Numerieke analyse van het stuiken van een cilinder waarbij aan het stempel Coulombse wrijving in rekening wordt gebracht

technische hogeschool eindhoven
vakgroep produktietechnologie

blz. I van blz.
rapport nr.

rapport van de sectie: PT

codering:

titel: Numerieke analyse van het stuiken van een cilinder waarbij aan het stempel Coulombse wrijving in rekening wordt gebracht.

auteur(s): J.M.H. Cauberg

trefwoord: wrijving

sectieleider: S. Hoogenboom

hoogleraar: P.C. Veenstra

samenvatting

Onderzocht werden de mogelijkheden om wrijving te verwerken in een numerieke analyse van een plastisch deformatieproces. Twee wrijvingsmodellen, m.n. de zogenaamde plastische wrijving en Coulombse wrijving, zijn hierbij in beschouwing genomen.
Nagegaan is hoe wrijving in het principe van minimale potentiële energie kan worden ingebracht.
M.b.v. de eindige elementenmethode is het stuiken van een cilinder numeriek geanalyseerd; hierbij werd aan het stempel Coulombse wrijving aangenomen.

prognose

Verwacht mag worden dat de methode "substructuring", zoals die in het programma verwerkt is, ook bij andere randproblemen een geschikte methode is om iteratieprocessen uit te voeren waarbij de rekentijden binnen toelaatbare grenzen blijven.
Met name op het gebied van wrijving moet echter nog veel fundamenteel onderzoek gedaan worden om tot een acceptabel wrijvingsmodel te komen.

datum: januari 1974

aantal blz.

geschikt voor publicatie in:

Inhoudsopgave

Literatuurlijst.

[1] Kobayashi S. "New Solutions of rigid-plastic deformation problems using a matrix method". Journal of engineering for Industry ; vol. 95 (1973).

[2] Nagamatsu, Murota en Jimma. "On the non-uniform deformation of material in axially symmetric compression caused by friction." J.S.M.E ; vol 14, n° 70 (1971)

[3] Avitzur B. "Metal-Forming : Processes and analyses" Mc Graw-Hill, New York (1968)

[4] Hoogenboom S. "Toepassing van de eindige elementenmethode in de technische plasticiteit" rapport T.H.E. WT-0277 (1971)

[5] Forray J. "Variational calculus in Science and Engineering" Mc Graw-Hill, New York (1968)

[6] Hodge P.G. "Theorie ideal plastischer Körper" Springer-Verlag, Wenen (1954)

[7] Johnson W. en Mellor P.B. "Engineering Plasticity" van Nostrand Reinhold company, Londen (1973)

[8] Hill R. "The mathematical theory of plasticity" Oxford University press, Londen (1960)

Symbolenlijst

symbool	omschrijving	dimensie
τ	schuifspanning op een oppervlak	$ML^{-1}T^{-2}$
μ	wrijvingscoëfficiënt van Coulomb	–
σ_n	normaalspanning op een oppervlak	$ML^{-1}T^{-2}$
σ_v	vloeispanning	$ML^{-1}T^{-2}$
m	constante in het plastische wrijvingsmodel	–
u_r	radiale verplaatsing	L
u_x, u_y	radiale verplaatsing en axiale verplaatsing	L
r_n	neutrale straal	L
u	stempelverplaatsing	L
ψ	potentiële energie	ML^2T^{-2}
ε_{ij}^*	rektensor van het gevarieerde verplaatsingsveld	–
σ_{ij}^*	spanningstensor van het gevarieerde verplaatsingsveld	$ML^{-1}T^{-2}$
ε_{ij}	rektensor in evenwichtstoestand	–
σ_{ij}	spanningstensor in evenwichtstoestand	$ML^{-1}T^{-2}$
S_1	oppervlak van slipgebied	L^2
S	Totale contactvlak stempel-blokje	L^2
E	elasticiteitsmodulus	$ML^{-1}T^{-2}$
G	Glijmodulus	$ML^{-1}T^{-2}$
$[K]$	Totale belastingsvektor	MLT^{-2}
$[Q]$	Totale stijfheidsmatrix	MT^{-2}
$[U]$	Totale verplaatsingsvektor	L
$\left.\begin{matrix} Q_{ii} & Q_{il} & Q_{io} & Q_{iv} \\ Q_{li} & Q_{ll} & Q_{lo} & Q_{lv} \\ Q_{oi} & Q_{ol} & Q_{oo} & Q_{ov} \\ Q_{vi} & Q_{vl} & Q_{vo} & Q_{vv} \end{matrix}\right\}$	Deelmatrices van $[Q]$	MT^{-2}

PT

Indeling van het rapport

Allereerst wordt in hoofdstuk I een korte inleiding gegeven betreffende het in rekening brengen van wrijving als randvoorwaarde in de eindige elementenmethode.
Hierna worden in hoofdstuk II twee modellen opgesteld voor deze randvoorwaarde. Tevens wordt de aard van deze modellen nader onderzocht.
In hoofdstuk III wordt nagegaan hoe wrijving in het principe van minimale potentiële verwerkt kan worden. Er wordt een minimumprincipe geformuleerd waarin beide, in hoofdstuk II besproken modellen, gebruikt kunnen worden.
In hoofdstuk IV wordt daarna gebruik gemaakt van dit minimumprincipe in het speciale geval van het stuiken van een cilinder.
De aard van de randvoorwaarde is er de oorzaak van dat het probleem niet direkt oplosbaar is.
De gevolgde methode om toch tot een oplossing te komen wordt aangegeven waarna het relevante deel van het programma en een flow-schema daarvan beschreven worden.
Tenslotte zijn in hoofdstuk V de resultaten en conclusies vermeld.

Ten behoeve van de leesbaarheid van het rapport zijn de detailberekeningen opgenomen in appendices.

I Inleiding

Doel van het onderzoek: Numerieke analyse van het stuiken van een massieve cilinder waarbij aan het stempelvlak wrijving in rekening wordt gebracht.
Genoemd onderzoek is, vanwege de ad hoc benadering, bedoeld als eerste aanzet tot een meer algemene numerieke analyse van deformatieproblemen waarbij wrijving optreedt.

In de meeste plastische deformatieproblemen speelt wrijving een belangrijke rol. De analyse daarvan wordt door twee factoren zeer bemoeilijkt.
Ten eerste is nog weinig bekend over het verschijnsel wrijving; met name een betrouwbaar wrijvingsmodel is er nog niet.
In de tweede plaats is de analytische verwerking van een (eventueel goed) wrijvingsmodel beperkt.
Dit laatste geldt vooral t.a.v. de conventionele analyses. Hierbij wordt de wrijving vaak gebruikt als sluitpost van de berekening.
De mogelijkheden tot verwerking van een wrijvingsmodel in een numerieke analyse zijn groter.

De beperkingen hierbij zijn meer van rekentechnische aard, met name de rekentijden en daardoor de kosten vormen hierbij een belangrijke beperkende factor.
De numerieke methode die bij het hier verrichtte onderzoek is toegepast is de zogenaamde eindige elementenmethode (e.e.m.), gecombineerd met Coulombse wrijving.
De e.e.m. is reeds veelvuldig toegepast bij elastische en elasto-plastische deformatieproblemen.
Voor zover bekend is het in rekening brengen van wrijving in een numerieke analyse alleen nog door Kobayashi [1] en Nagamatsu, Murota, Jimma [2] gedaan. Kobayashi rekende met een uniforme en een lineair verlopende schuifspanning langs het wrijvingsoppervlak. Dit model kan vrij eenvoudig numeriek worden verwerkt.
Nagamatsu, Murota en Jimma vermeden het probleem van de wrijving door eerst een experiment te doen en de benodigde gegevens te meten.

II Wrijvingsmodellen.

In de technische plasticiteitsleer wordt gebruik gemaakt van een van de nu volgende wrijvingsmodellen.

A. Wrijving volgens de wet van Coulomb

Indien tussen twee lichamen wrijving optreedt, dan kan de schuifspanning in een punt van het contactvlak niet groter worden dan een fractie van de normaalspanning.

$$\tau \leq \mu \cdot \sigma_n \qquad (2.1)$$

waarin: τ = schuifspanning

μ = wrijvingscoëfficiënt.

σ_n = normaalspanning.

De gelijkheid geldt alleen in de punten van het contactvlak waar relatieve verplaatsing optreedt.

B. De z.g. plastische wrijving

Uit het von Mises vloeicriterium volgt dat de schuifspanning in een punt van het contactvlak niet groter kan worden dan $\frac{\sigma_v}{\sqrt{3}}$. Hierin is σ_v de vloeispanning van het zachtste materiaal.

Daarom wordt in dit model gesteld

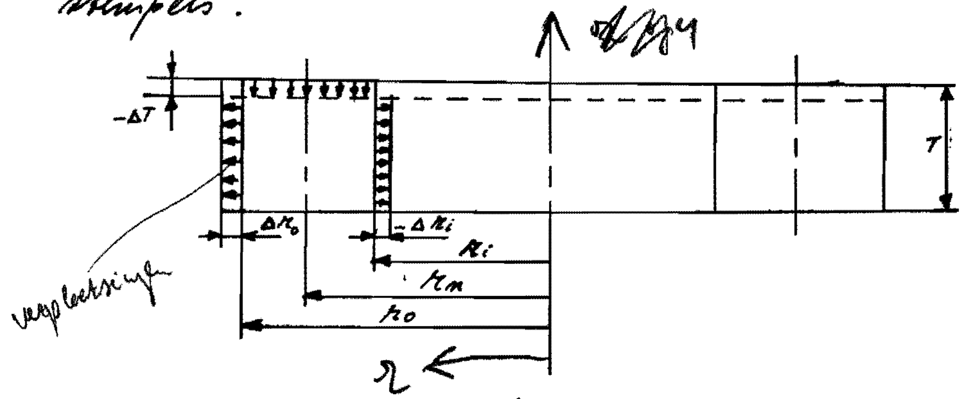
$$\tau = m \cdot \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \qquad (2.2)$$

waarbij $0 \leq m \leq 1$

Door m te kiezen, als functie van de plaats op het oppervlak, komt men tot een bepaalde schuifspanningsverdeling. Meestal wordt m constant genomen over het hele oppervlak.

m is toch geen materiaalconstante; waar hangt deze van af? (o.a. van de spanningstoestand)

Een belangrijke methode ter bepaling van μ en m is de <u>ringcompressietest</u>.
In deze test wordt een ring geperst tussen twee stempels.



<u>fig. 2.1</u>

T, r_i, r_o en r_m zijn de momentane waarden van resp. hoogte, binnenstraal, buitenstraal en z.g. neutrale straal.
Het verplaatsingveld wordt zo aangenomen dat alle punten die op de neutrale straal liggen in radiale richting niet verplaatsen. Tevens wordt aangenomen dat de verplaatsing in radiale richting u_r onafhankelijk is van de coördinaat in axiale richting.

Er geldt dan voor u_r: $u_r < 0$ voor $r < r_m$

$u_r > 0$ voor $r > r_m$

Met behulp van de eigenschap van volume-invariantie kan een verband worden afgeleid tussen r_o, r_i en r_m.
Dit verband luidt:

$$2\pi \cdot r_o \cdot T \cdot \Delta r_o = -\pi\left(r_o^2 - r_m^2\right) \cdot \Delta T \qquad (2.3)$$

en

$$2\pi \cdot r_i \cdot T \cdot \Delta r_i = -\pi\left(r_m^2 - r_i^2\right) \cdot \Delta T \qquad (2.4)$$

Deelt men (2.3) door (2.2) dan ontstaat:

$$-\frac{r_i \Delta r_i}{r_o \Delta r_o} = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_o^2 - r_m^2} = \frac{\left(r_m/r_o\right)^2 - \left(r_i/r_o\right)^2}{1 - \left(r_m/r_o\right)^2} \qquad (2.5)$$

en hieruit volgt:

$$\frac{r_m^2}{r_o^2} = \frac{r_i/r_o - \Delta r_i/\Delta r_o}{r_o/r_i - \Delta r_i/\Delta r_o} \qquad (2.6)$$

Door de waarden van r_i, r_o, Δr_i en Δr_o te meten kan met (2.6) r_m worden berekend.

Met de genoemde aannamen vond Avitzur [3] voor het verplaatsingsveld:

tangentiale verplaatsing per tijdseenheid : $\dot{U}_t = \frac{dU_t}{dt} = 0$ (2.7)

axiale " " " : $\dot{U}_y = \frac{y}{T} \cdot \dot{U}$ (2.8)

radiale " " " : $\dot{U}_r = -\frac{1}{2}\frac{\dot{U}}{T} \cdot r\left(1 - \left(\frac{r_m}{r}\right)^2\right)$ (2.9)

waarbij U = stempelverplaatsing.

Dit verplaatsingsveld impliceert de aanname van de neutrale straal.

Wanneer nu met dit verplaatsingsveld de waarde van de potentiële energie bepaald wordt, dan is deze altijd groter dan de waarde van de potentiële energie welke hoort bij het werkelijke verplaatsingsveld.

De uitdrukking voor de potentiële energie is een functie van de volgende grootheden:

$$\psi = \psi\left(\sigma_v\,,\; i\,,\; \frac{r_i}{r_o}\,,\; \frac{r_n}{r_o}\,,\; m\,(\text{of}\,\mu)\,,\; \frac{r_o}{T}\right) \qquad (2.10)$$

De „beste" oplossing wordt nu gevonden door de kleinste waarde van ψ als functie van r_n te bepalen, de z.g. lower-upperbound oplossing. Deze kleinste waarde wordt bepaald door de vergelijking

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_n} = 0 \qquad (2.11)$$

op te lossen.

Gebruikt men plastische wrijving als wrijvingsmodel dan wordt (2.11):

a) als $r_n \leq r_i$

$$\frac{r_n^2}{r_o^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\left(r_i/r_o\right)^4\cdot x^2}{\sqrt{x\cdot(x-1)\cdot\left\{1-\left(\frac{r_i}{r_o}\right)^4 x\right\}}} \qquad (2.12)$$

waarin: $x = \left\{\frac{r_o}{r_i}\exp\left(-m\frac{r_o}{T}\left(1-\frac{r_i}{r_o}\right)\right)\right\}^2$

b) als $r_i \leqslant r_m \leqslant r_o$

$$\frac{r_m}{r_o} = \frac{2\sqrt{3}\cdot m\cdot r_o}{\left(r_o/r_i\right)^2 - 1}\cdot\left\{\sqrt{1 + \frac{\left(1 + r_i/r_o\right)\left(\left(r_o/r_i\right)^2 - 1\right)}{2\sqrt{3}\cdot m\cdot r_o/T}} - 1\right\} \qquad (2.13)$$

Indien men de voorkeur geeft aan Coulombse wrijving als wrijvingsmodel kan gebruik gemaakt worden van het verband tussen Coulombse wrijving en plastische wrijving :

$$\mu\cdot P_{gemiddeld} = \frac{m\cdot\sigma_v}{\sqrt{3}} \qquad (2.14)$$

Substitutie van (2.14) in $\left\{\begin{matrix}(2.13)\\(2.12)\end{matrix}\right.$ geeft dan de uitdrukking met als parameter μ.
De met (2.6) berekende waarde van r_m kan nu in $\left\{\begin{matrix}(2.13)\\(2.12)\end{matrix}\right.$ gesubstitueerd worden en $m(\mu)$ kan worden berekend.

Opmerkingen :

1. In het geval van het stuiken van een massief cilindrisch blokje is er aan het contactvlak een slipgebied en een stickgebied te onderscheiden. In het stickgebied treedt geen radiale verplaatsing op en in het slipgebied is er wel radiale verplaatsing. Het verband tussen μ en m (2.14) kan alleen in het slipgebied gebruikt worden, want in het stickgebied

is de schuifspanning volgens Coulomb kleiner dan $\mu * \sigma_n$.
Het wrijvingsmodel van Coulomb geeft dus meer direkte informatie over de schuifspanning in het slipgebied dan in het stickgebied.

2. Het plastische wrijvingsmodel geeft echter meer informatie in het stickgebied dan in het slipgebied.
Dit blijkt uit het volgende

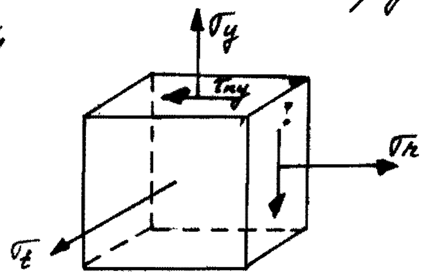


fig 2.2

Het getekende volumeelementje bevindt zich aan het stempelvlak in het stickgebied. Dit betekent dat er geen radiale en geen tangentiale rek is, en vanwege volumeinvariantie dus ook geen axiale rek.
De elastische vervormingen zijn hierbij verwaarloosd.
De enige deformatie die het blokje kan ondergaan is afschuiving.
Met Levy-von Mises kan dan worden gevonden

$$\sigma_r = \sigma_y = \sigma_t \qquad (2.15)$$

Beschouwing van de cirkels van Mohr voor deze spanningstoestand leert dat τ_{ry} de grootste schuifspanning is van alle schuifspanningen op vlakken door het blokje.

Dus $\tau_{xy} = \tau_{max} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = 1$ in het stickgebied.

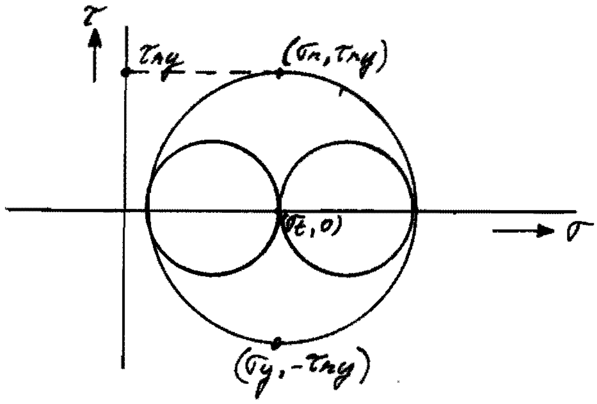


fig 2.3

3. Indien in een punt van het contactvlak een vlakspanningstoestand of een ruimtelijke spanningstoestand heerst kan de schuifspanning langs een vlak door dat punt niet groter worden dan $\frac{\sigma_v}{\sqrt{3}}$.
In geval van een lijnspanningstoestand echter kan de schuifspanning niet groter worden dan $\frac{\sigma_v}{2}$. In appendix [A] wordt dit aangetoond.

III Wrijving en potentiële energie

Het rekening brengen van wrijving in de eindige elementen-methode houdt automatisch onderzoek in naar de rol van wrijving in het principe van minimale potentiële energie. Dit principe is immers (nog steeds) de belangrijkste steunpilaar van de eindige elementenmethode.

Twee belangrijke problemen die zich hierbij voordoen zijn:

1. Hoe wordt een gekozen wrijvingsmodel in het minimumprincipe verwerkt.
2. In het algemeen is niet bekend hoe groot stick- en slipzone zijn.

Het eerste probleem zal nu voor het geval van cirkelsymmetrie worden onderzocht.

Wrijving in het potentiële energieprincipe

Wanneer in een lichaam discontinuïteiten in het verplaatsingsveld optreden kan dat lichaam verdeeld worden in een aantal gebieden, zodanig dat in elk van de deelgebieden geen discontinuïteiten in het verplaatsingsveld meer zijn.

Wanneer in elk van de gebieden de verplaatsingen continu en differentieerbaar zijn, dan kunnen de rekken uitgedrukt worden in de verplaatsingen:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \qquad (3.1)$$

Met behulp van de spanning-rek relaties en (3.1) kan het spanningsveld (σ_{ij}^*) bepaald worden.
Dit spanningsveld hoeft niet aan evenwicht te voldoen.
Van alle mogelijke verdelingen ($\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*$) is er maar een waarvan de spanningen aan evenwicht voldoen: ($\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$).
De evenwichtsvergelijkingen kunnen geschreven worden als:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (3.2)$$

Voor elk van de deelgebieden luidt de virtuele arbeidsvergelijking:

$$\iiint_V \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^*\, dv = \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}\, dV = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij} \cdot u_i^*}{\partial x_j}\, dV =$$

$$= \iint_S (\sigma_{ij}\, u_i^*, n_j)\, ds = \iint_S \sigma_i \cdot u_i^*\, ds \qquad (3.3)$$

waarin s het oppervlak is van gebied V en $\underline{n}$ is de normaalvektor op dit oppervlak.
Door sommatie over alle gebieden van de vergelijkingen (3.3) wordt de virtuele arbeidsvergelijking voor het hele

lichaam :

$$\iiint_{V^\circ} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^{*}\, dV = \iint_{S} \sigma_i\, u_i^{*}\, ds + \Sigma \iint_{S_{hk}} \sigma_{t_i} \left(u_{t_i}^{*(h)} - u_{t_i}^{*(k)} \right) ds \qquad (3.4)$$

waarbij :

V° = volume hele lichaam.

S = oppervlak van het lichaam.

Σ = sommatie over alle discontinuïteitsvlakken S_{hk}

σ_{t_i} = component in de i-richting van de tangentiële spanning langs het discontinuïteitsvlak S_{hk}, die gebied k op gebied h uitoefent.

$u_{t_i}^{*(h)}$ en $u_{t_i}^{*(k)}$ zijn de componenten in de i-richting van de tangentiële verplaatsingen aan het oppervlak S_{hk} van resp. gebied h en gebied k.

In het geval van het stuiken van cilindrisch blokje kan het vlak tussen stempel en blokje worden opgevat als discontinuïteitsvlak, omdat daar een discontinuïteit in het verplaatsingsveld optreedt.

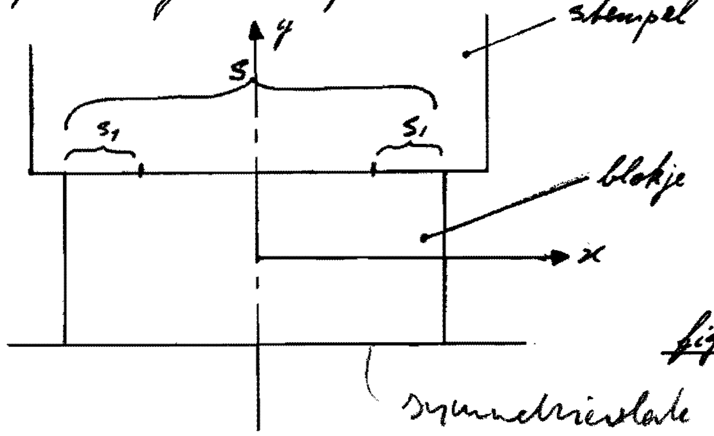


fig. 3.1

De virtuele arbeidsvergelijking (3.4) wordt voor dit geval

$$\iiint_{V'} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^{*}\, dv = \iint_{S_{totaal}} \sigma_i \cdot u_i^{*}\, ds + \iint_{S_1} \overset{\tau_{xl}}{\cancel{\sigma_x}} \cdot u_x^{*}\, ds \qquad (3.5)$$

waarbij: V' = volume stempel + blokje.

S_{totaal} = oppervlak stempel + blokje behalve het contactvlak.

S_1 = slipgebied.

Omdat het stempel star is kan in deze uitdrukking in plaats van V' ook V worden genomen (V = volume blokje).

Veronderstellen we nu verder dat u_i^{*} voldoet aan de randvoorwaarden op het oppervlak S_{totaal}, dus $u_i^{*} = u_i$ als u_i voorgeschreven is, dan volgt uit (3.5):

$$\iiint_{V} \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij}\right) dv = \iiint_{S_1} \sigma_x \cdot \left(u_x^{*} - u_x\right) ds \qquad (3.6)$$

Op S_{totaal} is immers $\sigma_i = 0$ (cilindermantel) óf $u_i^{*} - u_i = 0$ (onderstempel).
bovenstempel $\rightarrow$ ook $\sigma_x = 0$

Bij elastische vervormingen is het verband tussen de spanningen en rekken gegeven door de relaties van Hooke:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G} \qquad (3.7)$$

en

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} \cdot \sigma_{ii} \qquad (3.8)$$

waarin: de deviatorische spanning $\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{\sigma_{kk}}{3}$ (3.9)

de deviatorische rek $\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{kk}}{3}$ (3.10)

Met behulp van (3.7) en (3.8) kan de reciprociteitsstelling worden afgeleid. Deze stelling luidt:

$$\sigma_{ij}^{*} \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}' \cdot \sigma_{ij}'^{*}}{2G} + \frac{3(1-2\nu) \cdot \sigma_{kk} \cdot \sigma_{mm}^{*}}{E} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*} \qquad (3.11)$$

Vanwege (3.11) geldt:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{*} - 2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} &= 2\sigma_{ij}^{*}\varepsilon_{ij} - 2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \\ &= \sigma_{ij}^{*}\varepsilon_{ij}^{*} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - (\sigma_{ij}^{*} - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij}) \end{aligned} \qquad (3.12)$$

De term $(\sigma_{ij}^{*} - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij})$ kan met de wet van Hooke worden uitgedrukt in de spanningen:

$$(\sigma_{ij}^{*} - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^{*} - \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2G}(\sigma_{ij}'^{*} - \sigma_{ij}')^2 + \frac{3(1-2\nu)}{E}(\sigma_{kk}^{*} - \sigma_{kk})^2 \geqslant 0$$

Dus geldt: $\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{*}\varepsilon_{ij}^{*} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) \geqslant \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{*} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ (3.13)

Substitutie van (3.6) in deze ongelijkheid geeft het minimumprincipe:

$$\frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^{*}\varepsilon_{ij}^{*}\,dv - \iint_{S_1} \sigma_x u_x^{*}\,ds \geqslant \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dv - \iint_{S_1} \sigma_x u_x\,ds \qquad (3.14)$$

- Kan toch ook direkt gevonden worden uit het 'normale' principe van min. pot. en.
- Bij variëren is σ_x constant gedacht. Bij toepassing van Coulomb hangt hij echter van de gevariëerde σ_y af.

Dit minimumprincipe dient als uitgangspunt voor de numerieke berekening van het stuiken van een blokje. De werkwijze van deze numerieke berekening wordt in hoofdstuk IV besproken.

Opmerking

In de potentiële energie uitdrukking zonder wrijving

$$\psi = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,dv - \iint_{S_T} \sigma_i u_i\,ds \qquad (3.15)$$

is S_T het oppervlak van de voorgeschreven spanningen. In de uitdrukking met wrijving echter komt de term $\iint \sigma_x u_x\,ds$ voor waarin S_1 geen deel hoeft te zijn S_1 van het oppervlak van de voorgeschreven spanningen.

zo heb je ze wel toegepast, immers je varieert σ_x niet

IV Numerieke verwerking

Bij toepassing van de eindige elementenmethode op continue lichamen wordt het lichaam verdeeld in een aantal elementen. De elementen zijn onderling verbonden in de knooppunten. In deze knooppunten laat men ook de uitwendige belasting aangrijpen.

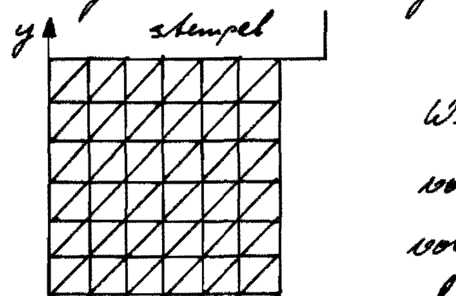
Wordt nu gebruik gemaakt van het principe van minimale potentiële energie, dan zijn de knooppuntsverplaatsingen de nader te bepalen grootheden.

Het aantal lineaire vergelijkingen dat gevonden kan worden is gelijk aan het totaal aantal onbekende knooppuntsverplaatsingen en krachten (~~zie rapport nr. 0277 van S. Hoogenboom~~ [4], hoofdstuk III).

In geval van het stuiken van een cilindrisch blokje kan volstaan worden met een vlakke elementenverdeling. Dit vanwege de rotatorische symmetrie.

Wordt als elementvorm de driehoek gekozen, dan kan de elementenverdeling van het blokje er als volgt uit zien

fig 4.1



Wegens symmetrie kan voor de berekening volstaan worden met een kwart van de axiale doorsnede.

Het stelsels vergelijkingen dat met het principe van minimale potentiële energie gevonden kan worden luidt:

$$[K] = [Q] * [u] \qquad (4.1)$$

waarin:

$[u]$ = vektor met als componenten de knooppuntverplaatsingen.
$[K]$ = " " " " " knooppuntskrachten.
$[Q]$ = stijfheidsmatrix.

Om dit stelsel op te kunnen lossen moeten er evenveel vergelijkingen zijn als onbekende grootheden. Hieraan is automatisch voldaan als in ieder knooppunt zowel in de x- als in de y-richting de kracht of de verplaatsing is voorgeschreven.
Indien Coulombse wrijving tussen stempel en blokje aangenomen wordt dan zijn er evenveel bekende grootheden als onbekende grootheden per knooppunt, zoals uit het volgende zal blijken. Desondanks is het stelsel vergelijkingen niet zonder meer oplosbaar.
Coulombse wrijving betekent:

1) In het slipgebied:

$$\tau_x = \mu \cdot \sigma_y \qquad (4.2)$$

waarin τ_x = schuifspanning
σ_y = normaalspanning

Deze randvoorwaarde voor de spanningen kan vertaald worden in een randvoorwaarde voor de knooppuntskrachten. (zie appendix B)
Voor knooppunt (n), dat aan het stempelvlak ligt, is het resultaat :

in de y-richting : $Ky(n) = A * \sigma_y(n-1) + B * \sigma_y(n) + C * \sigma_y(n+1)$ (4.3)
in de x-richting : $Kx(n) = A * \sigma_x(n-1) + B * \sigma_x(n) + C * \sigma_x(n+1)$ (4.4)

waarbij A, B en C constanten zijn die afhangen van de knooppuntscoördinaten.

Als de knooppunten (n-1), (n) en (n+1) in het slipgebied liggen, dan geldt dus voor knooppunt (n) :

$$Kx(n) = \mu * Ky(n) \qquad (4.5)$$

2/ In het stickgebied :

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x < \mu \, \sigma_y \\ U_x = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (4.6)$$

Uit (4.3) en (4.4) is af te leiden dat $Kx(n) < \mu Ky(n)$ als voor het interval tussen (n-1) en (n) geldt $\underline{\sigma_x < \mu \cdot \sigma_y}$ hoe ? *
De randvoorwaarde voor de knooppuntskrachten is dan

$$\left.\begin{matrix} Kx(n) < \mu * Ky(n) \\ Ux(n) = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (4.7)$$

per knooppunt zijn er dus evenveel bekende grootheden als onbekende grootheden, zowel in het stickgebied als in het slipgebied.

Bij voorbaat is echter niet bekend of een knooppunt in het stickgebied, danwel in het slipgebied ligt, zodat niet vastligt welke van de twee randvoorwaarden (4.6) resp. (4.7) gebruikt moet worden.

In het nu volgende zal de globale gedachtengang van een methode worden beschreven die gebruikt zou kunnen worden om nauwkeurig de grootte van slip- en stickgebied te bepalen.
Het is echter de vraag of deze methode efficiënt is, omdat de verkregen nauwkeurigheid in de berekening in geen verhouding staat tot de hoeveelheid programmeerwerk.
Daarna volgt de aanpak zoals die in het programma gevolgd is („substructuring").

A. Methode om grootte van slipgebied nauwkeurig te bepalen.

Uitgangspunt is dat gebruik kan worden gemaakt van de vergelijking

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0 \qquad (4.8)$$

waarin: φ = potentiële energie.
s_1 = grootte van slipgebied.

Voor het bewijs hiervan wordt verwezen naar appendix C.

Wat betreft de verandering van het slipgebied als functie van de stempelverplaatsing zijn er twee gevallen:

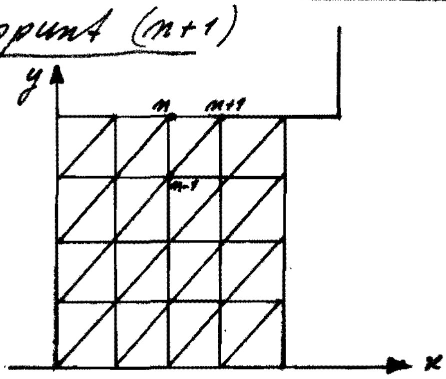
a. Slipgebied neemt toe bij toenemende stempelverplaatsing.

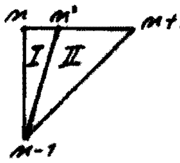
b. slipgebied neemt af bij toenemende stempelverplaatsing.

We zullen ons nu beperken tot geval (a.) — blijkt niet

Stel dat de grens tussen slip- en stickgebied zich bevindt in knooppunt (n+1) — hoe bepaal je dat

fig. 4.2





hier geef je weer een andere betekenis aan n

Beschouw nu het element met de knooppunten (n-1), (n) en (n+1). Dit element wordt verdeeld in twee elementen waarvan de knooppunten zijn:

element I : (n-1), (n) en (n').

element II : (n-1), (n') en (n+1).

De coordinaat in radiale richting van knooppunt (n'): R bepaalt na de stap in de stempelverplaatsing de grootte van het slipgebied.

Om de toename van S_1 te bepalen wordt de stapgrootte in de stempelverplaatsing zo klein gekozen dat de toename van S_1 kleiner of gelijk is aan de afstand tussen knooppunt (n) en (n+1).
(4.8) is equivalent met:

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \qquad (4.9)$$

Het lineaire verplaatsingsveld, dat binnen een element wordt aangenomen, luidt voor element I:

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y \\ v &= a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

De verplaatsingsvektor van dit element wordt

$$\begin{bmatrix} u(n) \\ v(n) \\ u(n-1) \\ v(n-1) \\ u(n') \\ v(n') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n \\ 1 & x_{n-1} & y_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n \\ 1 & R & y_{n'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R & y_{n'} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \qquad (4.11)$$

De matrix bevat de knooppuntscoördinaten. Deze matrix wordt gebruikt in de berekening van de gediskretiseerde potentiële energie (zie rapport ~~Hoogenboom~~ [4]).
Het resultaat van deze berekening luidt:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,[u]^t * [Q] * [u]^t - [k] * [u]^t \qquad (4.12)$$

waarin: $[u]^t$ = verplaatsingsvektor van het hele blokje.
$[Q]$ = stijfheidsmatrix.

De coordinaat R komt uiteindelijk ook in de stijfheidsmatrix voor.
Door variatie van het verplaatsingsveld is uit (4.12) af te leiden

$$[K] = [Q]*[u]^t \qquad (4.13)$$

Gebruikt men in (4.13) voor knooppunt (n) de randvoorwaarde van het stickgebied en voor knooppunt (n+1) de randvoorwaarde van het slipgebied, dan kunnen de onbekende verplaatsingen en de waarde van R berekend worden door oplossing van het stelsel vergelijkingen :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial R} = \dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}[u]^t[Q][u]^t - [K][u]^t\right)}{\partial R} = 0 \qquad (4.14) \\ [K] = [Q]*[u]^t \end{cases}$$

hoe (numeriek)
(examenzitting.?)

B. Substructuring.

In de inleiding van dit hoofdstuk werd aangetoond dat het stelsel vergelijkingen $K = Q \cdot u$ niet zonder meer oplosbaar is wanneer Coulombse wrijving tussen stempel en blokje in rekening wordt gebracht.
Om nu uitsluitsel te geven over de vraag of een knooppunt in het stickgebied of in het slipgebied ligt kan een iteratieproces gestart worden.
Eerst zal nu worden aangegeven hoe de berekening verloopt voor het algemene geval. Vervolgens wordt een uitwerking hiervan gegeven voor het geval van het stuiken van een cilinder. Hierbij zal ter beperking van de rekentijd gebruik gemaakt worden van de methode „substructuring".

→ waar houdt dit op (parameterverdeling nabij)

Algemeen: De bepaling van de grootte van het slip-gebied gebeurt als volgt:

stap 1. – Neem in eerste instantie aan dat het hele contactvlak stickgebied is.
- Bepaal vervolgens met (4.13) alle verplaatsingen en krachten in het contactvlak.
- Ga na of er knooppunten in het contactvlak zijn waarvoor gevonden wordt:

$$K_x > \mu \cdot K_y$$

en zo ja, bepaal van welk knooppunt(e)de ongelijkheid het grootst is.

<u>stap 2.</u> – Schrijf voor knooppunt (i) voor

$$K_x = \mu \cdot K_y$$

en neem de rest van het contactvlak als stickgebied aan.

– Bepaal met (4.13) de knooppuntskrachten in het stick-gebied.

– Ga na of er knooppuntskrachten in het stickgebied zijn waarvoor $K_x > \mu \cdot K_y$ en zo ja, bepaal van welk knooppunt (j) de ongelijkheid het grootst is.

<u>stap 3.</u> Identiek aan stap 2. Nu wordt voor knooppunt (i) en (j) voorgeschreven $K_x = \mu \cdot K_y$.

etc.

De iteratie gaat door totdat de juiste slipzône is gevonden.

<u>Opmerkingen</u>

<u>1.</u> Het is duidelijk dat in stap 2 niet in een keer alle knooppunten, waarvoor gevonden werd : $K_x > \mu \cdot K_y$, tot het slipgebied mogen worden gerekend. Bij het een voor een toelaten van de knooppunten tot het slipgebied zullen de knooppuntskrachten in de „zich vormende" stickzône steeds wijzigen.

<u>2.</u> Bij plastische deformatie wordt vanwege het niet lineaire karakter van de basisvergelijkingen een stapsgewijze berekening toegepast. In het algemeen

zal het slipgebied van grootte veranderen tijdens het het deformatieproces. Het is daarom noodzakelijk om bij iedere stap in de berekening bovengenoemde iteratie uit te voeren.

3. Wanneer het iteratieproces op deze manier uitgevoerd wordt, moet in elke iteratieslag het hele stelsel vergelijkingen (4.13) opgelost worden. Hierdoor kunnen de rekentijden ontoelaatbaar hoog oplopen.

Door eliminatie van interne vrijheidsgraden, <u>substructuring</u> genaamd, kan een veel kleiner stelsel vergelijkingen worden gevonden. Een en ander zal nu worden toegelicht voor het geval van het stuiken van een cilinder.
Het stelsel vergelijkingen (4.13) kan geschreven worden als:

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_e \\ K_o \\ K_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{ie} & Q_{io} & Q_{iv} \\ Q_{ei} & Q_{ee} & Q_{eo} & Q_{ev} \\ Q_{oi} & Q_{oe} & Q_{oo} & Q_{ov} \\ Q_{vi} & Q_{ve} & Q_{vo} & Q_{vv} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_i \\ U_e \\ U_o \\ U_v \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

waarbij:

U_e = vektor met als componenten ~~de~~ toenamen van de verplaatsingen in de x-richting (ΔU_x) van de knooppunten $(n+1)$ t/m. $(n+nx-1)$.

nx = aantal knooppunten in de x-richting.

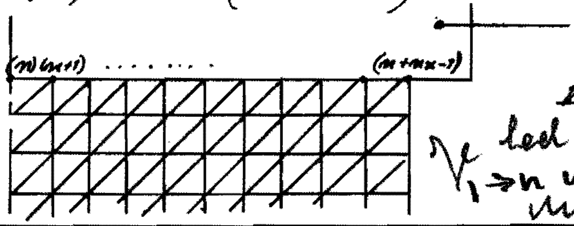


fig 4.3

V_i led ze lokaal
$V_{1 \to n}$ moeten nummeren.

K_e = de met U_e overeenkomende verandering belastingsvektor.

U_v = vektor met als componententen de kolnamen van de verplaatsingen in de y-richting (ΔU_y) van de knooppunten (n) t.m. (n+nx-1).

K_v = de met U_v overeenkomende belastingsvektor.

U_o = vektor met voorgeschreven componenten gelijk aan nul.

K_o = de met U_o overeenkomende belastingsvektor.

U_i = vektor met als componenten de kolnamen van verplaatsingen, zowel in de x- als in de y-richting van de overige knooppunten.

K_i = de met U_i overeenkomende belastingsvektor, waarvan alle componenten gelijk aan nul zijn.

Uit (4.15) volgt:

$$K_i = Q_{ii}\cdot U_i + Q_{ie}\,U_e + Q_{io}\cdot U_o + Q_{iv}\cdot U_v =$$

$$Q_{ii}\cdot U_i + Q_{ie}\cdot U_e + Q_{iv}\cdot U_v = 0 \qquad (4.16)$$

Inverteren van Q_{ii} geeft:

$$U_i = Q_{ii}^{-1}\left(-Q_{ie}\cdot U_e - Q_{iv}\cdot U_v\right) \qquad (4.17)$$

Uit (4.15) volgt ook:

$$K_e = Q_{ei}\cdot U_i + Q_{ee}\cdot U_e + Q_{ev}\cdot U_v \qquad (4.18)$$

en

$$K_v = Q_{vi}\cdot U_i + Q_{ve}\cdot U_e + Q_{vv}\cdot U_v \qquad (4.19)$$

In verband met de te gebruiken Coulombse wrijving worden de laatste (nx-1) vergelijkingen van (4.19)

vermenigvuldigd met μ en vervolgens afgetrokken van het stelsel (4.18).
Dan ontstaan $(nx-1)$ vergelijkingen:

$$k_e - \mu \cdot k_v = Q_A \cdot U_i + Q_B \cdot U_e + Q_C \cdot U_v \qquad (4.20)$$

waarbij:
de componenten van $k_e - \mu \cdot k_v$ de uitdrukkingen $k_x - \mu \cdot k_y$ van de knooppunten $(n+1)$ t/m $(n+nx-1)$ zijn.

$Q_A = Q_{ei} - \mu \cdot Q_{vi}$

$Q_B = Q_{ee} - \mu\, Q_{ve}$

$Q_C = Q_{ev} - \mu\, Q_{vv}$

Substitutie van (4.17) in (4.20) geeft:

$$k_e - \mu \cdot k_v = Q_A \cdot Q_{ii}^{-1}\left(-Q_{ie} \cdot U_e - Q_{iv} \cdot U_v\right) + Q_B \cdot U_e + Q_C \cdot U_v \qquad (4.21)$$

of anders geschreven:

$$\left(Q_B - Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{ie}\right) \cdot U_e = k_e - \mu \cdot k_v + \left(Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{iv} - Q_C\right) \cdot U_v \qquad (4.22)$$

Om de matrices $Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{ie}$ en $Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{iv}$ te berekenen wordt gebruik gemaakt van de methode van Choleski voor symmetrische, positief definiete matrices. Hierbij wordt de matrix Q_{ii}^{-1} niet berekend, maar wordt een rechtsbovendriehoeksmatrix T bepaald, zó dat:

* Waarom is dit stelsel niet te gebruiken voor alle componenten van $u_e = 0$; m.n. voor het hele opp. stikgebied.

$$Q_{ii} = \acute{T} \cdot T \qquad (4.23)$$

Na inverteren van deze vergelijking ontstaat:

$$Q_{ii}^{-1} = T^{-1} \cdot \acute{T}^{-1} \qquad (4.24)$$

Dus de matrix $Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{ie}$ uit (4.22) wordt:

$$Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{ie} = Q_A \cdot T^{-1} \cdot \acute{T}^{-1} \cdot Q_{ie} = S \cdot B \qquad (4.25)$$

waarin: $S = Q_A \cdot T^{-1} \Rightarrow \acute{T} \cdot \acute{S} = \acute{Q}_A$ (4.26)

$B = \acute{T}^{-1} \cdot Q_{ie} \Rightarrow \acute{T} \cdot B = Q_{ie}$ (4.27)

De matrices S en B kunnen nu op eenvoudige wijze berekend worden omdat de matrix $\acute{T}$ een linksonder-driehoeksmatrix is.
Op analoge wijze wordt de matrix $Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{iv}$ berekend, waarvan het resultaat is:

$$Q_A \cdot Q_{ii}^{-1} \cdot Q_{iv} = G \cdot Q_{iv} \qquad (4.28)$$

waarin: $G = S \cdot \acute{T}^{-1}$

(4.22) wordt nu:

$$K_e - \mu \cdot K_v = \mathring{Q}_B \cdot U_e - F_i \qquad (4.29)$$

* doorzichtiger maken

waarin: $\mathring{Q}_B = Q_B - S \cdot B$

$F_i = (G \cdot Q_{iv} - Q_c) \cdot U_v$

Met het gevonden stelsel vergelijkingen (4.29) kan de iteratie veel sneller verlopen dan de iteratie met het stelsel (4.13)

Als k het aantal knooppunten is dat in een iteratieslag tot het slipgebied wordt gerekend, dan hoeven ook slechts k vergelijkingen te worden opgelost in die iteratieslag.

In het programma wordt het iteratieproces als volgt uitgevoerd.

<u>stap 1</u>

- knooppunt $(n+nx-1)$ wordt tot het slipgebied gerekend (zie fig. 4.3).
- Met behulp van (4.29) wordt ΔUx van knooppunt $(n+nx-1)$ berekend. Vervolgens kan eveneens met (4.29) $kx - \mu \cdot ky$ van knooppunt $(n+nx-2)$ berekend worden.
- Als gevonden wordt $kx - \mu \cdot ky \geq 0$ dan volgt:

<u>stap 2</u>

- Nu worden de knooppunten $(n+nx-1)$ en $(n+nx-2)$ tot het slipgebied gerekend.
- Met behulp van (4.29) worden $\Delta Ux\,(n+nx-1)$ en $\Delta Ux\,(n+nx-2)$ berekend, en vervolgens $kx - \mu \cdot ky\ (n+nx-3)$.
- Als gevonden wordt $kx - \mu \cdot ky \geq$ dan volgt:

<u>stap 3</u>

- De knooppunten (n+nx-1), (n+nx-2) en (n+nx-3) worden nu tot het slipgebied gerekend.

etc.

c. korte beschrijving van het programma

Bij de samenstelling van het programma is gebruik gemaakt van een reeds bestaand programma: „elementenmethode in de technische plasticiteit" nr. A42001. Genoemd programma is geschikt voor de berekening van cirkelsymmetrische problemen, waarbij elasto-plastische deformaties optreden.
Vanwege het niet lineaire karakter van de beschrijvende vergelijkingen van een plastisch deformatieprobleem wordt een stapsgewijze berekening toegepast.
Hierbij worden de waarden, die de grootheden aan het begin van de stap hebben, tijdens de stap constant verondersteld.
Globaal aangeduid verloopt de berekening als volgt:
Eerst wordt een arbitraire stap in de verplaatsing van het stempel toegepast. Hierbij worden de spanningen in de elementen en de verplaatsingen van de knooppunten uitgerekend.
Hierna worden alle grootheden met een correctiefactor RR vermenigvuldigd, welke ervoor zorgt dat het

element met de grootste vergelijkspanning juist op het vloeioppervlak komt. Genoemd element wordt in de volgende stap plastisch meegenomen. Vervolgens wordt weer een arbitraire verplaatsing aan het stempel gegeven, en een daarbij behorende correctiefactor RR berekend.
De waarde van RR wordt nu echter niet alleen bepaald door het juist vloeien van een volgend element, maar tevens door een in de berekening verwerkt stabiliteitscriterium.
De stapsgewijze berekening gaat door tot een gewenste deformatiegraad is bereikt.
Voor een uitgebreide beschrijving van het programma word verwezen naar [4].

In appendix D is het flow-schema van de eerste stap in de berekening afgebeeld.
In dit flow-schema is het gedeelte „substructuring" iets uitgebreider aangegeven dan de rest.

D. Resultaten en conclusies

Met het programma waarin „substructuring" verwerkt is werd het stuiken van een cilindrisch blokje onderzocht.
Het blokje is verdeeld in 288 elementen; het aantal knooppunten in de x-richting $nx = 13$; het aantal knooppunten in de y-richting $ny = 13$.
De berekeningen zijn uitgevoerd voor de volgende gevallen:

	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$
$\frac{H_0}{D_0} = 1$	a	
$\frac{H_0}{D_0} = 2$	b	c

μ = wrijvingscoëfficiënt.
$\frac{H_0}{D_0}$ = oorspronkelijke verhouding $\frac{\text{Hoogte}}{\text{Diameter}}$.

In de gevallen a en b werden de berekeningen uitgevoerd voor twee waarden van de verstevigingsfaktor $H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p}$,
n.l. 1 $H' = 135$
2 $H' = 7200$

Omdat niet verder is doorgerekend dan tot het moment waarop het materiaal volplastisch wordt, zijn de effectieve plastische rekken klein. Voor deze kleine rekken is de waarde van H' sterk afhankelijk van $\bar{\varepsilon}^p$, zodat de keuze van H' vrij arbitrair is.

De resultaten van de berekeningen met $H' = 135$ en $H' = 7200$ verschillen dan ook zeer weinig, hetgeen natuurlijk niet het geval hoeft te zijn voor grote waarden van $\bar{\varepsilon}^p$.
De resultaten zijn uitgewerkt voor de meer voor de hand liggende waarde van 7200.
Verdere gegevens betreffende de berekeningen zijn:

Elasticiteitsmodulus $E = 72000 \frac{N}{mm^2}$
Vloeigrens $\sigma_v = 72.4 \frac{N}{mm^2}$
Konstante van Poisson $\nu = 0.33$
Halve hoogte cilinder $H_o = 12$ mm voor geval a
$H_o = 24$ mm voor geval b en c
Cilinderstraal $r_u = 12$ mm.

<u>Geval a</u> : $\frac{H_o}{D_o} = 1$; $\mu = 0{,}1$

In fig 4.4 (A tm I) is de uitbreiding van het plastisch gebied als funktie van de stuikgraad $\left(\frac{\Delta H}{H}\right)$ afgebeeld.
Hierbij heeft een grijs gebied betrekking op elementen welke voordien plastisch zijn geworden, terwijl een zwart gebied de verandering van het plastisch gebied aangeeft.
Tevens is telkens de grootte van stickzone en slipzone aangegeven.
De knooppuntskrachten die behoren bij de toestand van fig 4.4 - F zijn in het stickgebied zodanig „kritisch" dat

bij een geringe toename van de stempelverplaatsing het slipgebied zich sterk uitbreidt (fig 4.4 - C)
In fig 4.6 is aangegeven hoe groot stick- en slipzône zijn als functie van de stempelverplaatsing.
Het blijkt dat vanaf het begin van de deformatie, wanneer nog alle elementen elastisch zijn, tot het moment waarop de eerste 20 elementen plastisch zijn het hele contactvlak slipgebied is. Indien het materiaal elastisch zou blijven, zou het slipgebied steeds het hele contactvlak omvatten. Dit vanwege het lineaire verband tussen knooppuntskrachten en verplaatsingen voor elastisch materiaal.

Het stickgebied breidt zich uit tot $\frac{7}{12}$ deel van het contactvlak bij een stuikgraad van $0,1 * 10^{-2}$ en wordt daarna weer kleiner.

Geval b : $\frac{H_o}{D_o} = 2$; $\mu = 0.1$

De uitbreiding van het plastisch gebied en het verloop van stick- en slipzône zijn weergegeven in fig 4.5 (A t.m. G). Tussen een stuikgraad van $0,1015 * 10^{-2}$ en $0,1100 * 10^{-2}$ treedt een plotselinge grote afname van het stickgebied op. Beschouwing van de knooppuntskrachten in het stickgebied bij de stuikgraad van $0,1015 * 10^{-2}$ (fig 4.5 - D) leert dat voor al deze knooppunten k_x zeer weinig kleiner is dan $\mu * k_y$. In fig 4.6 is weer het verloop van stick- en slipzône aangegeven. Het stickgebied omvat maximaal $\frac{9}{12}$ deel van het contactvlak bij een stuikgraad van $0{,}101 * 10^{-2}$. Het stickgebied verdwijnt weer bij een stuikgraad van $0{,}111 * 10^{-2}$, terwijl in geval a het stickgebied verdwijnt bij een stuikgraad van $0{,}103 * 10^{-2}$

De normaalspanningsverdeling aan het contactvlak is in fig. 4.7 uitgezet:

a) waarbij nog het hele contactvlak slipzône is en een stuikgraad van $0{,}0977 * 10^{-2}$.

b) waarbij het stickgebied maximaal is en een stuikgraad van $0{,}1053 * 10^{-2}$.

c) waarbij weer het hele contactvlak slipzône is, alle elementen plastisch zijn, en een stuikgraad van $0{,}3951 * 10^{-2}$.

Opmerkelijk is dat voor het laatste geval reeds een begin van een drukberg te zien is, waarvan het optreden af te leiden is uit de analytisch verkregen uitdrukking voor $\frac{\sigma_y}{\sigma_0}$: $\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = e^{\mu \cdot \frac{D_0}{H}\left(1 - \frac{D}{D_0}\right)}$

Deze vergelijking geldt alleen in het slipgebied.

Conclusies

Uit de resultaten, die met het programma gevonden werden, blijkt dat zowel voor $\frac{H_0}{D_0} = 1$ als voor $\frac{H_0}{D_0} = 2$ tijdens het plastisch worden van het blokje een plotselinge snelle afname van het stickgebied optreedt.

Omdat een geleidelijke afname fysisch gezien meer voor de hand ligt is het aannemelijk dat de wrijvings-coëfficiënt in werkelijkheid niet constant is, maar afhangt van de normaaldruk.
Tot slot kan t.a.v. het gedane onderzoek het volgende worden geconcludeerd.

- De e.e.m. met gebruikmaking van substructuring is geschikt voor de numerieke analyse van plastische deformatieproblemen waarbij wrijving optreedt. De beperking hierbij wordt gevormd door de beperkte bruikbaarheid van de e.e.m. t.a.v. grote verplaatsingen en grote rekken. Dit laatste betreft met name de e.e.m. zoals die bij dit onderzoek is toegepast.
- Voor wat betreft de rekentijd kan worden opgemerkt dat door toepassing van substructuring het iteratie-proces meer snel convergeert, zodat de rekentijd slechts 6% van de totale tijd groter wordt. Deze rekentijd kan nog verder worden teruggebracht door alleen een fijne elementenverdeling aan het contactvlak aan te nemen en in de rest van het blokje een grove verdeling.
- Van de twee beschikbare wrijvingsmodellen kan worden gesteld dat deze slechts een beperkte beschrijving geven van het verschijnsel wrijving. Fundamenteel onderzoek om te komen tot betere modellen is noodzakelijk. Het Coulombse wrijvingsmodel gecombineerd met een

μ afhankelijk van de normaalbreuk kan misschien een belangrijke verbetering zijn. Een veranderlijke μ kan zonder problemen in het programma worden ingebouwd.

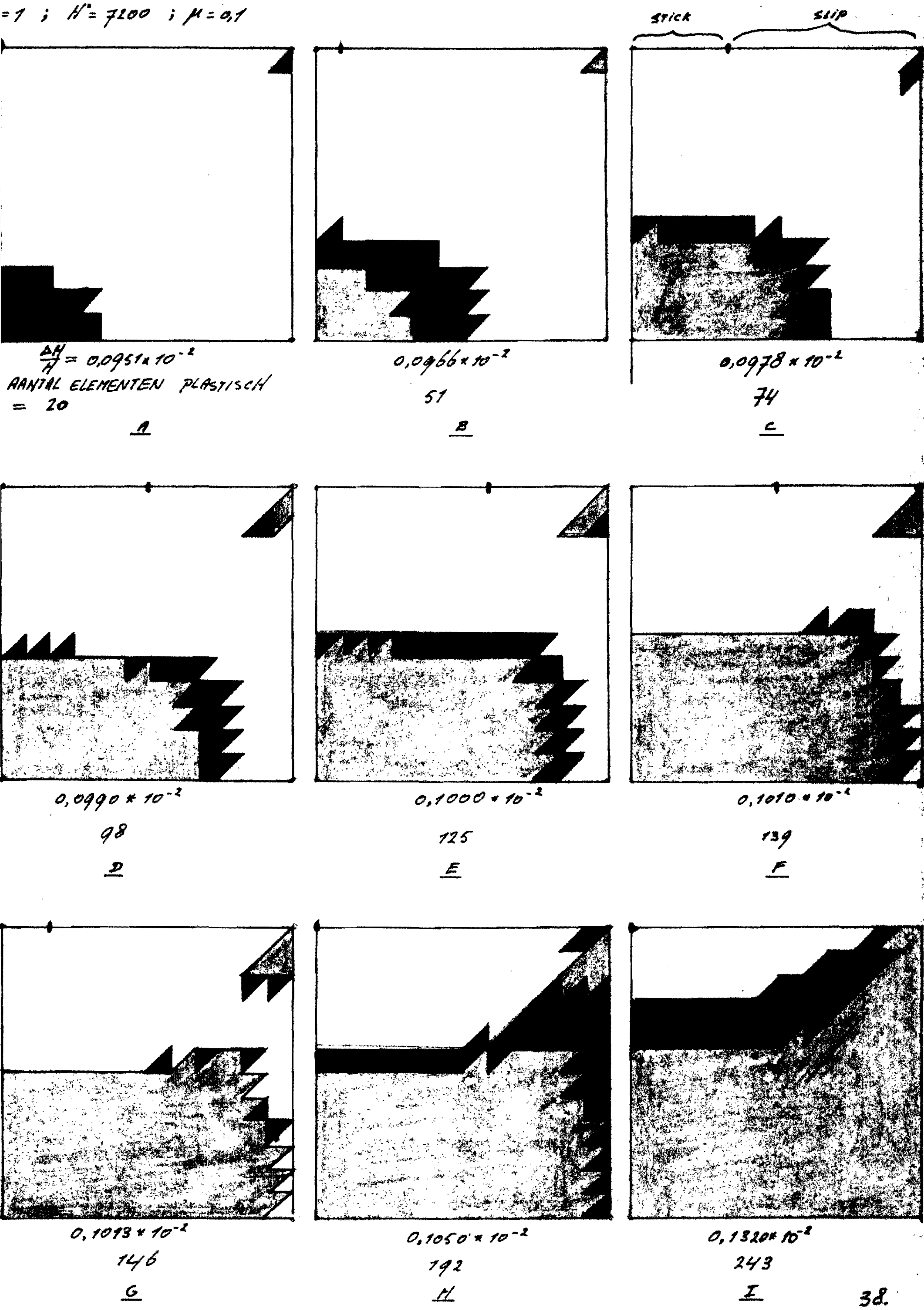
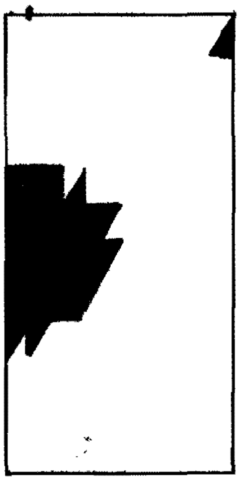

=1 ; H'= 7200 ; μ = 0,1
STICK
SLIP
ΔH/H = 0,0951 × 10^-2
AANTAL ELEMENTEN PLASTISCH = 20
A
0,0966 × 10^-2
51
B
0,0978 × 10^-2
74
C
0,0990 × 10^-2
98
D
0,1000 × 10^-2
125
E
0,1010 × 10^-2
139
F
0,1013 × 10^-2
146
G
0,1050 × 10^-2
192
H
0,1320 × 10^-2
243
I

fig. 4-4

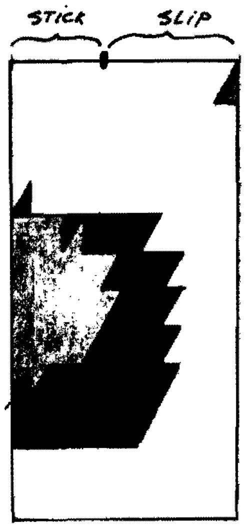
$\frac{H_0}{D_0} = 2$; $H' = 7200$; $\mu = 0{,}1$



$-\frac{\Delta H}{H} = 0{,}0980 \times 10^{-2}$

AANTAL EL. PLASTISCH = 40.

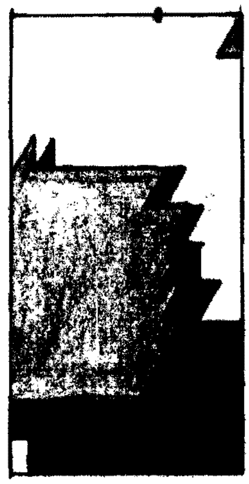
A



$0{,}0993 \times 10^{-2}$

98

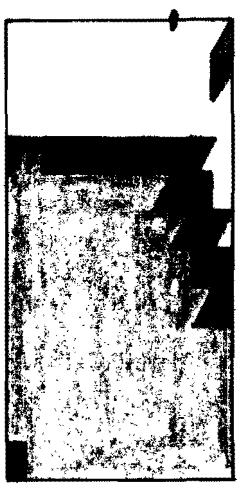
B



$0{,}0996 \times 10^{-2}$

157

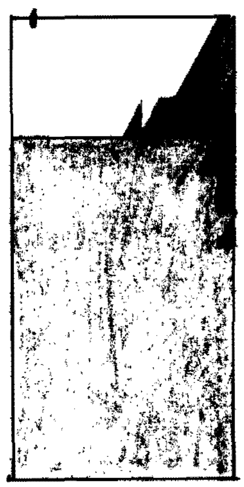
C



$0{,}1016 \times 10^{-2}$

195

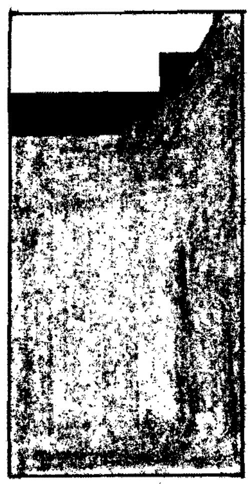
D



$0{,}1100 \times 10^{-2}$

215

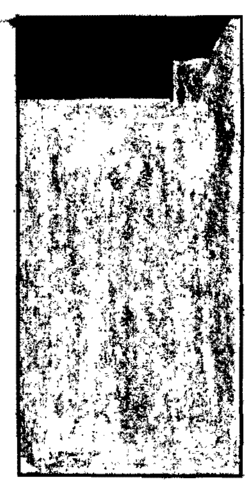
E



$0{,}1200 \times 10^{-2}$

232

F

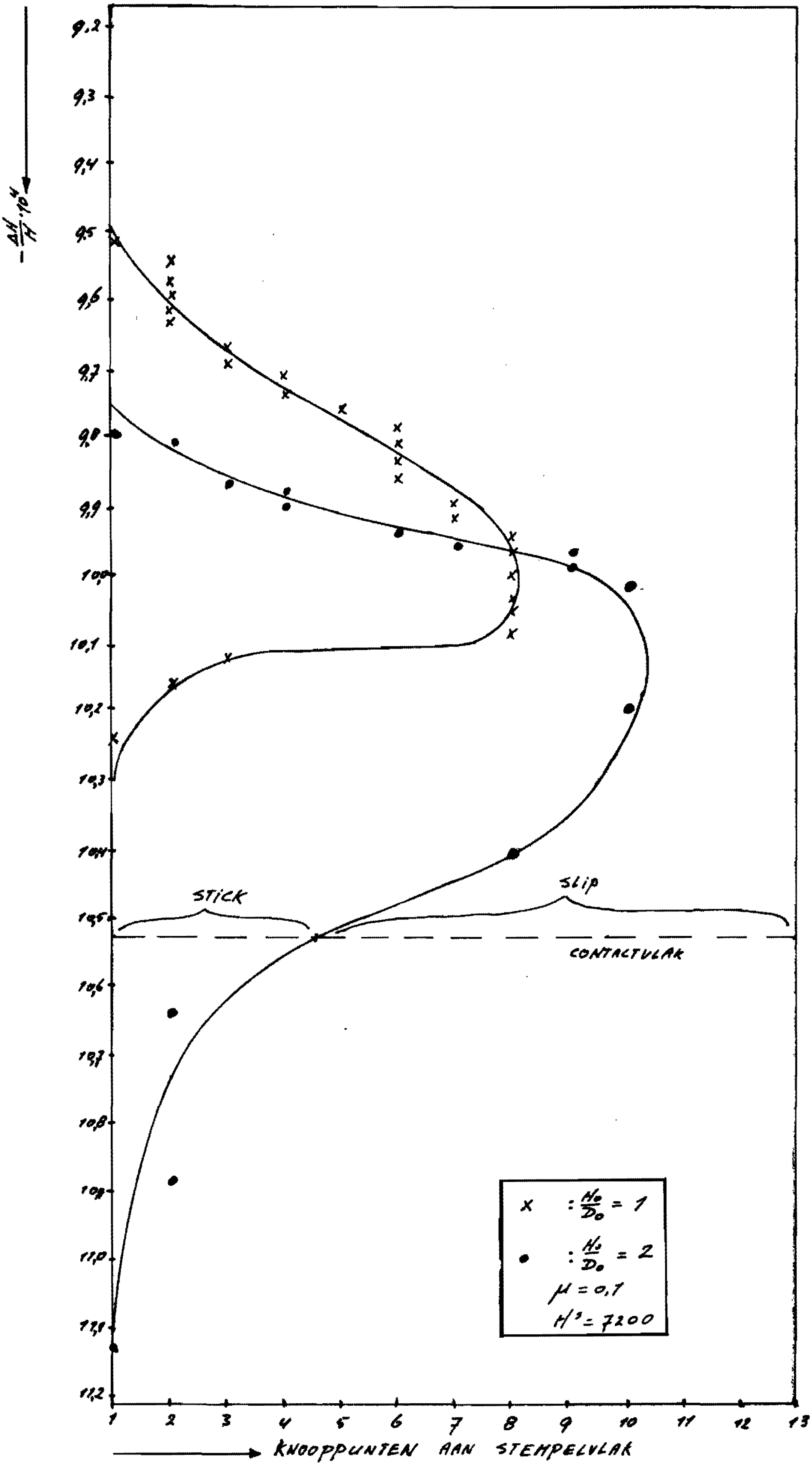


$0{,}3950 \times 10^{-2}$

288

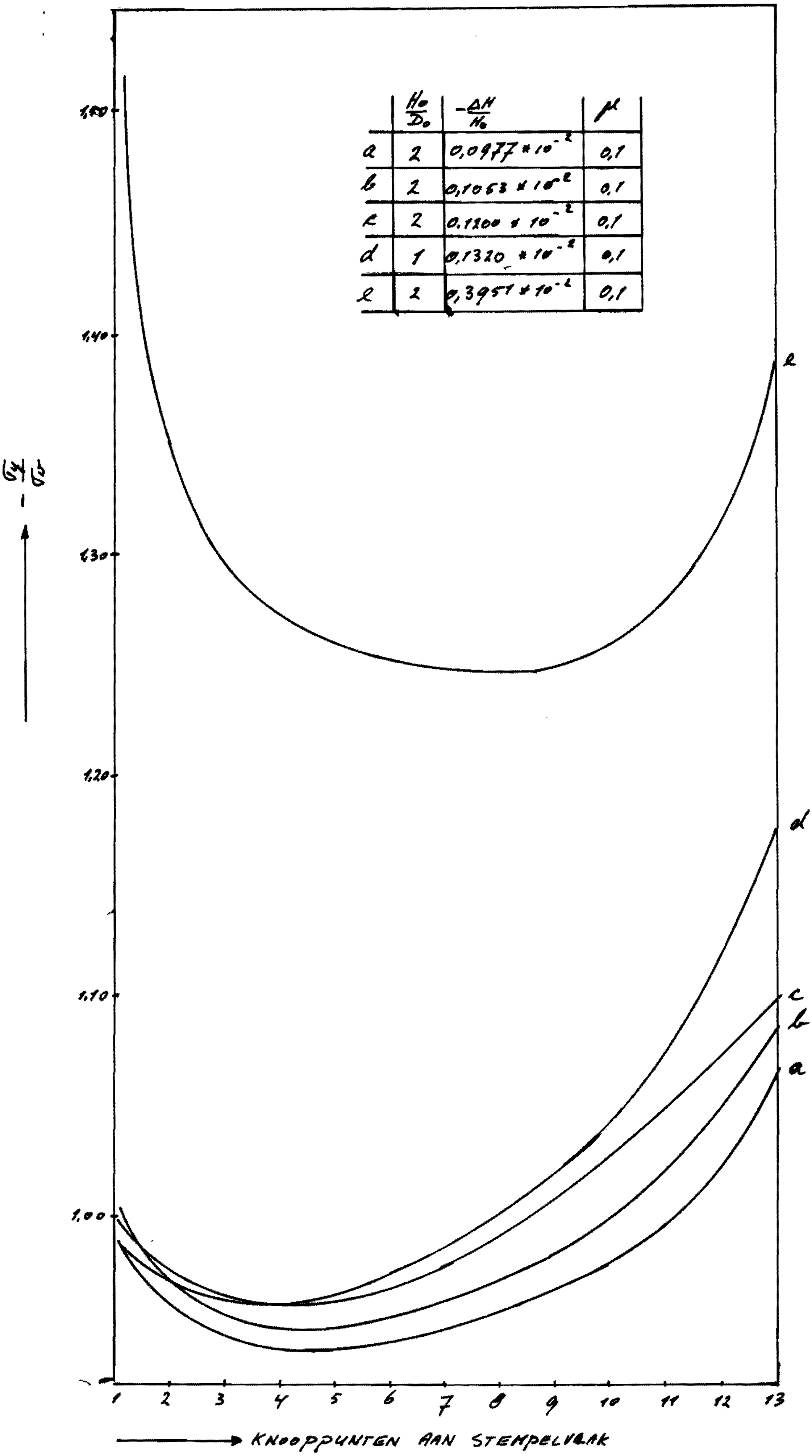
G

fig 4.5



$-\frac{\Delta H}{H}\cdot 10^4$
9,2
9,3
9,4
9,5
9,6
9,7
9,8
9,9
10,0
10,1
10,2
10,3
10,4
10,5
10,6
10,7
10,8
10,9
11,0
11,1
11,2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
STICK
SLIP
CONTACTVLAK
KNOOPPUNTEN AAN STEMPELVLAK
x : $\frac{H_0}{D_0} = 1$
• : $\frac{H_0}{D_0} = 2$
$\mu = 0,1$
$H' = 7200$

fig 4.6



	H_0/D_0	$-\Delta H/H_0$	μ
a	2	$0{,}0977 \times 10^{-2}$	0,1
b	2	$0{,}1053 \times 10^{-2}$	0,1
c	2	$0{,}1200 \times 10^{-2}$	0,1
d	1	$0{,}1320 \times 10^{-2}$	0,1
e	2	$0{,}3951 \times 10^{-2}$	0,1

fig 4.7

Appendix A

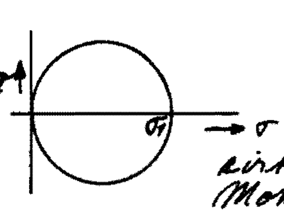
Berekening van de maximale schuifspanning in een punt van het contactvlak.

Het von Mises vloeicriterium uitgedrukt in de hoofdspanningen luidt :

$$2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 \qquad (A.1)$$

In geval van lijnspanning wordt dit:

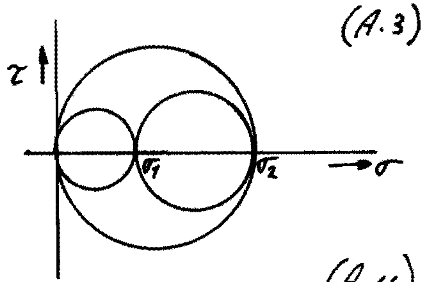
$$\left.\begin{aligned} 2\sigma_v^2 = 2\bar{\sigma}^2 &= 2\sigma_1^2 \\ \tau_{max} &= \tfrac{1}{2}\sigma_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\bar{\sigma}}{2} \qquad (A.2)$$



cirkel van Mohr.

In geval van vlakspanning :

$$2\sigma_v^2 = 2\bar{\sigma}^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \qquad (A.3)$$



(A.3) kan worden geschreven als:

$$2\sigma_v^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \qquad (A.4)$$

Om het maximum van σ_2 als functie van σ_1 te bepalen differentieren we naar σ_1 :

$$0 = 2\sigma_1 - 2\sigma_2 - 2\sigma_1\cdot\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_1} + 2\cdot\sigma_2\cdot\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_1} + 2\sigma_2\cdot\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_1} + 2\sigma_1 \qquad (A.5)$$

Hieruit volgt : $2\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_1}(\sigma_1 - 2\sigma_2)$ (A.6)

σ_2 is maximaal als $\frac{\partial\sigma_2}{\partial\sigma_1} = 0$ dus als $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma_2$ (A.7)

Substitutie van (A.7) in (A.3) levert

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sigma_v \Rightarrow \tau_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sigma_v \qquad (A.8)$$

Appendix B

Het omzetten van Coulombse wrijving voor de spanningen in Coulombse wrijving voor de knooppuntskrachten.

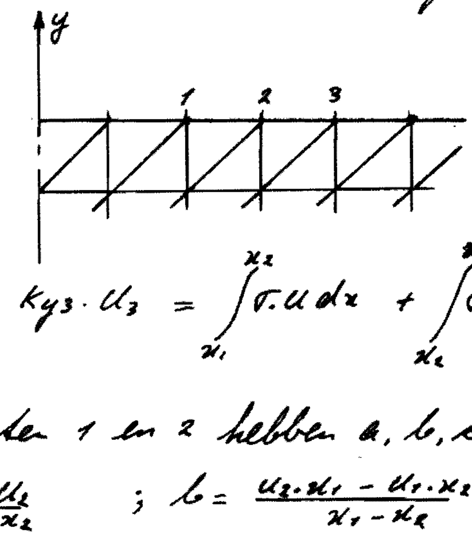
De noodzakelijke voorwaarde hierbij is dat de potentiaal van de spanningen gelijk is aan de potentiaal van de krachten.

Het verplaatsingsveld verloopt lineair over een element:

$$u = ax + b \qquad (B.1)$$

De spanningsverdeling aan het stempelvlak kan ook benaderd worden door over elk element een lineair verloop aan te nemen: $\sigma = cx + d$ (per element verschillen natuurlijk wel de waarden van a, b, c en d).

Als σ en u de axiale spanning en de axiale verplaatsing voorstellen dan luidt voor deze richting de genoemde voorwaarde:



$$Ky_1 \cdot u_1 + Ky_2 \cdot u_2 + Ky_3 \cdot u_3 = \int_{x_1}^{x_2} \sigma . u \, dx + \int_{x_2}^{x_3} \sigma . u \, dx \qquad (B.2)$$

Tussen de knooppunten 1 en 2 hebben a, b, c en d de volgende waarden:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} \quad ; \quad b = \frac{u_2 \cdot x_1 - u_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \\ c &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{x_1 - x_2} \quad ; \quad d = \frac{\sigma_2 \cdot x_1 - \sigma_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}\right\} \qquad (B.3)$$

Hierbij zijn σ_1 en σ_2 de waarde van σ in knp 1 en 2

Tussen de knooppunten 2 en 3 :

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{u_2-u_3}{x_2-x_3} \quad ; \quad b = \frac{u_3x_2-u_2x_3}{x_2-x_3} \\ c &= \frac{\sigma_2-\sigma_3}{x_2-x_3} \quad ; \quad d = \frac{\sigma_3x_2-\sigma_2x_3}{x_2-x_3} \end{aligned}\right\} \qquad (B.4)$$

Het rechterlid van (B.2) wordt hiermee :

→ wel dezelfde.

$$\int_{x_1}^{x_2}(ax+b)(cx+d)\,dx + \int_{x_2}^{x_3}(ax+b)(cx+d)\,dx =$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{(u_1-u_2)(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(x_2^3-x_1^3)}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(u_1-u_2)(\sigma_2x_1-\sigma_1x_2)}{(x_1-x_2)^2} + \frac{(\sigma_1-\sigma_2)(u_2x_1-u_1x_2)}{(x_1-x_2)^2}\right\}$$

$$* \,(x_2^2-x_1^2) + \frac{(u_2x_1-u_1x_2)(\sigma_2x_1-\sigma_1x_2)}{(x_1-x_2)^2}\cdot(x_2-x_1) \;+$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{(u_2-u_3)(\sigma_2-\sigma_3)(x_3^3-x_2^3)}{(x_2-x_3)^2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{(u_2-u_3)(\sigma_3x_2-\sigma_2x_3)}{(x_2-x_3)^2} + \frac{(\sigma_2-\sigma_3)(u_3x_2-u_2x_3)}{(x_2-x_3)^2}\right\}$$

$$* \,(x_3^2-x_2^2) + \frac{(u_3x_2-u_2x_3)(\sigma_3x_2-\sigma_2x_3)\cdot(x_3-x_2)}{(x_2-x_3)^2} \qquad (B.5)$$

(B.2) moet voor elke waarde van u_1, u_2 en u_3 gelden, zodat voor knooppunt 2 gesteld kan worden :

wat zijn A B en C, waar hangen ze van af.

$$K_{y2} = A\cdot\sigma_1 + B\cdot\sigma_2 + C\cdot\sigma_3 \qquad (B.6)$$

Als in (B.2) voor σ en u de radiale spanning en de radiale verplaatsing genomen worden geldt voor K_{x2} analoog :

$$K_{x2} = A\cdot\tau_1 + B\cdot\tau_2 + C\cdot\tau_3 \qquad (B.7)$$

waarin : τ = schuifspanning

Voor de overige knooppunten kunnen gelijksoortige vergelijkingen worden gevonden.

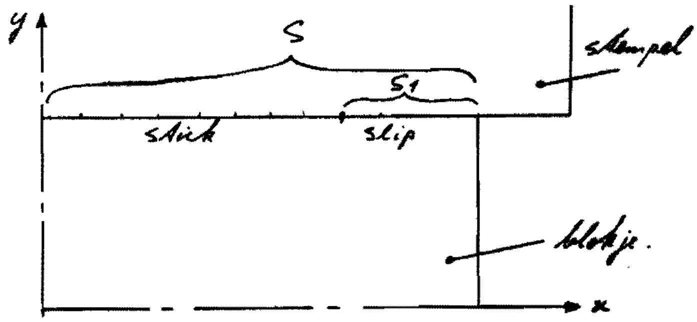
Uit (B.6) en (B.7) volgt dat $k_{x2} = \mu k_{y2}$ als voor de spanningen geldt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \mu \cdot \sigma_1 \\ \tau_2 = \mu \cdot \sigma_2 \\ \tau_3 = \mu \cdot \sigma_3 \end{array} \right\}$$

en wat als $\tau_1 < \mu \cdot \sigma_1$?

Appendix C

De potentiële energie als functie van de grootte van het slipgebied.



Het principe van minimale potentiële energie drukt het volgende uit:

Van alle mogelijke kinematisch toelaatbare verplaatsingsvelden maakt het verplaatsingsveld in de evenwichtstoestand de uitdrukking

$$\frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \, dv - \iint_S \sigma_x u_x^* \, dx \qquad \text{minimaal.}$$

Dus $$\frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \, dv - \iint_S \sigma_x u_x^* \, ds > \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dv - \iint_S \sigma_x u_x \, ds \qquad (C.1)$$

Indien het werkelijke verplaatsingveld zodanig is dat aan het contactvlak een stickzone en een slipzone te onderscheiden is dan de potentiële energie in de evenwichtstoestand

$$\Psi_{minimaal} = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, dv - \iint_{S_1} \sigma_x u_x \, ds \qquad (C.2)$$

waarin s_1 de grootte van het slipgebied aangeeft.

Beschouw nu een ander verplaatsingveld dat zodanig is dat er een slipgebied aan het contactvlak is waarvan de grootte $s_1 + \delta s_1$ is.

Voor dit verplaatsingsveld luidt de potentiële energie uitdrukking:

$$\varphi^* = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \, dv - \iint_{S_1+\delta S_1} \sigma_x u_x^* \, ds \qquad (C.3)$$

maar omdat in het stickgebied $u_x^* = 0$ is, wordt dit

$$\varphi^* = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \, dv - \iint_S \sigma_x u_x^* \, ds \qquad (C.4)$$

Er geldt nu : $\varphi^* > \varphi_{minimaal}$. (C.5)

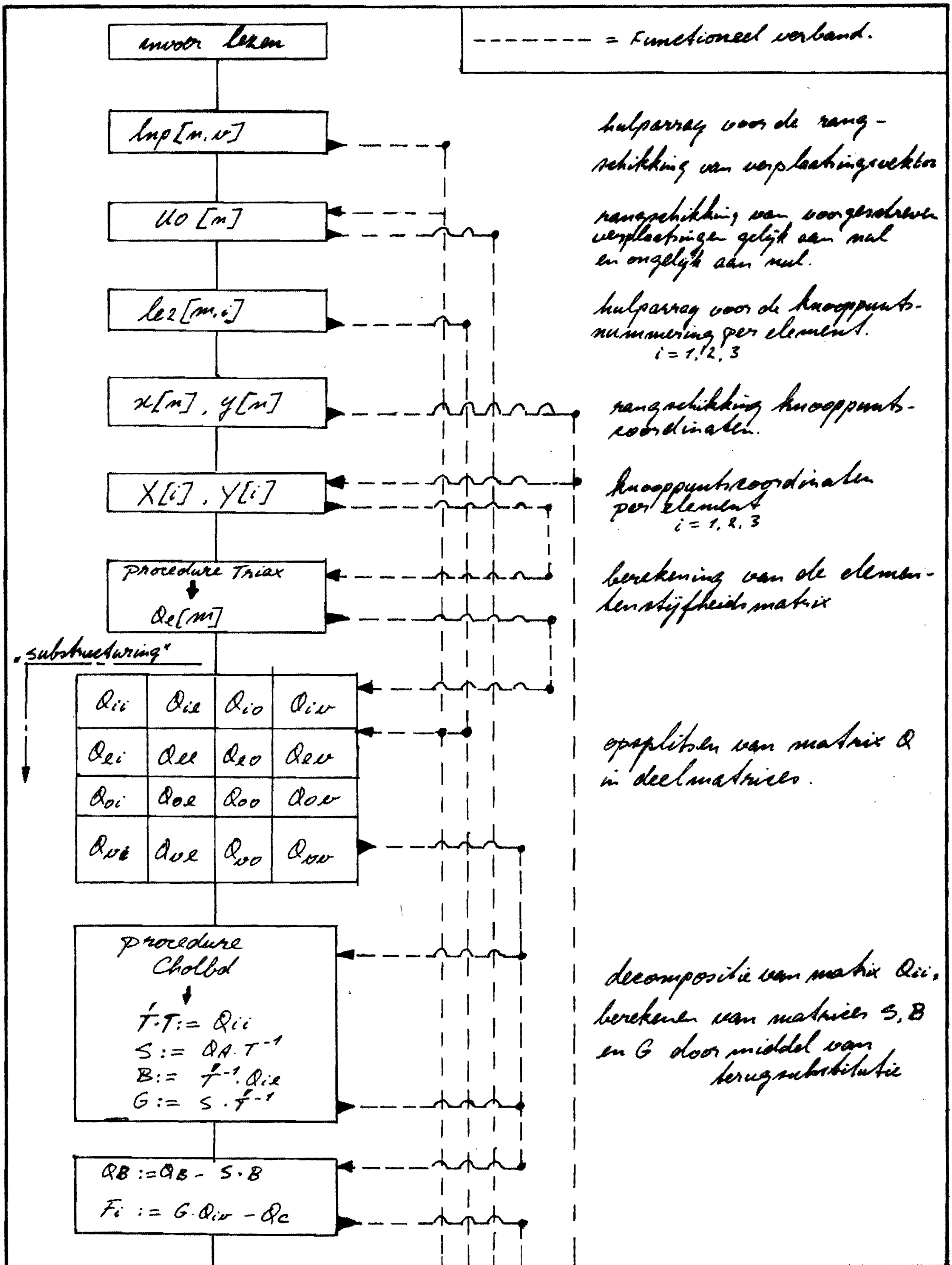
De potentiële energie is in het algemeen een functie van u_x en u_y. Ongelijkheid (C.1) drukt uit dat de variatie van de potentiële energie in de evenwichtstoestand gelijk aan nul moet zijn wanneer u_x en u_y gevarieerd worden. Dus voor willekeurige variaties δu_x en δu_y geldt:

$$\delta\varphi = 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial u_x}\cdot\delta u_x + \frac{\partial\varphi}{\partial u_y}\cdot\delta u_y \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_x} = 0 & (C.6) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_y} = 0 & (C.7) \end{cases}$$

In geval van stick- en slipgebied is de potentiële energie een functie van u_x, u_y en $S_1(u_x)$.
Ongelijkheid (C.5) drukt uit dat de variatie van de pot. energie bij variatie van u_x, u_y en S_1 gelijk aan nul moet zijn.

Dus $\delta\varphi = 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial\varphi}{\partial u_y}\delta u_y + \frac{\partial\varphi}{\partial S_1}\delta S_1$ (C.8)
Substitutie van (C.6) en (C.7) hierin geeft:

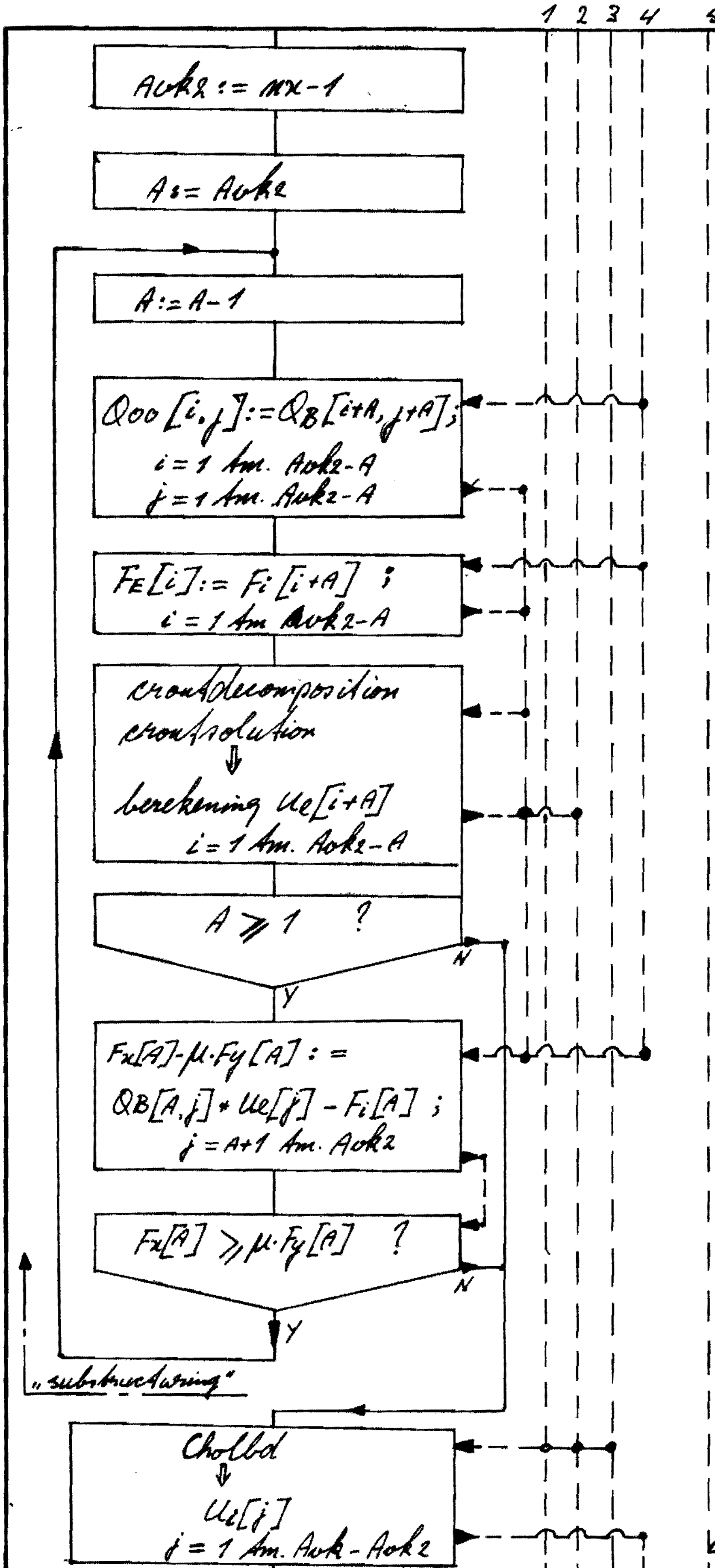
$$\frac{\partial\varphi}{\partial S_1} = 0 \qquad (C.9)$$

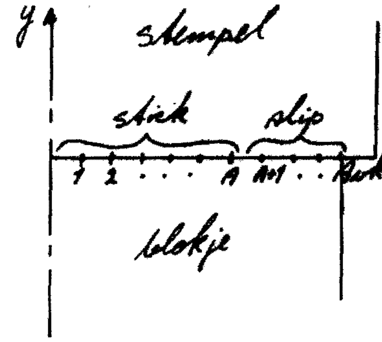


Appendix D *Flow - schema*

D.1

PT





oplossen van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} F_x - \mu \cdot F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_B & \\ & Q_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \\ F_i \end{bmatrix} \Big\} \, Aok2-A$$

Ue wordt berekend door decompositie van de asymmetrische matrix Qoo met behulp van de methode van Crout.

Controle of stickzone voldoet aan wet van Coulomb.

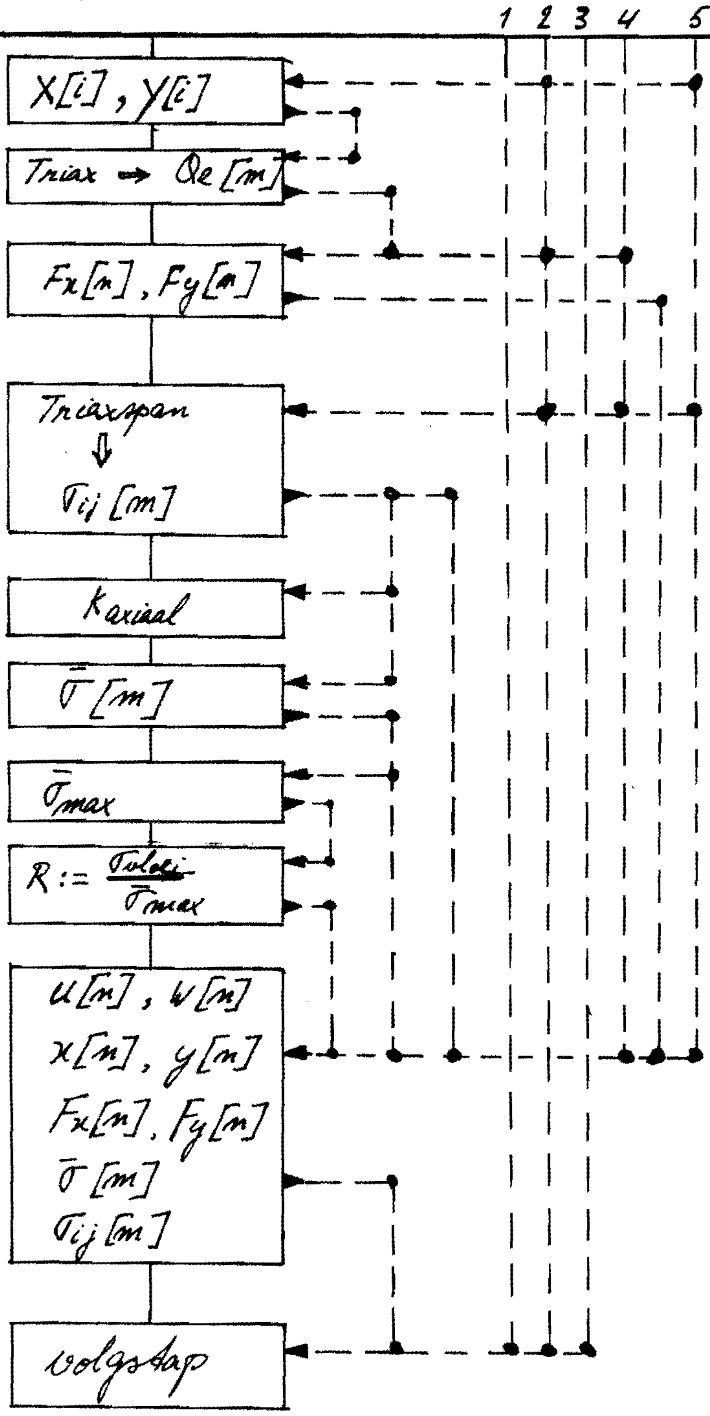
Berekening van overige onbekende verplaatsingen.
Aok = totaal aantal onbekende verplaatsingen

PT

Flow-schema

Appendix D

D.2



knooppunts coordinaten per element $i = 1, 2, 3$

Berekening knooppuntskrachten.

Berekening van de spanningen per element

Berekening axiale kracht

vergelijkspanning per element

Bepaling van maximale vergelijkspanning en correctiefactor R

Deze grootheden worden met R vermenigvuldigd.

1° stap in de berekening is voltooid

Begin 2° stap.