \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n\cos(n\xi)+b_n\sin(n\xi))$. Dan geldt op grond van de definitie van de Fouriercoëfficiënten

$$S_N(\xi) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(n\xi)\cos(nx)+\sin(n\xi)\sin(nx)\}f(x)dx=$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nx-n\xi)\}f(x)dx =$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi-\xi}^{\pi-\xi} \{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(ny)\}f(y+\xi)dy =$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \{\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(ny)\}f(y+\xi)dy,$$

(de laatste overgang op grond van de periodiciteit van de integrand). We schrijven deze integraal als een integraal over $[-\pi,0]$+ een integraal over $[0,\pi]$ waarna

we in de eerste y door $-y$ vervangen. Verder gebruiken we $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(ny) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{N} e^{iny} = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})y]}{2\sin(\frac{1}{2}y)}$.
Het resultaat is

$$S_N(\xi) = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})y]}{2\sin(\frac{1}{2}y)} \{f(\xi+y)+f(\xi-y)\}dy.$$

Daar dit ook geldt als $f(x)=1$ op $(-\pi,\pi)$ en wel met $S_N(\xi)=1$ vinden we hieruit

$$S_N(\xi) - \frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2} = \pi^{-1} \int_0^{\pi} \sin[(N+\tfrac{1}{2})y]g(y)dy$$

met

$$g(y) := \frac{\frac{1}{2}y}{\sin(\frac{1}{2}y)}\left\{\frac{f(\xi+y)-f(\xi+0)}{y} + \frac{f(\xi-y)-f(\xi-0)}{y}\right\}.$$

Daar g integreerbaar is over $[a,\pi]$ voor $0<a\le\pi$ en $\lim_{a\downarrow 0} g(a)$ bestaat op grond van de Dirichlet-condities, is g integreerbaar over $[0,\pi]$. Het gestelde volgt uit 7.8.7.

VOORBEELDEN

7.8.13. Zij $f(x):=x$ voor $-\pi\le x<\pi$, f periodiek met periode 2π. Daar f oneven is, is $a_k = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0$. Voor $k\in\mathbf{N}$ geldt

$$b_k = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)dx = 2k^{-1}(-1)^{k-1}.$$

De functie f voldoet overal aan de Dirichlet-condities. Dus geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{\sin(kx)}{k} = \tfrac{1}{2}x \text{ voor } -\pi<x<\pi.$$

Voor $x=\pm\pi$ is de som van de Fourier-reeks 0 op grond van 7.8.12 (zie ook 4.5.27).

7.8.14. Zij $f(x):=x^2$ voor $|x|\le\pi$, f periodiek met periode 2π. Daar f continu is en overal rechts- en linksdifferentieerbaar is aan de Dirichlet-condities voldaan. Daar f even is komen in de Fourier-reeks geen sinustermen voor. Door twee keer partieel integreren vinden we

$$a_k = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)dx = 4k^{-2}(-1)^k \text{ voor } k\geq 1 \text{ en}$$

$$a_0 = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2}{3}\pi^2. \text{ Dus is}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2} \text{ voor } -\pi\leq x\leq\pi.$$

7.8.15. Zij f gedefinieerd door $f(0)=f(\pi):=0$, $f(x) := \frac{1}{4}\pi$ voor $0<x<\pi$, $f(x) := -\frac{1}{4}\pi$ voor $-\pi<x<0$, f periodiek met 2π. Overal is aan de Dirichlet-condities voldaan en voor alle x geldt $f(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. Daar f oneven is komen in de Fourier-reeks geen cosinustermen voor. We vinden

$$b_k = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(kx)dx =$$

$$= (2k)^{-1} \int_0^{k\pi} \sin u\, du = (2k)^{-1}(1+(-1)^{k+1}).$$

Dus geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ voor } 0<x<\pi.$$

Uit 5.6.11 volgt dat de reeks niet uniform convergeert. We gaan nader op deze reeks in. Zij

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Dan is $S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$ voor $0<x<\pi$. Daar $S_n'(\pi/2n)=0$ en S' positief is op $(0,\pi/2n)$ en negatief in een rechteromgeving van $\pi/2n$ heeft S_n in $\pi/2n$ een lokaal maximum. Dit maximum is

$$S_n(\pi/2n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin((k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n})}{(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}} \text{ en dit is een Riemann-}$$

som voor de functie gegeven door $t^{-1}\sin t$ op $[0,\pi]$, behorende bij een verdeling van $[0,\pi]$ in n gelijke delen. Hieruit volgt met 7.2.16

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\pi/2n) = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi t^{-1} \sin t\, dt.$$

We zien hieruit nog eens dat de reeks niet uniform convergeert omdat

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi t^{-1} \sin t\, dt \neq \frac{1}{4}\pi \text{ (zie 7.6.22) dus}$$

$\lim_{n\to\infty} \sup\{|S_n(x)-f(x)| \mid 0<x<\pi\}\neq 0$. Dit wordt het *verschijnsel van Gibbs* genoemd.

7.8.16. Zij $f(x):=\cos(\alpha x)$ voor $-\pi\le x\le\pi$, f periodiek met periode 2π en laat α niet geheel zijn. Aan de Dirichlet-condities is weer voldaan. We vinden

$$a_0 = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)dx = 2(\pi\alpha)^{-1}\sin(\pi\alpha),$$

$$a_k = 2\pi^{-1}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(kx)dx = \frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(k^2-\alpha^2)}.$$

Dus is

$$\cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\alpha^2}\cos(kx) \text{ voor } -\pi\le x\le\pi.$$

Door substitutie van x=0 vinden we

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-\alpha^2}.$$

We hebben in 7.8.15 gezien dat de partiële sommen van de Fourier-reeks van de in dat voorbeeld beschouwde functie voor geen enkele n een "goede" benadering van f(x) voor $0<x<\pi$ zijn. Dit betekent echter niet dat f(x) niet goed te benaderen zou zijn door een lineaire combinatie van sinustermen en cosinustermen. We zullen een uitdrukking van de vorm $T(x) := c_0 + \sum_{k=1}^n \{c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)\}$ een *trigonometrisch polynoom* noemen. We bewijzen nu een analogon van 5.8.10.

7.8.17. STELLING. *(Approximatiestelling van Weierstrass). Als* $f\in CP([-\pi,\pi])$ *en* $\varepsilon>0$ *dan is er een trigonometrisch polynoom* T *zo dat* $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,[|T(x)-f(x)|<\varepsilon]$.

Bewijs. Vanwege de periodiciteit kunnen we ons tot $[-\pi,\pi]$ beperken. We beperken ons eerst tot even functies. Als f even is dan is er volgens 5.8.5 een polynoom P zo dat op $[-1,1]$ geldt $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$. Door hierin $t = \cos x$ te substitueren vinden we, omdat f even is, $|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon$ voor $-\pi\leq x\leq\pi$ (óók: voor $x\in\mathbf{R}$).
Als volgende stap beschouwen we $f\in CP([-\pi,\pi])$ en schrijven $f(x) \sin x = f_1(x) \sin x + f_2(x)$ met $f_1(x):=$ $:=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ en $f_2(x) := \frac{1}{2} \sin x\ (f(x)-f(-x))$. De functies f_1 en f_2 zijn even en periodiek met periode 2π. We hebben al aangetoond dat f_1 en f_2 uniform benaderd kunnen worden door trigonometrische polynomen, dus ook $f(x) \sin x$. Als $f\in CP([-\pi,\pi])$ en $g(x):=f(\frac{\pi}{2} - x)$ dan is ook $g\in CP([-\pi,\pi])$. Als $|g(x) \sin x - T_1(x)| < \varepsilon$ voor $x\in\mathbf{R}$ waarin T_1 een trigonometrisch polynoom is dan is $|f(x) \cos x - T_1(\frac{\pi}{2} - x)| < \varepsilon$ voor $x\in\mathbf{R}$ en $T_1(\frac{\pi}{2} - x)$ is ook een trigonometrisch polynoom. Nu is aangetoond dat als $f\in CP([-\pi,\pi])$ zowel $f(x) \sin x$ als $f(x) \cos x$ uniform benaderd kunnen worden door trigonometrische polynomen. Dan ook $f(x)(\sin x)^2$ en $f(x)(\cos x)^2$ en dus ook $f(x)$.

Hieruit volgt de generalisatie van 3.17.22.

7.8.18. STELLING. *(Parseval): Als* $f\in CP([-\pi,\pi])$ *en* $a_0,a_1,a_2,\ldots$ *resp.* $b_1,b_2,\ldots$ *zijn de Fourier-coëfficiënten van* f *dan geldt*

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t)\}^2 dt.$$

Bewijs. Neem in 7.8.5 voor $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ het stelsel 7.8.4. Volgens 7.8.17 kunnen de getallen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ uit het bewijs van 7.8.5 zó gekozen worden dat $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\phi_k\| < \varepsilon$ (voor voldoende grote n). Dus $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (f,\phi_k)^2 = (f,f)$. Met 7.8.1 en 7.8.10 volgt nu het gestelde.

Merk op dat uit 7.8.17 volgt dat in de metrische ruimte $(CP([-\pi,\pi]),d)$ de verzameling trigonometrische polynomen overal dicht ligt. De oplettende lezer mag op dit punt verward zijn en zich afvragen hoe hij deze uniforme benadering kan rijmen met het verschijnsel van Gibbs en het feit dat in 7.8.5 is aangetoond dat de afstand van f tot een trigonometrische polynoom minimaal is als voor het polynoom een partiële som van de Fourier-reeks wordt genomen! De oplossing is zeer eenvoudig. In 7.8.5 is de afstand d die van 7.8.2. In 7.8.17 gaat het om de ons al langer bekende functie

$$d_1(f,g) := \sup\{|f(x)-g(x)| \mid -\pi\le x\le\pi\}.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat als $d_1(f,g)$ klein is $d(f,g)$ klein zal zijn maar niet omgekeerd! Dit heeft o.a. tot gevolg dat de afsluiting van de verzameling trigonometrische polynomen t.o.v. d in $P(-\pi,\pi)$ meer bevat dan $CP([-\pi,\pi])$. Anders gezegd: de voorwaarde $f\in CP([-\pi,\pi])$ in 7.8.18 is niet noodzakelijk.

Voor een diepgaande behandeling van Fourier-reeksen verwijzen wij naar [28].

7.9. Differentiaalvergelijkingen

In de eerste paragraaf van dit hoofdstuk is het probleem bij gegeven f een functie F te bepalen zo dat F'=f behandeld. In 7.2.31 hebben we gezien dat dit voor iedere continue functie mogelijk is. Uit 6.4.3 weten we dat de functie F op een constante na bepaald is (zie § 7.1). We beschouwen nu een soortgelijk maar veel moeilijker probleem. Zij $F:\mathbf{R}^{n+2}\to\mathbf{R}$. Gevraagd wordt een functie y die n keer differentieerbaar is op een verzameling V en zó dat $\forall_{x\in V}\ [F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0]$. Dit wordt een *differentiaalvergelijking van de orde n* genoemd. Eén van de belangrijkste toepassingen van de analyse in de physica, de techniek en ook in vele takken van de wiskunde is de theorie van de differentiaalvergelijkingen. Veel er van berust op onderwerpen die we in dit hoofdstuk hebben behandeld. Men noemt het oplossen van een differentiaalvergelijking ook wel integreren van de vergelijking. We hebben uit dit omvangrijk gebied een keuze gemaakt om de samenhang met andere onderwerpen uit dit boek te illustreren. Deze keuze is min of meer willekeurig en de lezer dient deze paragraaf dan ook te beschouwen als een korte inleiding in het onderwerp. Voor een grondige behandeling verwijzen we naar standaardwerken als [17].
We hebben ons beperkt tot functies van één variabele (op een enkel voorbeeld na). Men spreekt dan van *gewone* differentiaalvergelijkingen in tegenstelling tot *partiële* differentiaalvergelijkingen. Als men naast $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ nog genoeg andere voorwaarden aan y oplegt is er géén of precies één oplossing. Voor een speciaal geval nl. een differentiaalvergelijking van de eerste orde zullen we dit nu aantonen. We nemen aan dat de vergelijking gegeven is in de vorm $y'=F(x,y)$ en herinneren in dit verband aan de impliciete functiestelling (§ 6.6).

7.9.1. STELLING. *(Picard). Zij* $F:[a,b]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *continu. Als er een getal* $M>0$ *is zo dat*

$$\forall_{x\in[a,b]}\ \forall_{y_1\in\mathbf{R}}\ \forall_{y_2\in\mathbf{R}}\ [|F(x,y_1)-F(x,y_2)|\le M|y_1-y_2|],$$

als $x_0\in[a,b]$, $y_0\in\mathbf{R}$, *dan is er precies één functie* $y:[a,b]\to\mathbf{R}$ *met de eigenschappen*

(i) $y'(x)=F(x,y(x))$ *voor* $a\le x\le b$,

(ii) $y(x_0)=y_0$.

Bewijs. We zullen de existentie van de functie y weer aantonen met behulp van de stelling van Banach (5.2.17). (Eigenlijk is de stelling van Banach een generalisatie van het oorspronkelijke idee van Picard.) Zij $\alpha>M$. Zij $R:=C([a,b])$. Definieer

$$\forall_{f\in R}\ \forall_{g\in R}\ [d_\alpha(f,g):=\sup\{e^{-\alpha|x-x_0|}|f(x)-g(x)|\mid a\le x\le b\}].$$

Dan is (R,d_α) een metrische ruimte. (Ga dit na!) We hebben de afstandfunctie d_0 al eerder bestudeerd (5.2.5). De door d_α en d_0 geïnduceerde topologieën zijn dezelfde. (Ga ook dit na!) Volgens 5.2.16 is dus (R,d_α) een volledige metrische ruimte. Definieer nu $\phi:R\to R$ door

$$\phi(f)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,f(t))dt.$$

Dan is voor $f\in R, g\in R$

$$d_\alpha(\phi(f),\phi(g)) =$$

$$= \sup\{e^{-\alpha|x-x_0|}|\int_{x_0}^{x} \{F(t,f(t))-F(t,g(t))\}dt|\mid a\le x\le b\} \le$$

$$\le \sup\{Me^{-\alpha|x-x_0|}|\int_{x_0}^{x} |f(t)-g(t)|dt|\mid a\le x\le b\} \le$$

$$\le \sup\{Me^{-\alpha|x-x_0|}\int_{0}^{|x-x_0|} e^{\alpha u}d_\alpha(f,g)du\mid a\le x\le b\} \le$$

$$\le M/\alpha\ d_\alpha(f,g).$$

Dus is ϕ een contractie op R. Volgens 5.2.17 is er precies één functie $y\in R$ met $\phi(y)=y$, d.w.z. $y(x_0)=\phi(y)(x_0)=$ $=y_0$ en (volgens 7.2.31) $y'(x)=F(x,y(x))$. Hiermee is de stelling bewezen.

De in 7.9.1 aan F gestelde voorwaarde noemt men een *Lipschitz-voorwaarde.*

OPGAVEN

7.9.2. De vergelijking $y'=xy$ met beginvoorwaarde $y(0)=1$ kan worden opgelost door evenals in 7.1.7 de vergelijking op een andere manier te schrijven nl. als $(ye^{-\frac{1}{2}x^2})'=0$ waarna uit 6.4.3 volgt dat $y(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$. Toon aan dat deze oplossing ook volgt door de rij functies $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ te beschouwen gedefinieerd door $y_1(x)=1$ en

$y_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x ty_n(t)dt$ (d.w.z. via 7.9.1 en 5.2.17).

7.9.3. Zij voldaan aan de voorwaarden van 7.9.1. Definieer de rij functies

$(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ door $y_1(x):=x_0$, $y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x F(t,y_n(t))dt$.

(i) Bewijs dat voor $a\le x\le b$ geldt: er is een C zo dat

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \le \frac{CM^n|x-x_0|^n}{n!} \quad \text{voor } a\le x\le b.$$

(ii) Bewijs hiermee stelling 7.9.1.

We demonstreren nu aan de hand van enige voorbeelden enkele methoden om differentiaalvergelijkingen van de eerste orde op te lossen.

VOORBEELDEN

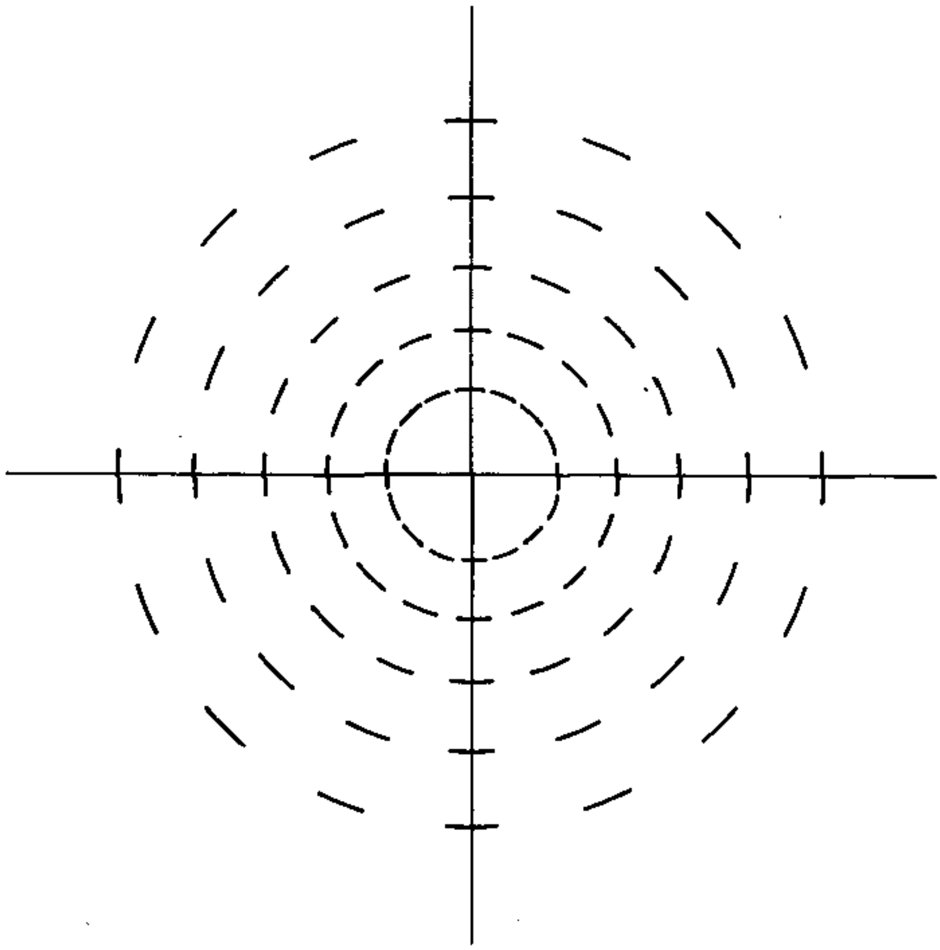
7.9.4. Zij y een differentieerbare functie die als volgt beschreven is: $y(0)=1$; als x_s het snijpunt is van de X-as en de raaklijn in $(x_0,y(x_0))$ aan de grafiek van y dan is $x_s-x_0=1$ voor iedere keuze van x_0. We willen y bepalen. De genoemde raaklijn is de grafiek van de functie gegeven door $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$. Dus is $x_s-x_0=-y(x_0)/y'(x_0)$. Hieruit volgt dat $y(x)$ voor alle x positief is en $y'(x)/y(x)=-1$ voor alle x. Door onbepaald integreren vinden we (7.1.9) $\int \frac{1}{y(x)} y'(x)dx = \log y(x)$. Er is dus een constante C zo dat $\log y(x) = -x + C$. Daar $y(0)=1$ is $C=0$, d.w.z. $y(x) = e^{-x}$ op $\mathbf{R}$.

Op precies dezelfde manier kunnen we alle differentiaalvergelijkingen behandelen die zijn terug te brengen tot de vorm $g'(y(x))\cdot y'(x)=\phi(x)$. Met de na 7.1.11 gemaakte afspraken is de integratie te schrijven als $\int g'(y)dy=\int\phi(x)dx$ (denk aan de in inleiding van § 7.1 gemaakte afspraken!). Dit procédé heet *scheiding van variabelen*.

7.9.5. De differentiaalvergelijking $xy' - (x+1)y = \sin x$ kunnen we oplossen door eerst een functie u te bepalen waarvoor $xu'-(x+1)u=0$. Door scheiding van variabelen vinden we $u'/u=1+x^{-1}$ waaruit we als oplossing o.a. $u(x)=xe^{x}$ vinden. Dan is $(x^{-1}e^{-x}y)' = x^{-2}e^{-x}\sin x$ waarmee het probleem tot § 7.1 teruggebracht is. (We hebben in dit voorbeeld de gebruikelijke slordige notatie overgenomen. Functies en functiewaarden treden in een vergelijking op. Zolang geen verwarring mogelijk is, is er niet zo veel bezwaar tegen deze compacte schrijfwijze.)

7.9.6. We hebben tot nu steeds differentiaalvergelijkingen van het type $y'=F(x,y)$ besproken. Men spreekt dan ook wel van een *richtingsveld* omdat in ieder punt van $\mathbf{R}^2$ waardoor een grafiek van een oplossing gaat de richting van de raaklijn is voorgeschreven. Soms kan men iets over de oplossingen van een differentiaalvergelijking te weten komen door dit richtingsveld te schetsen. Is bijvoorbeeld gegeven: $y'=-xy^{-1}$ voor alle x, $y(x)>0$ voor alle x dan geeft figuur 32 een schets van het richtingsveld.
De figuur doet ons vermoeden dat de grafieken van oplossingen halve cirkels zijn. Dit is inderdaad het geval omdat $(y^2)'=2yy'=-2x$ dus $y^2+x^2=C$. In de theorie van de differentiaalvergelijkingen gaat men meestal nogal slordig met het woord "functie" om. Zo wordt voor het hier behandelde voorbeeld vaak gezegd: "De oplossing van de differentiaalvergelijking $yy'=-x$ is een stelsel cirkels." De bedoeling is echter meestal duidelijk.

7.9.7. Als $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ een differentieerbare functie is dan kunnen we volgens 6.6.1 uit $F(x,y)=C$ en $y(x_0)=y_0$ de functie y bepalen in een omgeving van x_0 als $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Volgens 6.5.10 geldt dan $\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Als de partiële afgeleiden van de tweede orde continu zijn is volgens 6.5.5 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$ in een omgeving van (x_0,y_0) van $\mathbf{R}^2$. Omgekeerd kunnen we nu differentiaalvergelijkingen be-



Figuur 32

schouwen van het type $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ waarin $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en proberen een functie F te vinden met $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. vergelijkingen van dit type noemen we *exacte differentiaalvergelijkingen*. Beschouw de functie F gedefinieerd in een omgeving van (x_0,y_0) door

$$F(x,y) := \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,\tau)d\tau.$$

Volgens 7.2.31 en 7.6.17 geldt in een omgeving van (x_0,y_0)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,\tau)d\tau = P(x,y_0) +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,\tau)d\tau = P(x,y)$$

en $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$. We kunnen dan de differentiaalvergelijking oplossen door y te bepalen uit $F(x,y)=C$. Is bijvoorbeeld y voor $x>1$ gedefinieerd en $2xy+(x^2-3y^2)y'=0$ dan is dit een exacte differentiaalvergelijking. We vinden op de hierboven beschreven wijze $F(x,y)=x^2y-y^3+C$, dus is x^2y-y^3 een constante functie. Is ook nog een beginvoorwaarde gegeven bijvoorbeeld $y(2)=3$ dan vinden we de functie y door de vergelijking $y^3-x^2y-15=0$ op te lossen (in een omgeving van $(2,3)$) zoals in 6.6.1 beschreven is.

OPGAVEN

7.9.8. Bepaal y als $y(0)=-2$ en $y'=(x+1)(y+1)$.

7.9.9. Bepaal y als $y(0)=1$ en $(x^2+1)y'+xy=x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

7.9.10. Bepaal y als $y(0)=1$ en $y'+xy+xy^2=0$.

7.9.11. Als y gedefinieerd is op $(-1,1)$, $y(0)=1$ en $(y+\frac{3}{2}x^2)+(x+y)y'=0$ bepaal dan y.

We beschouwen nu differentiaalvergelijkingen van hogere orde en wel de zogenaamde *homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van de orde n met constante coëfficiënten.* Dit zijn vergelijkingen van het type

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0 \text{ met } a_k \in \mathbf{C} \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

Om de belangrijkste stelling hierover te bewijzen hebben we enkele eenvoudige algebraïsche eigenschappen nodig. Is P een polynoom van de graad n, $P(x) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell$ met $a_\ell \in \mathbf{C}$ $(\ell=0,1,\dots,n)$ en is P_1 een polynoom zo dat $P_1(\lambda)\neq 0$ en $P(x)=(x-\lambda)^k P_1(x)$ dan noemen we λ een k-voudig nulpunt van P. We zien dat als λ een k-voudig nulpunt is $P^{(j)}(\lambda)=0$ voor $j=0,1,\dots,k-1$, d.w.z. $\sum_{\ell=j}^{n} a_\ell \binom{\ell}{j}\lambda^{\ell-j} = 0$. Na deze voorbereiding bewijzen we

7.9.12. STELLING. *Als* $a_\ell \in \mathbf{C}$ $(\ell=0,1,\dots,n-1)$ *dan vormen de oplossingen van de differentiaalvergelijking*

$$y^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell y^{(\ell)} = 0 \qquad (*)$$

een vectorruimte van dimensie n *over* **C**. *(De oplossingen zijn complexe functies op* **R**.*)*

Bewijs. (i) Dat we met een vectorruimte te maken hebben is een direct gevolg van 6.3.1.

(ii) Laat λ een k-voudig nulpunt zijn van P waarin $P(x) := x^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell x^\ell$. Dan blijkt als Q een polynoom van de graad k-1 is, dat $y(t)=e^{\lambda t}Q(t)$ een oplossing van (*) is. Immers met $a_n:=1$ is

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell D^\ell (e^{\lambda t}Q(t)) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} Q^{(j)}(t)\lambda^{\ell-j}e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} Q^{(j)}(t)\left(\sum_{\ell=j}^{n} a_\ell \binom{\ell}{j}\lambda^{\ell-j}\right) = 0$$

omdat $Q^{(j)}(t)=0$ als $j\geq k$ terwijl $\sum_{\ell=j}^{n} a_\ell \binom{\ell}{j}\lambda^{\ell-j}=0$ als $j\leq k-1$. Zijn $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$ de nulpunten van P waarbij λ_i een k_i-voudig nulpunt is $(i=1,2,\ldots,\nu)$ dan is $\sum_{i=1}^{\nu} k_i=n$ (8.5.2). Het stelsel functies gegeven door $e^{\lambda_i t}t^m$ $(1\leq i\leq\nu,\ 0\leq m\leq k_i-1)$ bestaat dus uit n functies die oplossingen van (*) zijn. Ook iedere lineaire combinatie van deze functies is een oplossing van (*). Uit het verschillende gedrag van de functies voor $t\to\infty$ zien we dat de functies lineair onafhankelijk zijn. (Ga dit na!) Hiermee is aangetoond dat de oplossingen van (*) een vectorruimte van dimensie $\geq n$ vormen.

(iii) Om tenslotte te bewijzen dat de dimensie van de vectorruimte n is gebruiken we volledige inductie. Voor n=1 is de bewering triviaal omdat $y'+ay=0$ impliceert $(e^{at}y)'=0$, dus volgens 6.4.3 $y=Ce^{-at}$ waarin C een constante is. Om de inductiestap te bewijzen beschouwen een nulpunt λ van P. Definieer u door $y(t)=u(t)e^{\lambda t}$.
Dan wordt (*)

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell D^\ell (ue^{\lambda t}) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} u^{(j)}\lambda^{\ell-j}e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\ell=j}^{n} a_\ell \binom{\ell}{j} \lambda^{\ell-j} \right) u^{(j)} = 0$$

Daar $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \lambda^\ell = P(\lambda) = 0$ is de coëfficiënt van u in deze vergelijking 0, d.w.z. het is een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n-1 voor de functie u'. Is u' eenmaal bepaald dan is u op een constante na bepaald. Door toepassing van volledige inductie is het gestelde hiermee bewezen.

7.9.13. STELLING. *Zij* ϕ *een complexe functie op* **R**. *Als* y_1 *en* y_2 *oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking* $y^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell y^{(\ell)} = \phi$ *(inhomogene vergelijking) dan is* $y_1 - y_2$ *een oplossing van* $y^{(n)} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell y^{(\ell)} = 0$.

Bewijs. Dit volgt uit 6.3.1.

Door 7.9.12 en 7.9.13 zijn we in staat lineaire differentiaalvergelijkingen op te lossen, ook inhomogene als we daarvan één oplossing weten.
($A := \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell D^\ell$ is een lineaire afbeelding van $\dot{C}^{(n)}[\mathbf{R}]$ in $C[\mathbf{R}]$. We moeten hier dus evenals bij de behandeling van inhomogene vergelijkingen in hoofdstuk 3 eerst één *particuliere* oplossing zien te vinden.)

7.9.14. VOORBEELD. We willen alle oplossingen bepalen van

$$y^{(3)} - y'' - y' + y = \sin x.$$

We proberen eerst of er een oplossing van de vorm $A \sin x + B \cos x$ is. Door invullen vinden we $A = B = 1/4$. Volgens 7.9.13 moeten we nu de homogene vergelijking

$$y^{(3)} - y'' - y' + y = 0$$

oplossen. Volgens 7.9.12 dienen we eerst op te lossen

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

De wortels zijn $\lambda_1 = 1$ (tweevoudig) en $\lambda_2 = -1$. De gezochte oplossingen zijn $e^x(\alpha x + \beta) + \gamma e^{-x}$ waarin α, β en γ constanten zijn. De oplossingen van de inhomogene vergelijking zijn dus

$$y(x) = (\alpha x+\beta)e^{x} + \gamma e^{-x} + \tfrac{1}{4}(\sin x + \cos x).$$

We zijn in 7.9.12 t/m 7.9.14 ingegaan op een speciale klasse differentiaalvergelijkingen van hogere orde. Men kan het werken met differentiaalvergelijkingen van hogere orde altijd vermijden en wel als volgt. Laat gegeven zijn de differentiaalvergelijking $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$. Definieer voor $i=0,1,\dots,n-1$ de functies f_i door $f_i:=y^{(i)}$. Dan gelden voor deze n functies de differentiaalvergelijkingen

$$f_i' = f_{i+1} \qquad (i=0,1,\dots,n-2),$$

$$F(x,f_0,f_1,\dots,f_{n-1},f_{n-1}') = 0.$$

Dit zijn n differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. In plaats van wat we in 7.9.12 hebben gedaan hadden we ook kunnen bestuderen stelsels van het type

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

waarin de coëfficiënten a_{ij} constanten zijn en $y_1,y_2,\dots,y_n$ de onbekende functies. Ook in dit geval vormen de oplossingen een vectorruimte van dimensie n en is dus voldoende om n lineair onafhankelijke oplossingen te vinden. Het eenvoudigste geval formuleren we als stelling:

7.9.15. STELLING. *Als* $A:=(a_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$ *een matrix is met* n *verschillende eigenwaarden* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ *en bijbehorende eigenvectoren* $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\dots,\mathbf{c}_n$ *dan is*

$$\mathbf{y} := (y_1,y_2,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i e^{\lambda_i x}$$

de algemene oplossing van het stelsel

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Bewijs. Zij $\mathbf{y}':=(y_1',\dots,y_n')$ dan proberen we als oplossing van het $\mathbf{y}=\mathbf{c}e^{\lambda x}$ waarin $\mathbf{c}$ een constante vector en $\lambda\in\mathbf{C}$. Het stelsel is te schrijven als $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$. We vinden dan $\lambda\mathbf{c}e^{\lambda x}=A(\mathbf{c}e^{\lambda x})=e^{\lambda x}A\mathbf{c}$, dus $A\mathbf{c}=\lambda\mathbf{c}$. Ieder paar $\lambda_i,\mathbf{c}_i$ voldoet. Zo vinden we n lineaire onafhankelijke oplossingen. Daar het stelsel is terug te brengen tot 7.9.12 (ga na!) zijn er niet meer dan n lineair onafhankelijke oplossingen. Hieruit volgt het gestelde.

OPGAVEN

7.9.16. Bepaal y en x (als functies van t) als $\frac{dx}{dt} = x+y$ $\frac{dy}{dt} = x-y$.

7.9.17. Zij $A:=(a_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$. Als $t\in\mathbf{R}$ kunnen we volgens de in 3.15.18 beschreven regels van optelling en vermenigvuldiging van matrices voor $N\in\mathbf{N}$ definiëren: $S_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(tA)^k$. Zo'n matrix $S_N(t)$ kunnen we opvatten als punt in $\mathbf{R}^{N^2}$.

(i) Bewijs dat $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(t)$ bestaat. Deze limiet noemen we e^{tA} om voor de hand liggende redenen.

(ii) Bewijs dat $e^{tA}\mathbf{y}(0)$ oplossing is van het stelsel $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$.

(iii) Los nu op

$$y_1' = y_1,$$

$$y_2' = y_1+y_2,$$

$$y_3' = y_1+y_2+y_3,$$

met $y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=1$.

7.9.18. Breng het stelsel

$$y_1' = xy_1+y_2,$$

$$y_2' = y_1-xy_2,$$

terug tot een differentiaalvergelijking van de tweede orde voor y_1.

Er is nog één onderwerp dat we, zij het kort, willen belichten, nl. de zogenaamde *machtreeks-substitutie*. Is y een oplossing van de differentiaalvergelijking $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ en is $y(x)$ de som van een convergente machtreeks in een interval $(-R,R)$ dan zijn ook

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ volgens 6.8.11 in machtreeksen te ontwikkelen. Door nu te schrijven $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ enz. en deze reeksen in de differentiaalvergelijking te substitueren kunnen we soms de coëfficiënten a_k bepalen en aldus een oplossing van de differentiaalvergelijking vinden.

7.9.19. VOORBEELD. Zij $y(0)=0$ en $y'=y^2+1$. We stellen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Daar $y(0)=0$ is $y'(0)=1$ en dus $a_0=0$, $a_1=1$. Volgens 6.9.29 is $\{y(x)\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n = $
$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) x^n$. Daar $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

vinden we de betrekking

$$(n+1) a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad (n \geq 2)$$

waaruit we de coëfficiënten a_k achtereenvolgens kunnen bepalen ($a_2=0$). We vinden zo de reeks uit 7.5.6 (ii) hetgeen we ook hadden kunnen inzien door de differentiaalvergelijking op te lossen door scheiding van variabelen.

7.10. Opgaven over hoofdstuk 7

7.10.1 Geef een voorbeeld van een functie f waarvoor $\overleftarrow{D} f$ niet bestaat.

7.10.2. Bepaal $\int x e^x \sin x \, dx$.

7.10.3. Bepaal $\int \frac{dx}{2+(\sin x)^2}$.

7.10.4. Bepaal met behulp van de definitie (7.2.7) $\int_0^1 \sin x \, dx$.

7.10.5. Zij $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ begrensd en integreerbaar over $[0,1]$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(\frac{k}{n})\} = 0$.

7.10.6. Zij f de in 5.10.36 gedefinieerde functie. Bewijs dat $\int_0^1 f(x)dx$ bestaat en bepaal de integraal.

7.10.7. Zij G de verzameling van alle monotoon niet-dalende functies op $[0,1]$. Als $f\in G$ definiëren we f^* door $f^*(0):=f(0)$,

$$f^*(x) = x^{-1} \int_0^x f(t)dt \quad (0<x\le 1).$$

(i) Bewijs dat f^* continu is op $(0,1)$. Is f^* ook continu op $[0,1]$?

(ii) Bewijs dat $f^*\in G$.

(iii) Bepaal alle $f\in G$ waarvoor $f^*=f$.

7.10.8. Zij $f_1:[a,b]\to\mathbf{R}^+$ monotoon niet-stijgend,
zij $f_2:[a,b]\to\mathbf{R}^+$ monotoon niet-dalend.

Zij g integreerbaar over $[a,b]$. Bewijs dat er een $\xi_1\in[a,b]$ en een $\xi_2\in[a,b]$ is zó dat

$$\int_a^b f_1(t)g(t)dt = f_1(a) \int_a^{\xi_1} g(t)dt,$$

$$\int_a^b f_2(t)g(t)dt = f_2(b) \int_{\xi_2}^b g(t)dt.$$

7.10.9. (Bonnet). Laten f en g op $[a,b]$ gedefinieerde functies zijn, f monotoon en g integreerbaar op $[a,b]$. Bewijs dat er een $\xi\in[a,b]$ is zó dat

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx.$$

7.10.10. Als $f\in C([0,1])$ en $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ definiëren we $M_n(f) :=$ $:= \int_0^1 x^n f(x)dx$. (M_n heet het n-de *moment* van f op $[0,1]$). Bewijs dat als $f\in C([0,1])$, $g\in C([0,1])$ en als g dezelfde momenten heeft als f dan geldt $f=g$.

7.10.11. Zij $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door: $f(x):=1$ als $x\in[0,\frac12)$ en $f(x):=0$ als $x\in[\frac12,1]$.
Bewijs dat er bij iedere $\varepsilon>0$ polynomen p en q bestaan zó dat

(i) $\forall_{x\in[0,1]} \; [p(x)\ge f(x)\ge q(x)]$,

(ii) $\int_0^1 \{p(x)-q(x)\}dx < \varepsilon$.

7.10.12. *(Ongelijkheid van Young).* Zij ϕ een monotoon

stijgende continue functie op $[0,\infty)$, $\phi(0)=0$, $a\geq 0$, $b\in\phi([0,\infty))$.
Bewijs dat $\int_0^a \phi(t)dt + \int_0^b \phi^{\leftarrow}(t)dt \geq ab$.

7.10.13. *(Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz-Buniakowski).* Zij $f\in C([0,1])$ en $g\in C([0,1])$. Bewijs dat

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 (f(t))^2dt \cdot \int_0^1 (g(t))^2dt.$$

7.10.14. Neem aan dat de functie log niet bekend is. We definiëren

$$F(x) := \int_1^x t^{-1}dt \quad (x>0).$$

(i) Bewijs met behulp van Riemann-sommen dat

$\forall_{x>0}\ \forall_{y>0}\ [F(xy)=F(x)+F(y)]$.

Definieer nu het getal e door $e := F^{\leftarrow}(1)$.

(ii) Bewijs dat $F^{\leftarrow}(x) = e^x$.

7.10.15. Zij V de verzameling functies op $[0,1]$ gedefinieerd door $f\in V:\Leftrightarrow((f(0)=0)\wedge(f(1)=1)\wedge(f \text{ monotoon}))$. Als $f\in V$ en

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha \text{ dan is } \int_0^1 xf(x)dx \leq \alpha-\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Bewijs dit.

7.10.16. Bewijs dat als f en g op $[0,1]$ van begrensde variatie zijn dan ook fg van begrensde variatie is.

7.10.17. Zij $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0):=0$, $f(x) :=$ $:= x\sin(x^{-1})$ voor $x\in(0,1]$. Bewijs dat f niet van begrensde variatie op $[0,1]$ is.
(N.B. f is wel continu!)

7.10.18. Zij f differentieerbaar op $[a,b]$ en $\forall_{x\in[a,b]}\ [|f'(x)|\leq M]$. Bewijs dat f van begrensde variatie op $[a,b]$ is.

7.10.19. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \{n \sum_{k=0}^n (n^2+k^2)^{-1}\}$.

7.10.20. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (n+k)^{-1}$.

7.10.21. Bepaal $\int_1^2 (x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$.

7.10.22. Zij f een voor $x \geq 1$ gedefinieerde positieve monotoon niet-stijgende continue functie.

(i) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \{\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx\}$ bestaat.

(ii) Is $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}(\log n)^{-2}$ convergent?

7.10.23. Ga na of de volgende integralen bestaan

(a) $\int_0^\infty x^{-1} \arctan x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \{e^{-x^{-2}} - e^{-2x^{-2}}\}dx$,

(c) $\int_1^\infty x^{-1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \log x\, dx$.

7.10.24. Zij $f:[1,\infty)\to\mathbf{R}$ een differentieerbare functie waarvoor f' monotoon stijgend is met $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Zij

$s(n) := \frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(x)dx.$

(i) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} s(n)$ bestaat. Noem de limiet s.

(ii) Bewijs dat $\forall_{n\in\mathbf{N}} [\frac{1}{8}f'(n)<s(n)-s<0]$.

(iii) Pas dit toe als $f(x) := -\log x$.

7.10.25. Ga na of $\int_0^1 [x]d[x]$ bestaat.

7.10.26. Bepaal de volgende integralen

(a) $\int_{-1}^{3} xdg(x)$ waarin $g(x):=0$ als $x=-1$, $g(x):=1$ als $-1<x<2$ en $g(x):=-1$ als $2\leq x\leq 3$.

(b) $\int_0^2 x^2dg(x)$ waarin $g(0):=0$, $g(x):=1$ als $0<x\leq 1$, $g(x):=3-x$ als $1<x\leq 2$.

7.10.27. Zij g gedefinieerd door $g(x) := \sum_{n=[x^{-1}]}^{\infty} n^{-2}$ voor $x>0$, $g(0):=0$. Bepaal $\int_0^1 (x+1)^{-1}dg(x)$.

7.10.28. Bewijs de volgende verscherpingen van 7.5.1 en 7.5.2:

(a) Als $f\in C^2([a,b])$ dan is er een $c\in[a,b]$ zo dat

$$\frac{b-a}{2n}\{y_0^{(n)} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i^{(n)} + y_n^{(n)}\} - \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

(b) Als $f\in C^4([a,b])$ dan is er een $c\in[a,b]$ zo dat

$$\frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n} (y_{2k-2}^{(n)}+4y_{2k-1}^{(n)}+y_{2k}^{(n)}) - \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c).$$

7.10.29. Bewijs dat het n-de Bernoulli-polynoom op $[0,1]$ precies twee nulpunten heeft als n even is ($n\geq 2$) en precies drie nulpunten als n oneven is ($n\geq 3$).

7.10.30. Pas 7.5.12 toe op de Riemann-sommen voorkomend in 7.2.19, 7.10.4, 7.10.19 en 7.10.20.

7.10.31. Bepaal in drie decimalen nauwkeurig $\int_0^1 (1+x^3)^{-1}dx$.

7.10.32. Bepaal $\int_0^1 (x^{-1}-[x^{-1}])dx$.

7.10.33. Bepaal de convergentiestraal van $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}x^n$.

7.10.34. Zij $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ een continue en begrensde functie. Bepaal $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-nt^2}dt$.

7.10.35. Zij $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continu; $h(x)=0$ als $x\notin(0,1)$. Zij $c_n\in\mathbf{R}$ zó dat $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$ waarin $Q_n(x):=c_n(1-x^2)^n$.

(i) Bewijs dat $c_n<n^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Bewijs dat door $P_n(x) := \int_{-1}^{1} h(x+t)Q_n(t)dt$ een polynoom gedefinieerd is op $[0,1]$.

(iii) Bewijs dat $P_n\to h$ als $n\to\infty$, uniform op $[0,1]$.

(iv) Bewijs hiermee 5.8.5.

7.10.36. Zij $|r|<1$. Bepaal $\int_0^{\pi} \log(1 - 2r\cos x + r^2)dx$.

7.10.37. Zij $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ een continue functie waarvoor f_y continu is.
Zij $F(y) := \int_0^y f(x,y)dx$. Bewijs dat $F'(y) = f(y,y) + \int_0^y f_y(x,y)dx$.

7.10.38. Bepaal $\int_0^1 x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ arctan x dx.

7.10.39. Zij $\phi:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ een functie waarvoor geldt:

(i) $\forall_{a>0}$ [ϕ is integreerbaar op $[0,a]$],

(ii) $\forall_{x\geq 0}$ [$|\phi(x)|\leq 1$].

Voor $t>0$ definiëren we $F(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\phi(x)dx$.

Bewijs dat $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}x\phi(x)dx$.

7.10.40. Bepaal $\displaystyle\lim_{y\downarrow 0}\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x+y}\,dx$.

7.10.41. Bewijs dat $\int_0^\infty e^{-tx}\, x \cos x\, dx$ uniform convergeert op $[a,\infty)$ als $a>0$. Geldt dit ook voor $(0,\infty)$.

7.10.42. Voor $x\in\mathbf{R}$ en $y\in\mathbf{R}$ definiëren we

$$F(x,y) := \int_0^\infty \frac{x\cos(yt)}{x^2+t^2}\,dt.$$

(i) Bewijs dat $F_{xx}=y^2F$.

(ii) Bepaal $F(x,y)$.

7.10.43. Als we voor $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0,-1,-2,\ldots$ de gammafunctie definiëren m.b.v. de limiet uit 7.6.28 bewijs dan:

(i) dat de limiet inderdaad bestaat,

(ii) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

7.10.44. Bepaal $\Gamma(\frac{1}{2})$.

7.10.45. Zij $A:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>y^2,\ y>x^2\}$. Zij $f:A\to\mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y)=xy$. Bepaal $\int_A f(x,y)dxdy$.

7.10.46. Bepaal de inhoud van de ellipsoïde

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}.$$

7.10.47. Bepaal de ligging van het zwaartepunt van de halve bol

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq 0\}.$$

7.10.48. Bepaal, als $V:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$, de integraal $\int_V e^{-x^2-y^2}dxdy$ door 7.7.13 toe te passen (zie 7.7.11).

7.10.49. Zij $f\in CP([-\pi,\pi])$, f even, $f(x) := \sin x$ voor $x\in[0,\pi]$. Bepaal de Fourier-reeks van f.

7.10.50. Zij $f\in P(-\pi,\pi)\cap C^1(\mathbf{R})$. Als a_n en b_n de Fourier-coëfficiënten van f voorstellen (7.8.10) bewijs dan: $a_n=o(n^{-1})$ als $n\to\infty$ en $b_n=o(n^{-1})$ als $n\to\infty$.

7.10.51. Zij $f\in P(-\pi,\pi)$ en f van begrensde variatie over $[-\pi,\pi]$. Als a_n en b_n de Fourier-coëfficiënten van f voorstellen dan geldt $a_n=O(n^{-1})$ en $b_n=O(n^{-1})$ als $n\to\infty$. Bewijs dit.

7.10.52. Ga na voor welke waarden van x de volgende reeksen convergeren en bepaal in beide gevallen de som

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sin(nx)$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cos(nx)$.

7.10.53. Bewijs dat als $\Gamma(x)$ en $\Gamma(1-x)$ gedefinieerd zijn geldt:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} .$$

7.10.54. Zij $f\in CP([-\pi,\pi])$ en $g\in CP([-\pi,\pi])$. Laat

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \text{ en}$$

$$g(x) \sim \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n\cos(nx)+d_n\sin(nx)) \text{ de}$$

Fourier-reeksen zijn van deze functies. Bewijs dat

$$\pi^{-1}(f,g) = \tfrac{1}{2}a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_nc_n+b_nd_n).$$

7.10.55. Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $y^{(3)}-3y' = x-2y$.

7.10.56. De functie y, gedefinieerd in een omgeving van $x=2$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $(-x + \cos y)y' = y$ terwijl $y(2)=\pi$. Bepaal deze functie.

7.10.57. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ een rij met $a_0:=1$, $a_1:=1$, $a_{n+1}:=$ $:=a_n+2a_{n-1}$ voor $n\geq 1$. Zij $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!}$. Bepaal $f(x)$.

7.10.58. De functie y is te ontwikkelen in een machtreeks met convergentiestraal ∞, $y(0)=1$ en y voldoet aan de differentiaalvergelijking $(xy')'+xy=0$. Bepaal de Taylorreeks van y.

7.10.59. Zij y de oplossing van de differentiaalvergelijking $y'=x+y^2$ waarvoor $y(0)=0$. Bepaal $y(\frac{1}{2})$ in 2 decimalen nauwkeurig.

8 Integreren in het complexe vlak

8.1. Lijnintegralen van analytische functies

We zullen beginnen met een introductie van het begrip *kromme*. In dit hoofdstuk is $C([0,1])$ de verzameling van alle continue complexwaardige functies op het interval $[0,1]$.

8.1.1. DEFINITIE. *In* $C([0,1])$ *definiëren we de relatie* $\sim$ *door:* $k_1 \sim k_2$ *dan en slechts dan indien er een (continue) monotoon stijgende afbeelding* τ *van* $[0,1]$ *op* $[0,1]$ *bestaat met:* $k_2 \circ \tau = k_1$.

De lezer zal zonder moeite inzien dat de relatie $\sim$ een equivalentierelatie in $C([0,1])$ is.

8.1.2. DEFINITIE. *Een continue kromme (meestal kortweg kromme genoemd)* K *is een equivalentieklasse van* $C([0,1])$ *bij de relatie* $\sim$ *uit* 8.1.1.
Iedere representant van K *heet een parametervoorstelling van* K.

Deze definitie geeft aanleiding tot een opmerking: we zullen bijna steeds spreken over parametervoorstellingen in plaats van over de krommen zelf; de lezer moet dan nagaan of onze beweringen onafhankelijk zijn van de gekozen representant.
Is K een kromme met parametervoorstelling k dan heet $k(0)$ het *beginpunt* van K en $k(1)$ het *eindpunt*. De drager van K is de puntverzameling $[K] := \{k(t) \mid 0 \le t \le 1\} \subset \mathbb{C}$; slordig sprekend verwarren we nogal eens krommen met hun dragers. Is $p \in [K]$ dan zeggen we: "p ligt op K".

8.1.3. DEFINITIE. *Zij* K *een kromme en zij* k *een parametervoorstelling van* K. *We definiëren:*

(a) K *heet gesloten indien* $k(0)=k(1)$;

(b) K *heet enkelvoudig indien*

$$\forall_{t_1,t_2\in[0,1]}\ [(0<t_1<t_2<1)\Rightarrow(k(t_1)\neq k(t_2))];$$

en $$\forall_{t\in(0,1)}\ [k(0)\neq k(t)\neq k(1)].$$

(c) K *heet rectificeerbaar indien* k *van begrensde variatie is (zie* 7.2.27*). De totale variatie van* k *over* $[0,1]$ *heet de lengte van* K.

(d) *een enkelvoudige gesloten kromme heet een Jordankromme.*

OPGAVEN

8.1.4. Bewijs dat de lengte van de kromme K onafhankelijk is van de gekozen parametervoorstelling. Merk op dat de variatie van k bij een verdeling van $[0,1]$ meetkundig betekent de som van de lengten van de lijnstukken van een "lijnentrek" met deelpunten op de drager van K.

8.1.5. Laat K een kromme zijn die een parametervoorstelling k heeft, waarvoor, als $k(t)=\ell(t)+im(t)$ $(t\in[0,1])$, ℓ en m reëel en continu differentieerbaar zijn op $[0,1]$ (zulke krommen noemt men wel *glad*). Dan is K rectificeerbaar en de lengte van K is
$\int_0^1((\ell'(t))^2+(m'(t))^2)^{\frac{1}{2}}dt$. Bewijs dit.

8.1.6. Is K_1 een kromme (met parametervoorstelling k_1) waarvan het eindpunt samenvalt met het beginpunt van een kromme K_2 (met parametervoorstelling k_2) dan is K_1+K_2 de kromme waarvan

$$k(t) := \begin{cases} k_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ k_2(2t-1) & \frac{1}{2}<t\le 1 \end{cases}$$

een parametervoorstelling is. De optelling van krommen is associatief. Is K een kromme met parametervoorstelling k, dan is $-K$ de kromme waarvan $k^*(t):=k(1-t)$ $(t\in[0,1])$ een parametervoorstelling is. (Merk op dat K en $-K$ dezelfde drager hebben!) Is $\alpha\in(0,1)$ dan zijn $k_1(t):=k(\alpha t)$ en $k_2(t):=k(\alpha+t(1-\alpha))$ $(0\le t\le 1)$ parametervoorstellingen van krommen K_1 en K_2 waarvoor $K=K_1+K_2$. Gemakshalve kozen we in de definities $[0,1]$ als parameterinterval; de lezer zal geen moeite hebben als dit nodig mocht zijn de transformatie naar het interval $[a,b]$ uit te voeren.

We willen nu het begrip integraal van een functie langs een kromme definiëren; daartoe hebben we nodig een uitbreiding van het begrip Stieltjesintegraal (§ 7.4). We kiezen daartoe een generalisatie van 7.4.4. We zullen overigens na 8.1.14 voor analytische functies een ander begrip lijnintegraal leren kennen, dat we in de rest van dit hoofdstuk zullen gebruiken.

8.1.7. DEFINITIE. *Zij* K *een kromme; zij* k *een parametervoorstelling van* K*; zij* f *een complexwaardige functie gedefinieerd op de drager van* K *dan heet* f *integreerbaar over* K *indien er bestaat* $I\in\mathbf{C}$ *zó dat er voor alle* $\varepsilon>0$ *een* $\delta>0$ *is zó dat voor elke verdeling* $V:=[t_0=0,t_1,\dots,t_n=1]$ *van* $[0,1]$ *waarvoor* $\Delta(V)<\delta$ *is en voor elke keuze van de tussenpunten* $s_1,\dots,s_n$ *met* $t_{i-1}\le s_i\le t_i$ $(i=1,\dots,n)$ *geldt:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(k(s_i))(k(t_i)-k(t_{i-1}))-I\right|<\varepsilon.$$

De lezer verifiëre dat het begrip integreerbaarheid over K en de waarde van I onafhankelijk zijn van de gekozen parametervoorstelling k. Voor krommen die glad zijn (8.1.5) of die de som zijn van een eindig aantal gladde stukken kunnen we voor het berekenen van lijnintegralen gebruik maken van het volgende analogon van stelling 7.4.9 waarvan we het bewijs aan de lezer overlaten. We noteren $I=:\int_K f(z)dz$; I heet lijnintegraal van f langs K.

8.1.8. STELLING. *Zij* K *een kromme waarvan* $k\in C^1([0,1])$ *een parametervoorstelling is; zij* f *continu op de drager van* K*, dan is*

$$\int_K f(z)dz = \int_0^1 f(k(t))k'(t)dt.$$

De volgende eigenschappen zijn onmiddellijk duidelijk.

8.1.9. Is $K=K_1+K_2$ dan is $\int_K f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_2} f(z)dz$. $\int_{-K} f(z)dz = -\int_K f(z)dz$.

8.1.10. Is $|f(z)|\le M$ als z op de drager van K ligt en is K rectificeerbaar met lengte ℓ dan is:

$$\left|\int_K f(z)dz\right|\le M\cdot\ell$$

als de integraal bestaat.

8.1.11. Als $\mathcal{K}$ een eindige verzameling krommen is, $\mathcal{K}:=\{K_1,\dots,K_m\}$, dan definiëren we $\int_{\mathcal{K}} f(z)dz :=$ $:=\sum_{\nu=1}^{m}\int_{K_\nu} f(z)dz$. We eisen dus dat $\int_{K_\nu} f(z)dz$ bestaat voor elke $\nu\in\{1,\dots,m\}$.

Het is duidelijk dat als $\mathcal{K}_1$ uit $\mathcal{K}_2$ ontstaat door optelling of verdeling van krommen volgens 8.1.6 $\int_{\mathcal{K}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{K}_2} f(z)$ voor elke functie f waarvoor beide integralen bestaan. Is $\mathcal{K}=\{-K,K,K_2,\dots,K_m\}$ en $\mathcal{K}'=\{K_2,\dots,K_m\}$ en bestaat $\int_{\mathcal{K}} f(z)dz$

dan is $\int_K f(z)dz = \int_{K'} f(z)dz$.

8.1.12. VOORBEELD. Laat $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$ ($z_1 \neq z_2$) zijn. Het segment van z_1 naar z_2 is de kromme K waarvan $k(t):=z_1+t(z_2-z_1)$ ($0 \le t \le 1$) een parametervoorstelling is. Voor deze kromme geldt:

$$\int_K f(z)dz = (z_2-z_1) \int_0^1 f(z_1+t(z_2-z_1))dt.$$

8.1.13. Zij K een gesloten kromme, k een parametervoorstelling van K; zij $\alpha \in (0,1)$. Nu is
$k_1(t):=\begin{cases} k(\alpha+t) & (0 \le t \le 1-\alpha) \\ k(\alpha+t-1) & (1-\alpha \le t \le 1) \end{cases}$, een parametervoorstelling van een gesloten kromme K_1 waarvan de drager en de "omloopszin" met die van K samenvallen. Voor elke functie geldt nu: $\int_K f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz$ indien een van beide integralen bestaat. Daarom volstaat men bij het aangeven van gesloten krommen vaak met het aangeven van de drager en de omloopszin. Voor integralen over gesloten krommen gebruikt men vaak het symbool $\oint_K$; we noemen ze wel kringintegralen.

8.1.14. VOORBEELDEN. Zij $k(t):=z_0+ae^{2\pi it}$, $z_0 \in \mathbf{C}$, $a>0$, de parametervoorstelling van een kromme K (K is de cirkel met middelpunt z_0 en straal a eenmaal in "positieve" zin doorlopen) dan is:

$$\oint_K (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{als } m \in \mathbf{Z},\ m \neq -1, \\ 2\pi i & \text{als } m=-1. \end{cases}$$

Merk op dat de waarde van de integraal niet van a afhangt.
Laat K een kromme zijn met beginpunt z_0 en eindpunt z_1, dan is $\int_K z dz = \frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2)$ en deze uitkomst hangt niet van K af maar alleen van begin- en eindpunt.

8.1.15. In dit hoofdstuk zullen we ons interesseren in lijnintegralen waarbij de integrand een analytische functie is. We zullen hiervoor een integraalbegrip introduceren dat verschilt van 8.1.7. We zullen nl. integralen uitdrukken met behulp van "primitieve functies". Als voorbereiding zullen we nu eerst een stelling bewijzen die uitspreekt dat zeer speciale kringintegralen van analytische functies 0 zijn.
Als voorbereiding enige notaties. Zij $R(a,a+h;b,b+k)$ of kortweg R de rechthoek $\{z \mid a \le \text{Re } z \le a+h, b \le \text{Im } z \le$ $\le b+k\}$.
De kromme waarvan een parametervoorstelling is

$$k(t) := \begin{cases} a+4ht+bi & (0\le t\le \frac14), \\ a+h+(b+4(t-\frac14)k)i & (\frac14<t\le\frac12), \\ a+4(\frac34-t)h+(b+k)i & (\frac12<t\le\frac34), \\ a+(b+4(1-t)k)i & (\frac34<t\le 1), \end{cases}$$

zullen we ook ∂R noemen. ∂R is dus de "rand van de rechthoek R eenmaal in positieve zin doorlopen". Verzamelingen van de vorm $\{z \mid \operatorname{Re} z \in I_1, \operatorname{Im} z \in I_2\}$ waarbij I_1 en I_2 intervallen zijn heten *assenparallelle rechthoeken.*

8.1.16. STELLING *(Goursat). Zij* G *een open verzameling; zij* $R(a,a+h;b,b+k)\subset G$. *Indien* f *analytisch is in* G *dan is*

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Bewijs. We noteren $\oint_{\partial R} f(z)dz=:I(R)$. Stel $|I(R)|=:p$, dan is $p\ge 0$.
We beschouwen nu de rechthoeken: $R_1:=R(a,a+\frac12 h;b,b+\frac12 k)$; $R_2:=R(a+\frac12 h,a+h;b,b+\frac12 k)$; $R_3:=R(a+\frac12 h,a+h;b+\frac12 k,b+k)$; $R_4:=R(a,a+\frac12 h;b+\frac12 k,b+k)$. Nu geldt (zie 8.1.11): $\sum_{i=1}^4 I(R_i) = I(R)$.
Zij nu R^1 een van de vier rechthoeken R_1, R_2, R_3, R_4, zó gekozen dat $|I(R^1)| \ge \frac{p}{4}$. Beschouwt men in R^1 analoog vier rechthoeken R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1, dan is er daarbij zeker één, R^2, met $|I(R^2)| \ge \frac{1}{4^2}\,p$.

We zetten dit proces voort en vinden zo een rij gesloten rechthoeken $R,R^1,R^2,\ldots$, met $R\supset R^1\supset R^2\supset\ldots$, $|I(R^n)| \ge$ $\ge \frac{1}{4^n}\,p$ terwijl de lengte van ∂R^n gelijk is aan $2^{1-n}(h+k)$, en de diameter van R^n gelijk is aan $2^{-n}(h^2+k^2)^{\frac12}$ $(n\in\mathbb{N})$. Volgens 4.1.6 is er een punt $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R^n$. Daar $z_0\in G$ is f analytisch in z_0. Zij $\varepsilon>0$, dan is er een open omgeving, U, van z_0 zodanig dat voor $z\in U$ geldt:
$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\varepsilon|z-z_0|$ (zie 6.7.1). Kies nu n zo groot dat $R^n\subset U$, dan is voor z op ∂R^n:
$|f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)|<\varepsilon 2^{-n}(h^2+k^2)^{\frac12}$.
Volgens 8.1.10 geldt

$$\left|\int_{\partial R^n}(f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0))dz\right|<\varepsilon 2^{-n}(h^2+k^2)^{\frac12}2^{1-n}(h+k).$$

De kromme ∂R^n is de som van vier segmenten. Met behulp van 8.1.12 rekent men gemakkelijk na dat $\oint_{\partial R^n} dz = 0$ en $\oint_{\partial R^n} zdz = 0$.

Derhalve is:

$$\int_{\partial R^n} (f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0))dz = I(R^n).$$

Als we nu de verkregen resultaten combineren vinden we: $4^{-n}p\le|I(R^n)|<4^{-n}2\varepsilon(h+k)(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}$; en dus $p\le 2\varepsilon(h+k)(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}$. Daar ε willekeurig is kan p niet positief zijn.

8.1.17. STELLING. *Laat* f *analytisch zijn in de open rechthoek.*

$$O := \{z|\ a < \mathrm{Re}\ z < b, c < \mathrm{Im}\ z < d\}.$$

Er bestaat een in O *analytische functie* F *met* $F'(z)=f(z)$ $(z\in O)$.

Bewijs. Kies $\zeta\in O$. Voor iedere $z\in O$ nemen we voor $K_{\zeta,z}$ de kromme met parametervoorstelling.

$$K_{\zeta,z}(t) := \begin{cases} \zeta+2t\ \mathrm{Re}(z-\zeta) & (0\le t\le\frac{1}{2}) \\ z-2(1-t)(\mathrm{Im}(z-\zeta))i & (\frac{1}{2}<t\le 1). \end{cases}$$

We definiëren: $F(z) := \int_{K_{\zeta,z}} f(x)dx$ $(z\in O)$. We zullen berekenen $F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)$ voor z, $z_0\in O$.

In figuur 33 is gemakshalve geschetst de situatie $\mathrm{Re}\ z > \mathrm{Re}\ z_0 > \mathrm{Re}\ \zeta$, $\mathrm{Im}\ z > \mathrm{Im}\ z_0 > \mathrm{Im}\ \zeta$; de lezer verifiëre de nu volgende bewering ook in de niet geschetste gevallen.

Uit 8.1.11 en 8.1.16 volgt $F(z)-F(z_0) = \int_{K_{z_0,z}} f(x)dx$.

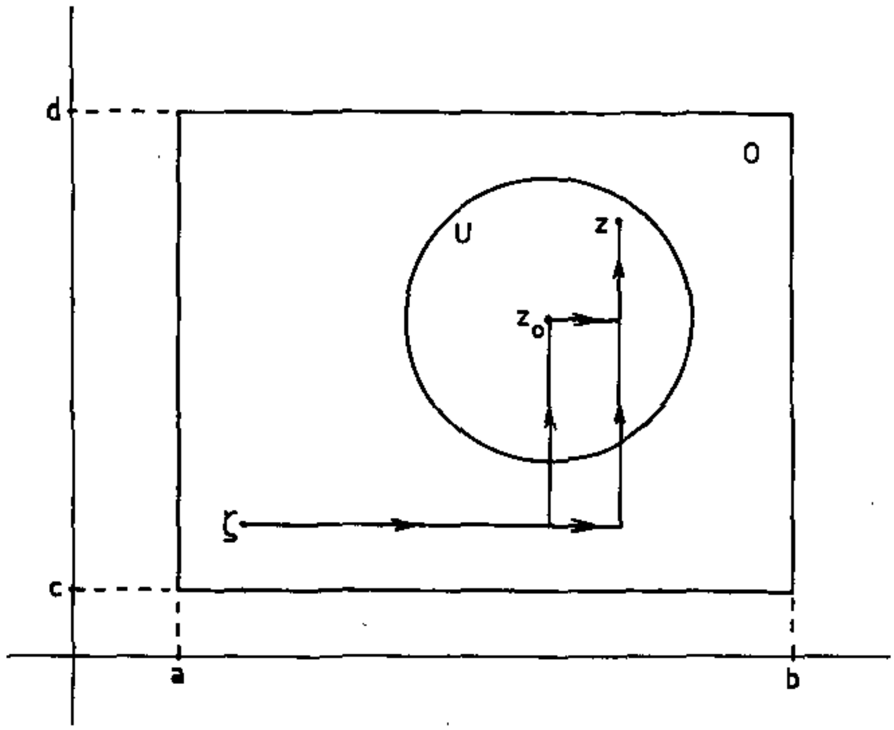
Bovendien is $z-z_0 = \int_{K_{z_0,z}} dx$, zo dat

$$F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0) = \int_{K_{z_0,z}} (f(x)-f(z_0))dx.$$

Omdat f analytisch is, is er een cirkelvormige omgeving U van z_0 binnen O en een positief getal m zodat voor $x\in U$ geldt $|f(x)-f(z_0)|\le m|x-z_0|$. Ligt z binnen U dan is voor elke x op $K_{z_0,z}$: $|x-z_0|\le|z-z_0|$.

De lengte van $K_{z_0,z}$ is $|\mathrm{Re}(z-z_0)|+|\mathrm{Im}(z-z_0)|\le 2|z-z_0|$.

Volgens 8.1.10 is derhalve $|\int_{K_{z_0,z}} (f(x)-f(z_0))dx|\le$ $\le 2m|z-z_0|^2$, zodat $F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0) = O(|z-z_0|^2)$ $((z-z_0)\to 0)$.



Figuur 33

Volgens 6.7.1 is het gestelde hiermee bewezen.

We noemen F een primitieve functie van f. Het is duidelijk dat twee primitieve functies een constant verschil hebben (zie 6.5.15). Gebruik makend van de notaties van 8.1.17 ziet men gemakkelijk dat voor $z_0, z_1, \dots, z_n \in O$ geldt

$$\int_{K_{z_0,z_n}} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{K_{z_{\nu-1},z_\nu}} f(x)\,dx.$$

In het bewijs van stelling 8.1.17 hebben we de primitieve F van f gevonden door f langs een welomschreven kromme te integreren. In de volgende stelling tonen we dat dit proces ook onder algemenere voorwaarden bruikbaar is als de integratiekromme geen rol speelt. In het vervolg van dit hoofdstuk zal deze stelling een grote rol spelen.

8.1.18. STELLING. *Zij* G *een gebied in* $\mathbf{C}$ *en* f *continu op* G. *Zij* $\alpha \in G$. *Als voor iedere* $z \in G$ *en voor iedere kromme* K *in* G *met beginpunt* α *en eindpunt* z *de integraal* $\int_K f(t)\,dt$ *alleen van* z *en niet van de keuze van* K *afhangt dan is door* $F(z) := \int_\alpha^z f(t)\,dt$ *(willekeurige integratiekromme) een analytische functie in* G *gedefinieerd waarvoor* $F'(z) = f(z)$ *in* G.

Bewijs. Zij $z_0 \in G$. Daar G open is, is er een cirkel C_0 om z_0 die in G ligt. Als $z \in C_0$ en K het segment met beginpunt z_0 en eindpunt z is dan geldt volgens 8.1.12 en 8.1.10

$$|F(z)-F(z_0)-(z-z_0)f(z_0)| = |\int_K \{f(t)-f(z_0)\}dt| \leq$$

$$\leq |z-z_0| \sup\{|f(t)-f(z_0)| \mid |t-z_0| \leq |z-z_0|\} =$$

$$= o(|z-z_0|), \ (z \to z_0)$$

op grond van de continuïteit van f in z_0. Volgens 6.7.1 is hiermee het gestelde bewezen.

We zullen een nieuw begrip "integraal van een analytische functie over een continue kromme" invoeren dat gebruik maakt van primitieve functies. Als voorbereiding zal stelling 8.1.19 dienen. Is K een kromme met parametervoorstelling k en zijn p en q verschillende punten op K waarvoor $p=k(t_1)$, $q=k(t_2)$, $t_1<t_2$ dan verstaat men onder de boog van K tussen p en q de kromme waarvan een parametervoorstelling is.

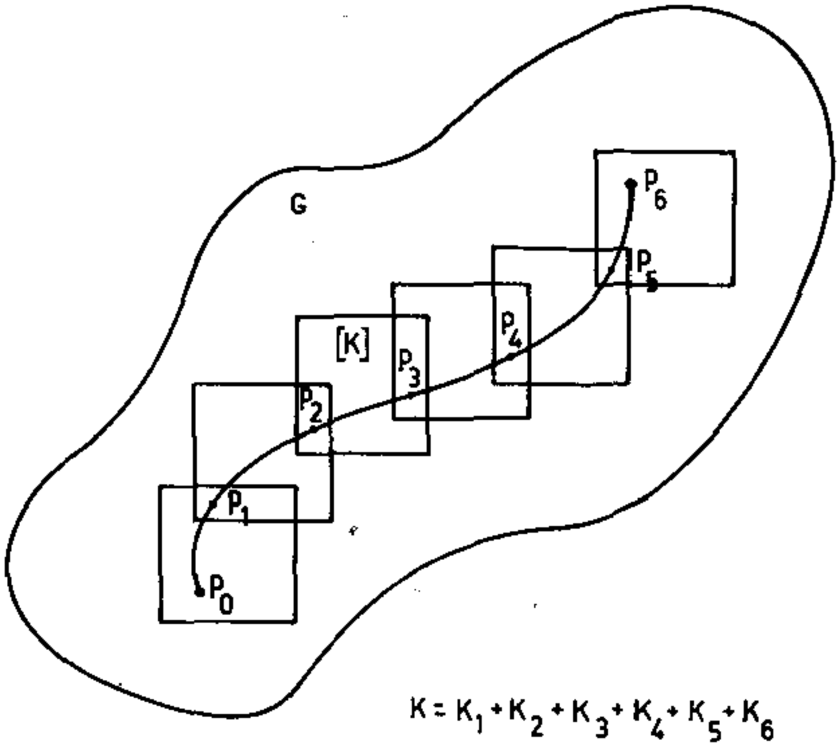
$$k_{pq}(t) := k(t_1+t(t_2-t_1)), \ (0 \leq t \leq 1).$$

Zij $p_0, p_1, \ldots, p_n$ een rij punten op K met "opklimmende parameterwaarden" (dit betekent dat, als k een parametervoorstelling van K is, er getallen $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n \in [0,1]$ zijn zodat $p_0=k(t_\nu)$ $(\nu=0,\ldots,n)$.) Zij p_0 het beginpunt van K (dus $t_0=0$) en p_n het eindpunt ($t_n=1$). Is K_ν de boog van K tussen $p_{\nu-1}$ en p_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ dan is:

$$K = K_1+K_2+\ldots+K_n.$$

8.1.19. STELLING. *Zij* G *open*, K *een kromme met* $[K] \subset G$. *Dan is* K *te schrijven als een som van eindig veel bogen* $K=K_1+\ldots+K_n$ *zodat er assenparallelle open rechthoeken* $R_1,\ldots,R_n$ *bestaan met* $[K_\nu] \subset R_\nu \subset G$ $(\nu=1,\ldots,n)$.

Bewijs. Laat k een parametervoorstelling zijn van K. Laat $\varepsilon>0$ zijn; wegens de uniforme continuïteit van k is er een $\delta>0$ zó dat uit $|t_1-t_2|<\delta$ volgt $|k(t_1)-k(t_2)|<\varepsilon$.
Voor iedere $\tau \in [0,1]$ zij $I(\tau):=(\tau-\delta,\tau+\delta)$. Nu is $[0,1]$ compact; er is dus een $n \in \mathbf{N}$ en een rij $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n$ zó dat $[0,1] \subset \cup_{\nu=1}^n I(\tau_\nu)$ (zie 5.5.9). Verder is $I(\tau_\nu) \cap I(\tau_{\nu+1}) \neq \emptyset$ $(\nu=1,\ldots,n-1)$. Kies $t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}$ in $(0,1)$ zó dat $t_\nu \in I(\tau_\nu) \cap I(\tau_{\nu+1})$, neem bovendien $t_0:=0$, $t_n:=1$.



Figuur 34

Zij $p_\nu := k(t_\nu)$ $(\nu = 0,\dots,n)$; zij K_ν de boog van K tussen $p_{\nu-1}$ en p_ν. Dan geldt voor ieder punt $z \in [K_\nu]$ dat $|z-k(\tau_\nu)| < \varepsilon$, immers $z = k(s)$ met $s \in I(\tau_\nu)$. We hebben dus verkregen dat

$[K_\nu] \subset \{z \mid |\mathrm{Re}\ z - \mathrm{Re}\ k(\tau_\nu)| < \varepsilon, |\mathrm{Im}\ z - \mathrm{Im}\ k(\tau_\nu)| < \varepsilon\}$.

We completeren het bewijs door te laten zien dat ε zo te kiezen is dat al zulke open vierkanten binnen G liggen. (Merk op dat het vierkant ligt binnen $\{z \mid |z-k(\tau_\nu)| < \varepsilon\sqrt{2}\}$.) Omdat [K] het continue beeld (onder k) van de compacte verzameling [0,1] is is [K] compact (5.7.8). Het complement van G is gesloten, dus $d := \inf\{|p-q| \mid p \in K, q \notin G\} > 0$ (5.5.15). Kiest men $\varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{2}d$ dan is aan het gestelde voldaan.

Ter inleiding op een nieuwe definitie van het begrip lijnintegraal van een analytische functie dient de volgende beschouwing.

8.1.20. Zij f analytisch in een open verzameling G; zij K een kromme met $[K] \subset G$. Wegens 8.1.19 is K te schrijven als $K = K_1 + \dots + K_n$ (noem het beginpunt van K_ν: $p_{\nu-1}$, het eindpunt p_ν) zó dat boog K_ν binnen een assenparallelle open rechthoek $R_\nu \subset G$ ligt. In 8.1.17 bewezen we dat f binnen R_ν een primitieve functie heeft, zeg F_ν. We zullen nu zien dat $\sum_{\nu=1}^{n}(F_\nu(p_\nu)-F_\nu(p_{\nu-1}))$ onafhankelijk is van de gekozen verdeling van K in bogen, van de gekozen rechthoeken en van de gekozen primitieve functies van f. Allereerst merken we op dat indien $[K_\nu]$ ligt binnen $R_{\nu,1}$ met primitieve $F_{\nu,1}$ en binnen $R_{\nu,2}$ met primitieve $F_{\nu,2}$, $[K_\nu]$ ook ligt binnen $R_{\nu,1}\cap R_{\nu,2}$ terwijl $F_{\nu,1}$ en $F_{\nu,2}$ op deze laatste rechthoek beide primitieve van f zijn en dus een constante verschillen, m.a.w.

$F_{\nu,2}(p_\nu)-F_{\nu,2}(p_{\nu-1}) = F_{\nu,1}(p_\nu)-F_{\nu,1}(p_{\nu-1})$.

Omdat we van twee splitsingen van K steeds een gemeenschappelijke verfijning kunnen beschouwen, is het verder voldoende te laten zien dat de bovenstaande som niet verandert als we één van de bogen K_ν splitsen in twee delen.

Zij $K_\nu=\hat{K}_1+\hat{K}_2$, $\hat{K}_1$ binnen R_1 met primitieve $\hat{F}_1$, $\hat{K}_2$ binnen R_2 met primitieve $\hat{F}_2$, K_ν binnen R_ν met primitieve F_ν. Zij q het eindpunt van $\hat{K}_1$ (q is dan tevens het beginpunt van $\hat{K}_2$). Op $R_1\cap R_\nu$ zijn $\hat{F}_1$ en F_ν beide primitieve van f, dus

$F_\nu(q)-F_\nu(p_{\nu-1}) = \hat{F}_1(q)-\hat{F}_1(p_{\nu-1})$. Evenzo

$F_\nu(p_\nu)-F_\nu(q) = \hat{F}_2(p_\nu)-\hat{F}_2(q)$ waaruit het gestelde volgt.

De volgende definitie die gebruik maakt van de notaties van 8.1.18 en 8.1.20 is nu gerechtvaardigd.

8.1.21. DEFINITIE. $\int_K^* f(z)dz := \sum_{\nu=1}^{n}(F_\nu(p_\nu)-F_\nu(p_{\nu-1}))$.

Men ziet gemakkelijk dat de eigenschappen 8.1.9 ook voor de $\int_K^*$ gelden. Als we ons geheel tot analytische functies zouden kunnen beperken dan waren op grond van 8.1.21 Stieltjes integralen overbodig.

We merken op dat indien K glad is (of som is van gladde stukken) geldt $\int_K f(z)dz = \int_K^* f(z)dz$. Om dit te bewijzen mogen we ons beperken tot het geval dat G zelf een assenparallelle rechthoek is.

Laat $k\in C^1([0,1])$ een parametervoorstelling van K zijn dan is volgens 8.1.8 $\int_K f(z)dz = \int_0^1 f(k(t))k'(t)dt$. Is F een primitieve van f dan is

$(F\circ k)'(t_0) = \frac{d(F\circ k)}{dt}(t_0)=f(k(t_0))k'(t_0)$. Volgens 7.2.32 is nu $\int_0^1 (F\circ k)'(t)dt=F(k(1))-F(k(0))$.

Voor rectificeerbare stuksgewijs gladde krommen geldt 8.1.10 met $\int_K^*$ in plaats van $\int_K$.

We zullen in de rest van dit hoofdstuk werken met de integraal $\int_K^*$.

We zullen ons nu niet verder verdiepen in de samenhang van de definities 8.1.7 en 8.1.21. Voor gladde krommen, - de enige waarover in dit hoofdstuk integralen volgens de definitie 8.1.7 uitgerekend zullen worden - is de samenhang zoeven gegeven. We zullen de * uit de notatie $\int_k^*$ weer weglaten. De generalisatie naar integralen langs een som van oneindig veel gladde stukken ligt voor de hand. Waar nodig laten we ook zulke integralen toe zonder verder op alle details in te gaan (zie § 7.3).

8.2. Enkele eigenschappen van krommen en gebieden; de hoofdstelling van de functietheorie

In deze paragraaf stelt G steeds voor een *gebied* in **C**, dat is een open niet lege samenhangende verzameling in **C** (zie 5.7.12), S stelt voor het eenheidsvierkant in $\mathbf{R}^2$: $S:=\{(t,u)\mid 0\le t\le 1, 0\le u\le 1\}$.

8.2.1. DEFINITIE. *De krommen* K_1 *en* K_2 *heten homotoop in* G *indien er bestaat een continue afbeelding* $H: S\to G$ *zodat:*

$$H(0,u) = H(0,0) \quad (0\le u\le 1);$$

$$H(1,u) = H(1,0) \quad (0\le u\le 1);$$

$H(t,0)$ *is een parametervoorstelling van* K_1;
$H(t,1)$ *is een parametervoorstelling van* K_2.

H heet een *homotopiefunctie*. Homotope krommen hebben hetzelfde beginpunt (evenzo: eindpunt), de dragers liggen binnen G. Men gaat zonder moeite na dat homotopie in G een equivalentierelatie is. Zijn K_1 en K_2 in G homotoop en zijn k_1 en k_2 willekeurige parametervoorstellingen van K_1 en K_2 dan is er een homotopiefunctie H^* met $H^*(t,0)=k_1(t)$, $H^*(t,1)=k_2(t)$ $(0\le t\le 1)$.
Als nl. H een homotopiefunctie is dan zijn er monotone afbeeldingen τ_1 en τ_2 van $[0,1]$ op $[0,1]$ zó dat $k_1(t)=H(\tau_1(t),0)$, $k_2(t)=H(\tau_2(t),1)$ $(0\le t\le 1)$.
Voor H^* kunnen we nu nemen:

$$H^*(t,u) := \begin{cases} H((1-3u)\tau_1(t)+3ut,0) & (0\le t\le 1, 0\le u\le \frac{1}{3}), \\ H(t,3u-1) & (0\le t\le 1, \frac{1}{3} < u \le \frac{2}{3}), \\ H((3-3u)t+(3u-2)\tau_2(t),1) & (0\le t\le 1, \frac{2}{3} < u\le 1). \end{cases}$$

Zijn K_1 en K_3 homotoop en K_2 en K_4 homotoop (in G) en bestaat K_1+K_2 dan bestaat ook K_3+K_4 en K_1+K_2 is homotoop met K_3+K_4. Is K_1+K_2 homotoop met K_3 dan is K_1 homotoop met $K_3-K_2:=K_3+(-K_2)$.

8.2.2. DEFINITIE. *Een gesloten kromme* K *heet homotoop* 0 *in* G *indien er* K_1 *en* K_2 *bestaan zó dat* $K=K_1+(-K_2)$ *waarbij* K_1 *homotoop met* K_2 *is.*

Is K homotoop 0 dan is bij iedere splitsing $K=K_1^*+(-K_2^*)$ K_1^* homotoop met K_2^*

8.2.3. STELLING. *Als* f *analytisch is in* G, *en als de krommen* K_1 *en* K_2 *homotoop zijn in* G, *dan is*

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz.$$

Bewijs. Is R een open assenparallelle rechthoek, $R\subset G$ en is K een gesloten kromme met $[K]\subset R$, dan is

$$\oint_K f(z)dz = 0.$$

Als nl. F een primitieve van f is binnen R en k een parametervoorstelling van K dan is $\oint_K f(z)dz=F(k(1))-$ $-F(k(0))=0$ daar $k(1)=k(0)$.
Laat H een homotopiefunctie zijn voor K_1 en K_2. Dan is

$$d := \min\{|p-q| \mid p\notin G, q\in H(S)\}>0,$$

omdat H(S) compact is (5.5.15).
Bij iedere $\varepsilon>0$ bestaat er een $\delta>0$ zodat uit $|t_1-t_2|<\delta$ en $|u_1-u_2|<\delta$ volgt dat $|H(t_1,u_1)-H(t_2,u_2)|<\varepsilon$.
We verdelen nu S in eindig veel deelvierkanten zó dat de deelvierkanten zijdelengte $<\delta$ hebben. Zij $n:=[\delta^{-1}]+1$;
$R_{ij}:=\{(t,u) \mid \frac{i-1}{n} \le t\le \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \le t\le \frac{j}{n}\}$ $(i,j=1,\dots,n)$;
$K_{ij}:=H(\partial R_{ij})$ (deze notatie zal geen nadere explicatie behoeven);
$\mathcal{K}:=\{K_{ij} \mid i,j=1,\dots,n\}$. Dan geldt

$$\int_{K_1} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz = \oint_{K_1+(-K_2)} f(z)dz = \int_{\mathcal{K}} f(z)dz =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \oint_{K_{ij}} f(z)dz.$$

Is $p_{ij}:=H(t_{ij},u_{ij})$ waarbij $(t_{ij},u_{ij})\in\mathring{R}_{ij}$ dan ligt $[K_{ij}]$ geheel binnen een cirkel met straal ε om p_{ij}, dus ook binnen een assenparallel vierkant V_{ij} met zijdelengte 2ε en p_{ij} als snijpunt van de diagonalen. Als we nu ε zó kiezen dat $\varepsilon<\frac{1}{2}d\sqrt{2}$ dan ligt V_{ij} binnen G $(i,j=1,\dots,n)$ zodat $\oint_{K_{ij}} f(z)dz=0$ $(i,j=1,\dots,n)$.

Derhalve is $\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz$.

8.2.4. GEVOLG. *Is f analytisch in G en is de gesloten kromme K in G homotoop 0 dan is* $\oint_K f(z)dz=0$.

8.2.5. DEFINITIE. *Een gebied G heet enkelvoudig samenhangend indien voor ieder tweetal punten* p, $q\in G$ *en ieder tweetal krommen* K_1 *en* K_2 *in G die p als beginpunt hebben en q als eindpunt hebben, geldt dat* K_1 *homotoop met* K_2 *is.*

8.2.6. VOORBEELD. Is G convex dan is G enkelvoudig samenhangend. Zijn nl. K_1 en K_2 twee krommen met hetzelfde beginpunt en hetzelfde eindpunt en met parametervoorstellingen k_1 en k_2, dan is
$H(t,u):=(1-u)k_1(t)+uk_2(t)$, $(0\le t\le 1, 0\le u\le 1)$ een homotopiefunctie.

8.2.7. STELLING. *Is f analytisch in G; is G enkelvoudig samenhangend en is K een gesloten kromme in G dan is*

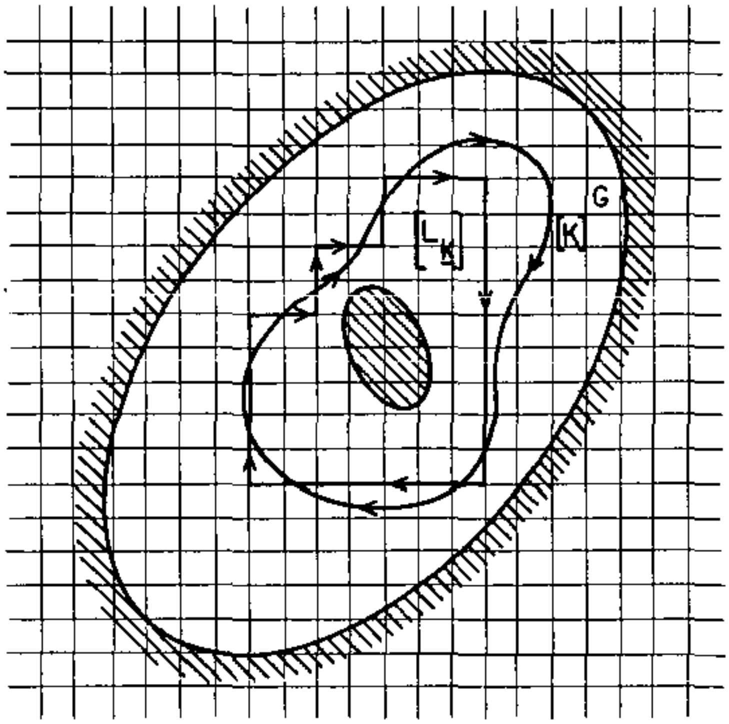
$$\oint_K f(z)dz = 0.$$

Bewijs. Iedere gesloten kromme in een enkelvoudig samenhangend gebied is homotoop 0. Pas 8.2.4 toe.

Men noemt 8.2.3 of 8.2.4 of 8.2.7 wel de hoofdstelling van de functietheorie of ook wel "de" stelling van Cauchy.

8.2.8. DEFINITIE. *Een net met maaswijdte* δ $(\delta>0)$ *in* $\mathbf{C}$ *is de verzameling* $Q(\delta):=\{Q_{n,m}(\delta) \mid n\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{Z}\}$ *waarbij*
$Q_{n,m}(\delta):=\{z \mid n\delta \le \operatorname{Re} z \le (n+1)\delta, m\delta \le \operatorname{Im} z \le (m+1)\delta\}$.

Weer gebruikmakend van stelling 5.5.15 die uitspreekt dat voor een kromme K in een gebied G $\min\{|p-q| \mid p\in[K], q\notin G\}>0$ is, kan men laten zien dat er bij iedere kromme K in een gebied G een $\delta>0$ bestaat zodat K in G homotoop is met een kromme L_K waarvan de drager de vereniging is van een eindig aantal zijden van vierkanten uit het net $Q(\delta)$ (zie figuur 35).



Figuur 35

8.2.9. OPGAVE. Bewijs bovenstaande bewering.

We zullen bij de bestudering van de eigenschappen van gesloten krommen gebruik maken van het volgende begrip.

8.2.10. DEFINITIE. *Zij* K *een gesloten kromme en zij* $a \notin [K]$. *Dan is*

$$n(K,a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{dz}{z-a}.$$

$n(K,a)$ *heet de omloopsindex (of kortweg index) van* K *t.o.v.* a.

Intuïtief zal $n(K,a)$ aangeven het aantal malen 2π dat het "argument" (nu niet de hoofdwaarde!) van $z-a$ toeneemt als z de kromme doorloopt. We zullen een aantal eigenschappen van de index formuleren; de bewijzen laten we grotendeels aan de lezer over. Men merke op dat bij gegeven a en gesloten kromme K ($a \notin [K]$) er een net $Q(\delta)$ bestaat zó dat a inwendig punt is van een vierkant $V(a) \in Q(\delta)$ waarvoor $V(a) \cap [K] = \emptyset$. Nu is K homotoop in $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ met een L_K, waarbij $[L_K]$ bestaat uit zijden van vierkanten van $Q(\delta)$; dus $n(K,a) = n(L_K,a)$. Voor ieder vierkant $Q_{n,m}(\delta)$ uit $Q(\delta)$ dat verschilt van $V(a)$ geldt $n(\partial(Q_{n,m}(\delta)),a) = 0$. Door integralen over tegengestelde segmenten tegen elkaar te laten wegvallen vindt men dan $n(L_K,a) = n(L_K^*,a)$ waarbij L_K^* de som is van segmenten waarvan de dragers zijden zijn van $V(a)$. Bovendien is $n(\partial(V(a)),a)=1$, hetgeen men kan inzien door op te merken dat $\partial(V(a))$ in $\mathbf{C}\backslash\{a\}$ homotoop is met een kromme waarvan de drager een cirkel is met a als middelpunt. Laat $k(t)=a+re^{2\pi it}$ (met $|r|>0$) een parametervoorstelling zijn van deze kromme dan geldt:

$$n(\partial(V(a)),a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{re^{2\pi it}2\pi i dt}{re^{2\pi it}} = 1.$$

EIGENSCHAPPEN. Steeds is K een gesloten kromme, $a\notin[K]$.

8.2.11. $n(K,a)\in\mathbf{Z}$.

8.2.12. Is V een gesloten assenparallelle rechthoek met $[\mathring{K}]\subset V$, $a\notin V$ dan is $n(K,a)=0$.

8.2.13. Zij K een kromme. Op $\mathbf{C}\backslash[K]$ definiëren we een relatie door aCb: $\Leftrightarrow$ (er is een kromme L met beginpunt a en eindpunt b zó dat $[K]\cap[L]=\emptyset$).
Het is niet moeilijk na te gaan dat dit een equivalentierelatie is en dat de equivalentieklassen samenhangende verzamelingen zijn (zie 5.7.13). Deze klassen heten de *componenten* van $\mathbf{C}\backslash[K]$ of ook wel de "gebieden van K".
Liggen twee punten a en b binnen dezelfde component van $\mathbf{C}\backslash[K]$ dan is $n(K,a)=n(K,b)$.

8.2.14. Ligt a in de onbegrensde component van $\mathbf{C}\backslash[K]$ dan geldt $n(K,a)=0$.

OPGAVEN

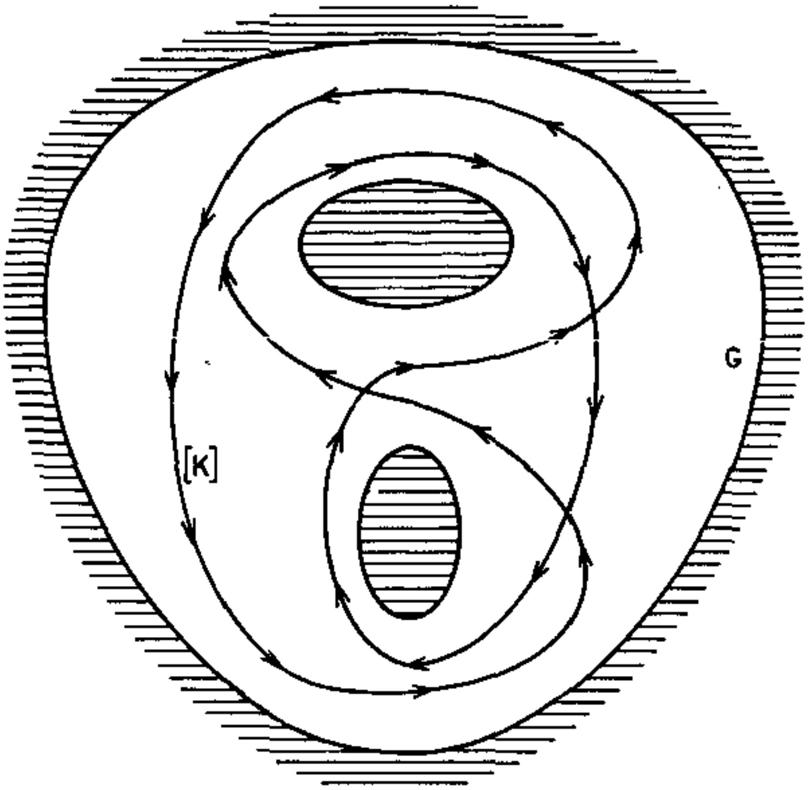
8.2.15. Zij de gesloten kromme K in G homotoop 0; zij $a\notin G$. Bewijs dat $n(K,a)=0$.

8.2.16. Bewijs dat G dan en slechts dan enkelvoudig samenhangend is als voor iedere gesloten kromme K in G en iedere $a\notin G$ geldt $n(K,a)=0$.

8.2.17. DEFINITIE. *Een gesloten kromme* K *heet in* G *homoloog* 0 *indien*

$$\forall_{a\notin G}\,[n(K,a)=0].$$

Iedere kromme die in G homotoop 0 is, is ook homoloog 0 (8.2.15).



K is in G homoloog 0 , maar niet homotoop 0.

Figuur 36

In figuur 36 is een gebied geschetst en een kromme die wel homoloog 0 is maar niet homotoop 0. De lezer verifiere dat K in G homoloog 0 betekent, dat er een net bestaat zó dat voor elke f die analytisch in G is,

$\oint_K f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{K_i} f(z)dz$ waarbij K_i of $-K_i$ de rand van een vierkant van het net is dat geheel binnen G ligt $(i=1,\ldots,n)$.

8.2.18. OPGAVE. Bewijs de volgende verscherping van 8.2.4. Is f analytisch in G en is de gesloten kromme K in G homoloog 0 dan is $\oint_K f(z)dz=0$.

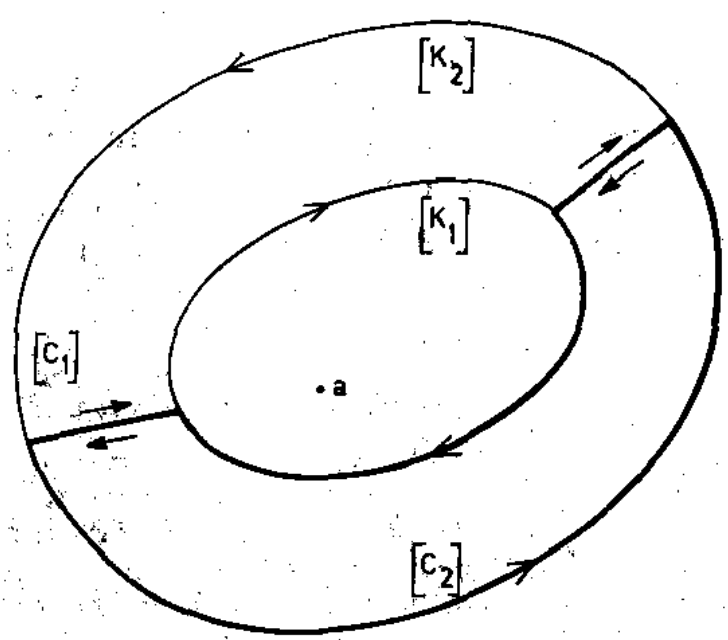
We hebben in deze paragraaf voornamelijk aandacht geschonken aan de eigenschappen van krommen en gebieden. Dat 8.2.3 met recht hoofdstelling van de functietheorie heet zal blijken uit de resultaten van de volgende paragraaf. We merken nog (zonder bewijs) op dat een Jordankromme K het complexe vlak in drie delen verdeelt, nl. de punten van [K], de punten a waarvoor $n(K,a)=0$ (dit noemen we het buitengebied van [K]) en de punten waarvoor $n(K,a)\neq 0$. Als K positief geöriënteerd is is voor al deze punten $n(K,a)=1$ (men noemt dit deel van **C** het binnengebied

van [K]). In dit geval zijn het binnengebied en het buitengebied van [K] de twee componenten van $\mathbf{C}\setminus[K]$. Dit is allemaal intuïtief duidelijk.
In het vervolg komt het enkele malen voor dat we 8.1.10 willen toepassen op integralen over een Jordankromme J. We moeten dan wel eisen dat J rectificeerbaar is.

8.2.19. OPGAVE. Zij f analytisch op en binnen de Jordankromme K.
Bewijs dat $\oint_K f(z)dz=0$.

8.3. De theorie der residuën

Evenals in 5.2.6 geven we met $B_{a,r}$ de verzameling $\{z\in\mathbf{C}\mid |z-a|<r\}$ aan ($r>0$). De rand van $B_{a,r}$ geven we aan met $[C_{a,r}]$ d.w.z. $[C_{a,r}]:=\{z\in\mathbf{C}\mid |z-a|=r\}$. Als over $C_{a,r}$ wordt geïntegreerd is steeds de positieve oriëntatie bedoeld. We noemen in het vervolg $B_{a,r}\setminus\{a\}$ een *gereduceerde omgeving* van a, evenals iedere open verzameling die a niet bevat en die voor zekere $r>0$ de verzameling $B_{a,r}\setminus\{a\}$ bevat. Laat een functie f analytisch zijn in een gereduceerde omgeving Ω van a en laten K_1 en K_2 Jordankrommen in Ω zijn zodat $n(K_1,a)=n(K_2,a)=1$. Dan is $\oint_{K_1} f(z)dz = \oint_{K_2} f(z)dz$. Dit is als volgt in te zien:



Figuur 37

In figuur 37 is aangegeven hoe uit K_1 en K_2 twee krommen C_1 en C_2 kunnen worden samengesteld zo dat

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{K_2} f(z)dz - \oint_{K_1} f(z)dz.$$

Volgens 8.2.4 zijn $\oint_{C_1} f(z)dz$ en $\oint_{C_2} f(z)dz$ beide 0. Blijkbaar hangt $\oint_K f(z)dz$ niet van de keuze van K af mits $[K]\subset\Omega$ en $n(K,a)=1$. We kunnen in het bijzonder een cirkel met middelpunt a nemen. We definiëren nu

8.3.1. DEFINITIE. *Als* f *analytisch is in een gereduceerde omgeving* Ω *van* a *en* $[C_{a,\rho}]\subset\Omega$ *dan heet*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{a,\rho}} f(z)dz =: \operatorname{Res}_a f$$

het residu van f *in het punt* a.

Uit de voorgaande beschouwing blijkt dat dit getal inderdaad niet van ρ afhangt en dat we in plaats van $C_{a,\rho}$ ook iedere andere Jordankromme K in Ω met $n(K,a)=1$ kunnen nemen.

VOORBEELDEN

8.3.2. Is f analytisch in a dan noemen we a een *regulier* punt van f. Een punt a heet *singulier* punt van f indien a zelf geen regulier punt van f is en iedere gereduceerde omgeving van a reguliere punten bevat. Volgens 8.2.4 is het residu van f in een regulier punt 0.

8.3.3. Als $z_0\in\mathbf{C}$ en m een negatief geheel getal is dan is $(z-z_0)^m$ in z_0 niet analytisch (zelfs niet gedefinieerd); z_0 is een singulier punt van de functie.
In 8.1.14 hebben we al gezien dat als $m=-1$ het residu van deze functie in z_0 gelijk is aan 1. Voor alle andere m is het residu 0. Men mag dus niet uit $\operatorname{Res}_a f = 0$ concluderen dat a een regulier punt van f is!

8.3.4. Als f analytisch is in $\mathbf{C}$ met uitzondering van de punten n^{-1} $(n=1,2,\ldots)$ en 0 (zie 8.4.4) dan is er géén gereduceerde omgeving van 0 waarbinnen f analytisch is. We kunnen dan niet van een residu in 0 spreken.
In dit geval heet 0 een *niet geïsoleerde singulariteit* van f. Definitie 8.3.1 is van toepassing op de zogenaamde *geïsoleerde* singuliere punten.

OPGAVEN

8.3.5. Zij $f(z):=(z^2-1)^{-1}$ voor $z\neq\pm1$. Bepaal $\mathrm{Res}_1\ f$.

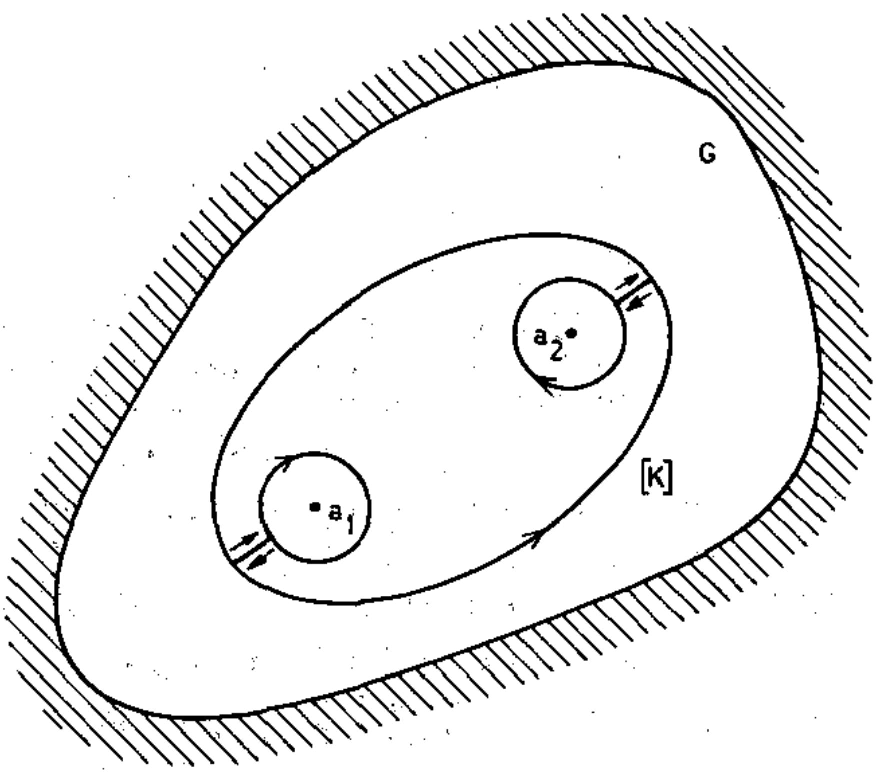
8.3.6. Zij $f(z):=z^{-2}\cos z$ voor $z\neq 0$. Bepaal $\mathrm{Res}_0\ f$.

We kunnen nu integralen over gesloten krommen uitdrukken in residuen zoals de volgende stelling (de *residuenstelling* van Cauchy) toont:

8.3.7. STELLING. *Zij* G *een enkelvoudig samenhangend gebied en* f *een functie die in* G *analytisch is met uitzondering van een eindig aantal singuliere punten. Zij* K *een Jordankromme in* G. *Als geen van de singuliere punten* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *van* f *op* $[K]$ *ligt en* $n(K,a_\nu)=1$ $(1\le\nu\le n)$, *dan geldt:*

$$\oint_K f(z)dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_\nu}\ f.$$

Bewijs. Laat voor $\nu=1,2,\ldots,n$ de cirkels $[C_{a_\nu,\rho}]$ in het binnengebied van $[K]$ liggen en disjunct zijn. Evenals in fig. 37 construeren we uit K en deze cirkels een kromme C die in $G\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ homotoop 0 is (zie figuur 38).



Figuur 38

Uit de constructie zien we dat

$$\oint_C f(z)dz = \oint_K f(z)dz - \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{C_{a_\nu,\rho}} f(z)dz.$$

Het gestelde volgt nu uit 8.2.4 en 8.3.1.

Als we nu een manier kunnen vinden om residuen te bepalen zonder te integreren dan geeft 8.3.7 ons een methode om integralen over gesloten krommen in $\mathbf{C}$ te bepalen (als de integrand analytisch is met uitzondering van geïsoleerde singulariteiten). Dat dit mogelijk is zullen we eerst aan de hand van enkele voorbeelden laten zien.

VOORBEELDEN

8.3.8. Zij $f(z) := \frac{z^2+1}{z^2(z+1)}$ voor $z \in \mathbf{C} \setminus \{0,-1\}$. We kunnen $f(z)$ als volgt in breuken splitsen: $f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z+1}$.

De drie functies in het rechterlid hebben in het punt 0 residu resp. -1, 0, 0 en in het punt -1 residu resp. 0, 0, 2 (zie 8.3.2, 8.1.14). We vinden dus met 7.2.9 en 8.3.7

$$\oint_{C_{0,2}} f(z)dz = 2\pi i(-1+2) = 2\pi i.$$

8.3.9. Zij $f(z)=z^{-4} \sin z$ voor $z\neq 0$. Uit 6.8.11 volgt dat $z^{-4}(\sin z - z + \frac{1}{6} z^3)$ analytisch is op $\mathbf{C}$. Dus is $\mathrm{Res}_0\, f = = \mathrm{Res}_0\, g$ als $g(z) := z^{-3} - \frac{1}{6} z^{-1}$. Volgens 8.1.14 is dus $\mathrm{Res}_0\, f = -\frac{1}{6}$.

Deze twee voorbeelden zijn van éénzelfde soort. In beide voorbeelden kon in een gereduceerde omgeving van een singulier punt a de functie f geschreven worden als $f(z) = \sum_{k=1}^{\ell} A_k(z-a)^{-k}+g(z)$ waarbij a een regulier punt van g is. Een dergelijk gedrag geven we in de volgende definitie een aparte naam.

8.3.10. DEFINITIE. *Als* f *analytisch is in een gereduceerde omgeving van* a*, als* $k \in \mathbf{N}$ *en als* $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)=\ell\neq 0$ *dan zeggen we dat* f *in* a *een pool van de orde* k *heeft.*

Merk op dat als $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)=\ell\neq 0$ en $k_1>k$ dan

$\lim_{z\to a}(z-a)^{k_1}f(z)=0$. (Als $k_1<k$ bestaat de limiet niet.) In 8.3.8 heeft f twee polen, namelijk 0, een pool van de orde 2 en -1, een pool van de eerste orde. In 8.3.9 heeft f in 0 een pool van de orde 3.

8.3.11. OPGAVE. Als f in a een pool van de eerste orde heeft dan is $\mathrm{Res}_a\ f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$. Bewijs dit en bepaal dan het residu van $(\sin z)^{-1}$ in het punt π.

We zullen in 8.4.28 zien dat als f in een punt a een pool van de orde ℓ heeft, in een gereduceerde omgeving van a geldt $f(z) = \sum_{k=1}^{\ell} A_k(z-a)^{-k}+g(z)$ waarbij g in a analytisch is en $A_\ell\neq 0$. Hierin is $\mathrm{Res}_a\ f = A_1$ en $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)=A_k$. De methode van 8.3.11 om residuen te bepalen is dus alleen toepasbaar in polen van de eerste orde!

8.3.12. VOORBEELD. Vaak kan men de volgende methode gebruiken om de bepaling van een residu te vereenvoudigen. Zij $f(z)=z^{-8}(z+2)^{-1}$ voor $z\in\mathbf{C}\setminus\{0,-2\}$. Volgens 8.1.10 geldt voor $R>2$

$$\left|\int_{C_{0,R}} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi R}{R^8(R-2)} = o(1),\ (R\to\infty).$$

Volgens 8.3.7 hangt de integraal niet van R af als $R>2$ en dus is de integraal 0 voor $R>2$. Volgens 8.3.11 is $\mathrm{Res}_{-2}\ f = 2^{-8}$. Dus is volgens 8.3.7 $\mathrm{Res}_0\ f = -2^{-8}$.

8.3.13. STELLING. *Als* ϕ *analytisch is in* a *en* $f(z) := \frac{\phi(z)}{z-a}$ *in een gereduceerde omgeving van* a *dan is*

$$\mathrm{Res}_a\ f = \phi(a).$$

Bewijs. Als ρ voldoende klein is dan geldt volgens 8.3.3

$$\mathrm{Res}_a\ f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{a,\rho}} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{a,\rho}} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a}dz+\phi(a).$$

Volgens 8.1.10 is

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{a,\rho}} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a}dz\right| \le \max\{|\phi(z)-\phi(a)| \,\big|\, z\in C_{a,\rho}\} =$$

$$= o(1),\ (\rho\to 0).$$

Daar deze term gelijk is aan $\mathrm{Res}_a\ f-\phi(a)$ en dus niet van ρ afhangt is deze term 0 waarmee het gestelde is bewezen.

Een enigszins uitgebreide vorm van deze stelling is bekend als de *integraalformule van Cauchy*:

8.3.14. STELLING. *Als* ϕ *analytisch op en binnen de Jordankromme* K *dan geldt als* $a \notin [K]$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{\phi(z)}{z-a}\,dz = \phi(a)n(K,a).$$

Bewijs. Als a in het buitengebied van [K] ligt is de integrand analytisch op en binnen K en dan volgt de stelling uit 8.2.19. Is a in het binnengebied van [K] en is $n(K,a)=1$, dan is het gestelde in 8.3.13 bewezen; is $n(K,a)=-1$ dan is $-K$ positief geöriënteerd en volgt het gestelde eveneens uit 8.3.13.

We zien uit 8.3.14 dat twee functies ϕ en ψ die op en binnen een Jordankromme K analytisch zijn en die op K overeenstemmen ook binnen K overeenstemmen!

8.3.15. VOORBEELD. Als f analytisch is op en binnen de eenheidscirkel $C_{0,1}$ en als $f(z)=z$ op $C_{0,1}$ dan is $f(z)=z$ op $\overline{B}_{0,1}$. Immers voor $a\in B_{0,1}$ geldt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,1}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,1}} \frac{z}{z-a}\,dz = a$$

volgens 8.3.13.

OPGAVEN

8.3.16. Bepaal $\oint_{C_{0,1}} \frac{\bar{z}}{z^3(z-2)}\,dz$.

8.3.17. Bepaal $\oint_{C_{0,R}} \frac{\sin(\pi z^{-1})}{(1+z)^2}\,dz$ als $R\neq 1$.

We zullen nu nog eens de integraal uit 8.3.14 bestuderen, nu voor het geval dat ϕ niet analytisch is en de kromme K willekeurig.

8.3.18. STELLING. *Zij* K *een rectificeerbare kromme en* $\phi\colon [K]\to\mathbf{C}$ *continu op* [K]. *Dan is door*

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\phi(z)}{z-a}\,dz$$

een analytische functie op $\mathbf{C}\setminus[K]$ *gedefinieerd.*

Bewijs. Als $a\notin[K]$ bestaat de integraal omdat de integrand continu is op [K]. We definiëren

$$g(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\phi(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

Er is een omgeving van a die geen punten met [K] gemeen heeft. Binnen zo'n omgeving kiezen we nu de cirkel $[C_{a,\rho}]$ en noemen de (positieve) afstand van deze cirkel tot [K] dan d.
Als $0<|h|<\rho$ dan geldt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \phi(z)\Big\{\frac{h}{(z-a)^2(z-a-h)}\Big\}dz.$$

Daar ϕ continu is op [K] bestaat $M := \max\{|\phi(z)| \,\big|\, z\in[K]\}$.
Volgens 8.1.10 is als ℓ de lengte van K is

$$\Big|\int_K \frac{\phi(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\,dz\Big| \le \ell M d^{-3},$$

dus

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - g(a) = O(|h|) \text{ voor } h\to 0$$

waarmee bewezen is dat f differentieerbaar is in a met afgeleide g(a). Daar a willekeurig was is het gestelde bewezen.

Deze stelling is een speciaal geval van de volgende algemene stelling over het differentiëren onder het integraalteken. Deze is een generalisatie van 7.6.17. We beschouwen een functie ϕ van twee complexe variabelen. We zullen de eerste variabele met z en de tweede met t aangeven. Met ϕ_t geven we dus de partiële afgeleide van ϕ naar de tweede variabele aan.

8.3.19. STELLING. *Zij* K *een rectificeerbare kromme en zij* G *een gebied in* **C**. *Laat* $\phi\colon [K]\times G\to\mathbf{C}$ *een functie zijn met de eigenschappen:*

(i) ϕ *is begrensd op* $[K]\times G$, *d.w.z.*

$M := \sup\{|\phi(z,t)| \,\big|\, z\in[K], t\in G\}$ *bestaat,*

(ii) *voor iedere* $a\in G$ *zijn door* $\phi(z,a)$ *en* $\phi_t(z,a)$ *continue functies op* [K] *gegeven.*

Dan is door

$$f(t) := \int_K \phi(z,t)\,dz$$

een analytische functie op G *gedefinieerd en voor* $a\in G$ *is*

$$f'(a) = \int_K \phi_t(z,a)\,dz.$$

Bewijs. Gegeven is dat ϕ_t bestaat, dus is voor vaste

$z \in [K]$ volgens 8.3.14 en 8.3.18, als $a \in G$:

$$\phi(z,a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_J \frac{\phi(z,t)}{t-a}\, dt \text{ en } \phi_t(z,a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_J \frac{\phi(z,t)}{(t-a)^2}\, dt$$

waarbij $[J] := [C_{a,\rho}]$ een geschikt gekozen cirkel is gelegen in C. Voor $0<|h|<\frac{1}{2}\rho$ geldt:

$$\left|\frac{\phi(z,a+h)-\phi(z,a)}{h} - \phi_t(z,a)\right| = \frac{1}{2\pi} \left|\oint_J \frac{h\phi(z,t)}{(t-a)^2(t-a-h)}\, dt\right| \le$$

$$\le |h| 2M\rho^{-2}.$$

Dus vinden we bij integratie over K, als ℓ := lengte van K

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \int_K \phi_t(z,a)dz\right| \le |h| 2M\rho^{-2}\ell = O(|h|)$$

voor $|h| \to 0$.

Hiermee is het gestelde bewezen.

8.3.20. GEVOLG. Door herhaalde toepassing van 8.3.19 op de in 8.3.18 gedefinieerde functie f vinden we onder de voorwaarden van 8.3.18:

Als $f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\phi(z)}{z-a}\, dz$ dan $f^{(n)}(a) =$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{\phi(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Uit bovenstaande volgt *nu* één van de meest verrassende stellingen van de theorie der analytische functies:

8.3.21. STELLING. *Als* f *analytisch is in het gebied G dan* f' *ook*.

Bewijs. Als $z \in G$ dan is er een omgeving van z gelegen in G. Hierbinnen kiezen we $[J] := [C_{z,\rho}]$. In 8.3.14 is bewezen dat binnen J geldt $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_J \frac{f(t)}{t-a}\, dt$ en in 8.3.20 hebben we gezien dat alle afgeleiden van f in het punt a bestaan als a in het inwendige van [J] ligt. Daar z willekeurig was is aangetoond dat f in G in ieder punt afgeleiden van willekeurig hoge orde heeft. In het bijzonder is dus f' analytisch (en ook f", etc.).

Dat ook voor niet eindige K uitspraken als in 8.3.19 geldig kunnen zijn hebben we reeds in 7.6.35 gezien!

VOORBEELDEN

8.3.22. De *Besselfunctie* J_0 gedefinieerd door $J_0(t) :=$ $:= \int_0^1 \cos(t \sin(\pi z))dz$ is analytisch op **C** daar voor ieder begrensd gebied $G\subset$**C** stelling 8.3.19 toegepast kan worden.

8.3.23. Zij f analytisch en begrensd op $\{z \mid 0<|z|\leq 1\}$. Als $0<\rho<|z|\leq 1$ is $\oint_{C_{0,\rho}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt$ niet van ρ afhankelijk.

Zij $M := \sup\{|f(t)| \mid 0<|t|\leq 1\}$.

Dan is $\left|\oint_{C_{0,\rho}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt\right| \leq \frac{2\pi M\rho}{|z|-\rho} \to 0$ als $\rho\to 0$, dus blijkbaar

$\oint_{C_{0,\rho}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 0$ voor $0<\rho<|z|$.

Op grond van de residuenstelling (8.3.7) is

$\oint_{C_{0,1}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \oint_{C_{0,\rho}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 2\pi i f(z)$ als $\rho<|z|<1$.

Dus is nu aangetoond dat $g(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,1}} \frac{f(t)}{t-z}\,dt =$

$= f(z)$ voor $0<|z|<1$. Daar f continu is op $[C_{0,1}]$ is g volgens 8.3.18 analytisch op $\{|z| \mid |z|<1\}$. Hiermee is aangetoond dat als we de oorspronkelijk in z=0 niet gedefinieerde functie f uitbreiden door te definiëren $f(0) := g(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,1}} t^{-1}f(t)dt$ dan f ook in 0 analytisch is! Gezien de oorspronkelijke definitie van f was 0 een geïsoleerde singulariteit. Deze is door de aanvullende definitie opgeheven. Men noemt dit dan ook een *opheffbare singulariteit* (zie na 8.4.28).

OPGAVEN

8.3.24. Zij ϕ gedefinieerd op $\{w \mid |w|\neq 1\}$ door $\phi(w) :=$ $:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,1}} \frac{\operatorname{Re} z}{z-w}\,dz$. Bepaal $\phi(w)$ als $|w|<1$ resp. $|w|>1$.

8.3.25. Als f in a een pool van orde k heeft dan is er een functie ϕ, analytisch in een omgeving van a, zo dat $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^k}$. Bewijs dit en toon aan dat

$\operatorname{Res}_a f = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$.

We kunnen nu een stelling bewijzen die in zekere zin een omkering is van de hoofdstelling (8.2.7).

8.3.26. STELLING (Morera). *Zij* G *een gebied,* $f: G \to \mathbf{C}$ *continu op* G *en* $\oint_K f(z)dz=0$ *voor iedere gesloten kromme* K *in* G. *Dan is* f *analytisch op* G.

Bewijs. Kies α vast in G. Is K_1 een kromme met beginpunt α en eindpunt z, gelegen in G dan hangt $\int_{K_1} f(z)dz$ alleen van z af, niet van de keuze van K_1. Zoals in 8.1.18 is aangetoond door $F(z) := \int_\alpha^z f(t)dt$ een in G analytische functie gedefinieerd met $F'=f$. Volgens 8.3.21 is ook f analytisch.

OPGAVEN

8.3.27. Zij f analytisch op $\overline{B}_{a,r}$ en $|f(z)| \leq M$ op $[C_{a,r}]$. Dan geldt $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$.

Bewijs dit. (Dit heet ook de *ongelijkheid van Cauchy.*)

8.3.28. Zij ϕ analytisch op $B_{0,2}$. We definiëren

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\phi(t)}{t-z}\, dt$$

waarin de integratiekromme het segment $[0,1]$ is. Als $0<x<1$ dan is

$$\lim_{y \downarrow 0}\{f(x+iy)-f(x-iy)\} = \phi(x).$$

Bewijs dit.

8.4. Reeksen

We beschouwen nu reeksen waarvan de termen complexe functies zijn en interesseren ons voor problemen als het termsgewijs integreren over een kromme, termsgewijs differentiëren enz. Verder zullen we evenals in 6.8 nagaan of de beschouwde functies te ontwikkelen zijn in de machtreeksen.

We beginnen met een stelling die een generalisatie is van 7.6.2.

8.4.1. STELLING. *Zij* K *een rectificeerbare kromme. Als de functies* $f_n: [K] \to \mathbf{C}$ $(n=1,2,\ldots)$ *continu zijn op* $[K]$ *en als* $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ *uniform convergent is op* $[K]$ *dan geldt:*

$$\int_K \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\Big)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K f_n(z)dz.$$

Bewijs. Zij $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ voor $z \in [K]$. Volgens 5.6.11 is F continu op [K] en dus integreerbaar over K. Zij L de lengte van K. Zij $\varepsilon > 0$. Er is een N_0 zó dat voor $N > N_0$ en $z \in [K]$ geldt $|\sum_{n=1}^{N} f_n(z) - F(z)| < \varepsilon L^{-1}$. Volgens 8.1.10 is voor $N > N_0$ $|\int_K F(z)dz - \sum_{n=1}^{N} \int_K f_n(z)dz| < \varepsilon$ waarmee het gestelde bewezen is.

In 7.6.7. hebben we gezien dat voor het termsgewijs differentiëren van een reeks reële functies op [a,b] o.a. de voorwaarde gesteld werd dat de reeks van afgeleiden uniform convergeert op [a,b]. In de theorie van complexe functies is differentieerbaarheid zelf al zo'n zware eis dat we met zwakkere voorwaarden genoegen kunnen nemen. Dit blijkt uit de volgende stelling.

8.4.2. STELLING. *(Weierstrass) Zij* G *een gebied in* $\mathbf{C}$ *en laat, voor* $n \in \mathbf{N}$, $f_n: G \to \mathbf{C}$ *analytisch zijn in* G.
Als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *uniform convergeert op* G *met som* F(z) *dan is* F *analytisch op* G *en* $F^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ *op* G $k=1,2,\ldots$.

Bewijs. Zij G' een enkelvoudig samenhangend deelgebied van G en K een gesloten kromme in G'.
Volgens 8.2.7 is $\oint_K f_n(z)dz = 0$ voor $n \in \mathbf{N}$. Volgens 8.4.1 is dan $\oint_K F(z)dz = 0$. Daar K willekeurig was, is volgens de stelling van Morera (8.3.26) F analytisch op G' en daar G' willekeurig was is F analytisch op G. Zij $a \in G$. Er is een omgeving van a die in G ligt. Kies hierbinnen de cirkel $[C_{a,\rho}]$. Op $[C_{a,\rho}]$ is ook $\sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^{-k-1} f_n(z)$ uniform convergent. Volgens 8.3.20 en 8.4.1 geldt

$$F^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{C_{a,\rho}} \frac{F(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{k!}{2\pi i} \oint_{C_{a,\rho}} \frac{f_n(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

waarmee het gestelde bewezen is.

VOORBEELDEN

8.4.3. Voor de in 8.3.22 gedefinieerde functie J_0 geldt voor alle t

$$J_0(t) = \int_0^1 \cos(t \sin(\pi z))dz =$$

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(t \sin(\pi z))^{2n}\Big)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{((2n)!!)^2}$$

volgens 8.4.1 en 7.2.34.

8.4.4. Voor $n \in \mathbf{N}$ is door $f_n(z) := n^{-2}(z-n^{-1})^{-1}$ een analytische functie gedefinieerd op $\mathbf{C}\setminus\{n^{-1}\}$. De functie f_n heeft in n^{-1} een pool van de eerste orde met residu n^{-2}. Zij $S := \{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbf{N}\}$ en $a \in \mathbf{C}\setminus S$. Zij d de (positieve) afstand van a tot S. Als $\rho < d$ en $z \in B_{a,\rho}$ dan is $|f_n(z)| \le n^{-2}(d-\rho)^{-1}$. Volgens 5.6.10 is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent op $B_{a,\rho}$. Zij $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Volgens 8.4.2 is nu bewezen dat F analytisch is op $\mathbf{C}\setminus S$. Als we uit de reeks de term $f_\nu(z)$ weglaten dan is op dezelfde manier in te zien dat de nieuwe reeks een somfunctie heeft die ook in ν^{-1} analytisch is. Dus heeft F een pool van de eerste orde in n^{-1} met residu n^{-2} $(n=1,2,\ldots)$. Het punt 0 is een verdichtingspunt van polen van de functie F, d.w.z. 0 is een niet geïsoleerde singulariteit. Volgens 8.4.1 en 7.5.10 is

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,2}} F(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,2}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(z-n^{-1})^{-1}\Big)dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

OPGAVEN

8.4.5. Zij $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x) :=$
$:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

(i) Ga na dat $f'(x) \to \infty$ als $x \uparrow 1$. Beschouw nu $F: \overline{B}_{0,1} \to \mathbf{C}$ gedefinieerd door $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$.

(ii) Ga na dat F analytisch is op $B_{0,1}$. (iii) Is er een functie G, analytisch op $\overline{B}_{0,1}$, met $F(z)=G(z)$ op $B_{0,1}$?

8.4.6. Beschouw de functie ζ: $\{z \mid \text{Re } z > 1\} \to \mathbf{C}$ gedefinieerd door $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s \log n}$ (ζ-functie van Riemann, zie 7.5.10). Bewijs dat deze functie analytisch is in het genoemde gebied.

8.4.7. Zij $G:=\{z\in\mathbf{C} \mid \text{Re } z > 0\}$. Toon aan dat door $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)}$ een analytische functie op G is gedefinieerd. Toon aan dat f in G een primitieve F heeft met $F(1)=0$ en bepaal $F(x)$ voor $x\in\mathbf{R}^+$.

In stelling 6.8.11 hebben we gezien dat binnen de convergentiecirkel de som van een machtreeks een analytische functie is. We zullen nu zien dat we daarmee alle analytische functies hebben leren kennen, d.w.z. dat een functie die in een omgeving van a analytisch is de som is van een in deze omgeving convergente machtreeks.

8.4.8. STELLING. *(Taylor) Zij* G *een gebied,* $f: G\to\mathbf{C}$ *analytisch op* G *en* $a\in G$. *Zij* d *de afstand van* a *tot* $\mathbf{C}\backslash G$. *Als* $c_n := \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ *dan geldt voor* $|z-a|<d$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Bewijs. Zij $0<\rho_1<\rho<d$. Voor $z\in B_{a,\rho}$ geldt volgens 8.3.14 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{a,\rho}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$. Merk op dat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{w-a}\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)^{-1} = \frac{1}{w-z}$. Daar $|f|$ begrensd is op $[C_{a,\rho}]$ en $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < \frac{\rho_1}{\rho} < 1$ voor $z\in B_{a,\rho_1}$ is $\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ voor $z\in B_{a,\rho_1}$ uniform convergent op $[C_{a,\rho}]$. Volgens 8.4.1 is dus $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{a,\rho}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ (volgens 8.3.20). Daar ρ_1 en ρ willekeurig waren is het gestelde bewezen.

De in 8.4.8 gevonden reeksontwikkeling heet de *Taylorreeks* van f rond a. We vestigen er de nadruk op dat in 8.4.8 niet staat dat d de convergentiestraal is van de genoemde machtreeks maar dat deze convergentiestraal tenminste d is! *Uit de stelling 8.4.8 wordt duidelijk waarom het ons in de theorie van de complexe functies steeds is gelukt differentieerbaarheid van een functie* f *in een punt* a *te bewijzen door aan te tonen dat* $f(a+h)-f(a)=Ah+O(|h|^2)$ voor geschikte A, terwijl in de definitie slechts geëist wordt dat $f(a+h)-f(a)=Ah+o(|h|)$ $(|h|\to 0)$.

8.4.9. VOORBEELD. Zij f gedefinieerd voor $|z|<1$ door $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$. Volgens 8.4.8 is $f(z)$ te ontwikkelen *in een reeks naar machten van* $z-\frac{1}{2}i$ met convergentiestraal $\geq\frac{1}{2}$. Als we g definiëren voor $z\neq 1$ door $g(z):=(1-z)^{-1}$ dan is $g(z)$ te ontwikkelen in een reeks naar machten van $z-\frac{1}{2}i$ die volgens 8.4.8 en 6.8.11 convergentiestraal $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ heeft. Daar f en g binnen de eenheidscirkel overeenstemmen zijn de twee gevonden machtreeksen identiek d.w.z. de convergentiestraal van de machtreeksontwikkeling van $f(z)$ rond $z=\frac{1}{2}i$ is $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Daar $f^{(n)}(z)=n!(1-z)^{-n-1}$ is $c_n=(1-\frac{1}{2}i)^{-n-1}$. De Taylorreeks rond $\frac{1}{2}i$ is dus $(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2}i)^{-n-1}(z-\frac{1}{2}i)^n$, een meetkundige reeks.

8.4.10. We kunnen nu het gedrag van een functie in de buurt van een regulier punt bestuderen met behulp van de Taylorreeks. Laat f analytisch zijn in a en zij $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Als f niet constant is dan zijn de coëfficiënten $c_1, c_2, \ldots$ niet alle 0. Zij $k := \min\{n\in\mathbf{N} \mid c_n\neq 0\}$.

Definieer $d_m:=c_{k+m}c_k^{-1}$ voor $m\in\mathbf{N}$, $g(z) := 1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m(z-a)^m$.

Dan is (in een omgeving van *a*) $f(z)=c_0+c_k(z-a)^k g(z)$ en g is analytisch in deze omgeving.

Als $c_0=f(a)=0$ dan noemen we a een *k-voudig nulpunt* van f en ook wel een nulpunt met *multipliciteit* k. Als $c_0\neq 0$ dan is $f(z)\neq 0$ in een omgeving van a op grond van de continuïteit en als $c_0=0$ dan is $g(z)\neq 0$ in een omgeving van a daar $g(a)=1$ en dan is dus a het enige punt in een omgeving van a waar $f(z)=0$. Hiermee is bewezen:

8.4.11. STELLING. *Is* f *analytisch in* a *dan is* a *niet een verdichtingspunt van nulpunten van* f, *tenzij* f *identiek* 0 *is in een omgeving van* a.

Een zeer belangrijk gevolg van deze stelling is de zogenaamde *identiteitsstelling*:

8.4.12. STELLING. *Zij* G *een gebied in* **C** *en laten* f *en* g *analytisch zijn op* G. *Als* $z_0 \in G$ *en als in iedere gereduceerde omgeving van* z_0 *een punt* z *ligt met* $f(z)=g(z)$ *dan zijn* f *en* g *identiek op* G.

Bewijs. Daar z_0 een verdichtingspunt is van nulpunten van f-g is f-g identiek 0 in een omgeving van z_0. Daar G samenhangend is, is ieder punt $z_1 \in G$ eindpunt van een kromme K met beginpunt z_0 en $[K] \subset G$ (6.7.13). Als k een parametervoorstelling van K is dan hebben we tot nu toe bewezen dat er een $\delta \in (0,1)$ is met $f(k(t))=g(k(t))$ voor $0 \le t < \delta$. Dan is er echter een omgeving van $k(\delta)$ waarbinnen $f(z)=g(z)$. Hieruit volgt dat zelfs $f(k(t))=g(k(t))$ voor $0 \le t \le 1$. Immers het supremum van de getallen δ met de genoemde eigenschap kan niet kleiner dan 1 zijn. Daarmee is het gestelde bewezen.

Uit de Taylorreeks volgt nog een belangrijke stelling. Deze noemt men meestal het *maximumprincipe*:

8.4.13. STELLING. *Als* f *analytisch is in* a *neemt* $|f|$ *in* a *niet een maximum aan tenzij* f *constant is in een omgeving van* a.

Bewijs. Laat f niet constant zijn in een omgeving van a. Evenals in 8.4.10 schrijven we $f(z)=c_0+c_k(z-a)^k g(z)$. Als $c_0=0$ is het bewijs triviaal. Als $c_0 \neq 0$ schrijven we $c_k c_0^{-1} = re^{i\phi}$ $(r>0)$. Beschouw $z=a+\rho e^{-i\phi/k}$ met ρ voldoende klein. Dan is, daar $g(z)=1+o(1)$ voor $z \to a$, $|c_0^{-1} f(z)| = |1+r\rho^k+o(\rho^k)|$ voor $\rho \to 0$, dus $|c_0^{-1} f(z)|>1$ voor voldoende kleine positieve ρ.

Merk op dat als f analytisch is op een begrensd gebied G en continu op $\bar{G}$ het maximum van $|f|$ (zie 5.7.10) op de rand van G wordt genomen.

OPGAVEN

8.4.14. Zij G een gebied in **C**, f analytisch op G, $a \in G$ en r de convergentiestraal van de Taylorreeksontwikkeling van f rond a. Bewijs dat niet alle punten van $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-a|=r\}$ reguliere punten van f zijn.

8.4.15. Zij $G := \{z \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ en zij K(z) het segment met beginpunt 0 en eindpunt z. Definieer, voor $z \in G$, $f(z) := \int_{K(z)} (1+t^2)^{-1} dt$. Toon aan dat f in G analytisch is en bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks van f rond 1.

8.4.16. Bepaal $\int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt$ als s positief reëel is. Bepaal dan de integraal als s complex is, Re $s>0$, door 8.4.12 toe te passen.

8.4.17. Zij G een gebied in $\mathbf{C}$ en f analytisch op G. Als $a\in G$ en $|f|$ in a een minimum aanneemt is $f(a)=0$. Bewijs dit.

8.4.18. Zij $f(z):=z^3+z^2+1$ voor $|z|\leq 1$. Bepaal de punten z waarvoor $f'(z)=0$ en bepaal het maximum van $|f(z)|$.

8.4.19. DEFINITIE. *Een functie die analytisch is voor alle* $z\in\mathbf{C}$ *heet geheel.*

Voorbeelden van gehele functies zijn o.a. de *gehele rationale functies*, (dat zijn de polynomen). Iedere gehele functie is te ontwikkelen in een machtreeks met convergentiestraal ∞ (8.4.14). Voor de polynomen is dit een machtreeks die afbreekt d.w.z. dat de coëfficiënten vanaf zeker rangnummer 0 zijn. Verder zijn de exponentiële functie, de sinus en de cosinus voorbeelden van gehele functies. Dit zijn voorbeelden van zgn. *gehele transcendente functies*. Als eerste stelling over gehele functies bewijzen we de *stelling van Liouville*:

8.4.20. STELLING. *Als f geheel en begrensd is dan is f constant.*

Bewijs. Zij $M := \sup\{|f(z)| \mid z\in\mathbf{C}\}$. Volgens 8.3.27 is $|f^{(n)}(0)|\leq Mn!r^{-n}$ voor iedere $n\geq 0$ en iedere $r>0$. Laat $r\to\infty$. Dan zien we: $f^{(n)}(0)=0$ noor $n\geq 1$ en dus is f constant.

Een gevolg van deze stelling is:

8.4.21. STELLING. *Als f een polynoom is dan heeft f in* $\mathbf{C}$ *tenminste één nulpunt.*

Bewijs. Zij $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0)$. Dan is $f(z)=a_nz^n(1+o(1))$ voor $|z|\to\infty$. Als f géén nulpunten zou hebben was er een R zo dat $|f(z)|^{-1}<1$ voor $|z|>R$. Daar dan $|f(z)|^{-1}$ ook voor $|z|\leq R$ begrensd was zou f^{-1} begrensd en volgens 8.4.20 dus constant zijn.

8.4.22. OPGAVE. Een gehele functie f is dan en slechts dan geheel rationaal (een polynoom) als er een $m\in\mathbf{N}$ is met $f(z)=O(z^m)$ voor $z\to\infty$. Bewijs dit en toon aan dat de kleinste m waarvoor dit geldt de graad van het polynoom is.

We zullen nu aantonen dat het gedrag van een gehele transcendente functie voor $|z|\to\infty$ zeer onregelmatig is.

8.4.23. STELLING. *(Casorati-Weierstrass) Als* f *een gehele transcendente functie is dan geldt voor iedere* $c\in\mathbf{C}$ *en iedere* $m\geq 0$

$$\liminf_{|z|\to\infty} |z^m(f(z)-c)| = 0.$$

Bewijs. We mogen ons zonder beperking der algemeenheid tot $c=0$ beperken. Daar de nulpunten van f zich volgens 8.4.11 niet verdichten heeft f slechts eindig veel nulpunten of f heeft voor iedere $R>0$ oneindig veel nulpunten in $\{z|\ |z|>R\}$ in welk geval het gestelde triviaal is. Als f geen nulpunten heeft (zoals bijvoorbeeld de exponentiële functie) dan is als $g(z):=1/f(z)$ ook g geheel transcendent (vgl. 8.4.21) en volgens 8.4.22 geldt: $\neg(\exists_{m\in\mathbf{N}}[g(z)=O(z^m),(z\to\infty)])$. Dan is, voor iedere $m\in\mathbf{N}$, $z^{-m}g(z)$ niet begrensd waaruit het gestelde volgt. Tenslotte beschouwen we het geval dat f eindig veel nulpunten $a_1,a_2,\dots,a_\ell$ heeft met multipliciteiten $k_1,\dots,k_\ell$.
Definieer nu g door $g(z) := \Pi_{\nu=1}^{\ell}(z-a)^{k_\nu}/f(z)$. Dan is g een gehele transcendente functie. De rest van het bewijs verloopt dan als boven.

8.4.24. VOORBEELD. Het in 8.4.23 beschreven gedrag illustreren we nog eens met behulp van de exponentiële functie. Als $c\in\mathbf{C}$, $c\neq 0$ dan heeft de vergelijking $e^z=c$ een oplossing z_0 en ieder getal $z_0+2k\pi i$ met $k\in\mathbf{Z}$ is ook een oplossing. Voor iedere $m\in\mathbf{N}$ heeft $z^m(e^z-c)$ oneindig veel nulpunten en dan is $\liminf_{|z|\to\infty}|z^m(e^z-c)| = 0$. Voor $x\in\mathbf{R}$ geldt $\lim_{x\to-\infty} x^m e^x = 0$ d.w.z. ook $\liminf_{|z|\to\infty}|z^m e^z| = 0$.

We zullen nu een uitbreiding geven van de stelling van Taylor door een functie te beschouwen die analytisch is in het gebied tussen twee concentrische cirkels met middelpunt a en de functie te ontwikkelen in een reeks naar machten van $z-a$.

8.4.25. STELLING. *Zij* $G:=\{z\in\mathbf{C}|\ r<|z-a|<R$ *en zij* f *analytisch op* G. *Zij verder* $r<r_1<R$ *en*

$$c_n := \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{a,r_1}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \textit{ voor } n\in\mathbf{Z}.$$

Dan geldt in G

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Bewijs. Zij $z\in G$ en $r<\rho_1<|z-a|<\rho_2<R$. Als $\gamma:=C_{a,\rho_1}$ en $\Gamma:=C_{a,\rho_2}$ dan is volgens 8.3.7 (of 8.3.14)

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$. Op $[\Gamma]$ schrijven we $(w-z)^{-1}=(w-a)^{-1}(1-\frac{z-a}{w-a})^{-1}$. Daar $|\frac{z-a}{w-a}|=\frac{|z-a|}{\rho_2}<1$ op $[\Gamma]$ is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$ uniform convergent op $[\Gamma]$. Op γ schrijven we $(w-z)^{-1}=-(z-a)^{-1}(1-\frac{w-a}{z-a})^{-1}$ en dan is op $[\gamma]$ de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ uniform convergent.

Volgens 8.4.1 is dus

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw\Big) + $$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dw\Big).$$

Daar voor iedere $n\in\mathbf{Z}$ volgens § 8.3 geldt $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw = c_n$ hebben we bewezen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n.$$

Men noemt de reeks uit 8.4.25 de *Laurent-ontwikkeling* van f rond a. Merk op dat als f analytisch is binnen $C_{a,R}$ alle coëfficiënten c_n met negatieve n volgens de hoofdstelling 0 zijn. De Laurent-ontwikkeling is dan de in 8.4.8 gevonden Taylorreeks. Het gedeelte $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ noemen we het *positieve deel* van de Laurent-ontwikkeling en het gedeelte $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ noemen we het *negatieve deel* en ook wel het *hoofddeel* van de Laurent-ontwikkeling.

OPGAVEN

8.4.26. Bewijs dat het positieve deel van de in 8.4.25 behandelde Laurentreeks een machtreeks met convergentiestraal $\geq R$ is en dat het negatieve deel convergeert voor alle z met $|z-a|>r$.

8.4.27. Als f en g analytisch zijn in het in 8.4.25 genoemde gebied G en $c_n (n\in\mathbf{Z})$ resp. $d_n (n\in\mathbf{Z})$ zijn de coëfficiënten van de Laurent-ontwikkelingen van f resp. g (rond a) in G dan geldt in G:

$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ met $a_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}$.

(Zie 6.9.29.)

Met behulp van de Laurent-ontwikkeling kunnen we nu de geïsoleerde singulariteiten van een functie f in drie klassen indelen. Is nl. a een geïsoleerde singulariteit van f dan is er een cirkel $[C_{a,R}]$ waarbinnen f analytisch is met uitzondering van het punt a. We passen nu 8.4.25 toe met r=0, d.w.z. $[C_{a,r}]=\{a\}$. We vinden een Laurent-ontwikkeling waarvan het positieve deel convergeert voor $|z-a|<R$ en dus een in $B_{a,R}$ analytische functie voorstelt terwijl het hoofddeel convergeert voor $z\neq a$. We onderscheiden nu drie gevallen: (a) alle coëfficiënten in het hoofddeel zijn 0, (b) in het hoofddeel zijn niet alle coëfficiënten 0 maar vanaf zeker rangnummer zijn de coëfficiënten 0, (c) oneindig veel coëfficiënten van het hoofddeel verschillen van 0. In het eerste geval kunnen we door $f(a)=c_0$ te definiëren de singulariteit in a opheffen (zie 8.3.23). In het tweede geval is als $c_{-k}=\ell\neq 0$ en $c_{-n}=0$ voor n>k het punt a een pool van de orde k omdat dan $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)=\ell\neq 0$ (zie 8.3.10). Een voorbeeld van de derde mogelijkheid is $f(z):=e^{\frac{1}{z}}$ voor $z\neq 0$. De Laurent-ontwikkeling is dan $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$. In dit geval noemen we a een essentiële singulariteit.
Samenvattend

8.4.28. DEFINITIE. *(Gedeeltelijk herhaling van 8.3.10.)* *Is* f *analytisch in een gereduceerde omgeving van* a *en* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *de Laurent-ontwikkeling van* f *rond* a *dan noemen we* a

(a) *een opheffbare singulariteit als* $c_n=0$ *voor* $n\leq -1$,

(b) *een pool van de orde* k *als* $c_{-k}\neq 0$ *en* $c_n=0$ *voor* $n<-k$,

(c) *een essentiële singulariteit als oneindig veel coefficiënten van het hoofddeel van* 0 *verschillen.*

We zeggen in (a) ook wel dat het hoofddeel ontbreekt en in (b) dat het hoofddeel afbreekt. In geval (a) is f begrensd in een omgeving van a terwijl in geval (b) geldt $|f(z)|\to\infty$ als $z\to a$ (ga dit na). Het gedrag van f in een omgeving van een essentiële singulariteit is zeer onregelmatig zoals uit de volgende generalisatie van 8.4.23 blijkt.

8.4.29. STELLING. *(Casorati-Weierstrass) Is* f *analytisch in een gereduceerde omgeving van* a *en* a *een essentieel singulier punt van* f *dan geldt voor iedere* $m\geq 0$ *en iedere* $c\in\mathbb{C}$

(i) $$\limsup_{z\to a} |(z-a)^m f(z)| = \infty,$$

(ii) $$\liminf_{z\to a} |(z-a)^{-m}(f(z)-c)| = 0.$$

Bewijs. 8.4.30.

OPGAVEN

8.4.30. Bewijs stelling 8.4.9 met behulp van 8.4.23.

8.4.31. Toon aan dat $\mathrm{Res}_a\, f = c_{-1}$ als a een geïsoleerde singulariteit van f is en $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ de Laurent-ontwikkeling van f in een gereduceerde omgeving van a is.

8.4.32. Als f een pool heeft in a bepaal dan $\mathrm{Res}_a\, f'$.

8.4.33. Bepaal de Laurent-ontwikkeling van f rond 0 die convergeert in z=2 als $f(z):=(z^2+2z-3)^{-1}$.

8.4.34. Bepaal $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,2}} e^{1/z}(z-z^2)^{-1}dz$.

In 5.5.17 is aangetoond dat door toevoeging van een punt dat we "het punt ∞" hebben genoemd $\mathbb{C}$ kan worden uitgebreid tot een compacte ruimte (N.B. het punt ∞ is niet een complex getal!). In deze éénpuntscompactificatie is o.a. $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>R\}$ een omgeving van ∞. We zullen dit spraakgebruik nu invoeren en enige afspraken maken waardoor een functie op $\mathbf{C}$ wordt opgevat als functies op $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$.

8.4.35. DEFINITIE. *Zij* f *analytisch op* $\{z\in\mathbf{C} \mid |z|>R\}$. *Als* $g(z):=f(z^{-1})$ *dan zeggen we dat* f *analytisch is in* ∞, *resp. een pool heeft in* ∞, *resp. een essentiële singulariteit heeft in* ∞ *als* g *analytisch is in* 0, *resp. een pool heeft in* 0 *resp. een essentiële singulariteit heeft in* 0.

8.4.36. DEFINITIE. *Is* f *analytisch op* $\{z\in\mathbf{C} \mid |z|>R\}$ *en* $\rho>R$ *dan definiëren we*

$$\operatorname{Res}_\infty f := -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,\rho}} f(z)dz.$$

VOORBEELDEN

8.4.37. Zij $f(z)=z^2+1$. Dan is $g(z):=f(z^{-1})=1+z^{-2}$ een functie die in 0 een pool van de orde 2 heeft. We zeggen dus nu dat f in ∞ een pool van de orde 2 heeft.
Verder is $\operatorname{Res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,2}} f(z)dz =$
$= -(\operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f) = 0.$

8.4.38. Zij $f(z)=z^{-1}$. Dan is $g(z):=f(z^{-1})=z$ een functie die analytisch is in 0 en daar een nulpunt heeft met multipliciteit 1. We zeggen nu dat f in ∞ analytisch is en dat f in ∞ een nulpunt heeft met multipliciteit 1. Hoewel ∞ een regulier punt van f is, is in afwijking van 8.3.2 (geldig voor $\mathbf{C}$) $\operatorname{Res}_\infty f = -\operatorname{Res}_0 f = -1$.

8.4.39. Als $f(z) = \sin z$ (een gehele functie) dan is
$g(z) = f(z^{-1}) = \sin(z^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{-2n+1}}{(2n-1)!}$, d.w.z. g heeft in 0 een essentiële singulariteit. We zeggen nu dat f in ∞ een essentiële singulariteit heeft.

8.4.40. We kunnen de stelling van Liouville (8.4.20) nu ook zó formuleren: Als f op $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ géén singuliere punten heeft dan is f constant.

OPGAVEN

8.4.41. Als f op $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ geen andere singulariteiten heeft dan polen, dan is f een rationale functie (het quotiënt van twee polynomen). Bewijs dit.

8.4.42. De functie f heeft een pool van de orde 2 in 1 met residu 0 en een pool van de orde 1 in 0 met residu 2 en géén andere singulariteiten in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. De functie heeft nulpunten in 2 en in ∞. Bepaal f.

8.5. Toepassingen

We zullen nu een aantal toepassingen behandelen van de theorie uit de voorafgaande paragrafen op veelvuldig voorkomende problemen. Als eerste beschouwen we het oplossen van vergelijkingen. We schrijven deze steeds als $f(z)=0$ en beperken ons nu natuurlijk tot analytische functies f. De eerste stelling handelt over het aantal oplossingen.

8.5.1. STELLING. *Zij* f *analytisch op en binnen de Jordankromme* J *en* $f(z)\neq 0$ *voor* $z\in[J]$. *Als* $a_1,a_2,\ldots,a_k$ *de nulpunten van* f *in het binnengebied van* $[J]$ *zijn en* $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k$ *de multipliciteiten van deze nulpunten dan is*

$$N := \sum_{j=1}^{k} \nu_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

(We noemen N *verder het aantal nulpunten van* f *binnen* J.*)*

Bewijs. Volgens 8.4.11 en 5.5.10 heeft f slechts eindig veel nulpunten in het binnengebied van $[J]$. Volgens 8.3.7 is $\frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ gelijk aan de som van de residuen van de integrand in het binnengebied van $[J]$. De enige punten waar de integrand een singulariteit zou kunnen hebben zijn $a_1,a_2,\ldots,a_k$. We gaan dit nu na. In een omgeving van a_j geldt $f(z) = \sum_{m=\nu_j}^{\infty} c_m(z-a_j)^m$ en $f'(z) = \sum_{m=\nu_j}^{\infty} mc_m(z-a_j)^{m-1}$. Dus is $\lim\limits_{z\to a_j}(z-a_j)\frac{f'(z)}{f(z)} = \nu_j$, d.w.z. f'/f heeft in a_j een pool van de eerste orde met residu ν_j. Hiermee is het gestelde al bewezen.

Een voorbeeld van een toepassing van 8.5.1 is het volgende bewijs van de *hoofdstelling van de algebra*:

8.5.2. STELLING. *Is* $f(z):=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ $(n\geq 1,\ a_n\neq 0)$ *een polynoom van de graad* n *dan heeft* f *precies* n *nulpunten in* $\mathbb{C}$.

Bewijs. Daar $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=a_nz^n(1+o(1))$ voor $|z|\to\infty$ is er een $R>0$ zo dat $f(z)\neq 0$ voor $|z|\geq R$. Het aantal nulpunten van f is dus $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{0,\rho}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ waarbij ρ willekeu-

rig >R is. Noem dit aantal N. Dan is volgens 8.1.10 en 8.1.14: $N-n = N - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,\rho}} \frac{n}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{0,\rho}} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z}\right) dz =$ $= O(\rho^{-1})$ voor $\rho \to \infty$.
Dus is $N=n$.

We kunnen nu met behulp van 8.5.1 door verschillende J te beschouwen de nulpunten van f in eerste benadering opsporen. Stel dat we een J gevonden hebben waarvan we weten dat binnen J precies één nulpunt van f ligt met multipliciteit ν. Dan kunnen we de volgende stelling gebruiken:

8.5.3. STELLING. *Is* f *analytisch op en binnen de Jordankromme* J, a *het enige nulpunt (multipliciteit* ν*) van* f *gelegen binnen* J *dan is* $a = \frac{1}{2\pi i \nu} \oint_J \frac{zf'(z)}{f(z)}\, dz$.

Bewijs. We hebben in 8.5.1 al gezien dat de integrand in het rechterlid binnen J precies één singulariteit heeft nl. een pool van de eerste orde in a. Verder is $\lim_{z\to a} (z-a) \frac{zf'(z)}{f(z)} = \nu a$. Het gestelde volgt weer uit 8.3.7 en 8.3.11.

Men kan zo een benadering voor a vinden door de integraal in het rechterlid numeriek te benaderen.

8.5.4. OPGAVE. Zij N gedefinieerd als in 8.5.1. Laten de gegevens van 8.5.1 gelden met uitzondering van de punten $b_1, b_2, \ldots, b_\ell$ in het binnengebied van $[J]$ waar f polen heeft van de orde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell$.
Zij $P := \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j$. Bewijs dat $N-P = \frac{1}{2\pi i} \oint_J \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$.

Als we alleen geïnteresseerd zijn in het aantal oplossingen van de vergelijking $f(z)=0$ binnen een Jordankromme J dan is het vaak mogelijk de functie f te vervangen door een eenvoudigere functie zonder dat het gezochte aantal verandert. Dit is de inhoud van de volgende, zeer vaak toepasbare, stelling.

8.5.5. STELLING. *(Rouché) Als* f *en* g *analytisch zijn op en binnen de rectificeerbare Jordankromme* J *en* $|g(z)| < |f(z)|$ *voor* $z \in [J]$ *dan hebben* f *en* f+g *evenveel nulpunten binnen* J.

Bewijs. Uit het gegeven volgt dat $f(z) \neq 0$ voor $z \in [J]$. Definieer $\phi(z) := g(z)/f(z)$ voor $z \in [J]$. Dan is ϕ continu op $[J]$ en omdat $|\phi(z)| < 1$ voor $z \in [J]$ is $\max\{|\phi(z)| \mid z \in [J]\} =: \alpha < 1$. Zij N het aantal nulpunten van f binnen J, N' dat van f+g. Dan is volgens 8.5.1

$$N' = \frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{f'(z)+f'(z)\phi(z)+f(z)\phi'(z)}{f(z)+f(z)\phi(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_J \frac{\phi'(z)}{1+\phi(z)}\,dz =$$

$$= N + \frac{1}{2\pi i}\oint_J \phi'(z)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\phi(z))^k dz.$$

Daar $|\phi(z)|\leq\alpha<1$ op $[J]$ en ϕ' begrensd is op $[J]$ mogen we in de laatste integraal volgens 8.4.1 term voor term integreren. Omdat op $[J]$ de functie $(k+1)^{-1}\phi^{k+1}$ een primitieve is van $\phi'\phi^k$ en J gesloten is, is $\oint_J \phi'(z)(\phi(z))^k dz = 0$ voor $k=0,1,\ldots$ en dus is $N'=N$.

8.5.6. OPGAVE. Bepaal het aantal nulpunten van $1-2z+z^5$ binnen de eenheidscirkel.

8.5.7. We zullen nu een methode schetsen die geschikt is om numeriek een benadering te vinden van de oplossingen van de vergelijking $f(z):=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0=0$. De methode van Lehmer-Schur (zie ook [19], [21]). We definiëren $f^*(z):=z^n\overline{f(\bar{z}^{-1})}=\bar{a}_n+\bar{a}_{n-1}z+\ldots+\bar{a}_0 z^n$ en we definiëren de operator T door $(Tf)(z):=\bar{a}_0 f(z)-a_n f^*(z)$. Merk op dat Tf een polynoom is met graad $\leq n-1$ en dat $(Tf)(0)=|a_0|^2-|a_n|^2$. Zij $C:=C_{0,1}$. Neem nu aan dat $f(0)\neq 0$ en $f(z)\neq 0$ voor $z\in[C]$.

We bepalen achtereenvolgens $Tf, T^2f, \ldots,$ totdat voor het eerst $(T^kf)(0)<0$ of T^kf een constante >0 is. We nemen voorlopig aan dat we hierbij géén k met $(T^kf)(0)=0$ tegenkomen. We beweren nu dat als $(T^kf)(0)>0$ voor $1\leq k\leq \ell-1$ terwijl $(T^\ell f)(0)<0$ dan f binnen C een nulpunt heeft en als $T^\ell f$ een constante $\neq 0$ is dan f géén nulpunt binnen C heeft. Dit is als volgt in te zien: (i) op $[C]$ geldt $|f^*(z)| = |z^n|\cdot|\overline{f(\bar{z}^{-1})}|=|f(z)|$; (ii) als $(Tf)(z_1)=0$ voor een $z_1\in[C]$ dan is dus $|\bar{a}_0 f(z_1)|=|a_n f^*(z_1)|$, d.w.z. $|a_0|=|a_n|$ en dus $(Tf)(0)=0$. We hadden aangenomen dat dit niet zo is; (iii) definieer nu als $(Tf)(0)>0$ de polynomen P en Q door $P(z):=-a_n f^*(z)$, $Q(z):=\bar{a}_0 f(z)$. Voor $z\in[C]$ geldt dan

$|P(z)|-|Q(z)|=|f(z)|(|a_n|-|a_0|)<0$. Volgens 8.5.5 heeft dan Q binnen C evenveel nulpunten als P+Q, d.w.z. Tf heeft binnen C evenveel nulpunten als f. Op dezelfde manier is in te zien dat Tf binnen C evenveel nulpunten als f^* heeft indien $(Tf)(0)<0$; (iv) zij nu m het aantal nulpunten van f binnen C en ℓ als boven. Dan is $T^{\ell-1}f$ een polynoom met graad $d\leq n-\ell+1$ en m nulpunten binnen C. Als $(T^{\ell}f)(0)<0$ dan heeft $T^{\ell}f$ binnen C volgens (iii) d-m nulpunten. Daar $T^{\ell}f$ een graad $d'\leq d-1$ heeft is $d-m\leq d-1$ d.w.z. $m\geq 1$ hetgeen betekent dat f binnen C tenminste één nulpunt heeft. Is echter $T^{\ell}f$ een constante >0 dan heeft $T^{\ell-1}f$ evenveel nulpunten binnen C als $T^{\ell}f$, d.w.z. géén nulpunten!

We kunnen nu als volgt een algorithme voor bepaling van nulpunten maken. Als we een polynoom f beschouwen voor $z\in B_{a,r}$ dan kunnen we door $g(z):=f(a+rz)$ steeds het probleem transformeren naar een beschouwing over een polynoom binnen C. Begin met C; (a) als $f(0)=0$ hebben we een nulpunt gevonden; (b) zo niet bepaal dan $Tf, T^2f, \ldots$ en bepaal op de hierboven beschreven manier of f binnen C een nulpunt heeft (doet zich het hierboven uitgesloten uitzonderingsgeval voor ga dan over op een iets kleinere cirkel en transformeer naar C); (c) als f binnen C een nulpunt heeft dan beschouwen we $g(z):=f(\frac{1}{2}z)$ voor $|z|\leq 1$ en anders $g(z):=f(2z)$ voor $|z|\leq 1$; (d) door herhaalde uitvoering vinden we een ringvormig gebied waarbinnen f een nulpunt heeft. Dit overdekken we met een aantal kleinere cirkels en voor elk van deze transformeren we weer naar C en herhalen het proces voor elk van deze cirkels waarbinnen een nulpunt ligt.

8.5.8. VOORBEELD. Het volgende schema toont aan hoe de methode de aanwezigheid van nulpunten van $z^4+z^3+3z^2+3z+2$ binnen de eenheidscirkel bevestigt.

	z^4	z^3	z^2	z	1	
f	1	1	3	3	2	
f^*	2	3	3	1	1	
Tf		-1	3	5	3	$(Tf)(0)>0$,
$(Tf)^*$		3	5	3	-1	
T^2f			14	18	8	$(T^2f)(0)>0$,
$(T^2f)^*$			8	18	14	
T^3f				-108	-132	$(T^3f)(0)<0$.

8.5.9. OPGAVE. Ga met de methode van 8.5.7 na dat $16z^3+24z^2+21z+10$ twee nulpunten heeft in $\{z \mid \frac{1}{2}<|z|<1\}$. Ga ook na dat in $\{z \mid |z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\}$ géén nulpunten liggen.

We gaan niet verder op de details van de methode in maar verwijzen de geïnteresseerde lezer naar de reeds genoemde literatuur. We wijzen er echter op dat het belang van de methode schuilt in de eenvoud. Er wordt namelijk in het beschreven algoritme alleen vermenigvuldigd en afgetrokken!

Als tweede toepassing van complexe functietheorie tonen we nu hoe een aantal integralen van reële functies eenvoudiger behandeld kunnen worden door ze op te vatten als integralen in het complexe vlak. We beginnen met integralen van de vorm $\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)dt$ waarin R een rationale functie van twee variabelen voorstelt. Zij $k(t):=e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ een parametervoorstelling van $C_{0,1}$ (met $[0,2\pi]$ als parameterinterval in plaats van $[0,1]$). Dan is volgens 8.1.8, als f continu is op $[C_{0,1}]$,

$\oint_{C_{0,1}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}dt$. Daar de integraal waar we van uitgingen, inderdaad de vorm heeft van het rechterlid, nl. $\int_0^{2\pi} R(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})(ie^{it})^{-1}\, ie^{it}dt$ kunnen we een rationale functie f vinden zó dat de gevraagde integraal gelijk is aan $\oint_{C_{0,1}} f(z)dz$ welke integraal eenvoudig is te bepalen met de residuenstelling.

VOORBEELDEN

8.5.10. Zij $0<a<1$ en $I(a) := \int_0^{2\pi}(1+a\cos t)^{-1}dt$. We parametriseren $C_{0,1}$ met $z=e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$. We schrijven, in verband met het hierboven afgeleide, symbolisch $dt=\frac{dz}{iz}$ en substitueren $\cos t = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$. (Wat we doen is weer 8.1.8 toepassen "in omgekeerde richting".) We vinden:

$$I(a) = \oint_{C_{0,1}} (1+\tfrac{1}{2}a(z+z^{-1}))^{-1}\,\frac{dz}{iz} = \frac{-2i}{a}\oint_{C_{0,1}} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

waarin $z_1:=(-1+\sqrt{1-a^2})/a$ en $z_2:=(-1-\sqrt{1-a^2})/a$.
Daar alleen z_1 binnen de eenheidscirkel ligt is volgens 8.3.7 en 8.3.11

$$I(a) = 2\pi i(\frac{-2i}{a})\lim_{z\to z_1}(z-z_2)^{-1} = 2\pi(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

8.5.11. Zij $I:=\int_0^{2\pi}(5+4\cos t)^{-2}dt$. We gaan over op een integraal over $C_{0,1}$ door de substitutie $dt=\frac{dz}{iz}$, $\cos t=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$. We vinden $I=\oint_{C_{0,1}}(5+2z+2z^{-1})^{-2}\frac{dz}{iz}=$ $=-i\oint_{C_{0,1}}\frac{zdz}{(2z+1)^2(z+2)^2}$.
We zien nu dat de integrand één singulariteit heeft binnen de eenheidscirkel nl. een pool van de orde 2 in $-\frac{1}{2}$. Volgens 8.3.25 is het residu van de integrand in deze pool gelijk aan $\phi'(-\frac{1}{2})$ als we definiëren $\phi(z):=$ $:=\frac{1}{4}z(z+2)^{-2}$. Het residu is dus $5/27$ en $I=10\pi/27$.

8.5.12. Zij $A_n:=\int_0^{2\pi}(\sin t)^{2n}dt$ voor $n\in\mathbf{N}$. We gaan te werk als in de voorafgaande voorbeelden en vervangen sin t door $\frac{1}{2i}(z-z^{-1})$. We vinden nu

$$A_n=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^{2n}}\oint_{C_{0,1}}\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\oint_{C_{0,1}}(-1)^k z^{2k-2n-1}dz.$$

In deze som zijn volgens 8.1.14 alle termen 0 behalve de term met $k=n$. We vinden tenslotte

$$A_n=\frac{(-1)^{n+1}i}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(-1)^n\cdot 2\pi i=2^{1-2n}\pi\binom{2n}{n},$$

hetgeen overeenstemt met 7.2.34 (ga dit na).

OPGAVEN

8.5.13. Zij $I(a):=\int_0^{2\pi}(1-2a\cos t+a^2)^{-1}dt$ voor $a\in\mathbf{C}\setminus[C_{0,1}]$. Bepaal $I(a)$.

8.5.14. Bepaal $\int_0^{2\pi}\frac{\cos(mt)}{1+a\cos t}dt$ voor $m\in\mathbf{N}$, $0<a<1$.

We zullen in de rest van deze paragraaf de volgende notatie gebruiken.
Als f continu is op $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=\rho, \mathrm{Im}\, z\geq 0\}$ is
$M_+(\rho;f):=\max\{|f(z)|\mid |z|=\rho, \mathrm{Im}\, z\geq 0\}$.
We zullen nu ook oneigenlijke integralen bepalen met behulp van de residuenstelling.

8.5.15. STELLING. *Zij* f *analytisch op* $\{z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ *met uitzondering van een eindig aantal polen* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *gelegen boven de reële as. Laat verder gelden:*

(i) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho M_+(\rho; f) = 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *bestaat.*

Dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Bewijs. Beschouw de kromme K waarvan de drager bestaat uit het interval $[-\rho,\rho]$ langs de reële as en de boog van $C_{0,\rho}$ gelegen boven de reële as (halve cirkel). Kies ρ zo groot dat alle singulariteiten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ in het binnengebied van $[K]$ liggen. Als Γ de halve cirkel voorstelt is volgens 8.1.10

$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \pi\rho M_+(\rho; f) = o(1)$ voor $\rho\to\infty$.

Daar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ bestaat is $\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + o(1)$ voor $\rho\to\infty$.

Volgens 8.3.7 geldt $\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx + \int_\Gamma f(z)dz =$

$= 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f$. Hiermee is het gestelde bewezen.

VOORBEELDEN

8.5.16. Daar $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx$ bestaat en $(1+z^2)^{-1} = O(|z|^{-2})$ voor $|z|\to\infty$ is aan 8.5.15 (i) en (ii) voldaan. Door $(1+z^2)^{-1}$ is een analytische functie gegeven op $\mathbf{C}\setminus\{i,-i\}$. Het punt i is een pool van de eerste orde. Door combinatie van 8.5.15 en 8.3.11 vinden we $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx =$ $= 2\pi i \lim\limits_{z\to i}(z+i)^{-1} = \pi$. Dit voorbeeld toont nog niet het voordeel van het gebruik van 8.5.15 daar de integraal direct is te bepalen met 7.2.32 en 6.3.5 h.

8.5.17. Via 7.1.8 en 7.2.32 kunnen we met veel gereken $J_n := \int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-n}dx$ bepalen. Zij $f(z) := (1+z^2)^{-n}$. Dan geldt in een omgeving van i (volgens 6.8.14):

$$f(z) = (z-i)^{-n}(2i)^{-n}\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^{-n} =$$

$$= (z-i)^{-n}(2i)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\left(\frac{z-i}{2i}\right)^k.$$

Dus is $\mathrm{Res}_i\, f = -i\cdot 2^{1-2n}\binom{2n-2}{n-1}$.
Evenals in 8.5.16 zien we dat 8.5.15 toepasbaar is, d.w.z. $J_n=\pi\cdot 2^{2-2n}\binom{2n-2}{n-1}$.

OPGAVEN

8.5.18. Bepaal $\int_{-\infty}^{\infty} x^4(4x^2+1)^{-4}dx$.

8.5.19. Bepaal $\int_{-\infty}^{\infty} x(x^3+i)^{-1}dx$.

Het derde soort integralen dat we bespreken zal nog meer aanspreken. We zullen nu met behulp van de residuenstelling integralen in enkele regels kunnen bepalen die ons in hoofdstuk 7 zeer veel moeite gekost hebben. Het gaat nu om integralen van de vorm $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$.

8.5.20. STELLING. *Zij* f *analytisch op* $\{z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ *met uitzondering van een eindig aantal polen* $a_1,a_2,\ldots,a_k$ *gelegen boven de reële as. Zij* $\alpha>0$. *Laat verder gelden:*

(i) $\lim_{\rho\to\infty} M_+(\rho;f) = 0$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ *bestaat.*

Dan is als $g(z):=f(z)e^{i\alpha z}$*:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}_{a_j}\, g.$$

Bewijs. Met dezelfde notatie als in 8.5.15 is het bewijs precies hetzelfde op één detail na, namelijk de behandeling van Γ. We parametriseren Γ door $z=\rho e^{it}$, $(0\leq t\leq\pi)$. Dan is volgens 8.1.8

$$\int_\Gamma f(z)e^{i\alpha z}dz = \int_0^\pi f(\rho e^{it})e^{i\alpha\rho(\cos t + i\sin t)}i\rho e^{it}dt.$$

Volgens 7.2.23 is nu

$$|\int_\Gamma f(z)e^{i\alpha z}dz| \le \int_0^\pi \rho M_+(\rho;f)e^{-\alpha\rho \sin t}\,dt \le$$
$$\le 2M_+(\rho;f)\int_0^{\pi/2} \rho e^{-2\alpha\rho t/\pi}dt \le$$
$$\le \pi\alpha^{-1}M_+(\rho;f) = o(1) \text{ voor } \rho\to\infty.$$

VOORBEELDEN

8.5.21. Voor $a>0$ beschouwen we $I(a) := \int_0^\infty (a^2+x^2)^{-1} \cos x dx$.

Daar de integrand even is en $\int_{-\infty}^\infty (a^2+x^2)^{-1} \sin x dx = 0$ omdat deze integraal bestaat en daarin de integrand oneven is, geldt $I(a) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty (a^2+x^2)^{-1}e^{ix}dx$.
De laatste integraal bestaat evenals de vorige twee, omdat in alle drie de integrand continu is en $O(x^{-2})$ voor $|x|\to\infty$. Daar door $f(z)=(a^2+z^2)^{-1}$ een analytische functie is gegeven op $\mathbf{C}\backslash\{ia,-ia\}$ en $M_+(\rho;f)=O(\rho^{-2})$ is aan de voorwaarden van 8.5.20 voldaan. Daar we met een pool van de eerste orde te maken hebben vinden we

$$I(a) = \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi i \lim_{z\to ia}((z+ia)^{-1}e^{iz}) = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

8.5.22. Zij $I(a,k) := \int_0^\infty (x^2+k^2)^{-1}x \sin(ax)dx$, $(a>0,k>0)$.

We stellen nu $f(z)=z(z^2+k^2)^{-1}$. Dan is $I(a,k) =$ $= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{iax}dx$. Daar f analytisch is in $\mathbf{C}$ met uitzondering van polen van de eerste orde in ik en $-ik$, $M_+(\rho;f)=O(\rho^{-1})$ en de integraal $\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{iax}dx$ bestaat, kunnen we 8.5.20 toepassen. We vinden

$$I(a,k) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Im}\{2\pi i \lim_{z\to ik}(z(z+ik)^{-1}e^{iaz})\} = \frac{\pi}{2}e^{-ak}.$$

We hadden ook eerst kunnen aantonen dat $I(a,k)=I(ak,1)$. Om deze methode werkelijk te waarderen bepale men nu ook $I(a,k)$ alleen met de theorie van hoofdstuk 7!

OPGAVEN

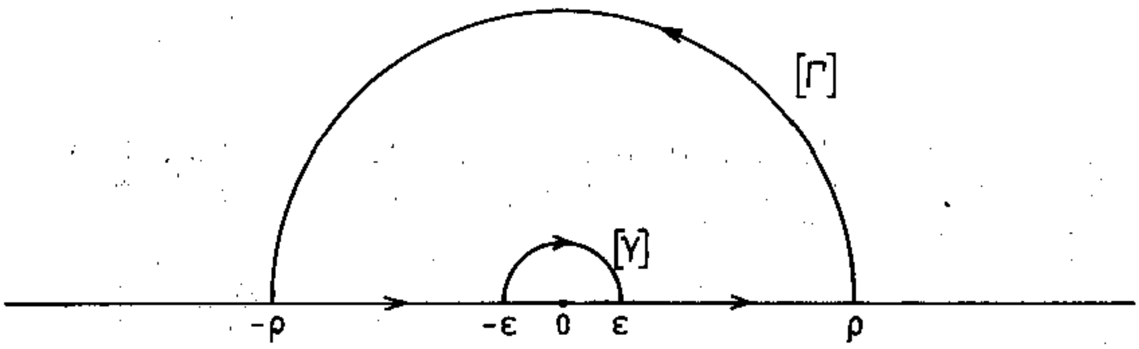
8.5.23. Bepaal $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\cos(2x)}{x^2+1}dx$.

8.5.24. Bepaal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+i)(x-2i)}\,dx$.

We zullen nu aan de hand van enkele voorbeelden laten zien dat het idee waar 8.5.15 en 8.5.20 op berusten in meer situaties is toe te passen.

VOORBEELDEN

8.5.25. Zij $J := \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$. Daar de integrand continu is op $[0,\infty)$ en $O(x^{-2})$ voor $x\to\infty$ bestaat deze integraal. We kunnen nu niet J schrijven als het reële deel van $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz$ daar deze integraal niet bestaat! Om de moeilijkheid in 0 te omzeilen beschouwen we de kromme van fig. 39.



Figuur 39

We weten dat $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz\right) = 2J$.

Verder is $\left|\int_{\Gamma} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz\right| \le \pi\rho(2\rho^{-2}) = o(1)$ voor $\rho\to\infty$.

We parametriseren de kleine halve cirkel γ door $z=\varepsilon e^{i(\pi-t)}$, $(0\le t\le\pi)$. We vinden dan $\int_{\gamma} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz =$

$= \int_0^{\pi} \frac{1-\exp(i\varepsilon e^{it})}{i\varepsilon e^{it}}\,dt$. Deze integraal heeft de limiet $-\pi$ als $\varepsilon\to 0$ omdat $1-e^{z}=-z+O(z^2)$ voor $z\to 0$. Volgens de residuenstelling is de integraal over de gesloten kromme bestaande uit twee halve cirkels en twee lijnstukken 0. Daarmee is bewezen dat $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi$.

8.5.26. Zij $n\in\mathbf{N}$. Laat $[K_n]$ het vierkant zijn met hoekpunten in de punten $\pi(n+\frac{1}{2})(1+i)$, $\pi(n+\frac{1}{2})(1-i)$, $\pi(n+\frac{1}{2})(-1+i)$, $\pi(n+\frac{1}{2})(-1-i)$. Het is eenvoudig in te zien dat $|\sin z|\geq 1$ op $[K_n]$ (ga na).

Zij $f(z):=(\sin z)^{-1}-z^{-1}$ voor $z\in\mathbf{C}\setminus\{k\pi|\ k\in\mathbf{Z}\}$. Het punt 0 is een ophefbare singulariteit van f. Als $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ heeft f in $k\pi$ een pool van de eerste orde met residu $(-1)^k$. We beschouwen nu $I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{K_n}\frac{f(w)}{w(w-z)}\,dw$, waarbij z in het binnengebied van K_n ligt, $z\neq k\pi$. Volgens 8.1.10 is $|I_n|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot(8n+4)\pi\cdot\frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi((n+\frac{1}{2})\pi-|z|)} = o(1)$ voor $n\to\infty$. De integrand in I_n heeft een eerste orde pool in z met residu $z^{-1}f(z)$ en de reeds genoemde eerste orde polen in $k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) met residu $\frac{(-1)^k}{k\pi(k\pi-z)}$. Door toepassing van de residuenstelling en $n\to\infty$ vinden we $\frac{1}{\sin z}=$
$= \frac{1}{z}+2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\pi^2-z^2}$ voor $z\neq k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). (Zie ook 7.8.16).

Ook in de volgende paragraaf zullen we de manier waarop in deze paragraaf de residuenstelling is toegepast nog enkele malen tegenkomen.

OPGAVEN

8.5.27. Bepaal $\int_0^\infty x^{-1}\sin x\,dx$.

8.5.28. Bepaal $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{x(1-x^2)}\,dx$.

8.5.29. Bewijs dat $\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}$ voor $z\neq 2k\pi i$ ($k\in\mathbf{Z}$).

8.6. Analytische voortzetting

Laten G_1 en G_2 twee gebieden in $\mathbf{C}$ zijn waarvan de doorsnede ook een gebied is.
Als $f_1: G_1\to\mathbf{C}$ en $f_2: G_2\to\mathbf{C}$ analytisch zijn en $f_1(z)=f_2(z)$ voor $z\in G_1\cap G_2$ dan kunnen we door $f(z):=f_1(z)$ als $z\in G_1$ en $f(z):=f_2(z)$ als $z\in G_2$ een analytische functie f op $G_1\cup G_2$

definiëren. Dit is dan een analytische functie die op G_1 identiek is met f_1. We noemen f een *analytische voortzetting* van f_1. Evenzo is f een analytische voortzetting van f_2. Op grond van de identiteitsstelling (8.4.12) is er bij gegeven G_1, G_2 en f_1 niet meer dan één zo'n analytische voortzetting.

8.6.1. VOORBEELD. Door $f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ is een analytische functie gedefinieerd in $G_1 := B_{0,1}$ en door $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n$ is een analytische functie gedefinieerd in $G_2 := B_{i,\sqrt{2}}$. Daar $f_1(z)=f_2(z)$ voor $z\in G_1\cap G_2$ is f_2 een analytische voortzetting van f_1. Als we definiëren $f(z):=(1+z)^{-1}$ voor $z\in \mathbf{C}\setminus\{-1\}$ dan is f de analytische voortzetting van f_1 naar het hele complexe vlak uitgezonderd -1.

De in voorbeeld 8.6.1 behandelde manier van voortzetten, nl. via Taylorreeksen waren we al eerder tegengekomen. We hadden al opgemerkt dat de convergentiestraal van de Taylorreeks van f_1 rond a als f_1 analytisch is in G_1 en $a\in G_1$ soms groter is dan de afstand van a tot de rand van G_1. Soms kunnen we op deze manier een functie voortzetten. Het voornaamste dat we willen bereiken in deze paragraaf is de analytische voortzetting van een aantal bekende functies uit de reële analyse naar $\mathbf{C}$. Voor functies als e^x, sin x, cos x bleek dit zeer eenvoudig omdat de Taylorreeksen van deze functies convergentiestraal ∞ hebben. We zullen nu eerst de logarithme voortzetten en wel met behulp van de afgeleide omdat dat een veel eenvoudiger functie is.
Zij $G:=\mathbf{C}\setminus\{x\in\mathbf{R} \mid x\le 0\}$. Dit is een gebied. We noemen de negatieve reële as die we hebben uitgesloten een *snede* in $\mathbf{C}$. In G is door $f(z):=z^{-1}$ een analytische functie gegeven. Voor twee krommen K_1 en K_2 in G met beginpunt 1 en eindpunt z geldt volgens 8.2.3 $\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz$, d.w.z. de integraal hangt alleen van het eindpunt af (beginpunt is 1). Volgens 8.1.18 is door

$$F(z) := \int_1^z t^{-1}dt \text{ (langs een kromme in G)}$$

een analytische functie in G gedefinieerd. Nu is duidelijk waarvoor de snede diende! We weten dat als $z\in\mathbf{R}$ dan $F(z) = \log z$ en we weten uit 8.4.12 dat er slechts één analytische functie op G kan zijn met deze eigenschap. Het ligt dus voor de hand nu $F(z) =: \log z$ te definiëren. Door als integratiekromme te kiezen het segment $[1,|z|]$ langs de reële as en de cirkelboog (met middelpunt 0) van $|z|$ naar z kunnen we F(z) eenvoudig bepalen. Door de boog te parametriseren met $t:=e^{i\phi}$ vinden we

$$F(z) = \int_1^{|z|} t^{-1}dt + \int_0^{\arg z} e^{-i\phi} ie^{i\phi}d\phi = \log |z| + i \arg z.$$

Hierin is arg z de in 4.4.1 gedefinieerde hoofdwaarde van het argument (zie ook 6.7.10). We zullen dit nu ook voor negatief reële z definiëren:

8.6.2. DEFINITIE. *Als* arg z *de hoofdwaarde van het argument van* z *voorstelt* $(-\pi < \arg z \le \pi)$ *dan noemen we*

$$\log z := \log |z| + i \arg z$$

de hoofdwaarde van de logarithme van z.

In het vervolg wordt steeds met log z de hoofdwaarde bedoeld als niet anders wordt gezegd. We hebben hierboven bewezen dat de logarithme analytisch is op het langs de negatieve reële as opengesneden complexe vlak. Op de negatieve reële as is log z niet continu. Daar voor $x \in \mathbb{R}$, $x<0$ geldt $\lim_{y\downarrow 0} \log(x+iy) = \log |x| + i\pi$ en $\lim_{y\uparrow 0} \log(x+iy) = \log |x| - i\pi$ heeft de logarithme langs de snede in ieder punt een sprong met grootte $2\pi i$. Dit hadden we ook vooraf kunnen inzien doordat uit de definitie van F volgt dat het verschil van de logarithme aan de "bovenkant" resp. "onderkant" van de snede gelijk is aan het residu van F in 0 vermenigvuldigd met $2\pi i$. We hadden de snede ook anders kunnen aanbrengen, bijv. langs $\{iy \mid y \le 0\}$. Als we dan F_1 weer definiëren door $F_1(z) := \int_1^z t^{-1}dt$ waarbij de integraal door het nieuwe gebied moet lopen dan is F_1 analytisch en dus ook een analytische voortzetting van de logarithme. Verder is $F(z)=F_1(z)$ als $\frac{-\pi}{2} < \arg < \pi$. Op dezelfde wijze als boven vinden we $F_1(z) = \log |z| + i \arg_1 z$ waarbij $\arg_1 z$ een argument van z is gedefinieerd door $\frac{-\pi}{2} < \arg_1 z < \frac{3\pi}{2}$. We zien dus dat het mogelijk is de logarithme analytisch voort te zetten over de eerste snede heen! We vinden dan niet de hoofdwaarde van de logarithme aan de onderkant van de snede. We kunnen dit spelletje natuurlijk net zo lang voortzetten als we willen. We zullen deze voortzettingen van de logarithme de *takken* van log z noemen. We hebben aangetoond dat twee takken van de logarithme in een punt z een geheel aantal malen $2\pi i$ verschillen. Om te komen tot $\log |z| + i \arg^* z$ waarin $\arg^* z = \arg z + k2\pi$ kunnen we weer t^{-1} integreren langs een kromme K van 1 naar z waarbij $K=K_1+K_2$ met $[K_1] \subset G$ en en K_2 een gesloten kromme met omloopsindex $n(K,0)=k$ (zie 8.2.10). Het punt 0 is een singulier punt van de logarithme van een soort dat we niet eerder tegenkwamen. We noemen het een vertakkingspunt. (Hier hangen verschillende takken van de logarithme samen.)

8.6.3. EIGENSCHAPPEN. *Voor de hoofdwaarde van de logarithme geldt:*

(i) $\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2$ *als* $-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq \pi$,

$\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2\pi i$ *als* $\arg z_1 + \arg z_2 \leq -\pi$,

$\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 - 2\pi i$ *als* $\arg z_1 + \arg z_2 > \pi$.

(ii) $\lim\limits_{z\to 0} z \log z = 0$.

(iii) $\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{z-a}{a})^n$ *als*

$a\in\mathbf{C}\setminus\{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 0\}$ *en* z *in een voldoende kleine omgeving van* a.

We laten de bewijzen van deze eigenschappen aan de lezer over. Merk op dat de convergentiestraal van de Taylorreeks in (iii) $|a|$ is. Als de snede gedeeltelijk in de convergentiecirkel ligt is de som van de Taylorreeks niet overal $\log z$.

OPGAVEN

8.6.4. Bepaal op dezelfde manier als voor de logarithme is gedaan (via de afgeleide) de analytische voortzetting van arctan door in $\mathbf{C}$ geschikte sneden aan te brengen. Bepaal de Taylorreeks van deze voortzetting rond 0. Bepaal de sprong aan de sneden.

8.6.5. Ga na dat de logarithme een 1-1 afbeelding is van $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ op $\{z\in\mathbf{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ en dat de exponentiële functie de inverse is. Vergelijk dit met opgave 6.6.7.

8.6.6. Bepaal met behulp van de Taylorreeks van $-\log(1-z)$ rond $z=0$ de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin(nx)$.

8.6.7. Als f een gehele functie is die geen nulpunten heeft dan is er een gehele functie g zó dat $f(z)=e^{g(z)}$ voor alle $z\in\mathbf{C}$. Bewijs dit.

8.6.8. Bepaal $\oint_{C_{1,\frac{1}{2}}} (z \log z)^{-1} dz$.

In het langs de negatieve reële as opengesneden complexe vlak is door $\alpha \log z$ een analytische functie gegeven ($\alpha \in \mathbb{R}$). Daar de exponentiële functie een gehele functie is is ook de samengestelde functie gegeven door $f(z)=e^{\alpha \log z}$, analytisch (kettingregel). Als z een positief reëel getal is dan is $f(z)=z^{\alpha}$. Volgens de identiteitsstelling hebben we hier dus te maken met de analytische voortzetting van deze macht. We definiëren nu:

8.6.9. DEFINITIE. *Voor* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *is* $z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}$ *(hoofdwaarde).*

8.6.10. EIGENSCHAPPEN. (i) $z^{\alpha} z^{\beta} = z^{\alpha+\beta}$,

(ii) $z^{-\alpha} = (z^{\alpha})^{-1}$,

(iii) *als* $f(z) = z^{\alpha}$ *dan is* $f'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$.

De bewijzen van deze eigenschappen volgen onmiddellijk uit de definitie. Uit 8.6.3 (i) zien we dat $z_1^{\alpha} z_2^{\alpha} = (z_1 z_2)^{\alpha}$ *niet* voor alle z_1 en z_2 waar is. We zullen aan de hand van een voorbeeld het gedrag van gebroken machten bestuderen.

8.6.11. VOORBEELD. Zij $f(x) := (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ voor $-1<x<1$. In 6.8.14 hebben we gezien dat

$f(x) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} n^{-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ voor $|x|<1$.

We weten dus al dat door

$$f(z) := 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} n^{-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

een analytische voortzetting van f binnen $B_{0,1}$ is gegeven. We brengen nu sneden aan langs $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$. Het gebied dat zo ontstaat noemen we G. Dan is binnen G de door 8.6.9 gedefinieerde functie $f(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ analytisch. Immers langs de sneden is $1-z^2$ een negatief reëel getal en voor géén andere z is dit het geval. Vervangen we in 8.6.9 de logarithme door andere takken dan vinden we bij toepassing in dit voorbeeld ($\alpha=\frac{1}{2}$) andere takken van $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. De punten $+1$ en -1 zijn de vertakkingspunten van f.

We geven nu nog een aantal voorbeelden van analytische voortzetting.

8.6.12. VOORBEELD. Volgens 8.3.19 is door de definitie van $I(a)$ in 8.5.10 een analytische functie gedefinieerd voor $a \in G$ waarin G het gebied uit 8.6.11 is. Daar in G

ook $2\pi(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ een analytische functie voorstelt is in heel G dus $I(a)=2\pi(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ volgens de identiteitsstelling.

8.6.13. VOORBEELD. Zij G het langs de negatieve reële as opengesneden complexe vlak. Voor $N\in\mathbf{N}$ stelt K_N een rectificeerbare kromme voor in G met beginpunt $-N$ aan de onderkant van de snede en eindpunt $-N$ aan de bovenkant van de snede. Volgens 8.3.19 is door

$F_N(s) := \int_{K_N} e^z z^{-s} dz$ een gehele functie gedefinieerd.

Zij nu D een gesloten begrensde verzameling; $\rho\in\mathbf{R}$, $0<\rho<N$. Dan is $\int_\rho^\infty e^{-x}x^{-s}dx$ uniform convergent op D (ga na). De keuze van K_N in de definitie van F_N speelt geen rol. We nemen nu voor K_N een segment van $-N$ tot $-\rho$ aan de onderkant van de reële as, dan $C_{0,\rho}$ en dan het segment van $-\rho$ naar $-N$ aan de bovenkant van de reële as. Dan vinden we

$$F_N(s) = \int_{-N}^{-\rho} e^x e^{-s(\log|x|-i\pi)}dx + \oint_{C_{0,\rho}} e^z z^{-s}dz +$$

$$- \int_{-N}^{-\rho} e^x e^{-s(\log|x|+i\pi)}dx =$$

$$= 2i\sin(\pi s) \int_\rho^N e^{-x}x^{-s}dx + \oint_{C_{0,\rho}} e^z z^{-s}dz.$$

Op D is dan door

$$F(s) := \lim_{N\to\infty} F_N(s) = 2i\sin(\pi s) \int_\rho^\infty e^{-x}x^{-s}dx +$$

$$+ \oint_{C_{0,\rho}} e^z z^{-s}dz$$

een analytische functie F gedefinieerd. Daar D willekeurig was is F een gehele functie.
Nu beperken we ons tot reële s, $0<s<1$. Dan is volgens 8.1.10

$|\oint_{C_{0,\rho}} e^z z^{-s}dz| \le 2\pi\rho e^\rho \rho^{-s} = o(1)$ voor $\rho\to 0$.

Dan geldt blijkbaar (zie 7.10.53):

$$F(s) = 2i\sin(\pi s)\Gamma(1-s) = 2\pi i/\Gamma(s).$$

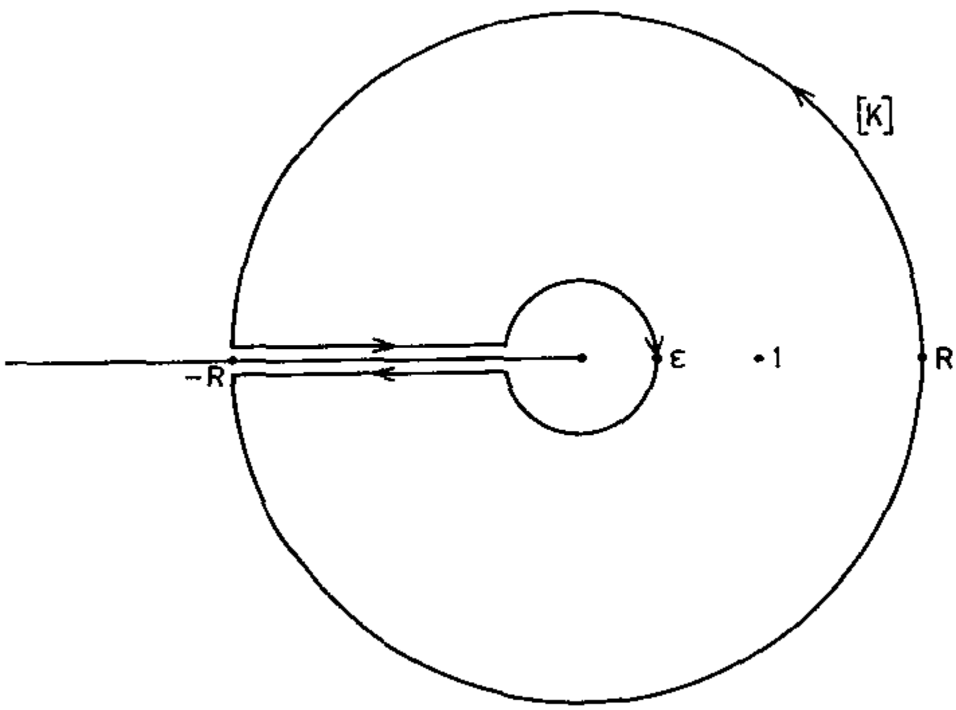
We definiëren nu

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(s)} := \lim_{N\to\infty} \int_{K_N} e^z z^{-s}dz.$$

Daarmee is Γ^{-1} een gehele functie die voor $0<s<1$ overeenstemt met Γ^{-1} zoals in 7.6.24 gedefinieerd. (Merk op dat 7.6.24 Γ als analytische functie definieert voor $\operatorname{Re} s > 0$). Volgens de identiteitsstelling is dit zelfs voor alle s met $\operatorname{Re} s > 0$ het geval. We hebben zo de gammafunctie voortgezet tot het hele complexe vlak met uitzondering van de punten waar Γ^{-1} een nulpunt heeft (polen van de gammafunctie). De kracht van de identiteitsstelling blijkt nu pas goed: 7.6.25 en 7.6.29 gelden ook voor complexe z evenals 7.10.53.

Nu we over gebroken machten beschikken kunnen we nog een mooi en bekend voorbeeld geven van toepassing van de residuenstelling. We beschouwen nog eens de integraal uit 7.7.12:

8.6.14. VOORBEELD. Zij K de kromme van fig. *40*. Zij $0<a<1$.



Figuur 40

We beschouwen $I(a) := \oint_K \frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz$. Volgens 8.3.7 is $I(a) = -2\pi i \lim_{z\to 1} z^{a-1} = -2\pi i$. We beschouwen de 4 stukken van K afzonderlijk.

(a) Volgens 8.1.10 is $\left|\oint_{C_{0,R}} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz\right| = O(R^{a-1}) = o(1)$

voor $R\to\infty$.

(b) Volgens 8.1.10 is $\left|\oint_{C_{0,\varepsilon}} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz\right| = O(\varepsilon^a) = o(1)$ voor $\varepsilon\to 0$.

(c) De integraal langs de bovenkant van de negatieve reële as is
$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{(a-1)(\log|x|+i\pi)}}{1-x}\,dx = e^{(a-1)i\pi}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt.$$

(d) Evenzo is de integraal langs de onderkant
$$-e^{-(a-1)i\pi}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt.$$

Nemen we nu $\varepsilon\to 0$ en $R\to\infty$ dan vinden we
$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$ voor $0<a<1$.

8.7. Opgaven over hoofdstuk 8

8.7.1. Bepaal $\oint_{C_{1,1}} |z|\,dz$.

8.7.2. Bepaal $\oint_{C_{0,2}} \frac{z^{11}}{z^8+z^4+1}\,dz$.

8.7.3. Bepaal $\oint_{C_{0,10}} (z\cos z)^{-1}dz$.

8.7.4. Zij ϕ analytisch op $\{z\in\mathbf{C} \mid |z|>\frac{1}{2}\}$ en $\lim_{R\to\infty} \max\{|\phi(z)| \mid |z|=R\} = 0$. Voor $w\notin[C_{0,1}]$ definiëren we
$$f(w) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{0,1}} \frac{\phi(z)}{z-w}\,dz.$$
Bepaal $f(w)$ voor $|w|<1$ resp. $|w|>1$.

8.7.5. Bepaal $\oint_{C_{0,1}} (\sin z)^{-3}dz$.

8.7.6. Zij $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1+z^n)(1+z^{n+1})}$ voor $|z|\neq 1$.
Bepaal $f(z)$.

8.7.7. Zij $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)(z-n-1)}$ voor $z\notin\mathbf{N}\cup\{0\}$.

(i) Bewijs dat f analytisch is.

(ii) Bepaal de aard van de singulariteiten van f.

8.7.8. Voor Re $z > 0$ verstaan we onder K_z het segment met beginpunt 0 en eindpunt z. Bewijs dat $\int_{K_z} (t^2+t+1)^{-1}dt$ een analytische functie op $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ voorstelt en bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks van deze functie rond 1.

8.7.9. Laat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ voor $|z|>1$ convergent zijn met som $f(z)$.
Laat f nulpunten hebben in 2,3,4,... . Bepaal f.

8.7.10. De functie f is analytisch op en binnen $[C_{0,1}]$ met uitzondering van een pool van de eerste orde in 0 met residu 1. Verder is $|f(z)| \leq 1$ als $|z|=1$. Bepaal f.

8.7.11. Zij $f(z) := \exp(\frac{1}{2}t(z-z^{-1}))$. Bepaal de Laurent-ontwikkeling van f rond 0.

8.7.12. Zij $f(z) = (\sin z)^{-1} + z^{-1}(z-1)$ voor $0<|z|<1$. Bepaal de Laurent-ontwikkeling van f rond 0 en ga na voor welke z deze reeks convergeert.

8.7.13. Als z_i $(i=1,2,3,4,5)$ de nulpunten van z^5+z^2+1 zijn bepaal dan $\sum_{i=1}^{5} z_i^3$.

8.7.14. Bepaal $\oint_{C_{0,2}} \tan z dz$.

8.7.15. Probeer een ruwe benadering te vinden voor de nulpunten van $z^5+z^3+4z^2+1$.

8.7.16. De kromme K bestaat uit drie stukken met parametervoorstellingen resp. $z=x$, $(0 \leq x \leq R)$, $z = Re^{i\phi}$, $(0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4})$, $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} t$ $(R \geq t \geq 0)$.

Beschouw $\oint_K e^{-z^2}dz$ en bepaal dan $\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx$.

8.7.17. Bewijs dat $2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-zt^2}dt$ op $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ een analytische functie voorstelt. Bepaal daarna deze functie.

8.7.18. Zij $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-2}z^n$ voor $|z|\leq 1$.
Bepaal een analytische voortzetting van f (geschikte snede nemen).
Bepaal dan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-2}\cos(n\phi)$.

8.7.19. Bepaal $\int_0^{\infty}\frac{x\log x}{1+x^3}\,dx$.

Commentaar bij de opgaven

In de nu volgende afdeling vindt men commentaar (aanwijzingen, gehele of gedeeltelijke oplossingen, uitkomsten of literatuurverwijzingen) bij vele van de vraagstukken die in dit boek voorkomen. De bedoeling hiervan is niet de zelfwerkzaamheid van de lezer overbodig te maken, maar wel hem bij opgaven waarvan de auteurs verwachten dat zulks gewenst is, een aanwijzing, een mogelijkheid tot contrôle of nadere informatie aan te bieden.

HOOFDSTUK 1. VERZAMELINGEN EN AFBEELDINGEN

Blz

5 1.6.1. $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ zijn alle verschillend. 1.6.2. Neen: $\emptyset$ heeft geen echte deelverzameling. 1.6.3. Twee nl. $\emptyset$ en $\{\emptyset\}$. 1.6.4. Alleen $\{\{2,3\}\}\subset A$ is juist. 1.6.5. Bedenk dat $\emptyset$ en V ook deelverzamelingen van V zijn; derhalve $W=\{\emptyset, \{0\}, \{\{1,2\}\}, V\}$. W heeft 16 deelverzamelingen, waaronder $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\{1,2\}\}\}$ en W.

15 1.6.6. 2^n. 1.12.1. (a) Onwaar: $A:=\mathbf{R}$, $B:=C:=\mathbf{N}$. (b) Onwaar: $A:=B:=\mathbf{N}$, $C:=\mathbf{R}$. (c) Waar. 1.12.2. (a) $\{3,7\}$, (b) $\{3,4,6\}$, (c) $\{1,2,4,5,6,7\}$, (d) $\{1,3,5,7\}$.

16 1.12.3. t/m 1.12.5. Alle bewijzen zijn analoog aan bewijzen die in de tekst voorkomen. We volstaan met enkele voorbeelden. 1.12.3. (b) Zij $x\in A\cup B$. Dan $x\in A$ of $x\in B$. Als $x\in A$ dan $x\in C$ wegens het gegeven $A\subset C$; als $x\in B$ dan $x\in C$ wegens het gegeven $B\subset C$; in beide gevallen is dus $x\in C$. Daar x willekeurig was, is $(A\cup B)\subset C$. 1.12.5. (e) Laat A, B, C verzamelingen zijn. Nu geldt (1.12.3 (b)): als $A^*\subset C^*$ en $B^*\subset C^*$ dan is $(A^*\cup B^*)\subset C^*$. $A^*\subset C^*$ en $B^*\subset C^*$ is gelijkwaardig met $C\subset A$ en $C\subset B$ (wegens 1.11.10 en 1.11.9); $(A^*\cup B^*)\subset C^*$ is gelijkwaardig met $C\subset (A^*\cup B^*)^*$. Wegens 1.11.11 en 1.11.9 is: $(A^*\cup B^*)^*=A\cap B$. 1.12.6. (c) (zie ook 1.27.14) A_1 bestaat uit de elementen die element zijn van een oneven aantal verzamelingen (nl. van één) uit de rij A_1. Neem aan dat $V_n:=A_1\dotplus A_2\dotplus\ldots\dotplus A_n$ bestaat uit de

Blz

16 elementen die behoren tot een oneven aantal uit $A_1,\dots,A_n$. V_n^* bestaat dus uit elementen van het universum die tot een even (incl. 0) aantal behoren. Nu bestaat $V_n \div A_{n+1} = (V_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus V_n)$ uit de elementen die wel tot V_n (dus tot een oneven aantal uit $A_1,\dots,A_n$) en niet tot A_{n+1} behoren, alsmede uit de elementen die wel tot A_{n+1} en niet tot V_n dus wel tot een even aantal uit $A_1,\dots,A_n$ behoren. De elementen uit $V_n \div A_{n+1}$ behoren dus tot een oneven aantal uit $A_1,\dots,A_{n+1}$. 1.12.7. Merk op $A\cap B = A\setminus(A\setminus B)$. 1.12.8. $(A|A)|(B|B) = A^*|B^* = (A^*)^* \cup (B^*)^* = A\cup B$. We beginnen met $A^* = A|A$. De volgende vertalingen zijn niet de enig mogelijke: $A\cap B = (A|B)|(A|B)$; $A\setminus B = (A|(B|B))|(A|(B|B))$; $A\div B = ((A|B)|((A|A)|(B|B)))|((A|B)|((A|A)|(B|B)))$.
1.12.9. Met * als complementvorming t.o.v. $\mathbf{R}$ kunnen we $A\in Y$ vertalen als $A^*\subset \mathbf{Z}$. Zij $A^*\subset\mathbf{Z}$, $B^*\subset\mathbf{Z}$ dan is $(A\cap B)^* = (A^*\cup B^*)\subset\mathbf{Z}$ en $(A\cup B)^* = (A^*\cap B^*)\subset\mathbf{Z}$, terwijl $A\setminus B = (A\cap B^*)\subset B^*\subset\mathbf{Z}$

19 zodat $(A\setminus B)^* \not\subset \mathbf{Z}$. 1.13.9. (a) en (b) zijn leeg.
1.13.10. (a) $\{2z \mid z\in\mathbf{Z}\}$.
(b) $\{\{(a + 2\cos\phi,\ b + 2\sin\phi) \mid 0\le\phi<2\pi\} \mid (a,b)\in\mathbf{R}^2\}$.
(c) $\{\{(x,y) \mid y\in\mathbf{R}\} \mid x\in\mathbf{R}\}$.
(d) $\{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid ax+by+c=0\} \mid (a,b,c)\in\mathbf{R}^3,\ (a,b)\neq(0,0)\}$.
(e) $\{p_1p_2 \mid p_1\in P,\ p_2\in P,\ p_1\neq p_2\}$.
(f) $\{\{x\in\mathbf{R} \mid a<x<b\} \mid a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R},\ a<b\}$.

20 1.14.3. (a) "x is deelbaar door 25" is voldoende voor "x is deelbaar door 5", (b) $x\ge 100$ is nodig en voldoende voor $x>99$, (c) "x is een priemgetal" is noch nodig noch voldoende voor "x is niet deelbaar door 7".

21 1.15.7. (a) waar, (b) waar, (c) waar, (d) waar, (e)

22 onwaar. 1.15.8. (a) $(A\cap B)\cup C$; (b) $A\cap(B\cup C)$; (c) $(U\setminus A)\cup(U\setminus B) = U\setminus(A\cap B)$; (d) $(U\setminus A)\cap(B\cup(U\setminus C))$. 1.15.9.

24 (a) $\{x\in U \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\wedge(x\in C)\}$ etc. 1.16.6. Onwaar zijn (a) en (h); de overige zijn waar. 1.16.7. $(-\infty,0]\cup$

25 $\cup(1,\infty)$. 1.16.9. $n=2$. 1.17.2. Beweringsvormen zijn (a), (d), (f) en (g); objectsvormen zijn (b), (c) en

26 (e). 1.17.4. Beweringsvormen zijn (a), (c) en (e);

27 objectsvormen zijn (b) en (d). 1.17.6. (a) beweringsvorm, t vrij, x gebonden; (b) objectsvorm, y vrij, t en x gebonden; (c) object, geen vrije veranderlijken;

31 (d) bewering, geen vrije veranderlijken. 1.18.12. De laatste propositievorm uit 1.18.10 is steeds waar. Immers $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ is alleen dan onwaar als p waar is en $(q\Rightarrow r)$ onwaar; dus alleen in het geval: p waar, q waar, r onwaar; $(p\wedge q)\Rightarrow r$ is alleen onwaar als $p\wedge q$ waar is

31 (dus p waar en q waar) en r onwaar. 1.18.13. Steeds
waar zijn de eerste, de derde en de vierde proposi-
32 tievorm uit 1.18.11. 1.18.15. (a) $(p|p)|(q|q)$, (b)
$(p|q)|(p|q)$, (c) $(q|q)|p$, (d) $(p|q)|((p|p)|(q|q))$.
35 1.19.10. Waar zijn (b), (c), (e), (f), (g), (h)
(denk er aan dat π irrationaal is!); onwaar zijn (a),
(d). 1.19.11. Waar zijn (a), (c), (d); onwaar is
(b). 1.19.12. Waar zijn (we laten $\in\mathbf{N}$ weg onder de
quantoren): $\exists_x\ \exists_y\ [xy=1]$; $\exists_y\ \exists_x\ [xy=1]$. 1.19.13.
(a) $(P\subset Q)\Rightarrow((P=U)\Rightarrow(Q=U))$; waar. (b) $(P\cup Q=U)\Rightarrow((P=U)\vee$
$\vee(Q=U))$; onwaar; tegenvoorbeeld: $U:=\{1,2\}$, $P(x):\Leftrightarrow(x=1)$,
$Q(x):\Leftrightarrow(x=2)$. (c) $(P\cap Q\neq\emptyset)\Rightarrow((P\neq\emptyset)\wedge(Q\neq\emptyset))$; waar. (d)
$(P^*\cup Q\neq\emptyset)\Rightarrow((P\neq\emptyset)\Rightarrow(Q\neq\emptyset))$; onwaar; tegenvoorbeeld: $U:=$
36 $:=\{1,2\}$, $P(x):\Leftrightarrow(x=1)$, $Q(x):\Leftrightarrow(x=0)$. 1.19.14. Ja.
37 1.19.15. $\{z|\ P(z)\}=\emptyset$. 1.19.18. (a) Waar als $a_n=1$;
onwaar als $a_n=-n$ $(n\in\mathbf{N})$. (b) Waar als $a_n=n$; onwaar
als $a_n=1$ $(n\in\mathbf{N})$. (c) Waar als $a_n=-n$; onwaar als $a_n=1$
$(n\in\mathbf{N})$. 1.19.19. Waar bijv. als $V=\{1\}$ of $V=\{1,2,3\}$;
38 onwaar als $V=\{1,2,4\}$. 1.19.21. $\forall_{x\in\mathbf{N}}\ \exists_{y\in\mathbf{N}}$
$[(x\notin V)\vee((y\in V)\wedge(x\neq y))]$; waar voor $V=\{1,2\}$; onwaar voor
$V=\{1\}$. 1.19.22. $R(x,y):\Leftrightarrow(|x|\leq|y|)$. 1.19.23. Waar
39 als $V=\{1\}$; onwaar als $V=\{-1,-2\}$. 1.19.24. (We laten
$\in\mathbf{N}$ onder de quantoren weg.)

(a) $\forall_x\ \forall_y\ \forall_z\ [(P(x)\wedge P(y)\wedge P(z))\Rightarrow((x=y)\vee(x=z)\vee(y=z))]$.

(b) $\exists_x\ \exists_y\ \forall_z\ [P(x)\wedge P(y)\wedge(x\neq y)\wedge(P(z)\Rightarrow((z=x)\vee(z=y))$.

(c) $\exists_x\ \exists_y\ \exists_z\ [P(x)\wedge P(y)\wedge P(z)\wedge(x\neq y)\wedge(x\neq z)\wedge(y\neq z)]$.

40 1.20.8. Als $x\in\cup_{m=1}^{\infty}\ \cap_{k=m}^{\infty}\ A_k$ dan is voor zekere m_0
ook $x\in\cap_{k=m_0}^{\infty}\ A_k$; de enige A's waar x misschien niet
in ligt zijn $A_1,\ldots,A_{m_0-1}$. Als $x\notin A_i$ voor eindig veel
waarden van i, dan is er een grootste: zeg $m_1:=\max$
$\{i|\ x\notin A_i\}$; nu is $x\in\cap_{k=m_1+1}^{\infty}$ en dus $x\in\cup_{m=1}^{\infty}\ \cap_{k=m}^{\infty}\ A_k$.
Het andere bewijs is analoog. 1.20.10. (a) $\emptyset$, (b)
$[1,\infty)$, (c) $\{0\}$, (d) $[-1,1]$, (e) $[-1,1]$, (f) $(-\infty,\infty)$.
42 1.21.12. Slechts enkele voorbeelden: $((1,a),2)\in(A\times B)\times A$;
$(a,b,1)\in B\times B\times A$; $((1,2),a)\in A^2\times B$. 1.21.13. Beide.
1.21.14. (a) nm, (b) 2^{nm}, (c) $(2^n-1)(2^m-1)+1=2^{n+m}+$
-2^n-2^m+2 (pas op dat $\emptyset$ slechts éénmaal geteld wordt).
47 1.22.23. (b) $F(A)=\{1,2\}$. (c) $F^{\leftarrow}(B)=A$, $F^{\leftarrow}(\{1\})=\{1,2\}$.
1.22.25. Als $A_1=[0,1]$ en $A_2=[-1,0]$, dan is $F(A_1\cap A_2)=$
$=F(\{0\})=0$; $F(A_1)=F(A_2)=[0,1]$; $F^{\leftarrow}(F(A_1))=[-1,1]$; als
$B=[-1,1]$, dan is $F(F^{\leftarrow}(B))=[0,1]$. 1.22.26. (a) Als

47 $b\in F(A_1)\setminus F(A_2)$, dan $b=F(a)$ voor zekere $a\in A_1\setminus A_2$ dus $b\in F(A_1\setminus A_2)$ enz. (b) F, A_1 en A_2 als in 1.22.25. 1.22.27. $F(x):=\log|x|$ als $x\neq 0$; $F(0):=0$. 1.22.28.
48 $f^{\leftarrow}(X)=X\cup\{(x,-1)\mid x\in\mathbf{R}\}$. 1.22.29. $\emptyset$. 1.22.30. n^m.
52 1.23.9. (a) n^n, (b) $n!$, (c) $n!$. 1.23.10. Er zijn alleen één-éénduidige afbeeldingen als $m\geq n$; het aantal is $m(m-1)\cdots(m-n+1)$. 1.23.11. Zie 1.23.10. 1.23.13. (a) Ja; (b) $F^{-1}=F$. 1.23.14. (a) f is op en één-éénduidig; (b) g is wel één-éénduidig maar niet op want $2\in\mathbf{Q}^+$, $2\notin g(\mathbf{Q}^+)$. 1.23.15. (a) niet op; niet
53 één-éénduidig; (b) $\{(1,y)\mid y\in\mathbf{R}\}$. 1.23.16. (b) 12. 1.23.17. $f(n):=2n$ $(n\in\mathbf{N})$. 1.23.18. $f(x):=\tan(\pi x-3/2\pi)$ $(1<x<2)$. 1.23.19. (a) ϕ is niet één-éénduidig want $\phi(f_1)=\phi(f_2)$ zodra $f_1(1)=f_2(1)$ en $f_1(2)=f_2(2)$; ϕ is wel op. (b) $\phi^{\leftarrow}(\{(0,0)\})=\{f\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\mid f(1)=f(2)=0\}$. 1.23.20. (i) Zij f één-éénduidig, zij $A,B\in P(X)$. Als $y\in f(A)\cap f(B)$ $y=f(a)$ voor zekere $a\in A$ en $y=f(b)$ voor zekere $b\in B$. Wegens de één-éénduidigheid is $a=b$, dus $a\in A\cap B$ en $y\in f(A\cap B)$. Derhalve $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$ en dus (1.22.17) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$. (ii) Zij $f(a)=f(b)=:c$ met $a\neq b$ dan is $\emptyset=f(\{a\}\cap\{b\})\neq f(\{a\})\cap f(\{b\})=\{c\}$. 1.23.22.
55 $F^{-1}(A):=\{x+1\mid x\in A\}$ $(A\in P(\mathbf{R}))$. 1.24.11. $(G\circ F)^{\leftarrow}([0,2])=$ $=[0,1]$. 1.24.12. (c) Als $A:=[0,1]$ en $F(x):=x^2$ $(x\in\mathbf{R})$, is $V=F_n(A)=[0,1]$ $(n\in\mathbf{N})$. Als $A:=(0,2]$, is $V=(0,\infty)$.
56 1.24.13. $F_{n+1}(A)\subset F_n(A)$ $(n\in\mathbf{N})$; zij $V=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}F_n(A)$; dan
58 is $F(V)=V$. 1.25.12. (a) $\chi_{A^*\cup(B\cup C)^*}(x)=\chi_{A^*}(x)+$ $+\chi_{(B\cup C)^*}(x)-\chi_{A^*}(x)\chi_{(B\cup C)^*}(x)=1-\chi_A(x)+1-\chi_{(B\cup C)}(x)+$ $-(1-\chi_A(x))(1-\chi_{B\cup C}(x))=2-\chi_A(x)-\chi_B(x)-\chi_C(x)+\chi_B(x)\chi_C(x)+$ $-(1-\chi_A(x))(1-\chi_B(x)-\chi_C(x)+\chi_B(x)\chi_C(x))=1-\chi_A(x)\chi_B(x)+$ $-\chi_A(x)\chi_C(x)+\chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x)=(1-\chi_A(x)\chi_B(x))(1-\chi_A(x)\chi_C(x))=$
61 $=\chi_{(A\cap B)^*\cap(A\cap C)^*}(x)$; (merk op $(\chi_A(x))^2=\chi_A(x)$). 1.26.17. (a) $\frac{\pi}{6}$, (b) $\frac{2}{3}\pi$, (c) Stel $\arctan\frac{1}{2}=:p$, $\arctan\frac{1}{3}=:q$ dan $\tan p=\frac{1}{2}$ met $-\frac{\pi}{2}<p<\frac{\pi}{2}$ ja zelfs $0<p<\frac{\pi}{4}$ en $\tan q=\frac{1}{3}$ met $-\frac{\pi}{2}<q<\frac{\pi}{2}$ ja zelfs $0<q<\frac{\pi}{4}$. Dus $0<p+q<\frac{\pi}{2}$ en $\tan(p+q)=$ $=(\tan p+\tan q)(1-\tan p\cdot\tan q)^{-1}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{6}{5}=1$ en
64 $p+q=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. 1.27.14. Zie bijv. de oplossing van 1.12.6 (c). 1.27.16. (a) Voor $n=1$ is de bewering: $a_1=a_3-1$ d.w.z. $1=2-1$ waar. Stel $\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-1$, dan is $\sum_{k=1}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+a_{n+1}=$

64 $= a_{n+2}-1 + a_{n+1} = a_{n+3}-1$, zodat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [\sum_{k=1}^{n} a_k =$
$= a_{n+2} - 1]$.

HOOFDSTUK 2. RELATIES

67 2.1.7. (a) $R_2\cup((X\times Y)\setminus R_1)$; (b) $R_1\cap R_2$; (c) $R_1\cup R_2$.
68 2.2.9. Alle 8 mogelijke combinaties komen voor.
2.2.10. Zij $(x,y)\in R$; dan is $(y,x)\in R$ wegens de symmetrie; uit $(x,y)\in R$ en $(y,x)\in R$ volgt $x=y$ wegens de
69 antisymmetrie; dus $(x,y)\in I_V$. 2.2.11. (a) Anti-reflexief, wel symmetrisch, niet transitief; (b) niet reflexief, wel symmetrisch, niet transitief; (c) niet reflexief, wel symmetrisch, niet transitief. 2.2.12. Zij $a\in V$; er is een $b\in V$ met aRb, maar dan is bRa (ii) en uit aRb en bRa volgt aRa (iii). 2.2.13. Reflexief: (d), (e), (f); antireflexief: geen; symmetrisch: (a), (b), (c), (e); antisymmetrisch: (d), (e), (f); transitief: (d), (e), (f). 2.2.14. Zij $a\in V$, als $\{x\in V \mid aRx\}=\emptyset$ is R geen afbeelding; stel aRb dan is $b\neq a$ wegens de antireflexiviteit; als $\{x\in V \mid bRx\}=\emptyset$ is R geen afbeelding; als bRc, dan is $b\neq c$, terwijl aRc wegens de transiviteit. Er zijn dan tenminste twee verschillende elementen b en c met
73 $(a,b)\in R$, $(a,c)\in R$ en R is geen afbeelding. 2.3.22. $\forall_{x\in V}\ \exists!_{W\in U}\ [x\in W]$. 2.3.23. g.g.d.$(x,y)\neq 1$ is geen equivalentierelatie. Er zijn twee partities $U_1=\{\mathbf{N}\}$,
74 $U_2=\{\{1\},\mathbf{N}\setminus\{1\}\}$. 2.3.24. De relatie is in V geen equivalentierelatie (niet transitief); wel in $V\setminus\{0\}$. 2.3.25. (b) (i) Als $O:=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f(\mathbf{Z})=\{0\}\}$ en $g_1\in O$, $g_2\in O$ dan is $\forall_{x\in\mathbf{Z}}\ [g_1(x)=g_2(x)=0]$, dus $g_1\sim g_2$. (ii) Als $g_1\in O$, $g_3\notin O$ dan $\exists_{x\in\mathbf{Z}}\ [g_3(x)\neq 0]$; voor een dergelijk element x is dan ook $g_1(x)=0\neq g_3(x)$, dus $\neg(g_1\sim g_3)$.
78 2.4.4. Een beschrijving van in wezen dezelfde con-
80 structie staat in 3.7.19. 2.4.6. e.v. Veel informatie over het rekenen met congruenties vindt men bijv. in [15] chap. V; zie ook § 3.2 van dit boek. De opgaven 2.4.6 t/m 2.4.9 zijn niet lastig; één voorbeeld: als $a\equiv b \bmod m$, $c\in\mathbf{Z}$, dan is $a-b=gm$ voor zekere $g\in\mathbf{Z}$;
81 $ac-bc=gcm$ en dus $ac\equiv bc \bmod m$. 2.4.11. Als voorbeeld 1.25.12 (b): $\chi'_{A^*\div B^*}(x)\equiv\chi'_{A^*}(x)+\chi'_{B^*}(x)\equiv 1+\chi'_A(x)+1+\chi'_B(x)\equiv$
82 $\equiv 2+\chi'_{A\div B}(x)\equiv\chi'_{A\div B}(x)$. 2.5.4. Stel $\{n\in\mathbf{N} \mid \exists_{m>n}\ [\mathbf{N}_n\sim\mathbf{N}_m]\}\neq$ $\neq\emptyset$, dan bevat deze verzameling een kleinste element: n_0 (1.27.7). Dan is er een $\phi:\mathbf{N}_{n_0}\to\mathbf{N}_{m_0}$ met ϕ één-éénduidig en op en $m_0>n_0$. Zij $\phi(n_0)=:k$ $1\le k\le m_0$; construeer nu een één-éénduidige afbeelding van $\mathbf{N}_{n_0-1}$ op

82 $\mathbf{N}_{m_0-1}$. 2.5.5. $\phi:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$ is één-éénduidig en op indien $\phi(0):=1$, $\phi(n):=2n$ $(n>0)$, $\phi(n)=-2n+1$ $(n<0)$. 2.5.6. De afbeelding $\phi:A\times B\to B\times A$ gedefinieerd door $\forall_{a\in A}\ \forall_{b\in B}$ $[\phi(a,b):=(b,a)]$ is één-éénduidig en op. 2.5.7. $\psi:I\to C_1$ is één-éénduidig en op indien $\psi(x):=(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ $(0\le x<1)$. 2.5.8. $g(x):=\tan(\pi x-\frac{1}{2}\pi)$ definieert een één-éénduidige afbeelding van $(0,1)$ op $\mathbf{R}$.

88 2.5.26. (c) Zij $E_n:=\{x\in\mathbf{R}\mid (n-\frac{1}{2})\pi<x<(n+\frac{1}{2})\pi,\ \tan x\in\mathbf{Z}\}$ $(n\in\mathbf{Z})$ dan is E_n aftelbaar omdat tan één-éénduidig is op $((n-\frac{1}{2})\pi,(n+\frac{1}{2})\pi)$. $\cup_{n\in\mathbf{Z}} E_n$ is aftelbaar wegens 2.5.21, 2.5.5. 2.5.27. Voorbeelden: $V_n:=\{1\}$, $\cup_{n=1}^{\infty} V_n=\{1\}$ eindig; $W_n=\{n\}$, $\cup_{n=1}^{\infty} W_n=\mathbf{N}$ aftelbaar. 2.5.28. Bij iedere $f\in W$ definiëren we $k(f):=\min\{n\mid \forall_{m\in\mathbf{N},\ m>n}$ $[f(m)=0]\}$ dan is $k(f)\in\mathbf{Z}$, $k(f)\ge 0$ en $E_n:=\{f\in W\mid k(f)<n\}$ is eindig voor iedere $n\in\mathbf{N}$. Tenslotte $W=\cup_{n\in\mathbf{N}} E_n$. 2.5.29. De verzameling van alle deelverzamelingen met n elementen is aftelbaar $(n\in\mathbf{N})$. 2.5.30. $P(\mathbf{N})$ is gelijkmachtig met $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ (karakteristieke functies).

91 2.6.17. Voor elk paar $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ uit $V^n\times V^n$ waarbij $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ en $\mathbf{a}\ne\mathbf{b}$ definiëren we $\ell(\mathbf{a},\mathbf{b}):=\min\{k\mid 1\le k\le n,\ a_k\ne b_k\}$. Lexicografische ordening is nu $(\mathbf{a}\lessdot\mathbf{b}):\Leftrightarrow(a_{\ell(\mathbf{a},\mathbf{b})}\lessdot b_{\ell(\mathbf{a},\mathbf{b})})$ $(\mathbf{a}\ne\mathbf{b}\in V^n)$. 2.6.20. (a) Niet transitief: 2 is vergelijkbaar met 6; 6 is vergelijkbaar met 3; 2 en 3 zijn niet vergelijkbaar. (b) De ordening uit 2.7.11; ander voorbeeld: de ordening in $\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door $(a_1,b_1)\lessdot(a_2,b_2):\Leftrightarrow$

95 $:\Leftrightarrow[(a_1=a_2)\wedge(b_1<b_2)]$ $(a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R})$. 2.6.32. $\phi(2n-1):=n-1$; $\phi(2n):=-n$ $(n\in\mathbf{N})$. 2.6.33. Stel dat $\psi:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ een ordeningsisomorfisme zou zijn, dan zou $\psi(1)$

101 het kleinste gehele getal zijn. 2.7.28. De verzameling der minimale elementen van $(V,\lessdot)$ is $f^{\leftarrow}(\{\min\{n\in\mathbf{N}\mid n\in f(V)\}\})$. 2.7.29. $O(X)=P\cup\{15\}$, P is de verzameling der priemgetallen; $\inf X=15$, $\sup X=30$, $O(Y)=P$, $\inf Y$ bestaat niet, $\sup Y=30$. 2.7.30. (a) Ja. (b) $\emptyset$, (c) alle verzamelingen V waarvoor $1\in V$. 2.7.31. Maak in elk van de gevallen schetsjes van de verzamelingen van $\mathbf{R}^2$ die vergelijkbaar zijn met een willekeurig element (a,b). Het vraagstuk is van de-

103 zelfde soort als 2.7.16 en 2.7.17. 2.8.10. De inhoud van § 2.8 is binnen het geheel van dit boek van ondergeschikt belang. De opgaven zijn alle oefeningen in het formeel opereren met sup en inf en enkele

103 axioma's. We zijn summier in het geven van aanwijzingen. Een goede inleiding in de materie van § 2.8 is: H. Gericke, Theorie der Verbände, Hochschultaschenbücher, Band 38/38a, B.I. Mannheim 1963. 2.8.12. Zij $V:=\{x_1,\ldots,x_n\}$ dan is $\inf\{x_1,\ldots,x_n\}$
106 (2.8.11) het eerste element van $(V,<\circ)$. 2.8.24. Voor β, γ, δ is de implicatie in de definitie van modulariteit waar omdat het linkerlid onwaar is; elk ander drietal uit V_3 behoort tot een deelverzameling van V_3 die met de geïnduceerde ordening een distributief tralie is.

HOOFDSTUK 3. ALGEBRA

111 3.2.10. Het getal $p_1p_2\cdots p_k+1$ heeft een priemfactor groter dan p_k. Een uitwerking van de overige opgaven
117 uit § 3.2 vindt men zonodig in [15] chap. V. 3.3.21. Commutatief: $\cap$, $\cup$, $\div$; associatief: idem; V is het eenheidselement bij $\cap$; $\emptyset$ bij $\cup$ en $\div$; bij $\cap$ en $\cup$ heeft alleen het eenheidselement een inverse; bij $\div$ is ie-
118 der element zijn eigen inverse. 3.3.22. (a) ja, (b) ja, (c) 1, (d) 1. 3.3.23. (e) Als $\forall_{x\in\mathbf{R}}$ $[f(x):=1-x]$ dan is f een isomorfisme van $(\mathbf{R},\ )$ op
120 $(\mathbf{R},\phi)$. 3.3.25. Nee. 3.4.5. (a), (c), (d). 3.4.6. (a) $\forall_{\underline{k}\in\mathbf{Z}(\mathrm{mod}\ m)}$ $[\phi(\underline{k}) := D_{\frac{2k\pi}{m}}]$ definieert een iso-
121 morfisme. 3.4.8. Het eenheidselement van $(\mathbf{R},*)$ is $\phi^{\leftarrow}(0)$; een isomorfisme f van $(\mathbf{R},+)$ op $(\mathbf{R},*)$ wordt gedefinieerd door: $\forall_{x\in\mathbf{R}}$ $[f(x):=\phi^{\leftarrow}(x)]$. 3.4.10. (b) Eenheidselement is $\min X$; de inverse van x is x; de associativiteit is nogal bewerkelijk. Na lezing van § 3.12 zal duidelijk zijn dat het bewijs van de asso-
127 ciativiteit van $\div$ gecopieerd kan worden. 3.4.20. (b) Een isomorfisme is $f_1\to(1)$; $f_2\to(2,3)$; $f_3\to(1,3)$; $f_4\to(1,2)$; $f_5\to(1,2,3)$; $f_6\to(1,3,2)$. 3.4.21. Stel een
129 producttafel op. 3.4.22. Zie [2] § 19. 3.5.4. (a) $\{\underline{0}\}$, $\{\underline{0},\underline{2}\}$, $\{\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3}\}$; (b) $\{(1)\}$, $\{(1),(1,2)(3,4)\}$, $\{(1),(1,3)(2,4)\}$, $\{(1),(1,4)(2,3)\}$, de viergroep
133 zelf; (c) zie [27] § 10. 3.5.23. (b) De cyclische groepen voortgebracht door resp. $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{6}$ en $\underline{9}$. 3.5.24. H_a is in het algemeen niet normaal. 3.5.25. Als H index twee in $(G,\ )$ heeft, zijn de rechter zowel als linker nevenklassen H en $G\backslash H$. Iedere groep met twee elementen, dus ook S_n/A_n is isomorf met $(\{-1,1\},\cdot)$. 3.5.26. $h_1n_1(h_2n_2)^{-1}=h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1}=$

133 $=h_1n_3h_2^{-1}=h_3n_4$ voor willekeurige $h_1,h_2\in H$, $n_1,n_2\in N$ en
134 geschikte $h_3\in H$, n_3, $n_4\in N_1$. 3.5.27. (a) S_3; (b)
{(1),(1.3)}; (c) {(1),(1,2),(3,4),(1,2)(3,4),(1,3)
(2,4),(1,4)(2,3),(1,4,2,3),(1,3,2,4)}; merk op dat
(1,3) en (1,4) in verschillende linkernevenklassen
liggen; (d) {(1),(1,2),(3,4),(1,2)(3,4)}. 3.5.28.
(c) Merk op dat iedere nevenklasse van V_4 in S_4 een
135 representant heeft die 4 invariant laat. 3.6.5. Zie
136 [27] § 47. 3.6.6. Zie [27] § 47. 3.6.10. Als $G_1=$
$=\{(1),(1,2)(3,4)\}$, $G_2=\{(1),(1,3)(2,4)\}$ dan is $V_4=$
139 $=G_1\otimes G_2$. 3.7.11. ∅ en W zijn de enige elementen die
geen nuldeler zijn, W is het eenheidselement en het
141 enige reguliere element. 3.7.22. Merk op dat als
(R,+,) een lichaam is geldt: $(a,b)\sim(ab^{-1},e)$ $(a,b\in R)$.
3.7.23. Merk op dat voor $a\neq 0$ uit $xa=x'a$ volgt
$(x-x')a=0$ en dus $x=x'$; gebruik 3.4.13. 3.7.24. Om-
dat $ab=ba$ is het bewijs gelijkluidend aan dat van
145 1.27.12. 3.8.13. Zij m priem, $q\notin m\mathbf{Z}$; dan bestaan er
z_1 en $z_2\in\mathbf{Z}$ zodat $qz_1+mz_2=1$ (3.2.5). Als $m=k\ell$ met $k\geq 2$,
$\ell\geq 2$, dan $k\notin m\mathbf{Z}$, terwijl $\{k\}\cup m\mathbf{Z}$ als ideaal $k\mathbf{Z}$ voort-
brengt. 3.8.14. Is S een ideaal, g regulier en $g\in S$,
dan is ook $e=g^{-1}g\in S$. 3.8.15. Stel $ab\in S$, $a\notin S$ dan
brengt $\{a\}\cup S$ de ring voort, dus $e=ra+s$ voor zekere
ringelementen r en s, $s\in S$. Maar dan is $b=rab+bs\in S$.
147 3.8.17. Denk aan 3.8.13. 3.9.3. Merk op dat $(\{x\})$
148 bevat is in $(\{x,2\})$. 3.9.13. Zie [27] § 21. 3.9.14.
150 Zie [27] § 21. 3.10.4. (a) Uit $naa^{-1}=maa^{-1}$ volgt
151 $(n-m)e=0$. (b) 3.7.24. 3.10.8. Aanvullingen aan het
152 bewijs van 3.10.6; zonodig zie [27] § 35. 3.10.10.
$a+b\sqrt{2}\to a-b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbf{Q})$ is een isomorfisme. 3.10.11.
153 Bijv. $s=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$. 3.10.16. (i) $x^2+1\neq 0$ voor $x=0,1,2$.
(ii) $\pm 1\pm x$ zijn alle vier primitief. (iii) Neem $\alpha=x-1$,
$x^4+1=(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$ en $\alpha^2+\alpha+2=0$. 3.10.17. Zie
3.10.14 (ii). Als $\xi\in GF(27)$ en $\xi^3=\xi$ dan is $\xi\in GF(3)$
d.w.z. $\xi=0,1$ of 2. Pas dit toe op de coëfficiënten
van $(x-\alpha^2)(x-\alpha^6)(x-\alpha^{18})$. Voor iedere $\xi\neq 0$ in GF(27)
geldt $\xi^{26}=1$. De 12 even machten van $\alpha+1$ zijn de nul-
154 punten van $(x^{13}-1)/(x-1)$. 3.10.18. Neem α primitief
element van GF(32) voortgebracht m.b.v. x^5+x^2+1. Dan
155 is $x^5+x^2+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^4)(x-\alpha^8)(x-\alpha^{16})$. 3.11.7.
162 Merk de analogie op met $|\;|$ in $\mathbf{R}$ of $\mathbf{C}$. 3.13.1.
GF(3), GF(2^2). 3.13.3. Als $a^m=0$, dan $(e-a)^{-1}=$
$=e+a+a^2+\dots+a^{m-1}$. 3.13.4. In een commutatieve ring
is $(ra)^n=r^na^n$; als $a^m=0$, $b^n=0$ is $(a+b)^{m+n}=0$. 3.13.5.
Merk op dat dit een generalisatie van 3.13.4 is.
3.13.6. Vgl. 3.8.14. 3.13.8. Integriteitsgebied; in
de voorstelling $a+bi$ zijn de reguliere elementen
163 $1,-1,i,-i$. 3.13.9. Het ideaal bestaat uit alle poly-

163 nomen p(x) waarvoor p(0) even is. 3.13.11. (iii) Als $R\supset\mathbb{Q}_p$ en $x\in R\setminus\mathbb{Q}_p$ dan $x^{-1}\in\mathbb{Q}_p\subset R$ (ii) en $xx^{-1}=1\in R$; $R=\mathbb{Q}$. (iv) Als S een ideaal is, is voor geen x: $(x\in S)\wedge$ $\wedge(x^{-1}\in\mathbb{Q}_p)$. 3.13.12. Het lichaam kan voorgesteld als $\{a+bi\mid a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}\}$; ja. 3.13.13. Zie [27] § 74. 3.13.14.
164 Zie [27] § 74. 3.13.15. $\oplus$ is een productoperatie in I want uit $x^2=x$, $y^2=y$ volgt $(x+y-2xy)^2=x+y-2xy$. 3.13.16. Merk op dat (W,+,) isomorf is met $(P(\{1,2,3\}),\div,\cap)$. 3.13.17. Bewijs dat voor eindige V $(P(V),\div,\cap)$
199 hoofdideaalring is. 3.18.13. (i) Zie 3.18.10; als $\lambda_1=-1$ de enige reële eigenwaarde zou zijn, dan gold voor de complexe oplossingen $\lambda_1,\lambda_2,\bar{\lambda}_2$ van $\det(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$ dat: $1=\det(a_{ij})=\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda}_2=-|\lambda_2|^2<0$.

(iii) Als $\mathbf{v}$ een eigenvector met eigenwaarde 1 is, dan is de restrictie van A tot $V:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\mid(\mathbf{v},\mathbf{x})=0\}$ direct orthogonaal, pas 3.18.12 (i) toe en merk op $\mathbb{R}^3=V\oplus V^{\perp}$. 3.18.14. De overgangsmatrix is: $((\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_i))$, (3.16.1). Pas toe: 3.17.22 (ii) en 3.18.8 (f).
203 3.20.2. Denk aan 3.10.6; zie 3.10.8. 3.20.4. Laat $s_1,\dots,s_m$ een basis zijn van (S,+,) t.o.v. (T,+,) en $r_1,\dots,r_n$ van (R,+,) t.o.v. (S,+,); laat zien dat $r_1s_1,r_1s_2,\dots,r_1s_m, r_2s_1,\dots,r_2s_m,\dots,r_ns_m$ een basis is van (R,+,) t.o.v. (T,+,). [27] § 36. 3.20.5. Als de graad van de uitbreiding m is en de karakteristiek p bevat het lichaam p^m elementen. 3.20.7. GF(16): i.p.v. $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ (3.10.15) schrijven we (a_0,a_1,a_2,a_3), $a_i\in GF(2)$, $(i=0,\dots,3)$; lichaamsvermenigvuldiging: $(a_0,a_1,a_2,a_3)(b_0,b_1,b_2,b_3)=$ $=(a_0b_0+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1, a_1b_0+a_0b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_3b_2+$ $+a_2b_3, a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2+a_3b_2+a_2b_3+a_3b_3, a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+$ $+a_0b_3+a_3b_3)$, optelling en vermenigvuldiging in GF(2). $V\in P(\{1,2,3,4\})$ representeren we met $(\chi_V(1),\chi_V(2),$ $\chi_V(3),\chi_V(4))$; de vertaling van doorsnedevorming is dan "$(a_0,a_1,a_2,a_3)\cap(b_0,b_1,b_2,b_3)=(a_0b_0,a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3)$".
204 3.20.9. (d) Probeer $a_1,\dots,a_k$ achtereenvolgens weg te
205 laten. 3.20.11. (a) Als $\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=0}^{k}\mu_i\mathbf{a}_i$ dan is $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\mu_i)(\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_0)=\mathbf{0}$. Wegens de lineaire onafhankelijkheid is nu $\lambda_i=\mu_i$ $(i=1,\dots,k)$ terwijl $\lambda_0=\mu_0=$ $=1-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$. 3.21.1. (a) Dimensie=n (b) geen eindige dimensie. 3.21.2. Gebruik 3.14.13. 3.21.3. (d)

205 bijv. $\mathbf{x}=(1,0,1)+t_1(1,2,0)+t_2(0,1,1)$; $\mathbf{x}=(1,0,1)+$
206 $+t(-1,1,3)$; (e) $2x-y+z=3$. 3.21.4. Als $\mathbf{x}=(x,y,z)$, P,
Q en R in één vlak liggen, dan moet dit vlak een
vergelijking hebben, m.a.w. er moeten $(A,B,C,D)\neq$
$(0,0,0,0)$ zijn zodat $Ax+By+Cz+D=0$, $Ap_1+Bp_2+Cp_3+D=0$,
$Aq_1+Bq_2+Cq_3+D=0$, $Ar_1+Br_2+Cr_3+D=0$. Pas 3.16.13 toe.
3.21.5. (c) is een lineaire deelruimte; (d) een
lineaire variëteit maar geen deelruimte. 3.21.6.
De snijlijn $\mathbf{x}=(2,0,0)+t(1,1,1)$ van de eerste drie
vlakken ligt ook in het vierde vlak indien $a=2$.
3.21.7. Vul aan met bijv.: x,x^3,x^4. 3.21.8. N.B.
207 het gegeven drietal is onafhankelijk. 3.21.9.
3.14.36; V heeft een basis $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_\ell,$
$\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_m,\mathbf{d}_1,\dots,\mathbf{d}_n$, waarbij $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ basis is van
$V_1\cap V_2$, $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_\ell$ van V_1 en $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k,$
$\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_m$ van V_2. 3.21.10. (a) 3, (b) ja, (c) nee.
3.21.11. De dimensies zijn resp. 2,3,2. 3.21.12.
Merk op: $\mathbf{v}_1=-a_1^{-1}a_2\mathbf{v}_2-a_1^{-1}a_3\mathbf{v}_3$; $\mathbf{v}_3=-a_3^{-1}a_1\mathbf{v}_1-a_3^{-1}a_2\mathbf{v}_2$.
3.21.13. (a) $N(A)=\{\lambda(-3,11,5)\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$; $A^{\leftarrow}(\{(6,2,4)\})=$
$=(1,1,1)+N(A)$, (b) Bijv. $(1,0,1),(1,1,0)$. 3.21.14.
(a)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\-2&6&4\end{pmatrix};$$

(b) eigenwaarden 0, 2, 5; (c) neem een eigenvector
bij elk van de eigenwaarden. 3.21.15. (a) 3.15.4.
(c) Merk op dat $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$. 3.21.16. $N(BA)\supset N(A)$ dus
n - rang $BA \geq n$ - rang A; $BA(\mathbf{R}^n)\subset B(\mathbf{R}^m)$ dus rang $BA\leq$
208 $\leq$ rang B. 3.21.17. AB en BA hebben dezelfde karakteristieke vergelijking wegens 3.16.19 en 3.16.20.

3.21.18. Met $T:=A(\mathbf{R}^n)\subset\mathbf{R}^m$ hebben we $T\subset N(B)$, dim $T=$
$=$ rang A. Nu is rang B + dim $N(B)=m$ (3.15.11) dus
rang B + rang $A\leq m$. 3.21.19. Pas 3.15.11 toe; merk
op $N(AB)\subset[N(A),N(B)]$; gebruik ook 3.21.9, 3.21.16.
3.21.20. Het vlak met vergelijking $x_1+x_2+x_3=0$ bevat
de eigenvectoren met eigenwaarde 0, de lijn $\{\lambda\mathbf{a}\mid\lambda\in\mathbf{R}\}$
bevat de eigenvectoren met eigenwaarde $a_1+a_2+a_3$ als
$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$. (Als $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ is het vraagstuk triviaal.)

3.21.21. Als $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ is $\lambda^n=0$.
3.21.22.

(b) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\3&2&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

3.21.23. De determinant is een homogene veelterm
$F(x_1,\dots,x_n)$ in $x_1,\dots,x_n$ van de graad $\frac{1}{2}(n-1)n$.

208 $F(x_1,\dots,x_n)=0$ als $x_i=x_j$ $(i\neq j)$ dus $F(x_1,\dots,x_n)$ is deelbaar door x_i-x_j. Zo $F(x_1,\dots,x_n) = c \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i-x_j)$. Kijk naar de bijdrage van de hoofddiagonaal, $1x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$, om in te zien dat $c=1$ (vergelijk 3.5.9). <u>3.21.24.</u> N.B. rang(a_{ij}) is het maximale aantal line-
209 air onafhankelijke kolommen. <u>3.21.25.</u> Analoog 3.16.19. <u>3.21.26.</u> $|\mathbf{x}|^2=(\mathbf{x},\mathbf{x})$! <u>3.21.28.</u> Vul bijv. aan met: $(0,1,0)$, $5^{-\frac{1}{2}}(-2,0,1)$. <u>3.21.29.</u> (c) Als $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1$,
210 $\mathbf{y}=\mathbf{y}_0+\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0\in V_0^\perp$, dan $(\mathbf{x},P\mathbf{y})=(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=(P\mathbf{x},\mathbf{y})$. <u>3.21.30.</u> 3.17.7. <u>3.21.31.</u> Als het stelsel geen basis was zou het tot een basis aan te vullen zijn; pas toe 3.17.22 (iii), 3.17.7. <u>3.21.33.</u> (b) Kies een basis van V: $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\dots,\mathbf{v}_n$ met $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k\in V_0$, $\mathbf{v}_{k+1},\dots,\mathbf{v}_n\in V_0^\perp$.

(c)
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>3.21.34.</u> De vectoren $\neq\mathbf{0}$ in het vlak $(\mathbf{b},\mathbf{x})=0$ hebben eigenwaarde 1; de vectoren $\neq\mathbf{0}$ in $\{\mu\mathbf{a}\mid \mu\in\mathbf{R}\}$ hebben eigenwaarde $1+(\mathbf{a},\mathbf{b})$. <u>3.21.35.</u> Merk op dat als de determinant 0 is er $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$ bestaat zó dat $\lambda_1\mathbf{a}_1+\dots+\lambda_k\mathbf{a}_k\perp[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k]$ dus $\lambda_1\mathbf{a}_1+\dots+\lambda_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$. <u>3.21.36.</u> De oplossingsruimte van $(\mathbf{a},\mathbf{x})=0$ heeft dimensie ≥ 2 en is gelijk aan de oplossingsruimte van het stelsel $(\mathbf{b}_1,\mathbf{x})=0$, $(\mathbf{b}_2,\mathbf{x})=0$. <u>3.21.37.</u> Beschouw de oplossingsruimte van het stelsel: $(\mathbf{a}_1,\mathbf{x})=0$, ..., $(\mathbf{a}_s,\mathbf{x})=0$, $(\mathbf{b}_{t+1},\mathbf{x})=0$, ..., $(\mathbf{b}_r,\mathbf{x})=0$ en van $(\mathbf{a}_{s+1},\mathbf{x})=0$,
211 ..., $(\mathbf{a}_r,\mathbf{x})=0$, $(\mathbf{b}_1,\mathbf{x})=0$, ..., $(\mathbf{b}_t,\mathbf{x})=0$. <u>3.21.40.</u> Als $A^TA\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, dan $|A\mathbf{x}|^2=\lambda|\mathbf{x}|^2$. <u>3.21.41.</u> Als A een diagonaalmatrix heeft, dan heeft B als matrixelementen de wortels uit de elementen van de matrix A; verder 3.19.7. <u>3.21.42.</u> AA^T heeft een orthonormale basis van eigenvectoren; neem B behorend bij de overgang naar deze basis, schrijf $BAA^TB^T=C^2$. <u>3.21.43.</u> Gebruik $(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A^T\mathbf{y})$. <u>3.21.44.</u> Gebruik 3.19.7. Merk op dat: $(S^TDS\mathbf{x},\mathbf{x})=(DS\mathbf{x},S\mathbf{x})$ en $|S\mathbf{x}|=1$ dan en slechts dan als $|\mathbf{x}|=1$ voor orthogonale S.

HOOFDSTUK 4. DE REËLE EN COMPLEXE GETALLEN

221 4.3.1. Voor a_n+b_n: gebruik de definitie en de drie-
hoeksongelijkheid. Voor a_nb_n eerst aantonen dat
$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een begrensde rij is. Dan: $a_nb_n-ab=(a_n-a)b_n+$
222 $+a(b_n-b)$. 4.3.2. Definitie!. 4.3.3. Pas 4.1.8 en
4.1.9 toe. 4.3.4. Gebruik 1.27.3. 4.3.5. Als $a>1$
is $1<\sqrt[n]{a}<1+n^{-1}(a-1)$ volgens 1.27.3. Voor $a<1$ via a^{-1}.
4.3.6. Via 4.3.5 omdat $4<\sqrt[n]{3^n+4^n}<4\sqrt[n]{2}$. 4.3.7. Gebruik
$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{-1}$. 4.3.8. Volgens 1.27.3 is
$a_n^{-1}a_{n+1}=\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}(1+\frac{1}{n})>(1-\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n})=1$. Voor b_n
analoog. Pas 4.1.6 toe. $e=2,718281828459045\ldots$.
4.3.10. Gebruik $\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2}$.
4.3.11. $\sum_{n=1}^{k} a^n=\frac{a^{k+1}-a}{a-1}$. Pas 4.3.4 toe. 4.3.12.
223 $a_n=s_n-s_{n-1}$. 4.3.13. Als $a_n>0$ is s_n toenemend. Pas
4.1.12 toe. 4.3.14. Volgt uit 4.3.13. 4.3.15. (i)
Als $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell<1$ dan is $a_n<\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ voor $n>N$. Pas 4.3.11
en 4.3.15 toe. (ii) Pas 4.3.12 toe. 4.3.16. (i) Als
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell<1$ dan is $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1+\ell}{2}$ voor $n>N$. Dan is
$a_n<C(\frac{1+\ell}{2})^n$ voor $n>N$. Pas weer 4.3.11 en 4.3.15 toe.
(ii) Pas 4.3.12 toe. 4.3.17. Zij $\varepsilon>0$. Voor $n>N$ is
$|a_n-a|<\frac{1}{2}\varepsilon$ dus $\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-a\right|=\frac{1}{n}|(a_1-a)+\ldots+(a_n-a)|\le$
$\le\frac{1}{n}(NC+(n-N)\frac{\varepsilon}{2})<\varepsilon$ als $n>N_0$. 4.3.18. Vergelijk rede-
nering in 4.3.16 en pas 4.3.5 toe. 4.3.19. Pas 4.1.14
toe om te bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat. 4.3.20.

Gebruik $|s_{n+k}-s_n|=|a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-\ldots+(-1)^{k-1}a_{n+k}|=$
224 $=|a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\ldots|\le|a_{n+1}|$. 4.3.23. Zie 4.3.1.

4.3.25. Gebruik $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})$.
4.3.26. Zie 4.1.3. 4.3.27. De laatste eigenschap
eerst voor x en y rationaal. Dan via continuïteit.
225 4.3.28. Bewijs monotonie als in 4.3.8 en pas dan

225 4.3.8 toe. 4.3.29. Daar $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(\left(1+\frac{1}{nx^{-1}}\right)^{nx^{-1}}\right)^x$
226 kunnen we 4.3.28 en 4.3.27 toepassen. 4.3.31. Op een cirkel met middelpunt M liggen A en B. De hoek AMB is x. De loodlijn in A op MA snijdt MB in C. De loodlijn uit B op MA snijdt MA in D. Dan is BD = = sin x, AC = tan x en x is de lengte van de boog BA. Neem nu $x\to 0$. 4.3.32. Invullen. 4.3.33. Zie 4.3.17.
229 4.3.34. Neem in 4.3.30: $x=\log(1+y)$. 4.4.12. (a) Middenloodlijn van segment van -3 naar i, (b) ellips met brandpunten i en $-i$ gaande door $(\sqrt{3},0)$, (c) de cirkel met middelpunt $-1+\frac{1}{2}i$ door $(0,0)$ zonder het
230 punt $(-2,0)$. 4.4.13. (i) De rechte $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$, (ii) de rechte $\mathrm{Re}\, z = 0$. 4.4.14. Pas 4.4.7 en 1.27.12 toe. 4.4.15. Zie 4.4.8. 4.5.1. sup A - inf A. 4.5.2. (i) Daar $\forall_{a\in A}\,[a\leq\alpha]$ is $\cup_{a\in A}\,(0,a)\subset(0,\alpha)$. Zij $x\in(0,\alpha)$. Dan is x géén bovengrens van A. Dus is er een $a\in A$ met $x<a\leq\alpha$, d.w.z. $x\in(0,a)$. Hieruit volgt $(0,\alpha)\subset\cup_{a\in A}\,(0,a)$. 4.5.3. De verzameling heeft een supremum $s\leq 1$. Voor iedere $\varepsilon>0$ is er een $a\in A$ met $s-\varepsilon<a\leq s$. D.w.z. $s\in B$. Zij $y>s$. Dan is er géén element van A in (s,y) en dus is $y\notin B$. Hieruit volgt dat s het grootste element van B is. 4.5.4. Gebruik 4.1.7. 4.5.5. Zie 1.27.2. Daar $b_n-a_n=n^{-1}$ is a priori duidelijk dat D uit één element bestaat. Zie 4.1.6.

231 4.5.6. (i) Volledige inductie, (ii) Uit $b_{n+1}^2-a_{n+1}^2= =\left(\frac{b_n-a_n}{2}\right)^2$ volgt dat $b_{n+1}^2-a_{n+1}^2<\frac{1}{4}(b_n^2-a_n^2)$. Dus $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$. 4.5.7. Zij A een niet lege naar boven begrensde verzameling in K. Kies a_1 in A en b_1 een bovengrens van A. Als a_n en b_n gedefinieerd zijn beschouwen we $\frac{a_n+b_n}{2}$. Is dit een bovengrens van A dan noemen we dit getal b_{n+1} en $a_{n+1}:=a_n$. Zo niet dan noemen we het a_{n+1} en $b_{n+1}:=b_n$. Zo is een rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en een rij $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gedefinieerd. Uit de archimedische ordening volgt dat $b_n-a_n\to 0$ als $n\to\infty$. Volgens het gegeven is er een c met $\forall_{n\in\mathbf{N}}\,[a_n\leq c\leq b_n]$. Toon nu aan dat c de kleinste bovengrens van A is. Daar A willekeurig was is volgens 4.1.2 $K=\mathbf{R}$. 4.5.8. Zie bewijs van 4.1.7. Neem $\mathbf{N}$. 4.5.9. Pas 4.3.18 en 4.3.8 toe. 4.5.10. Bij iedere $N\in\mathbf{N}$ is een $N_1\in\mathbf{N}$ zo dat $\pi(n)>N$ als $n>N_1$. 4.5.11. Pas 4.3.16 en 4.3.12 toe op $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$.

231 4.5.12. Pas 4.3.18 toe. 4.5.13. Verschillende methoden. Teken grafiek van x en $\sqrt{2+x}$. "Teken" nu $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Constateer dat de rij monotoon is en limiet 2 heeft. Bewijs nu zonder figuur dat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een monotone begrensde rij is. Snelste methode is: $(a_{n+1}-2)=(\sqrt{2+a_n}-2)=(\sqrt{2+a_n}+2)^{-1}(a_n-2)<\frac{1}{2}(a_n-2)$, dus $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2)=0$. 4.5.14. (a) +1 en −1, (b) ∞ en 0, (c) Bewijs eerst dat $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$ voor alle n. Dan $b_{n+1}-a_{n+1}<\frac{1}{2}(b_n-a_n)$ zoals in 4.5.6. Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

232 $= \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_1b_1}$. 4.5.15. Volgt uit 4.1.10 (i) en (ii). 4.5.16. Als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ of $-\infty$ is het probleem niet interessant. We hadden dit beter kunnen uitsluiten. Als $\liminf a_n = \limsup a_n = a$ dan is volgens 4.1.10 (ii) en 4.1.8 ook $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Omgekeerd als $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ heeft a de eigenschappen van 4.1.10. 4.5.17. Als $A\subset B$ is $\sup A \le \sup B$. Zij $a := \limsup a_n$. Pas 4.1.10 (i) en (ii) toe. 4.5.18. Zij voorlopig m vast, $m\in\mathbf{N}$, en $C_m:=\max\{a_k \mid k<m\}$. Met volledige inductie volgt uit het gegeven $a_{n+\ell m}\le a_n+\ell a_m$ als $\ell\in\mathbf{N}$. Schrijf nu $n=qm+r$ met $0\le r<m$ en $q=[nm^{-1}]$. Dan is $a_n\le qa_m+C_m$, dus $n^{-1}a_n\le m^{-1}a_m+n^{-1}C_m$. Hieruit volgt $\limsup (n^{-1}a_n) \le$ $\le m^{-1}a_m$. Hieruit volgt echter $\limsup (n^{-1}a_n) \le$ $\le \liminf (m^{-1}a_m)$. Het gestelde volgt uit 4.5.16. 4.5.19. Zij $a := \limsup a_n$. Als $k\in\mathbf{N}$ zijn er volgens 4.1.10 (i) en (ii) oneindig veel termen van de rij in $I_k:=(a-k^{-1}, a+k^{-1})$. Kies een term $a_n\in I_1$. Als a_{n_1}, $a_{n_2}, \ldots, a_{n_{k-1}}$ gekozen zijn kiezen we een term a_{n_k} met $n_k>n_{k-1}$ en $a_{n_k}\in I_k$. Dan is $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ met limiet a. 4.5.20. Als 4.5.7. 4.5.21. Uit het tweede gegeven volgt dat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een niet-stijgende rij is. Deze heeft een limiet (eventueel is deze limiet −∞). Zie nu 4.3.17. 4.5.22. Pas 4.1.14 toe op de rij partiële sommen. 4.5.23. Zij

232 weer $[y]:=\max\{z\in\mathbf{Z} \mid z\le y\}$. Definieer $a_1:=[px]$ en $a_{n+1}:=$
$:=[p^{n+1}(x - \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k})]$. Deze rij voldoet.
$\sum_{n=N}^{\infty} (p-1)p^{-n} = p^{-N+1} + \sum_{n=N}^{\infty} 0\cdot p^{-n}$. Uitzonderingen steeds van dit type, d.w.z. er is een N met $p^N x\in\mathbf{N}$.
233 4.5.24. Zij $\varepsilon>0$. Er is een A zo dat $|\phi(x+1)-\phi(x)|<\varepsilon$ als $x>A$. Daar ϕ begrensd is op $[0,A+1]$ geldt $\phi(x)<\varepsilon x+C$ voor een geschikte constante C. 4.5.25. $a_n=s_n-s_{n-1}$.
4.5.26. Gebruik 4.5.22 en 4.5.25 en het feit dat $b_n-b_{n+1}\ge 0$. 4.5.27. Kies in 4.5.26: $a_n := \sin(nx) =$
$= \mathrm{Im}\, e^{inx}$ en $b_n:=n^{-1}$. 4.5.28. Zelfde idee als in
234 4.3.10. 4.5.29. Zie bewijs van 4.3.30. 4.5.30. Neem in 4.3.30: $x = n^{-1}\log a$ en laat $n\to\infty$. Antwoord: $\log a$. 4.5.31. Als $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\ell-\varepsilon$ vanaf zeker rangnummer dan is $a_n>C(\ell-\varepsilon)^n$ met zekere constante C. Zie 4.5.12.

HOOFDSTUK 5. TOPOLOGISCHE RUIMTEN EN METRISCHE RUIMTEN

237 5.1.2. Zie 1.11.11, 1.11.12. 5.1.10. Voor T3 via 4.5.2 als in 5.1.8. 5.1.11. Naast de discrete en de triviale topologie zijn er de topologieën van het type $\{\emptyset,V,R\}$ met $V\subset R$, $V\neq\emptyset$, $V\neq R$. Dit zijn er 6. Daarnaast alle 9 topologieën van het type $\{\emptyset,V_1,V_2,R\}$ waarin V_1 één element en V_2 twee elementen heeft. Verder 3 topologieën van het type $\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},R\}$ en 3 topologieën van het type $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},R\}$. Tenslotte 6 topologieën van het type
238 $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},R\}$. Totaal: 29. 5.1.13. Daar in de intervaltopologie alle open intervallen ook open verzamelingen zijn is de eis in 5.1.12 zwaarder dan in 4.1.8. Met behulp van 5.1.5 volgt echter
240 5.1.12 uit 4.1.8. 5.2.9. Om M3 te bewijzen moet bewezen worden dat als $x+y>z$ (x,y,z positief) dan ook $x(1+x)^{-1}+y(1+y)^{-1}>z(1+z)^{-1}$. Geven we met B' bollen in de tweede metriek aan dan $B_{a,r}\subset B'_{a,r}$. Verder is $B'_{a,r}=R$ als $r\ge 1$ en $B'_{a,r}\subset B_{a,r(1-r)^{-1}}$ is als $r<1$.
241 5.2.10. Als $Q\in B_{P,a}$ en $r:=a-d(P,Q)$ dan is $B_{Q,r}\subset B_{P,a}$ volgens M3. 5.2.11. Zie § 1.11 en § 1.12. 5.2.12.
243 Zie 5.1.13. 5.3.4. Zie 1.11.11. 5.3.5. Volgt uit
244 5.2.7, 5.2.10 en 5.3.3. 5.3.9. Definities toepassen. 5.3.11. Als θ irrationaal is, $n\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N}$ en $n\neq m$ dan is

244 $n\theta-[n\theta]\neq m\theta-[m\theta]$. Zij $k\in\mathbf{N}$. Verdeel $[0,1)$ in k gelijke
delen. Toon met het pigeon-hole principle aan dat er
een $n\in\mathbf{N}$ is en een $m\in\mathbf{N}$ met $m>n$ zo dat $n\theta-[n\theta]$ en
$m\theta-[m\theta]$ in hetzelfde interval met lengte k^{-1} liggen.
Toon nu aan dat 0 verdichtingspunt van V_θ is. Daarna
dat ieder punt in R verdichtingspunt van V_θ is.
247 5.5.6. Daar $\mathcal{T}\subset P(R)$ is $\mathcal{T}$ zelf een eindige verzameling.
248 5.5.7. Weer is $\mathcal{T}$ een eindige verzameling. 5.5.8.
Voor iedere $x\in R$ definiëren we $O_x:=\{x\}\in\mathcal{T}$. Dan is
$\{O_x \mid x\in R\}$ een overdekking van R met open verzameling-
249 en die géén eindige deeloverdekking bevat. 5.5.11.
(i) Zij $V\subset\mathbf{R}^n$ en V compact. Als $P\in V^*$ dan is
$V\subset\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\bar{B}_{P,n^{-1}})^*$. Dan is V bevat in een eindige
vereniging van dit soort open verzamelingen, dus
zelfs in één $(\bar{B}_{P,m^{-1}})^*$. D.w.z. $B_{P,m^{-1}}\subset V^*$. Daar P
willekeurig was is V^* open. (ii) Daar $\{B_{x,1} \mid x\in V\}$
een overdekking van V met open verzamelingen is is V
253 begrensd. 5.5.12. Zie 5.3.2. 5.6.5. Ja, 0, resp.
254 nee. 5.6.7. Zie 4.5.11. Er geldt $d(f_n,f)\geq f_n(1-\frac{1}{n+1})=$
257 $=(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\geq\frac{1}{4}$ (zie 4.3.8). 5.6.13. Analoog aan
5.6.7. De rij convergeert puntsgewijs naar een functie
die in 1 niet continu is. Ook op $(0,1)$ is de conver-
258 gentie niet uniform! 5.7.6. (i) Zij $x\in(0,1)$. Als
$\varepsilon>0$ definiëer dan $\delta:=\min(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}x^2\varepsilon)$. Als $|x-y|<\delta$ is
$|x^{-1}-y^{-1}|=|(x-y)/xy|<\varepsilon$. (ii) Zij $\varepsilon=1$ en $\delta>0$. Als $n\in\mathbf{N}$
voldoende groot is dan is $n^{-1}-(n+1)^{-1}<\delta$ maar
$|f(n^{-1})-f((n+1)^{-1})|=1$. Aan 5.7.4 is niet voldaan!
261 5.7.14. Zie 5.7.11 en 5.7.13. 5.7.15. Zie 5.7.2.
262 5.7.18. Zij f niet-dalend. Beschouw voor $n\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}$ de
verzameling $V_{n,k}$ bestaande uit de punten uit $[a+n^{-1},$
$b-n^{-1}]$ waar f een sprong heeft $>k^{-1}\{f(b-n^{-1})-f(a+n^{-1})\}$.
263 5.7.19. Zie 5.7.2 en 5.2.6 t/m 5.2.8. 5.8.3. x resp.
272 $(1-n^{-1})x^2+n^{-1}x$. 5.9.17. Als 4.3.6. 5.10.1. Niet
Hausdorffs tenzij $R=\{a\}$. 5.10.2. Is O open en $2\in O$
dan ook $1\in O$. Dus $\{2\}$ is niet open. 5.10.3. Definitie.
273 5.10.4. T3 geldt niet. Zie ook 5.1.8. 5.10.5. Als R uit
één punt bestaat: ja (zie 5.10.1). Anders: neen.
Immers $\{a\}\cup\{A\}$ is open en er is geen open verzameling
die wel A en niet a bevat als $A\neq a$ (zie 5.1.12); dus
$\lim a = a$ en $\lim a = A$. 5.10.6. Als O open is
en $r\in\mathbf{Q}\cap O$ beschouw dan $M_r:=\sup\{x\in\mathbf{R} \mid [r,x]\subset O\}$ en

273 $m_r:=\inf\{x\in\mathbf{R}\mid [x,r]\subset O\}$. Bewijs dat $\bigcup_{r\in\mathbf{Q}\cup O}(m_r,M_r)=O$.
5.10.7. (ii) Intervaltopologie, (iii) Zie 4.1.14. 5.10.8. Iedere open bol met straal <1 bestaat uit één punt. 5.10.9. Als 5.2.10. 5.10.10. Voor M3 enige gevallen onderscheiden. Is $\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{a}^{(2)},\ldots$ een fundamentaalrij in R dan volgt uit de definitie van d dat voor iedere $m\in\mathbf{N}$ de rijen vanaf zeker rangnummer in de eerste m termen overeenstemmen. 5.10.11. (i) Via complement, (ii) idem, (iii) zie 5.2.4. 5.10.12. lim sup a_n is het grootste verdichtingspunt. Zie ook
274 4.5.17. 5.10.13. Iedere onbegrensde verzameling is overal dicht in **N**. 5.10.14. Projectie van een open cirkel is een open interval. Neem $O:=\{(x,y)\in R\mid x>0, y>0, xy\geq 1\}$. Dan is $p(O)=\{x\in R\mid x>0\}$. 5.10.15. Zie [20]§7.1.7. 5.10.16. Zij (R,T) een Hausdorffruimte, $V\subset R$, V compact. Kies voor iedere $P\in V^*$ en iedere $Q\in V$ een omgeving $\Omega_1(P,Q)$ van P en $\Omega_2(P,Q)$ van Q zo dat $\Omega_1(P,Q)\cap\Omega_2(P,Q)=\emptyset$. Bij vaste P is $\{\Omega_2(P,Q)\mid Q\in V\}$ een overdekking van V met open verzamelingen. Enz. 5.10.17. Zij (R,T) een compacte ruimte, $V\subset R$, V gesloten. Zij $\{O_\alpha\mid \alpha\in A\}$ een overdekking van V met open verzamelingen. Beschouw nu $\{O_\alpha\mid \alpha\in A\}\cup\{V^*\}$. Dit is een overdekking van R met open verzamelingen. Enz.
275 5.10.18. Zie ook 4.1.3. Voor (iii): merk op dat $|x|+f(x)<2$. 5.10.19. (i) Behandel $a_n=2$ voor $n>n_0$ apart!, (ii) $[0,1]$ is niet aftelbaar, (iii) Beschouw C^* (zie definitie van C), (iv) ieder punt van C is verdichtingspunt van $[0,1]\backslash C$. (v) Zie [20]§1.2.6. 5.10.20. Neem in 4.3.21: $\varepsilon=1$. $[0,1]$ is compact. 5.10.21. Zie 5.5.9. 5.10.22. $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=R\}$ is compact.
276 5.10.23. Pas 5.5.10 toe op $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leq 1\}$. 5.10.24. (i) ½, (ii) nee, (iii) 0, (iv) 0 resp. (i) nee, (ii) nee; (iii) 0, (iv) 0. 5.10.25. (i) nee, (ii) 0, (iii) 0. 5.10.26. 5.6.6 en 5.6.1. 5.10.27. Alleen definitie gebruiken! 5.10.28. (i) 5.6.10, (ii) bij
277 vaste N,p,q is $\lim_{x\uparrow 1}\sum_{n=N+p}^{N+p+q} x^n = q+1$. 5.10.29. Zie 5.6.10. 5.10.30. Zie 4.3.20. 5.10.31. Zie 5.2.5. Zie verder het bewijs van 5.6.9. Denk aan 4.1.14! 5.10.32. Zie 5.7.7. 5.10.33. Zie 5.7.1. 5.10.34.
278 Zie 4.1.12, 5.1.1, T3. 5.10.35. Zie 5.10.33. 5.10.36. Zij $f(a)=0$. Zij $\varepsilon>0$. In $[a-1,a+1]$ zijn slechts eindig veel punten x waar $f(x)>\varepsilon$. Dus is f continu in a. Is $f(a)\neq 0$ dan is f niet continu in a. 5.10.37. Zij $f(1)=:a$. Bewijs met volledige inductie dat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\forall_{x\in\mathbf{R}}[f(nx)=nf(x)]$. Dan $f(x)=ax$ voor $x\in\mathbf{Q}$. Zie dan 5.10.35.

278 5.10.38. Zie 5.7.2. 5.10.39. Zie 5.10.16, 5.10.17 en 5.7.8. 5.10.40. Zie 5.7.9 en 5.7.11. 5.10.41. Zie 5.5.15. Neem $f(Q):=d(Q,A)/(d(Q,A)+d(Q,B))$. 5.10.42. Merk op dat $\lim_{x\downarrow 0}(\sin x + x \log(1+x^2))/x^3 = \infty$ en $\lim_{x\to\infty} \sin x + x\log(1+x^2) - x^3 = -\infty$. Zie 5.7.11. 5.10.43. Nee. Neem $x=(k\pi)^{-1}$, $y=((k+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$. 5.10.44.

279 Definitie en driehoeksongelijkheid. 5.10.45. Pas 5.7.2 toe. 5.10.46. Zie 5.5.9. 5.10.47. Pas 5.7.7 toe op $[0,2]$. Direct: $|x^3-y^3|=|x-y|\,|x^2+xy+y^2|\le 12|x-y|$. 5.10.48. 5.7.4 en 4.1.16. 5.10.49. Kies in 5.7.4: $\varepsilon=1$. Verdeel $[0,x]$ in intervallen met lengte $<\delta$. Neem $a=\delta^{-1}$, $b=1+|f(0)|$. 5.10.50. De functies zijn bepaald door hun waarde in kn^{-1} $(k=0,1,\ldots,n)$. Dit geeft $n+1$ vergelijkingen voor deze waarden. Antwoord: $f(x)=ax+b$. 5.10.51. Pas 5.8.5 toe op $f+\frac{1}{2}\varepsilon$ en $\frac{1}{2}\varepsilon$. 5.10.52. x resp. $x-\frac{1}{8}$. 5.10.53. (i) Volledige inductie, (ii)

280 beschouw $\sqrt{t}-p_n(t)$, (iii) 5.6.12. 5.10.54. De redenering bij de figuur is ook in $f(a)$, $f(a+h)$ etc. uit te drukken. 5.10.55. Zie fig. 28. 5.10.56. Pas 5.9.2 toe. 5.10.57. Zie fig. 27. 5.10.58. Beschouw het verschil van de twee leden van de ongelijkheid. 5.10.59. Direct eenvoudig. Echter ook speciaal geval van 5.9.16. 5.10.60. Zie 5.9.8; gelijk als $a=b=c$. 5.10.61. (a) deel door $(x-y)^2$, (b) $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}y^4 \ge |x|\,|y|^3$ volgens 5.9.7 met gelijkheid als $|x|=|y|$. 5.10.62. Bewijs eerst als alle $a_i\ge 1$ en alle $b_i \ge 1$ met volledige inductie dat $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \le \sum_{k=1}^n a_k b_k + n$. Daarna de gevraagde ongelijkheid met volledige inductie

281 (door te normeren). 5.10.63. Schrijf voor eindige sommen $\sum_{n=1}^N |a_n+b_n|^p \le \sum_{n=1}^N |a_n|\,|a_n+b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^N |b_n|\,|a_n+b_n|^{p-1}$ en pas op beide termen in het rechterlid 5.9.8 toe met $\lambda=p^{-1}$ en $\mu=1-p^{-1}$. Zie verder 4.3.13. 5.10.64. Zij $f(x) := x \log x$ $(x>0)$. Dan is f convex. Neem in 5.9.2 nu $\lambda=a(a+b)^{-1}$, $P=x/a$, $Q=y/b$. 5.10.65. Neem $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=n^{-1}$, $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$ en $x_n=1$. 5.10.66. Dit is een herhaling van diverse karakteriseringen van $\mathbb{R}$. In de genoemde secties is de bewijsmethode terug te vinden.

HOOFDSTUK 6. DIFFERENTIEERBAARHEID

284 6.1.9. (a) Neem in 4.5.29 x/p i.p.v. x, (b) volgt uit
(a), (c) volgt uit (a). 6.1.10. $Cx^{-1}<C+Cx^{-2}$. 6.1.11.
Als in 6.1.8. 6.1.12. Als $ax^k=O(x^{k+1})$ voor $x\to 0$ dan
289 is a=0. Volledige inductie. 6.3.6. $-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.
290 6.3.7. $x^x = e^{x \log x}$, dan kettingregel. Antwoord
$x^x(1 + \log x)$. 6.3.8. $2x[(1+(1+x^2)^2)\arctan(1+x^2)]^{-1}$.
6.3.9. $e^{\sin x}(1 + x \cos x)$. 6.3.10. 6.3.1 en volle-
291 dige inductie. 6.3.11. Pas 6.3.10 toe. 6.3.12.
292 Herhaalde toepassing van 6.3.5 (c). 6.4.7. (a) Zie
4.5.29 of: pas 6.4.2 toe op log x - log 1, (b) zie
6.4.1. 6.4.8. Beschouw $g(x):=(f(x)-f(x_1))/(x-x_1)$. Er
is volgens 6.4.2 een $\xi\in(x_1,x_2)$ met $g(x_2)=f'(\xi)$. Als
$x\downarrow x_1$ dan $g(x)\to f'(x_1)$. Pas nu 5.7.11 toe. Analoog voor
de waarden tussen $f'(\xi)$ en $f'(x_2)$. 6.4.9. Verticale
raaklijn in 0,+1,-1; $f(x)\to 0$ als $x\to\infty$; extrema voor
293 $x=0$, $x=2^{-\frac{1}{2}}$ en $x=-2^{-\frac{1}{2}}$. 6.4.11. Neem $g(x):=f(x^{-1})$.
6.4.12. -1. 6.4.13. Daar $f'(x)/g'(x) = \frac{5}{2} e^{-x}$ is het
linkerlid 0. Het rechterlid bestaat niet! 6.4.14.
294 16/9. 6.4.17. Pas 6.4.15 toe. 6.4.18. e^x, x=1, 6
termen geeft $e\approx 2,717$; arctan x met $x=3^{-\frac{1}{2}}$, 4 termen
geeft $\pi\approx 3,138$; $\log \frac{1+x}{1-x}$ met $x = \frac{1}{3}$, 2 termen geeft
297 $\log 2\approx 0,691$. 6.5.4. Wat betreft (0,0): $f(x,y) \le$
299 $\le \frac{1}{4}(x^2+y^2)$. 6.5.8. Neem $x_i=a_i+h_i$, splits de termen
met $h_i h_j$ etc. af en gebruik $|h_i h_j|\le|\mathbf{h}|^2$. 6.5.9.
Een kromme; een vector in de richting van de raaklijn.
300 6.5.13. Voor $(x,y)\to(u,v)$ draaiïng en gelijkvormigheid.
Voor de andere twee zie 6.5.9. 6.5.15. Zie 6.4.3.
302 6.5.17. Als 6.5.3. 6.5.20. (a) minimum $-\frac{1}{3}$, (b)
303 maximum $2e^{-1}$, minimum 0, (c) minimum 1. 6.5.21.
Lokaal maximum 1, minimum $-\frac{9}{16}$ (vier keer). 6.5.22.
(a) maximum $1\frac{1}{4}$ (twee keer) en minimum -1, (b) maximum
307 $1\frac{1}{4}$ (twee keer), minimum -1, lokaal minimum 1. 6.6.6.
$(x, 1 - \frac{1}{2(1-x)}, -x + \frac{1}{2(1-x)})$, $x = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}) +$
$+ \lambda(9,-8,-1)$, $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 6.6.7. $f(u+iv) := \frac{1}{2} \log(u^2+v^2)+$
311 $+ i \arctan(v/u)$. 6.6.10. $\sqrt{14}$. 6.7.5. Zelfde
312 definitie, dus zelfde bewijs. 6.7.7. $f(z)=z^2+i$.
6.7.8. Zie 6.7.6 en 6.5.16. 6.7.9. Rechte hoek (zie

312 ook 3.21.39). 6.7.10. Zie 6.6.7, $f'(z)=z^{-1}$. Gebruik
316 6.7.6. 6.8.8. (a) 1; nergens convergent, (b) 1; overal convergent, (c) e^{-1}; nergens convergent.
317 6.8.10. Als 6.8.9. Toon aan dat $|1-z|/(1-|z|)$ op V
320 begrensd is. 6.9.1. Gebruik $2xk \le x^2+k^2$. 6.9.2. Bij vaste k is $\lim_{x\to\infty} k^2x/(1+kx^2) = 0$ en bij vast x is $\lim_{k\to\infty} k^2x/(1+kx^2) = \infty$. 6.9.3. Zie 4.3.30. 6.9.4. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$. 6.9.5. Definitie, 6.1.8. Vlugger via 6.9.13. 6.9.6. Voor x=0 met definitie. 6.9.7. $0 \le f(x) \le x^2$. 6.9.8. Zie 5.7.9. Raaklijn aan grafiek vanuit $(0,f(0))$. 6.9.9. (i) Pas 6.4.1 toe op $(x^2-1)^n$, $D(x^2-1)^n$ enz., (ii) Pas 6.3.10 toe op de betrekking $(x^2-1)D\{(x^2-1)^n\}=2nx(x^2-1)^n$. 6.9.10. N.B.
321 g is continu in 0. 6.9.11. $e^{-1/3}$. 6.9.12. Een bewijs staat in 7.2.28. 6.9.13. Definitie en 6.4.2. 6.9.14. Door deling krijgt men $P(x)=(x-a)^2Q(x)+C_1(x-a)+C_2$. Uit $P(a)=0$ volgt $C_2=0$. Uit $P'(a)=0$ volgt $C_1=0$. 6.9.15. Differentieer en gebruik 6.4.7 (i). 6.9.16. Gebruik 6.4.2 en analyseer f'. 6.9.17. $m=M^{-1}$. Gebruik 6.4.2. 6.9.18. Pas 6.4.15 toe. Antwoord ½. 6.9.19. Beschouw
322 $f(a+th,b+tk)$ voor $0 \le t \le 1$. 6.9.20. Zie 6.5.18. 6.9.21. Maximum $-1+3\sqrt{3}$, minimum -5. 6.9.22. Zie 3.16.10. 6.9.23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zie 6.6.7. 6.9.24. $z_0=0$, maximum 2 in $z=1$ en minmum 0 in $z=\pm i$. 6.9.25. (a) Ja, (b) schrijf $f(z)=2-5(z+3)^{-1}$. Iedere cirkel heeft een vergelijking van het type $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+b=0$ met $b\in\mathbf{R}$. Door $w=z^{-1}$ resp. $w=z+c$ gaan cirkels in cirkels over. 6.9.26. Via 6.8.1 en 4.3.20 of door differentiëren te bewijzen.
323 6.9.27. Zie 6.8.1. 6.9.28. (i) Zie 6.8.6. (ii) Volgens 4.3.17 is $\sum_{n=1}^{N} na_n = o(N)$. Zij $\varepsilon>0$. Kies N_0 zo groot dat $\sum_{n=1}^{N} na_n < \frac{\varepsilon}{3} N$ voor $N>N_0$, $|na_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ voor $n>N_0$, en zo dat $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{3}$ als $x \ge 1-N_0^{-1}$. Als $x=1-N^{-1}$ is $|\sum_{n=1}^{N} a_n - a| \le \frac{\varepsilon}{3} + |\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| <$ $< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{N} |\sum_{n=1}^{N} na_n| + \frac{\varepsilon}{3(N+1)} \cdot (1-x)^{-1} < \varepsilon$ voor $N>N_0$. 6.9.29. Neem eerst $|z|<R<1$. Gebruik 6.8.6. Voor een bewijs zie [25]. 6.9.30. (i) Volledige inductie, (ii) 6.8.6.

HOOFDSTUK 7. INTEGRAALREKENING

327 7.1.8. Pas 7.1.3 toe met $f(x)=(1+x^2)^{-n+1}$ en $g(x)=x$.
328 7.1.14. $\log(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$. 7.1.15.
Voor $p=0$, $q=1$ en $p=1$, $q=0$ zie 6.3.5 (d) en (e), voor
$p=0$, $q=2$ en $p=2$, $q=0$ gebruike men $\cos(2x)=2\cos^2 x-1=$
$=1-2\sin^2 x$. Zie verder 7.1.13. 7.1.16. Pas 7.1.3 toe
334 met $f(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ en $g(x)=x$. Zie 6.3.5 (g). 7.2.15.
Gebruik $f(\xi)g(\xi)-f(\eta)g(\eta)=f(\xi)(g(\xi)-g(\eta))+$
335 $+g(\eta)(f(\xi)-f(\eta))$. 7.2.17. Pas 7.2.12 toe en dan
336 7.2.16. 7.2.18. Verdeel in n gelijke delen. Met
$\rho:=e^{\frac{b-a}{n}}$ is $s_V=(\frac{b-a}{n})e^a\sum_{i=0}^{n-1}\rho^i$. Gebruik nu 4.3.30
met $x=\frac{b-a}{n}$ en $n\to\infty$. 7.2.19. Antwoord $\int_0^1 x\,dx$. Merk op dat
7.2.11 niet zonder meer toe te passen is met $a=0$. De
gevraagde limiet is ook gelijk aan $\lim \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$.
337 7.2.23. Zie 7.2.22. Als u en v integreerbaar zijn
dan ook $|u|$ en $|v|$ dus ook $|f|$. Zie ook 7.2.15 en
342 7.2.16. 7.2.34. (i) Gebruik het resultaat van 7.1.15,
(ii) 7.2.20. 7.2.35. 7.2.25, 7.2.9, 6.3.1 en 7.2.32.
7.2.36. log log log 5 - log log log 4. 7.2.37. Pas
347 7.2.35 toe met $g(x)=x-\frac{1}{2}$. 7.3.15. Pas 7.3.8 toe en
7.3.9 voor 0 en 1. Antwoord: ja. 7.3.16. Bij 0 geen
moeilijkheden. Zie 6.1.9 (a). Antwoord: ja. 7.3.17.
Zie 7.1.6. 7.3.18. Bedenk dat $\lim_{x\downarrow 0} x^{\frac{1}{2}}\log x=0$ en
$\lim_{x\uparrow 1}\frac{\log x}{1-x}=-1$ en pas dan 7.3.9 toe. 7.3.19. Als
7.3.18. Merk op dat $\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx$
en $2\sin x\cos x=\sin(2x)$. Antwoord: $-\frac{\pi}{2}\log 2$.
7.3.20. (ii) In de eerste integraal $x=\sin\phi$ en in
de laatste $x=\tan\phi$. Zie 7.2.34. In de middelste
354 substitueren we $nx^2=t^2$. 7.4.12. Zie 7.4.5 en wijzig
het bewijs van 7.4.10 door de definitie te gebruiken.
358 7.5.6. (i) Vervang in 7.5.4 z door 2iz en pas 7.5.5
(ii) toe, (ii) $\tan z=(\tan z)^{-1}-2(\tan 2z)^{-1}$.
359 7.5.8. (i) 7.5.3, (ii) 7.5.7 (iii). 7.5.10. (i) Zie
4.4.5, 4.5.28, 5.6.10, 7.5.9 met $x=0$, (ii) zie 6.8.6.
366 7.6.5. Bij 0 geen moeilijkheden, bij 1 als in 7.3.18.
Verder als 7.6.4. Antwoord: -1. 7.6.6. Zie 6.8.4 met
$a=-\frac{1}{2}$. Antwoord: 2. 7.6.7. Pas 7.6.2 toe op $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$.
369 7.6.12. Voor $-1<a<1$ is 7.6.11 toepasbaar. Het antwoord

369 blijkt voor alle $a \in \mathbf{R}$ juist te zijn. Antwoord: $(1+a^2)^{-1}$. 7.6.13. (i)

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k(n)-J_k(n)| \le \max\{|g(x)|\mid 0\le x\le 1\} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\Delta(f;\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}).$$

Pas 7.2.25 en 7.2.12 toe. (ii) Pas (i) toe en bedenk dat $J_k(n) = \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \int_0^1 g(x)dx$. Gebruik 7.2.16.

7.6.14. Via reeksontwikkeling: eerst $\int_\delta^\infty$ beschouwen. Vlugger is $x = -\log t$ te substitueren. Zie 7.6.4.

376 Antwoord: $\frac{1}{6}\pi^2$. 7.6.23. log 2. 7.6.29. Pas 7.6.28

377 en 7.5.16 toe. 7.6.33. (i) Pas 7.6.31 en 5.9.6 toe. Zie vooral [16]. (ii) Volgens 7.5.16 is $C_1 = \frac{1}{2}\log(2\pi) =$

$$= 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{B_2(x)}{(x+k)^2}\,dx.$$ Volgens 7.6.31 is

$$\int_1^2 \log\Gamma(x)\,dx = x\log\Gamma(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,dx =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\gamma - \sum_{k=1}^{\infty}\int_1^2 \frac{x^2}{k(x+k)}\,dx.$$ Tenslotte vinden we uit

7.6.30 dat $\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty}\{\log(\frac{k+1}{k}) - \frac{1}{k}\}$. Door lineaire combinatie van deze drie reeksen vinden we

380 $\int_1^2 \log\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\log(2\pi) - 1$. 7.6.36. Partieel

384 integreren geeft $(Lf')(s) = -f(0) + s(Lf)(s)$. 7.7.9. Pas twee keer 7.7.6 toe om de volgorde te verwisselen.

387 Antwoord: $2(e-1)$. 7.7.12. Zie [25]. 7.8.2. In

389 $P(-\pi,\pi)$ is niet aan 5.2.1 M2 voldaan. 7.8.8. Pas 7.2.12 toe. Als $V := [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ een verdeling van $[a,b]$ is dan is

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(xt)dt\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin(xt)dt\right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\Delta(f;x_{k-1},x_k) = O(x^{-1}) + S_V - s_V.$$

397 7.9.2. Bewijs met volledige inductie dat $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\frac{x^2}{2})^k$. 7.9.3. (i) Volledige inductie. (ii)

Daar $\sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x))$ convergeert bestaat

397 $\lim_{n\to\infty} y_n(x)$. Noem deze $y(x)$. Uit

$$\left|\int_{x_0}^{x} F(t,y(t))dt - \int_{x_0}^{x} F(t,y_n(t))dt\right| \leq$$

$$\leq M\left|\int_{x_0}^{x} |y(t)-y_n(t)|dt\right| \leq M\left|\int_{x_0}^{x} \sum_{k=n}^{\infty} |y_{k+1}(t)-y_k(t)|dt\right|$$

400 volgt dan $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t,y(t))dt$. 7.9.8.

$y(x)=-1-e^{\frac{1}{2}x^2+x}$. 7.9.9. Deel door $(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$. Antwoord: $y(x)=(1+\frac{1}{2}x^2)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. 7.9.10. Substitueer $y=z^{-1}$. Zie dan 7.9.2. Antwoord: $y(x)=(2e^{\frac{1}{2}x^2}-1)^{-1}$. 7.9.11.

404 Exact. Antwoord: $y(x)=-x+(1+x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}$. 7.9.16. Pas 7.9.15 toe. Antwoord: $x(t)=Ae^{t\sqrt{2}}+Be^{-t\sqrt{2}}$, $y(t) = =(\sqrt{2}-1)Ae^{t\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1)Be^{-t\sqrt{2}}$. 7.9.17. (i) De elementen van A^k noemen we $a_{ij}^{(k)}$. Als $M:=\max\{|a_{ij}|\mid 1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n\}$, dan is $|a_{ij}^{(k)}|\leq n^{k-1}M^k$ voor $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$. (ii) Zie 7.6.7. (iii) Antwoord: $y_1(t)=e^t$, $y_2(t)=te^t+e^t$,

405 $y_3(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+2te^t+e^t$. 7.9.18. $y_1'-(x^2+2)y_1=0$. 7.10.1. Zie 6.4.8. 7.10.2. Zie 7.1.5. Antwoord: $\frac{1}{2}e^x(x\sin x - x\cos x + \cos x)$. 7.10.3. Substitueer eerst $\tan x = t$. Antwoord $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{1}{2}\sqrt{6}\tan x)$. 7.10.4. Zie 7.2.10 en 7.2.11. Verdeel $[0,1]$ in n gelijke delen. De integrand is monotoon! Bedenk dat $\sum_{k=1}^{n} \sin(ka) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} (e^{ia})^k$. 7.10.5. Pas 7.2.16 toe eerst met deelpunten $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots$ en dan met $\frac{2}{n},\frac{4}{n},\ldots$.

406 7.10.6. Pas 7.2.13 toe. Alle ondersommen zijn 0. Merk op dat f discontinu is in oneindig veel punten en dat f niet monotoon is en ook niet van begrensde variatie. 7.10.7. (i) Zie 7.2.26 en 7.2.30, $\lim_{x\downarrow 0} f^*(x) = f(0+0)$, (ii) Als $h>0$ is: $h\int_0^x f(t)dt \leq \leq hxf(x) \leq x\int_x^{x+h} f(t)dt$, dus $f^*(x)\leq f^*(x+h)$. (iii) Uit de definitie volgt dat f constant is op $(0,1]$. Dit is ook in te zien door (i) en 7.2.31 te gebruiken.

7.10.8. Zij $M := \max\{\int_a^x g(t)dt \mid a\leq x\leq b\}$ en $m :=$

406 $:= \min\{\int_a^x g(t)dt|\ a\le x\le b\}$. Zij $\varepsilon>0$. Als δ voldoende klein is en $V:=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ een verdeling van $[a,b]$ met $\Delta(V)<\delta$ is volgens 7.2.16 voor $\ell=1,2,\ldots,n$: $\sum_{k=1}^{\ell}(x_k-x_{k-1})g(x_{k-1}) - \int_a^{x_\ell} g(t)dt| < \varepsilon$. Dus geldt voor $\ell=1,2,\ldots,n$ ook $m-\varepsilon < \sum_{k=1}^{\ell}(x_k-x_{k-1})g(x_{k-1}) < M+\varepsilon$. Definieer nu $a_k:=(x_k-x_{k-1})g(x_{k-1})$ en $b_k:=f_1(x_{k-1})$ en pas dan 4.5.25 toe. Daar f_1 monotoon niet-stijgend is volgt dan $(m-\varepsilon)f_1(a) < \sum_{k=1}^{n}\{(x_k-x_{k-1})\cdot g(x_{k-1})f_1(x_{k-1})\} < (M+\varepsilon)f_1(a)$. Dus is $mf_1(a) \le \int_a^b f_1(t)g(t)dt \le Mf_1(a)$. Het gestelde volgt nu uit 7.2.30 en 5.7.11. 7.10.9. Pas 7.10.8 toe op $f(x)-f(b)$. 7.10.10. Zij $\phi:=f-g$. Alle momenten van ϕ zijn 0. Zij $M:=\max\{|\phi(x)||\ 0\le x\le 1\}$. Zij $\varepsilon>0$. Volgens 5.8.5 is er een polynoom P zó dat $|\phi(x)-P(x)|<\varepsilon M^{-1}$ voor $0\le x\le 1$. Gegeven is dat $\int_0^1 \phi(x)P(x)dx = 0$. Dus is $\int_0^1 \phi^2(x)dx = \int_0^1 \phi(x)(\phi(x)-P(x))dx < \varepsilon$. Daar ε willekeurig was, is $\int_0^1 \phi^2(x)dx = 0$. Daar ϕ continu is kan ϕ nergens $\neq 0$ zijn daar anders ϕ^2 een positieve ondersom zou hebben. 7.10.11. Vervang eerst f door f_1 resp. f_2 met $f_1(x):=1$ als $x\in[0,\frac12]$, $f_1(x)=(\frac12+\delta-x)/(2\delta)$ voor $x\in(\frac12,\frac12+\delta]$, $f_1(x):=0$ voor $x\in(\frac12+\delta,1]$. Zie dan 5.10.51. 7.10.12. Teken een plaatje! Merk op dat als $b=\phi(a)$ gelijkheid optreedt. Om nu het bewijs zonder figuur op te schrijven gebruike men ondersommen voor de eerste integraal, bovensommen voor de tweede en dan
407 7.2.16. 7.10.13. Voor alle $\lambda\in\mathbf{R}$ is $\int_0^1 (f(t)+\lambda g(t))^2dt \ge 0$. Bepaal de discriminant. 7.10.14. Zie [13] voor deze definitie van log. (i) Vermenigvuldig ieder deelpunt van een verdeling van $[1,y]$ met x. Beschouw ondersommen. (ii) Gebruik 7.2.31, (i) en 6.3.4. 7.10.15. Zij $g(x):=0$ voor $x\in[0,1-\alpha)$ en $g(x):=1$ voor $x\in[1-\alpha,1]$. Dan is $g\in V$. Als $f\in V$ dan is $f(x)\ge g(x)$ voor $x\in[0,1-\alpha)$ en $f(x)\le g(x)$ voor $x\in[1-\alpha,1]$. Beschouw nu $\int_0^1 x(f(x)-g(x))dx$. 7.10.16. Zie 7.2.15 (aanwijzing). 7.10.17. Neem als deelpunten $((k+\frac12)\pi)^{-1}$ voor $k=0,1,\ldots,n$. Gebruik 4.3.10. 7.10.18. Zie 6.4.2. 7.10.19. Riemann-som van $\int_0^1 (1+x^2)^{-1}dx = \frac14\pi$.

407 7.10.20. Als 7.10.19 $\int_0^1 (1+x)^{-1}dx$. 7.10.21. Partieel integreren. Zie 6.3.5 (j). Antwoord: $\sqrt{3} - \frac12 \log(2+\sqrt{3})$.
408 7.10.22. (i) Pas 4.1.12 toe. (ii) Ja, $\int_2^\infty x^{-1}(\log x)^{-2}dx = (\log 2)^{-1}$. 7.10.23. (a) Nee, de integrand is groter dan cx^{-1}; (b) Ja, 7.3.8; (c) Ja, 7.3.8. Zie ook 7.3.18 voor $x=1$. 7.10.24. f is convex (zie 5.9.6). Dus is $s(n)>0$ voor $n\in\mathbf{N}$ en $s(n)$ monotoon niet-dalend. Zij $a_k := \frac12 f(k) + \frac12 f(k+1) - \int_k^{k+1} f(x)dx$. Dan is $s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$. Volgens 7.2.31 kunnen we 6.4.15 toepassen op $F(x) := \int_1^x f(t)dt$. We vinden een $\xi_k\in(k,k+\frac12)$ en een $\eta_k\in(k+\frac12,k+1)$ zo dat $F(k+\frac12)-F(k)=\frac12 f(k)+\frac18 f'(\xi_k)$ en $F(k+1)-F(k+\frac12)=\frac12 f(k+1)-\frac18 f'(\eta_k)$. Dus is $a_k=\frac18 f'(y_k) + - \frac18 f'(\xi_k)$. Pas nu 4.3.20 toe. Dan volgen (i) en (ii). Antwoord op (iii) is: er is een constante C zo dat $0 < \log n! - (n+\frac12)\log n + n - C < \frac{1}{8n}$. Zie ook 7.5.16. 7.10.25. Nee, zie 7.4.1, 7.4.2, 7.4.3. 7.10.26. (a) -5, (b) $1 - \int_1^2 x^2 dx = -4/3$. 7.10.27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac12 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac14 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac1n - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac38.$$

Zie 7.5.10. 7.10.28. Pas 6.4.15 toe op elk deelinter-
409 val. Zie bijv. [21]. 7.10.29. Volledige inductie met 7.5.7 (iii) en 6.4.1. 7.10.30. (i) $f(x)=x$ geeft het triviale bekende resultaat, (ii) $\frac1n \sum_{i=0}^n \sin\frac{i}{n} =$

$$= \int_0^1 \sin x\, dx + \frac{\sin 1}{2n} - \frac{1}{12}\,\frac{(1-\cos 1)}{n^2} + \ldots,$$ (iii) en (iv) analoog. 7.10.31. Zie 7.5.14. Antwoord: 0,836. 7.10.32. $\int_{1/n}^1 (x^{-1}-[x^{-1}])dx = \sum_{k=2}^n \left\{\int_{1/k}^{1/(k-1)} (x^{-1}-k+1)dx\right\} = \log n - \sum_{k=2}^n k^{-1}$. De gevraagde integraal is $1-\gamma$. 7.10.33. Zie 6.8.6 en 7.5.16. Antwoord: 1/4. Zie ook 7.6.6. 7.10.34. Beschouw afzonderlijk de integralen over $(-\infty,-\delta)$, $(-\delta,\delta)$ en (δ,∞). Voor de uiterste stukken gebruike men $|f(u)|\le M$; in het stuk $(-\delta,\delta)$ de continuïteit van f gebruiken. Antwoord: $\pi^{\frac12} f(x)$. Zie 7.3.20. 7.10.35. (i) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^{1/n} (1-nx^2)dx$,

409 (ii) $P_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x+t)Q_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)Q_n(u-x)du =$
$= \int_0^1 h(u)Q_n(u-x)du$. (iii) Verdeel $[-1,1]$ in de stukken $[-1,-\delta]$, $[-\delta,\delta]$ en $[\delta,1]$ en gebruik het feit dat $h(x) = \int_{-1}^{1} h(x)Q_n(t)dt$. (iv) Zij f continu op $[0,1]$. Neem $h(x):=f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))$. 7.10.36. (i) Schrijf $\log(1 - 2\ r \cos x + r^2) = \log(1+r^2) +$
$+ \log(1 - \frac{2\ r \cos x}{1 + r^2})$. Pas nu toe: 6.8.1 op de tweede logarithme, dan 7.6.2. Gebruik daarbij 7.2.34 en 6.8.4. (ii) Voor een tweede oplossing kan men 7.6.17 toepassen. De integraal is een functie van r met afgeleide 0. Neem dan $r\to 0$. (iii) Na hoofdstuk 8 is dit een eenvoudige opgave! 7.10.37. Evenals 7.6.17 met
410 de definitie werken. 7.10.38. Ontwikkel arctan x in een Taylorreeks en substitueer dan $x = \sin \phi$. Op
$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sin \phi)^{2n} d\phi$ is 7.6.2 toepasbaar (zie 4.3.20). Zie weer 7.2.34 en 6.8.4. Antwoord:
$\frac{\pi}{2} \log(1+\sqrt{2})$. 7.10.39. Zie 7.6.34, 7.6.35. 7.10.40. Vlugger dan toepassing van één van de stellingen zoals 7.6.21 is de directe oplossing: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)dx}{x+y} =$
$= \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t+y^2}\, dt$ en $\left| \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t+y^2}\, dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \le$
$\le y^2 \left(\int_0^1 \frac{dt}{t+y^2} + \int_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\, dt \right) = o(1)$ voor $y \downarrow 0$. Zie 7.6.22. 7.10.41. (i) Voor $a \le t$ en $b > 0$ geldt
$\left| \int_b^{\infty} e^{-tx} x \cos x\, dx \right| \le \int_b^{\infty} e^{-ax} x dx < \varepsilon$ als b voldoende groot (onafhankelijk van t). (ii) Kies b vast. Bepaal expliciet $\int_b^{\infty} e^{-tx} x \cos x\, dx$. Neem dan $t \downarrow 0$. Antwoord: nee. 7.10.42. (i) Eerst F twee keer partieel integreren. Dan op F twee keer 7.6.21 toepassen. (ii) Toon door substitutie aan dat $F(x,y)=F(xy,1)=F(1,xy)$. Uit (i) volgt dat $F(xy)=A(y)e^{xy}+B(y)e^{-xy}$. Neem nu $xy\to\infty$ resp. $xy=0$. Antwoord: $\frac{\pi}{2} e^{-xy}$. Na hoofdstuk 8 is deze opgave vrijwel triviaal. Zie 8.5.21. 7.10.43.
(i) $\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k x(x+1)\cdots(x+k-1)}$.

410 · $\frac{n^{x+k}\cdot(n-k)!}{(x+k)\cdots(x+k+n-k)}$. (ii) Zie (i). 7.10.44. Via 7.6.24 en 7.3.20 of via 7.6.29. Antwoord: $\sqrt{\pi}$. 7.10.45. Pas 7.7.6 toe. Antwoord: 1/12. 7.10.46.
411 $\frac{4}{3}\pi\,|abc|$. 7.10.47. (0,0,3/8). 7.10.48. $\int_V e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^\infty e^{-r^2} r \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{4}$. 7.10.49. $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$. 7.10.50. Partieel integreren. 7.10.51. Zie 7.2.28 en 7.10.8. 7.10.52. (a) Alle x. Bepaal eerst $\sum_{n=1}^{k} \cos(nx)$, integreer naar x, dan $k\to\infty$. Zie 7.8.12. Zie ook 4.5.27. Antwoord: $\frac{\pi-x}{2}$. (b) Voor $x\neq 0$. Antwoord: $-\log|2\sin(\frac{1}{2}x)|$. 7.10.53. (i) Zie 7.6.31 en 7.8.16. (ii) Zie 7.7.12. Splits de integraal in $\int_0^1$ en $\int_1^\infty$. Pas 7.6.2 toe en dan 7.8.16. 7.10.54. Zie
412 3.17.22 en 7.8.18. 7.10.55. Zie 7.9.12 en 7.9.13. Antwoord: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + (Ax+B)e^{x} + Ce^{-2x}$. 7.10.56. Beschouw de inverse x(y). De differentiaalvergelijking wordt $\frac{d}{dy}(xy) = \cos y$. Antwoord: $x = y^{-1}(2\pi + \sin y)$. 7.10.57. $f''=2f+f'$. Antwoord: $\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$. 7.10.58. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}$. 7.10.59. Daar $y'>x$ is $y(x)\geq\frac{1}{2}x^2$ voor $x\geq 0$. Zo lang $y(x)\leq x$ is $y'\leq x+x^2$ dus $y(x)\leq\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$. Dit geldt op $[0,\frac{1}{2}]$ zeker. Herhaling van dit proces geeft: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 \leq y(x) \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{63}x^7$. Dus $y(\frac{1}{2})\approx 0,13$.

HOOFDSTUK 8. INTEGREREN IN HET COMPLEXE VLAK

414 8.1.4. Volgt uit 8.1.1 en 7.2.27. 8.1.5. Pas op de definitie (8.1.3 (c) en 7.2.7) toe: 6.4.2 en 7.2.16.
427 8.2.15. Volgt uit 8.2.4 en 8.2.10. 8.2.16. Zelfde
428 redenering als in 8.2.15. 8.2.18. Methode is bij
429 figuur 37 gegeven. 8.2.19. Uit 5.5.9 volgt dat [K] in een gebied ligt waarbinnen f analytisch is. Pas
431 8.2.4 toe. 8.3.5. $(z^2-1)^{-1}=\frac{1}{2}(z-1)^{-1}-\frac{1}{2}(z+1)^{-1}$ dus

431 $\mathrm{Res}_1 f = \frac{1}{2}$. 8.3.6. $z^{-2}\cos z = z^{-2} - 2z^{-2}(\sin \frac{1}{2}z)^2 =$
$= z^{-2} + O(1)$ voor $z \to 0$. Pas nu 8.1.10 en 8.1.14 toe:
433 $\mathrm{Res}_0 f = 0$. 8.3.11. Als $f(z)=\ell(z-a)^{-1}+O(1)$ volgt uit
8.1.10 en 8.1.14 $\mathrm{Res}_a f = \ell$. Het gevraagde residu is
434 -1. 8.3.16. Op $C_{0,1}$ is $z\bar{z}=1$. De integrand heeft in
2 residu 2^{-4} volgens 8.3.11. Daar volgens 8.1.10 geldt:
$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_{0,R}} \frac{1}{z^4(z-2)}\,dz=0$ is het residu in 0 dus -2^{-4}
(8.3.7). Antwoord: $-\frac{1}{8}\pi i$. 8.3.17. Zelfde methode als
8.3.16. Het residu van de integrand in -1 (eerste orde pool!) is π. Antwoord: 0 als $R>1$ en $-2\pi^2 i$ als
437 $R<1$. 8.3.24. Op $[C_{0,1}]$ is $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$.
Antwoord: $-1/(2w)$ als $|w|>1$ en $\frac{1}{2}w$ als $|w|<1$ (ook als
438 $w=0$). 8.3.25. Pas 8.3.23 en 8.3.20 toe. 8.3.27.
Pas op 8.3.20 (met $\phi=f$) 8.1.10 toe. 8.3.28. Zij K_1 de helft van $C_{\frac12,\frac12}$ gelegen in het bovenhalfvlak, K_2 de andere helft van $C_{\frac12,\frac12}$. Kies $z=x+iy$ met $0<x<1$, $y>0$
en z in $B_{\frac12,\frac12}$. Uit $\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\phi(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\phi(t)}{t-z}\,dt$

volgt: $\phi(x) = f(x+i0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\phi(t)}{t-x}\,dt$.

Analoog voor K_2. Daar $\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\phi(t)}{t-x}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{\phi(t)}{t-x}\,dt =$
440 $= \phi(x)$ volgt het gestelde. 8.4.5. (i) Volgens
6.8.11 en 6.8.12 is $f'(x)=-x^{-1}-x^{-2}\log(1-x)$. Volgens 5.6.10 is de reeks uniform convergent op $\bar{B}_{0,1}$. (ii) Volgens 8.4.2 is F analytisch op $B_{0,1}$. (iii) Nee, daar dan ook $F'=G'$ zou gelden en dus $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = G'(1)$
441 zou zijn. 8.4.6. Zij $\mathrm{Re}\, s_0 = 1 + 2\delta > 1$. In $B_{s_0,\delta}$
geldt $|e^{-s\log n}| \le n^{-1-\delta}$. Pas 5.6.10 en 8.4.2 toe.
8.4.7. Zij $\mathrm{Re}\, z_0 = r > 0$. In $B_{z_0,r}$ geldt $\left|\frac{z}{n(n+z)}\right| =$
$=O(n^{-2})$. Pas weer 5.6.10 en 8.4.2 toe. Daar iedere term van de reeks in G analytisch is, is voor iedere kromme K in G met beginpunt 1 en eindpunt z de integraal $\int_K f(t)dt$ alleen een functie van z (8.4.1 toe-

441 gepast). Volgens 8.1.18 is door $F(z) = \int_1^z f(t)dt$ een
primitieve van f gedefinieerd met $F(1)=0$. Volgens
443 7.6.31 is $F(x)=\gamma(x-1)+\log(x\Gamma(x))$. 8.4.14. Kies in
5.10.22 voor $A(z)$ de beweringsvorm: f is analytisch
in z. 8.4.15. Zij $G':=\mathbf{C}\backslash\{iy\,|\,(y\le -1)\vee(y\ge 1)\}$. Daar
door $\phi(t):=(1+t^2)^{-1}$ een in G' analytische functie is
gegeven is volgens 8.1.18 door $f(z) := \int_0^z \phi(t)dt$ een
analytische functie in G' gegeven (integratiekromme
in G') met $f'=\phi$. Daar $+i$ en $-i$ polen zijn van ϕ is
ook f in deze punten singulier. De gevraagde conver-
444 gentiestraal is dus $\sqrt{2}$. 8.4.16. Antwoord: $s(s^2+1)^{-1}$.
Volgens 7.6.35 stellen de integraal en $s(s^2+1)^{-1}$ in
$\{s\in\mathbf{C}\,|\,\mathrm{Re}\ s>0\}$ analytische functies voor. Volgens
8.4.12 zijn ze identiek. 8.4.17. Beschouw als $f(a)\ne 0$
de functie $1/f$ in een omgeving van a. 8.4.18.
$f(0)=f(-2/3)=0$. Het maximum van $|f|$ wordt in 1 aange-
447 nomen. Het is 3. 8.4.22. Pas 8.3.27 toe. 8.4.26.
Volgt uit 6.8.6. 8.4.27. Vervang in 8.4.25: f door
448 fg en pas dan 8.4.1 toe. 8.4.31. 8.4.25 en 8.3.1.
8.4.32. Pas 8.4.2 toe. Antwoord: 0. 8.4.33.
$(z^2+2z-3)^{-1} = -\frac{1}{12}(1+\frac{1}{3}z)^{-1} + \frac{1}{4}z^{-1}(1-z^{-1})^{-1}$, etc.
8.4.34. Vervang $C_{0,2}$ door $C_{0,R}$. Neem $R\to\infty$. Antwoord: 0.
449 8.4.41. Als f alleen polen heeft is er een rationale
functie g zó dat f/g géén singulariteiten heeft. Pas
451 8.4.20 toe. 8.4.42. $2z^{-1}-(z-1)^{-2}$. 8.5.4. In een om-
geving van b_j is $f(z)=(z-b_j)^{-\mu_j}\phi(z)$ met $\phi(b_j)\ne 0$. Toon
aan dat f'/f in b_j een pool van de eerste orde met
452 residu $-\mu_j$ heeft. 8.5.6. Als ε een voldoende klein
positief getal is, geldt op $C_{0,1-\varepsilon}$: $|1+z^5|\le 1+(1-\varepsilon)^5<$
$<2(1-\varepsilon)=|2z|$. Pas nu 8.5.5 toe. N.B. $z=1$ is een nul-
454 punt. 8.5.9. De eerste toepassing van 8.5.7 toont
aan dat er een nulpunt binnen de cirkel $C_{0,1}$ ligt,
dus zelfs 2 daar de coëfficiënten reëel zijn. Over-
gang op $C_{0,\frac{1}{2}}$ toont dat binnen $C_{0,\frac{1}{2}}$ géén nulpunten
455 liggen. Voor $C_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ dezelfde procedure. 8.5.13.
$2\pi(1-a^2)^{-1}$ als $|a|<1$, $2\pi(a^2-1)^{-1}$ als $|a|>1$. 8.5.14.
457 $2\pi(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$. 8.5.18. $\pi/2^9$. 8.5.19.
458 $\frac{2}{3}\pi$. 8.5.23. Schrijf eerst $\cos(2x)=\frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix})$.

460 $\frac{\pi}{2}(e^{-3}+e^{-1})$. <u>8.5.24.</u> $\frac{1}{3}\pi(e^{-2}+e^{-1})$. <u>8.5.27.</u> Als 8.5.25. Zie ook 7.6.22. <u>8.5.28.</u> Integrand is even functie! Zie 8.5.25. Antwoord: π. <u>8.5.29.</u> Integreer $(e^{w}-1)^{-1}(w-z)^{-1}$ over het vierkant met middelpunt in
463 0 en zijde $(4n+2)\pi$. Laat $n\to\infty$. Zie 8.5.26. <u>8.6.4.</u> Neem $G:=\mathbf{C}\setminus\{iy \mid y\in\mathbf{R},\ |y|\geq 1\}$. Pas 8.1.18 toe op $f(t):=$ $:=(1+t^2)^{-1}$. Denk aan 8.4.12. $\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} +$ $- \ldots$ voor $|z|<1$ volgens 6.8.13 en 8.4.12. De sprong aan de snede volgt uit de residuenstelling. <u>8.6.5.</u> Zie 4.4.5. <u>8.6.6.</u> Voor $z=re^{i\phi}$ met $r<1$ geldt: $-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\{n^{-1}r^n(\cos(n\phi) +$ $+ i\sin(n\phi))\}$. Volgens 6.8.9 geldt dit ook voor $r=1$, $\phi\neq 2k\pi$. Dus is $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sin(n\phi) = \frac{1}{2}(\pi-\phi)$ voor $\phi\neq 2k\pi$. Zie ook 7.10.52. <u>8.6.7.</u> Pas 8.1.18 toe op f'/f. <u>8.6.8.</u> Pool van de eerste orde in 1. Antwoord: $2\pi i$.

467 <u>8.7.1.</u> Neem $z=1+e^{i\phi}$, $-\pi\leq\phi\leq\pi$ als parametervoorstelling. Antwoord: $\frac{8}{3}i$. <u>8.7.2.</u> Met behulp van $z^8+z^4+1=$ $=(z^{12}-1)/(z^4-1)$ is de breuk snel te herleiden tot $z^3-z^{-1}+z^{-1}(z^8+z^4+1)^{-1}$. We vinden zo drie integralen. Zie nu resp. 8.2.4, 8.1.14 en 8.3.12. Antwoord: $-2\pi i$. <u>8.7.3.</u> Residuen in $(2k+1)\pi/2$ en $-(2k+1)\pi/2$ zijn samen 0. Antwoord: $2\pi i$. <u>8.7.4.</u> Als $|w|<1$ dan verandert de integraal niet van waarde als we $C_{0,1}$ door $C_{0,R}$ met $R>1$ vervangen. Pas 8.1.10 toe en laat $R\to\infty$. We zien dat $f(w)=0$ voor $|w|<1$. Dezelfde methode gebruiken we voor $|w|>1$ en $R>|w|$. Nu geldt: $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{0,R}} \frac{\phi(z)}{z-w}\,dw =$ $= f(w)+\phi(w)$. Nu is dus $f(w)=-\phi(w)$. <u>8.7.5.</u> Binnen $C_{0,1}$ ligt één singulariteit nl. een pool van de orde 3 in 0. Eén mogelijkheid is om 8.3.25 toe te passen met $\phi(z) := z^3(\sin z)^{-3}$. Vlugger is het om (zie 6.9.30) te gebruiken: $(\sin z)^{-3}=z^{-3}(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots)^{-3} =$ $= z^{-3}(1+\frac{z^2}{3!}+\ldots)^3 = z^{-3} + \frac{z^{-1}}{2} + \ldots$. Antwoord: πi.

<u>8.7.6.</u> $f(z) = (1-z)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{1+z^n} - \frac{z^{n+1}}{1+z^{n+1}}\right) = \frac{z}{1-z^2} +$ $- \lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{1+z^n}$. Dus $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ als $|z|<1$ en $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$

467 $|z|>1$. Merk op dat f binnen en buiten de eenheidscirkel analytisch is maar dat de functie buiten de eenheidscirkel niet een analytische voortzetting is van de functie binnen de eenheidscirkel! 8.7.7.
(i) Zie 8.4.4. (ii) $f(z)=-z^{-1}$. Merk op dat f in $n(n\in\mathbf{N})$ niet singulier is. Deze punten zijn ophefbare singu-
468 lariteiten. 8.7.8. Merk op dat $(t^2+t+1)^{-1}=(t-1)/(t^3-1)$. Deze functie heeft twee polen van de orde 1 nl. in $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Zij $G:=\mathbf{C}\setminus\{-\frac{1}{2}+iy|\ |y|\geq\frac{1}{2}\sqrt{3}\}$. Pas in G 8.1.18 toe. Merk op dat de primitieve van $(t^2+t+1)^{-1}$ in $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ vertakkingspunten heeft. De convergentiestraal van de Taylorreeks rond 1 is $\sqrt{3}$. 8.7.9. Zij $g(z):=f(z^{-1})$. Pas 8.4.11 toe. 8.7.10. Zij $g(z)=zf(z)$. Dan is $g(0)=1$ en $|g(z)|\leq 1$ als $|z|=1$. Daar g continu is neemt $|g|$ een maximum aan op $\bar{B}_{0,1}$. Volgens 8.4.13 is dit in een punt van $[C_{0,1}]$. Het maximum is dus ≤ 1. Daar $g(0)=1$ neem $|g|$ blijkbaar in 0 een maximum aan. Dus is g constant. 8.7.11. Pas 8.4.25 toe met $a=0$, $r_1=1$ en parametriseer met $w=e^{i\phi}$, $0\leq\phi\leq 2\pi$. De coëfficiënten zijn $J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(n\phi - t\sin\phi)d\phi$. Dit zijn zgn. Besselfuncties. Zie ook 8.3.22. 8.7.22. Gebruik $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}(\frac{z}{\tan\frac{1}{2}z} - \frac{z}{\tan z})$ en pas 7.5.6 (i) toe. f heeft in 0 een ophefbare singulariteit. De reeks is een Taylorreeks. Daar $\sin z \neq 0$ voor $|z|<\pi$ en $\sin\pi=0$ is de reeks convergent voor $|z|<\pi$. 8.7.13. Als R voldoende groot is dan is de gevraagde som gelijk aan $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{0,R}} z^3\frac{(5z^4+2z)}{z^5+z^2+1}dz$ omdat de 5 nulpunten verschillend zijn (zie 8.5.3). De integraal bepalen op de manier van 8.7.2. Antwoord: -3. 8.7.14. Pas 8.5.1 toe op $f(z) := \cos z$. 8.7.15. Pas 8.5.5 en 8.5.7 toe. Voorbeeld: op $[C_{0,1}]$ is $|4z^2|>|z^5+z^3+1|$ dus liggen twee nulpunten binnen de eenheidscirkel. Op $[C_{0,2}]$ is $|z^5|>|z^3+4z^2+1|$ dus liggen alle nulpunten binnen $[C_{0,2}]$. Denk ook aan 6.4.19. Zie ook 8.5.8.
8.7.16. Zie het bewijs van 8.5.20. Antwoord: $2^{-3/2}\pi^{1/2}$. 8.7.17. Vergelijk met de methode van 7.6.35. Voor
469 $z\in\mathbf{R}$ zie 7.3.20. Pas dan 8.4.12 toe. 8.7.18. Neem als snede $\{x\in\mathbf{R}|\ x\leq -1\}$. $f(z) = \int_0^z t^{-1}\log(1+t)dt$. Om $f(e^{i\phi})$ te bepalen integrere men langs de reële as tot 1 en dan langs de eenheidscirkel. Om $\int_0^1 x^{-1}\log(1+x)dx$ te

469 bepalen zie 7.6.4. Vergelijk het antwoord van deze opgave met 7.8.14. 8.7.19. Beschouw de integraal uit 8.6.14 en pas dan 7.6.21 toe. Neem $a=2/3$. Substitueer $t=x^3$. Antwoord: $2\pi^2/27$. De methode van 8.6.14 kan men ook opnieuw toepassen om $\int_0^\infty \frac{x \log x}{1+x^3}dx$ direct te bepalen.

Gemengde opgaven

De thans volgende serie van 106 vraagstukken over geselecteerde onderwerpen is bedoeld voor de lezer die na het maken van de opgaven uit de tekst behoefte heeft aan meer oefenmateriaal. Enigszins in strijd met de door de titel gewekte verwachtingen hebben we de vraagstukken gerangschikt naar hoofdstuk. Opgaven waarvoor kennis van meer dan een onderwerp nodig is zijn opgenomen onder het laatste van de benodigde hoofdstukken.

HOOFDSTUK 1

1 De beweringsvorm $B(X)$ met individuenverzameling $P(\mathbf{R})$ is gedefinieerd door:

$$\forall_{X\in P(\mathbf{R})}\ [B(X) :\Leftrightarrow \forall_{x\in X}\ \exists_{a>0}\ \forall_{y\in\mathbf{R}}[(|x-y|<a) \Rightarrow (y\in X)]].$$

Bewijs dat voor alle X en Y uit $P(\mathbf{R})$ geldt:

$$(B(X) \wedge B(Y)) \Rightarrow B(X\cap Y).$$

2 Laat X en Y twee verzamelingen zijn. Een deelverzameling V van $X\times Y$ noemen we een rechthoek als er verzamelingen $V_1\subset X$, $V_2\subset Y$ bestaan zodat $V=V_1\times V_2$. Laat V en W twee rechthoeken zijn. Bewijs, dat elk der verzamelingen $V\cap W$, $(X\times Y)\setminus V$, $V\setminus W$ en $V\cup W$ de vereniging is van eindig veel disjuncte rechthoeken.

3 Voor elke reële r beschouwen we: $(r,\infty):=\{x\in\mathbf{R}|x>r\}$ en $(-\infty,r):=\{x\in\mathbf{R}|x<r\}$.
Bepaal voor alle reële waarden van a de verzameling

$$V_a := \bigcap_{y\in(-\infty,a)}\ \bigcup_{z\in(y,\infty)} \{x\in\mathbf{R}|x\geq yz\}.$$

4 De afbeelding $f\colon X \to Y$ is dan en slechts dan surjectief als voor elke deelverzameling $V \subset Y$ geldt:

$$f(\overleftarrow{f}(V)) = V.$$

Bewijs dit.

5 Zij $\mathbf{P} := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$; de afbeelding $f\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ is gedefinieerd door $\forall_{x \in \mathbf{P}}[f(x) := x^{-2}]$. We beschouwen geïtereerden van de afbeelding f:

$$f_2 := f \circ f, \ldots, f_{n+1} := f \circ f_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

a) Geef een formule voor $f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N},\ x \in \mathbf{P})$.

b) Zij $A := [1,2]$; bepaal

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(A) \quad \text{en} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k(A).$$

HOOFDSTUK 2

6 In $\mathbf{R}$ wordt de relatie ρ gedefinieerd door:

$$x \rho y :\Leftrightarrow x \le y \le x+2 \quad (x, y \in \mathbf{R}).$$

Bepaal de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$:

a) $\{(x,y) \mid (x \rho y) \Rightarrow (y \rho x)\}$;

b) $\{(x,y) \mid \exists_{z \in \mathbf{R}} [(x \rho z) \wedge (z \rho y)]\}$.

7 In $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ definiëren we de relatie:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) :\Leftrightarrow (a_1 - b_1 \equiv 0 \bmod 3) \wedge (a_2 - b_2 \equiv 0 \bmod 5).$$

Laat zien dat dit een equivalentierelatie is en bepaal de equivalentieklassen.

8 Zij $A \neq \emptyset$; $\mathbf{P} := \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$; $W := \mathbf{P}^A$. In W definiëren we een relatie σ door:

$$f \sigma g :\Leftrightarrow \exists_{\alpha \in \mathbf{P}} \forall_{x \in A} [f(x) \le \alpha g(x)] \quad (f, g \in W).$$

Bewijs dat σ dan en slechts dan een equivalentierelatie op W is als A eindig veel elementen heeft.

9 Op $\mathbf{R}^n$, de verzameling van de reële n-tupels $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$, definiëren we de relatie R voor iedere $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ door:

$$\mathbf{x}R\mathbf{y} :\Leftrightarrow \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\ [x_i y_i > 0].$$

Laat $V_{\mathbf{a}} := \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n \mid \mathbf{x}R\mathbf{a}\}$ gedefinieerd zijn voor elke $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$. Bewijs dat $W := \{V_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a}\in\mathbf{R}^n\}$ uit 2^n+1 paarsgewijs disjuncte elementen bestaat; beschrijf deze elementen.

10 Zij $V := \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, de verzameling van alle rijen gehele getallen. In V definiëren we een relatie ~ door:

$$\forall_{(a_n)\in V}\ \forall_{(b_n)\in V}\ [(a_n)\sim(b_n) :\Leftrightarrow \exists_{N\in\mathbf{N}}\ \forall_{n>N}\ [a_n=b_n]].$$

(Hierin is (a_n) gebruikt als notatie voor de rij $(a_1,a_2,\dots)$).

a) Bewijs dat ~ een equivalentierelatie is.

b) Laat zien dat elke equivalentieklasse aftelbaar is.

HOOFDSTUK 3

11 Zij $a\in\mathbf{Z}$.
Bewijs dat 2730 deelbaar is op $a^{13}-a$ voor elke a.

12 Zij $G := \{x \in \mathbf{Z} \bmod 9 \mid (x,9)=1\}$. Bewijs dat G met vermenigvuldiging modulo 9 een groep vormt en laat zien dat deze groep isomorf is met de additieve groep ($\mathbf{Z}$ mod 6,+).

13 a) Toon aan dat een groep G een abelse groep is, wanneer $\forall_{a\in G}\ [a^2=e]$; (e is het eenheidselement van G).

b) Toon aan dat een groep G een abelse groep is, wanneer $\forall_{a\in G}\ \forall_{b\in G}\ [(ab)^2=a^2b^2]$.

14 Beschouw de ondergroep T van S_4 bestaande uit de permutaties die $(x_1+x_2)(x_3+x_4)$ invariant laten.

a) Geef de elementen van T.

b) Geef een representant van elke rechternevenklasse van T.

15 Beschouw de verzameling S_n ($n \geq 3$) van alle afbeeldingen van $\{1,2,\ldots,n\}$ op $\{1,2,\ldots,n\}$. Met afbeeldingssamenstelling als product-operatie is S_n een groep. In S_n definiëren we de equivalentierelatie:

$$f \sim g :\Leftrightarrow f(n)=g(n).$$

a) Beschrijf de equivalentieklassen.

b) Laat zien dat precies één van deze equivalentieklassen een ondergroep vormt.

c) Laat zien dat deze ondergroep geen normale ondergroep is.

d) Bewijs dat de equivalentieklassen bij de relatie $\sim$ juist de linkernevenklassen van de onder c) bedoelde ondergroep zijn.

16 $(G, \ )$, $(H_1,*_1)$ en $(H_2,*_2)$ zijn groepen.
In $H_1 \times H_2$ definiëren we een productoperatie $*_3$ door:

$$(k_1,k_2) *_3 (h_1,h_2) := (k_1 *_1 h_1, k_2 *_2 h_2)$$

$$((k_1,k_2),(h_1,h_2) \in H_1 \times H_2).$$

$(H_1 \times H_2, *_3)$ is dan ook een groep.
Voor $i=1,2$ zijn ψ_i homomorfismen van $(G, \ )$ in $(H_i, *_i)$.

a) Bewijs dat de afbeelding ψ van $(G, \ )$ in $(H_1 \times H_2, *_3)$ gedefinieerd door

$$\psi(g) := (\psi_1(g), \psi_2(g)) \quad (g \in G)$$

een homomorfisme is.

b) Druk de kern van ψ uit in de kern van ψ_1 en de kern van ψ_2.

c) Zij $(G, \ ) = (\mathbf{Z}(\text{mod } 35),+)$, $(H_1,*_1) = (\mathbf{Z}(\text{mod } 5),+)$ en $(H_2,*_2) = (\mathbf{Z}(\text{mod } 7),+)$.
Bewijs dat $(\mathbf{Z}(\text{mod } 35),+)$ isomorf is met $(\mathbf{Z}(\text{mod } 5) \times \mathbf{Z}(\text{mod } 7), *_3)$.

17 Zij G een groep en N een normaaldeler in G. Bewijs, dat G/N dan en slechts dan commutatief is, als $a^{-1}b^{-1}ab \in N$ voor alle $a,b \in G$.

18 In $\mathbf{Z}^2$ definiëren we

$$(m,n)\circ(p,q) := (m+p, n+(-1)^m q) \qquad ((m,n),(p,q)\in\mathbf{Z}^2).$$

Zij

$$K := \{(m,n)\in\mathbf{Z}^2 \mid m=0\} \text{ en}$$

$$H := \{(m,n)\in\mathbf{Z}^2 \mid n=0\}.$$

a) Bewijs dat $(\mathbf{Z}^2,\circ)$ een groep is.

b) Bewijs dat $(K,\circ)$ een normale ondergroep is van $(\mathbf{Z}^2,\circ)$.

c) Laat zien dat $\mathbf{Z}^2/K$ isomorf is met $(H,\circ)$.

19 $(R,+,\ )$ is een commutatieve ring; de deelverzameling $S\subset R$ vormt een ideaal in $(R,+,\ )$; de restklassenring $(R(\text{mod } S),+,\ )$ is een integriteitsgebied.
Bewijs dat

$$\forall_{a\in R}\ \forall_{b\in R}\ [(ab\in S) \Rightarrow ((a\in S)\vee(b\in S))].$$

20 Bewijs dat in $(\mathbf{Z}[x],+,\ )$ (zie blz. 147) de grootste gemene deler van $7x^3+1$ en $2x$ gelijk is aan 1, maar dat er geen polynomen $a(x)$ en $b(x)$ bestaan zó dat

$$a(x)(7x^3+1) + b(x)(2x) = 1.$$

21 Zij V een eindige verzameling met tenminste 2 verschillende elementen. $P(V) := \{A \mid A\subset V\}$.
In $R := P(V)$ definiëren we een optelling + en een vermenigvuldiging · door:

$$A+B := A \dotplus B \ (=(A\cup B)\setminus(A\cap B))$$

$$A\cdot B := A\cap B \qquad (A,B\in R).$$

$(R,+,\cdot)$ is nu een commutatieve ring met eenheidselement V en nulelement $\emptyset$.

a) Bewijs dat $(R,+,\cdot)$ nuldelers heeft.

b) Zij $(I,+,\cdot)$ een ideaal in $(R,+,\cdot)$.
Als $A\in I$ en $B\in I$, bewijs dan dat ook $A\cup B\in I$.

c) Bewijs dat $(I,+,\cdot)$ een ideaal is in $(R,+,\cdot)$ dan en slechts dan als er een $W \in R$ is met $I=P(W)$.

d) Een ideaal $(P(W),+,\cdot)$ in $(R,+,\cdot)$ is dan en slechts dan een maximaal ideaal in $(R,+,\cdot)$ als geldt
$\exists_{x \in V} [W=V \setminus \{x\}]$.
Bewijs dit.

22 In $\mathbf{R}^2$ definiëren we een optelling, +, en een vermenigvuldiging, ⊗, door:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1,x_2+y_2),$$

$$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2) := (x_1y_1,x_1y_2+x_2y_1), \quad (x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbf{R}).$$

Nu is $(\mathbf{R}^2,+,\otimes)$ een commutatieve ring.

a) Bepaal de singuliere elementen van $(\mathbf{R}^2,+,\otimes)$.

b) Bewijs dat $(\mathbf{R}^2,+,\otimes)$ precies één maximaal ideaal heeft.

23 In $\mathbf{Z}^2$ zijn de bewerkingen + en × gedefinieerd door:

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$(x_1,x_2)\times(y_1,y_2) := (x_1y_1,x_2y_2) \quad (x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbf{Z}).$$

a) Bepaal alle reguliere elementen van de ring $(\mathbf{Z}^2,+,\times)$.

b) Geef alle maximale idealen uit deze ring die het element (6,12) bevatten.

24 Zij $S := \{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$.

Met de gewone optelling en vermenigvuldiging wordt $(S,+,\ )$ een commutatieve ring met eenheidselement.

a) Bewijs dat $(S,+,\ )$ geen nuldelers heeft.

b) Wat zijn de reguliere elementen van deze ring?

c) Bepaal het quotiëntenlichaam van $(S,+,\ )$.

Zij verder

$$T := \{\frac{3m}{2^n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}.$$

d) Bewijs dat $(T,+,\ )$ een ideaal is in $(S,+,\ )$.

e) Toon aan dat dit ideaal een maximaal ideaal is.

f) Bepaal het restklassenlichaam van S naar het ideaal T.

25 Beschouw

$$S := \{r\in\mathbb{Q} \mid \exists_{p\in\mathbb{Z}} \exists_{q\in\mathbb{Z}} [(r = \frac{p}{q}) \wedge (q \not\equiv \bmod 3)]\}.$$

a) Bewijs dat S met de gewone optelling en vermenigvuldiging van de rationale getallen een ring is.

b) Bewijs dat de verzameling van de niet-reguliere elementen van (S,+,) een ideaal vormt in (S,+,).

c) Bewijs dat (S,+,) precies één maximaal ideaal heeft.

d) Bepaal het restklassenlichaam van (S,+,) naar dit maximale ideaal.

26 Laat A zijn de verzameling van alle afbeeldingen van het interval [0,1] in de gehele getallen, $\mathbb{Z}$. Als gebruikelijk definiëren we sommen en producten van elementen uit A door:

$$\forall_{x\in[0,1]}[(f+g)(x) := f(x)+g(x);\ (fg)(x) := f(x)g(x)] \qquad (f,g\in A).$$

Zij $S := \{f\in A \mid \forall_{x\in[0,1]}[f(x)$ is deelbaar door $5]\}$.

a) Bewijs dat S een ideaal in (A,+,) vormt.

b) Is dit een maximaal ideaal?

c) Welke zijn de reguliere elementen uit (A(mod S),+,)?

27 Zij

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\};\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}) := \{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}.$$

Met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging der reële getallen vormen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ lichamen.

a) Laat zien dat $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

b) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ niet isomorf zijn.

28 Beschouw de verzameling M van matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ waarin a en b reële getallen zijn. We beschouwen de bewerkingen:

i) optellen van matrices (notatie: +),

ii) matrixvermenigvuldiging (notatie: ×).

a) Toon aan dat (M,+,×) een lichaam is.

b) Toon aan dat dit lichaam isomorf is met het lichaam der complexe getallen.

29 De verzameling M_3 van alle (3×3) matrices met reële coëfficienten en determinant ongelijk nul vormt t.a.v. de gewone matrixvermenigvuldiging een groep (M_3,).
G is de verzameling van alle matrices van de vorm:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ uit } M_3.$$

H is de verzameling van alle elementen uit G met a+c=0.
Bewijs dat:

a) (G,) is een ondergroep van (M_3,).

b) (H,) is normaaldeler in (G,).

c) G/H is isomorf met $(\mathbf{R},+)$.

HOOFDSTUK 4

30 De rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ voldoet aan $a_1:=0$, $a_2:=1$, $a_{n+1}:=a_n+a_{n-1}$ $(n\geq 2)$.
Toon aan dat de rij $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ een limiet heeft en bepaal de limiet.

31 De rij reële getallen $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is gedefinieerd door:

$$b_1 := 1;\ b_{n+1} := 1 + \frac{1}{b_n} \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Bewijs dat $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeert.

32 De rij reële getallen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is gedefinieerd door:

$$a_1 := 0;\ a_{n+1} := \frac{2a_n+4}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert en bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

33 Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij reële getallen.

$V := \{x \in \mathbb{R} \mid x<a_n$ voor ten hoogste eindig veel $n \in \mathbb{N}\}$.

Bewijs nu dat $\limsup a_n = \inf V$.

34 Voor de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van reële getallen geldt

$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (1<a_n<2)$.

Bewijs dat

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n} .$$

35 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zijn rijen reële getallen; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
Bewijs dat

$$\limsup a_n b_n = \limsup b_n .$$

36 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zijn rijen positieve reële getallen met

$\limsup \dfrac{a_n}{b_n} \le 1$.

Bewijs dat $\limsup a_n \le \limsup b_n$.

37 Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij reële getallen. Bewijs dat

$$\limsup \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n} \le \limsup a_n .$$

38 Laat $r_1, r_2, r_3, \ldots$ een aftelling zijn van

$$\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid p\in \mathbb{N},\ q\in \mathbb{N}\}.$$

Bewijs dat $\limsup r_n = 1$.

39 Laat $r_1, r_2, r_3, \ldots$ een aftelling zijn van de rationale getallen uit $[0,1]$. Bewijs dat $\limsup r_n = 1$.

40 Zij $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

a) Bepaal $\limsup a_n$ en $\liminf a_n$.

b) Bepaal de verzameling van alle reële getallen x waarvoor geldt dat er voor iedere $\varepsilon>0$ oneindig veel elementen uit de rij liggen in het interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

41 Zij $a_1, a_2, \ldots$ een rij reële getallen. Laat zien dat $\Sigma_1^\infty a_k/k$ absoluut convergeert als $\Sigma_1^\infty a_k^2$ convergeert.

42 Gegeven is een rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ van positieve reële getallen met de eigenschap dat de reeks $\Sigma_{n=1}^\infty a_n$ convergeert. Bewijs dat $\Sigma_{n=1}^\infty a_n^2$ convergent is.
Kan de voorwaarde "$a_n>0$ voor alle $n \in \mathbf{N}$" worden weggelaten?

43 Laat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij van positieve reële getallen zijn, zodanig dat de reeks $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent is. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{1+a_n}$ eveneens divergeert.

44 Gegeven is een rij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ van positieve reële getallen met de eigenschappen:

i) $\forall_{n\in\mathbf{N}} [a_{n+1} \le a_n]$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

45 a) Als $0<\varepsilon<1$, bepaal dan alle reële waarden x waarvoor $|\cos x|<\varepsilon$.

b) Bewijs dat er geen α is waarvoor $\lim_{n\to\infty} \cos(n\alpha) = 0$.

46 Bewijs dat voor $z_1 \in \mathbf{C}$, $z_2 \in \mathbf{C}$ geldt

$$|z_1-z_2|^2 + |z_1+z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

Wat is de meetkundige interpretatie van deze betrekking?

47 Als $z \in \mathbf{C}$, en x en y zijn resp. het reële en imaginaire deel van z, dan is

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

Bewijs dit.

HOOFDSTUK 5

48 Zij $R := \mathbf{Z}$. We definiëren de topologie $\mathcal{T}$ voor R door

$$\forall_{V \in P(R)} \; [V \in \mathcal{T} :\Leftrightarrow \forall_{x \in V} \; \exists_{n \in \mathbf{N}} \; [\{x+nz \mid z \in \mathbf{Z}\} \subset V]].$$

a) Bewijs dat $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie is.

b) Is $(R,\mathcal{T})$ een Hausdorff-ruimte?

c) Bewijs dat $\{0\}$ gesloten is.

d) Bepaal een rij in $\mathbf{N}$ met limiet 0.

49 $(R,\mathcal{T}_1)$ en $(S,\mathcal{T}_2)$ zijn topologische ruimten.
$(S,\mathcal{T}_2)$ is een Hausdorff-ruimte.
f en g zijn continue afbeeldingen van R in S.
Bewijs dat de verzameling $V := \{x \in R \mid f(x)=g(x)\}$ gesloten is.

50 Zij R een niet lege verzameling en f een reëelwaardige functie op R.
Ψ is de verzameling van alle topologieën $\mathcal{T}$ voor R waarbij f continu is op R. Zij $\Sigma := \bigcap_{\mathcal{T} \in \Psi} \mathcal{T}$.

Laat zien dat Σ een topologie voor R is en dat f continu is op R bij Σ.
Als bovendien nog gegeven is dat f een afbeelding van R op $[0,1]$ is, bewijs dan dat (R,Σ) een compacte topologische ruimte is.

51 Zij (R,d) een metrische ruimte en $\{F_a | a\in A\}$ een stelsel niet lege deelverzamelingen van R. Zij

$$d(F_a,F_b) := \inf\{d(x,y) | x\in F_a, y\in F_b\} \quad (a\in A,\ b\in A)$$

en veronderstel

$$\exists_{r>0}\ \forall_{a\in A}\ \forall_{b\in A}\ [a\neq b \Rightarrow d(F_a,F_b)>r]\ .$$

Bewijs dat

$$\bigcup_{a\in A} \overline{F_a} = \overline{\bigcup_{a\in A} F_a}\ .$$

52 Laat $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij functies van $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ zijn zó dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in[0,1]}\ \forall_{y\in[0,1]}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [|x-y|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon].$$

Zij nu $V := \{x\in [0,1] | \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ bestaat}\}$.

Bewijs dat V gesloten is.

53 Een rij reële getallen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ geven we aan met $\underline{a}$. Zo'n rij heet begrensd als er een constante M is zó dat $\forall_{n\in\mathbf{N}}\ [|a_n|\le M]$.

Zij nu A de verzameling van alle begrensde rijen reële getallen. Op A definiëren we een metriek d door

$$\forall_{\underline{a}\in A}\ \forall_{\underline{b}\in A}\ [d(\underline{a},\underline{b}) := \sup\{|a_n-b_n| \,|\, n\in\mathbf{N}\}].$$

Zo wordt (A,d) een metrische ruimte.

a) Bewijs dat de metrische ruimte (A,d) volledig is.

b) Bewijs dat er een rij $\underline{a} := (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A$ bestaat zó dat

$$\forall_{m\in\mathbf{N}}\ [a_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2+m^2}]\ .$$

54 (R,d) is een rijcompacte metrische ruimte. $T: R\to R$ is een continue afbeelding. Gegeven is:

$$\inf\{d(x,T(x)) \,|\, x\in R\} = 0.$$

Bewijs dat er een punt $a\in R$ is met $T(a) = a$.

55 (R,d) is een rijcompacte metrische ruimte.
$\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$ is een overdekking van R met open verzamelingen.
Bewijs nu:

$$\exists_{r\in\mathbf{R},r>0}\ \forall_{x\in R}\ \exists_{\alpha\in A}\ [B_{x,r} \subset U_\alpha] .$$

56 Zij $(R,\mathcal{T})$ een rijcompacte topologische ruimte, en $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij continue reëelwaardige functies op R.

a) Bewijs dat f_n begrensd is voor elke $n\in\mathbf{N}$.

Neem nu aan dat $\forall_{x\in R}\ \forall_{n\in\mathbf{N}}\ [f_{n+1}(x) \le f_n(x)]$ en dat $\forall_{x\in R}\ [\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0]$.

b) Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uniform op R naar 0 convergeert.

57 Zij (R,d) een compacte metrische ruimte, $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ een rij van reële functies gedefinieerd op R waarvoor geldt:

i) $\forall_{k\in\mathbf{N}}\ \forall_{x\in R}\ \forall_{y\in R}\ [|f_k(x) - f_k(y)| \le d(x,y)]$,

ii) $\forall_{x\in R}\ [\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0]$.

Zij $\forall_{k\in\mathbf{N}}\ [M_k := \sup\{|f_k(x)| \mid x\in R\}]$. Bewijs dat $\lim_{k\to\infty} M_k = 0$.

58 Zij (R,d) een metrische ruimte.
Een rij deelverzamelingen $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ van R heet genest als $V_{n+1} \subset V_n$ voor alle $n\in\mathbf{N}$.
Voor iedere $a\in R$ en $\rho\in\mathbf{R}$ $(\rho\ge 0)$ definiëren we $B_{a,\rho}$ door:

$$B_{a,\rho} := \{x\in R \mid d(x,a) \le \rho\}.$$

$B_{a,\rho}$ is dan een gesloten bol met middelpunt a en straal ρ.
Bewijs nu dat (R,d) volledig is dan en slechts dan als in R voor iedere geneste rij gesloten bollen $(B_{x_n,\rho_n})_{n\in\mathbf{N}}$ met $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ geldt dat $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{x_n,\rho_n} \ne \emptyset$.

59 Voor elke $n \in \mathbb{N}$ wordt $f_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gedefinieerd door:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \left[f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}\right] .$$

a) Bewijs dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergeert op elk interval (a,∞) met $a>0$.

b) Ga na of $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergeert op $(0,\infty)$.

60 Zij (R,d) de metrische ruimte bestaande uit de continue functies gedefinieerd op $[0,1]$ met

$$d(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| \mid 0\le x\le 1\} .$$

$A: R \to \mathbb{R}$ is een continue lineaire afbeelding. Op $[0,1]$ definiëren we voor $n=0,1,2,3,\ldots$ de functies f_n door $f_n(x):=x^n$. Verder is gegeven dat $A(f_n)=1$ voor $n=0,1,2,3,\ldots$. Bewijs dat voor iedere f in R geldt $A(f)=f(1)$.

61 (R,d) is een samenhangende metrische ruimte.
$p\in R$, $q\in R$ en $p\neq q$.
Bewijs dat er een $x\in R$ is met $d(p,x) = d(q,x)$.

62 $(R,\mathcal{T})$ is een topologische ruimte. $A\subset R$, A is samenhangend.
B is een deelverzameling van R waarvoor geldt $A\subset B\subset \overline{A}$ (waarbij $\overline{A}$ de afsluiting van A is).
Bewijs dat B een samenhangende deelverzameling van R is.

63 Laat a_k, b_k $(k=1,2,\ldots,n)$ positieve reële getallen zijn.
Bewijs dat

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$$

64 Laat $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ en $x_n\ge 2x_1$.
Bewijs dat $x_1x_2\cdots x_n \le \frac{8}{9}\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n$.

HOOFDSTUK 6

65 Zij $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ zo dat

$$\forall_{x\in[0,1]}\exists_{\delta>0}\,\forall_{y\in[0,1]}\left[(0<|y-x|<\delta) \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < 1\right].$$

Bewijs dat

$$\forall_{x\in[0,1]}\ \forall_{y\in[0,1]}\ [y \neq x \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < 1] .$$

66 Zij f een differentieerbare reële functie gedefinieerd op $[0,\infty)$ waarvoor $\lim_{x\to\infty} \{f(x)+f'(x)\} = 0$. Bewijs dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

67 Zij f een differentieerbare reële functie op $\mathbf{R}$ met $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.
Bewijs dat er een rij $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}$ is waarvoor geldt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

èn

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0.$$

68 Zij $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ doorlopend, d.w.z. als $0\le x<y\le 1$ en c ligt tussen $f(x)$ en $f(y)$, dan is er een $z\in[x,y]$ met $f(z)=c$ en zij f differentieerbaar op $(0,1)$ met begrensde afgeleide. Bewijs dat f continu is op $[0,1]$.

69 Beschouw

$$\Delta(c) := \max_{1\le x\le 2} \left|\frac{1}{x} - c\right| .$$

Bepaal de constante c zodanig dat $\Delta(c)$ minimaal is. Maak een grafiek van $\Delta(c)$.

70 Gegeven is dat $n \in \mathbf{N}$ en $a>0$.
Bepaal

$$\max\{xy \mid x^n+y^n = a,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

71 $G\colon \mathbf{R}^2\to \mathbf{R}$ is differentieerbaar in $(0,0)$ en $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \neq 0$.
$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is continu, $f(0)=0$ en $G(x,f(x)) = 0$ voor $x\in[-1,+1]$.

a) Bewijs dat $f(x) = O(x)$ $(x\to 0)$.

b) Bewijs dat f differentieerbaar is in 0 met afgeleide
$$-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)}.$$

72 Laat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij complexe getallen zijn waarvoor
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \ell.$
Laat
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{voor } 0 < x < 1.$$
Bewijs dat
$$\lim_{x\uparrow 1}(1-x)^2 f(x) = \ell.$$

73 Zij $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij complexe getallen waarvoor
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ $(n\to\infty)$.
Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k=1}^{n} a_k$.

74 Er is gegeven dat $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\zeta}$ uniform convergeert in $\zeta \in \mathbf{R}$.
Bewijs dat $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uniform convergeert op $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$.

HOOFDSTUK 7

75 Zij $f: [0,1] \to \mathbf{R}^+$ eigenlijk integreerbaar op elk interval $[\delta,1]$ met $0<\delta<1$.
Voor iedere $n \in \mathbf{N}$ definiëren we f_n door
$$f_n(x) := \min\{f(x),n\} \quad (x\in[0,1]).$$
Bewijs de volgende uitspraken:

a) Voor elke $n \in \mathbf{N}$ is f_n integreerbaar op $[0,1]$.

b) Als f niet integreerbaar, zelfs niet oneigenlijk integreerbaar, is over $[0,1]$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \infty.$$

c) Als f integreerbaar (eventueel oneigenlijk integreerbaar) is over $[0,1]$ dan is

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

76 Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2} = \frac{\pi}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right) \qquad (y\to\infty).$$

77 Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) .$$

78 Laat $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ een rij positieve reële getallen zijn met de eigenschap dat $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n\in\mathbf{N}$. Zij $f\colon [1,\infty) \to \mathbf{R}$ en zij f een monotoon niet-stijgende continue functie, waarvoor $f(n) = a_n$. Dan is de reeks $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ bestaat.
(Dit resultaat heet het integraalkenmerk voor convergentie van $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$.)

79 Laat f een monotone reële functie zijn gedefinieerd op $[1,\infty)$ en laat

$$F_n(x) := (x-1)\{f(1)+xf(x)+ \ldots +x^{n-1}f(x^{n-1})\} \quad (x\in[1,\infty),\ n\in\mathbf{N}).$$

Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\sqrt[n]{2}) = \int_1^2 f(x)\,dx.$$

80 a) Bewijs dat $\int_0^{2\pi} (e^{\sin x} - 1)dx > 0$ is.

b) Bewijs dat $\int_0^{\infty} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} dx$ niet bestaat.

81 Bewijs dat

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(\pi(x + \frac{1}{x}))}{x \log x} dx$$

bestaat.

82 Zij $f \in C([0,1])$ en $\int_0^1 f(x)x^n dx = o(\frac{1}{n}) \quad (n\to\infty)$.

Bewijs dat $f(1) = 0$.

83 Zij $f \in C^2([0,1])$.
Bewijs dat er een $c \in (0,1)$ is zó dat

$$\int_0^1 f(x)dx = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24} f''(c).$$

84 Zij $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{\log(1+x)}{1+x}$ voor $|x| < 1$.
Bewijs dat $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ convergeert en bepaal de som van deze reeks.

85 Zij

$$F(x) := \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (x \in (0,\infty)).$$

Toon aan dat

$$\int_0^{\infty} F(x)dx$$

bestaat.

86 Voor elke $t \in [0,\infty)$ definiëren we:

$$F(t) := \int_0^{\infty} \log(1+tx) \frac{\cos x}{x} dx.$$

Bewijs nu:

a) $\int_0^\infty \log(1+tx)\frac{\cos x}{x}\,dx$ convergeert uniform voor $0 \le t \le A$ voor elk reëel getal $A \in (0,\infty)$.

b) Bewijs dat $F'(t) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+tx}\,dx$ voor elke $t \in (0,\infty)$.

87 Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^\infty e^{-x^2}dx .$$

88 Zij ϕ een continue reële functie gedefinieerd op $[0,\infty)$ met $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 1$.

Bewijs dat door

$$F(a) := \int_0^\infty \phi\left(\frac{x}{a}\right)e^{-x}dx$$

een functie gedefinieerd is op $0<a<\infty$ en dat $\lim\limits_{a\downarrow 0} F(a) = 1$.

89 Laat f een continue reële functie zijn gedefinieerd op $[0,1]$ en laat

$$I(t) := \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\,f(x)dx \qquad (t>0).$$

Bewijs dat $\lim\limits_{t\downarrow 0} I(t) = f(0)$.

HOOFDSTUK 8

90 Bereken

$$\int_{|z-1|=R} \frac{\log z}{z-1}\,dz$$

voor $R>1$ met behulp van de contourintegraal $\int_K \frac{\log z}{z-1}\,dz$, waarbij K bestaat uit de cirkel om 1 met straal R, de cirkel om 0 met straal δ, en twee stukken rechte lijn langs de negatieve reële as tussen 1-R en $-\delta$.

91 De contour K bestaat uit de cirkel I met straal $R > 1$ om 0, in positieve zin doorlopen van -R tot -R, de cirkel II met straal $r < 1$ om 0, in negatieve zin doorlopen van -r tot -r, en de beide lijnstukken III en IV van -R tot -r, resp. van -r tot -R.

a) Bereken

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1 - z}\, dz.$$

b) Bereken

$$\lim_{r\to 0} \int_{II} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1 - z}\, dz.$$

c) Bereken nu $\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{1 + x}\, dx$ met behulp van $\int_K \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1 - z}\, dz$.

92 In het gebied G, ontstaan uit het complexe vlak door weglaten van de negatief-reële as inclusief 0, definieert men de functie f door

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{z^2 - 1} \qquad \text{(hoofdwaarde)}.$$

a) Bepaal plaats en aard van de eventuele singulariteiten van f binnen G.

b) Men beschouwt $\int_K f(z)dz$, waarin K de contour is bestaande uit $\{x \in \mathbf{R} | \delta \le x \le R\}$, $\{Re^{i\phi} | 0 \le \phi \le \pi/2\}$, $\{iy | \delta \le y \le R\}$ en $\{\delta e^{i\phi} | 0 \le \phi \le \pi/2\}$.
Leid hieruit af dat

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 y}{y^2 + 1}\, dy = \frac{\pi^3}{8}.$$

93 Bereken $\int_{|z|=2} \frac{1}{z+1} \sin \frac{z}{z+1}\, dz$.

94 Bereken $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\cos 1/z}$.

95 Bereken $\displaystyle\int_{-i}^{+i} ze^{z^2} \log z\, dz$

(integratie langs het rechte lijnstuk op de imaginaire as).

96 Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} \sin x}{x(x^2+1)}\, dx$

en hiermee

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+1)}\, dx \ .$$

97 De functie f is analytisch in $\mathbf{C}$ met uitzondering van een tweede orde pool in z=0 met residu 1. f heeft geen andere nulpunten dan z=1. Verder bestaat $\lim_{z\to\infty} f(z)$ en deze limiet is niet nul. Bepaal f.

98 De functie f is analytisch in $\mathbf{C}$ behoudens enkelvoudige polen in z=2 en z=4.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \ .$$

$$\int_{|z|=6} f(z)\,dz = 0 \ .$$

$$\max\{\,|f(z)|\;\big|\;|z| \le 1\} = 2 \ .$$

f(3+i) is reëel en positief.

Bepaal f.

99 De functie f is een gehele functie met een pool in ∞.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2 \qquad \text{voor alle } R>3.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)}\, dz = 1 \qquad \text{voor alle } 0<r<\tfrac{1}{4} \ .$$

$$f(1) = 3 .$$

Bepaal f.

100 De functie f is analytisch en begrensd op

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq 2\} .$$

Verder is gegeven dat $f(2) = 2$ en

$$f(n^2) = \frac{f(n)}{1 + \frac{1}{n}} \quad \text{voor} \quad n \in \mathbf{N},\ n \geq 2 .$$

Bepaal f.

101 Zij g analytisch in $\{z \mid |z| < 1\}$, $g(0) = 0$ en $g'(0) = 1$. Bewijs dat door

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, g(\tfrac{z}{n})$$

een analytische functie F is gedefinieerd in $\{z \mid |z| < 1\}$ en bereken $F'(0)$.

102 Bepaal de functie f met de volgende drie eigenschappen:

1) f is regulier in ∞.

2) f heeft twee singulariteiten, nl.
   i) een pool van orde 2 in $z=0$, met residu 0,
   ii) een singulariteit in $z=1$, zodanig dat

$$\lim_{z \to 1} f(z) \sin \pi z = 8\pi .$$

3) f heeft in $z=-1$ een nulpunt met multipliciteit 2.

103 Bepaal het residu in $z=\pi$ van

$$\frac{\log z}{\sin^2 z + (z-\pi)^3} .$$

104 a) laat zien dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(z \log n)}{2^n}$$

een gehele functie f is gedefinieerd.

b) Toon aan dat voor deze functie f geldt:

$$f(z) = 1 + O(z^2) \qquad (z \to 0).$$

105 De functie f is analytisch in een gebied dat 0 en 1+i bevat. De Taylorreeks van f om z=0 is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n .$$

Bereken f(1+i).

106 a) Toon aan dat in een omgeving van 0 geldt

$$(*) \qquad \frac{i}{2}\log(1+2z) = \arctan\frac{iz}{z+1} .$$

b) In welk gebied is $\frac{i}{2}\log(1+2z)$ gedefinieerd? Geef de definitie.
In welk gebied is $\arctan\frac{iz}{z+1}$ gedefinieerd? Geef de definitie.
In welk gebied geldt (*)?

Bibliografie

Naast de boeken waar in de tekst naar verwezen wordt noemen wij hieronder een aantal boeken die volgens ons zeer geschikt zijn voor verdere bestudering van de in dit boek behandelde onderwerpen.

[1] T.M. APOSTOL, Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus, Addison Wesley, Reading 1957.

[2] L. BAUMGARTNER, Gruppentheorie, Walter de Gruyter (Sammlung Göschen Band 837), Berlin 1964.

[3] E.T. COPSON, Metric spaces, Cambridge University Press, 1968.

[4] J. DIEUDONNE, Foundations of modern analysis, Academic Press, New York 1968.

[5] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation (3 vols.), Birkhäuser Verlag, Basel 1950-1955-1956.

[6] A.A. FRAENKEL, Abstract set theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1968.

[7] H. FREUDENTHAL, Exacte logica, F. Bohn, Haarlem 1961.

[8] R. GODEMENT, Cours d'algèbre, Hermann, Paris 1963.

[9] P.R. HALMOS, Introduction to Hilbert space, Chelsea, New York 1968.

[10] P.R. HALMOS, Finite dimensional vector spaces, D. van Nostrand-Reinhold, Princeton N.J. 1958.

[11] P.R. HALMOS, Naive set theory, D. van Nostrand-Reinhold, Princeton N.J. 1964.

[12] P.R. HALMOS, Intuïtieve verzamelingenleer, Aula boeken, Spectrum, Utrecht, Antwerpen 1968 (vertaling van 11).

[13] G.H. HARDY, A course of pure mathematics, Cambridge University Press, 1959.

[14] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA, Inequalities, Cambridge University Press, 1952.

[15] G.H. HARDY, E.M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, 1960.

[16] E. HILLE, Analysis (2 vols.), Blaisdell Publishing Company, Waltham 1966.
[17] E.L. INCE, Ordinary differential equations, Dover Publications, New York 1956.
[18] E. KAMKE, Mengenlehre, Walter de Gruyter (Sammlung Göschen Band 999/999a), Berlin 1969.
[19] D.H. LEHMER, A machine method for solving polynomial equations, Journal of the Assoc. for Comp. Machinery 8 (1961), p. 151-162.
[20] B.Sz. NAGY, Introduction to real functions and orthogonal expansions, Oxford University Press, 1965.
[21] A. RALSTON, A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, New York 1965.
[22] W. RUDIN, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, New York 1964.
[23] G.F. SIMMONS, Introduction to topology and modern analysis, McGraw-Hill, New York 1963.
[24] A. TARSKI, Inleiding tot de logica en tot de methodenleer der deductieve wetenschappen, Noord-Hollandse Uitgeversmij, Amsterdam 1953.
[25] E.C. TITCHMARSH, The theory of functions, Oxford University Press, 1952.
[26] G. VALIRON, Théorie des fonctions, Masson, Paris 1966.
[27] B.L. VAN DER WAERDEN, Algebra (2 vols.), Springer Verlag, Berlin 1966-1967.
[28] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Cambridge University Press, 1969.

Lijst van symbolen

Register