De elementenmethode voor de oplossing van torsieproblemen

WE-71-38

De elementenmethode voor de oplossing van torsieproblemen.

Eindhoven, november 1970

W.A.M. Brekelmans
J.D. Janssen

Inhoudsopgave

Nomenclatuur

β : specifieke hoekverdraaiing van de doorsnede.

ϕ_0 : welvingsfunctie.

ϕ : spanningsfunctie.

Ψ : toegevoegde welvingsfunctie.

τ_{zx}, τ_{zy} : schuifspanningen.

r, ϑ : poolcoordinaten.

x, y, z : cartesische coordinaten.

F : gebied van de dwarsdoorsnede.

G : glijdingsmodulus.

I_1, I_2, I_3 : functionalen in respectievelijk ϕ_0, Ψ en ϕ.

I_p : polair oppervlaktetraagheidsmoment.

M : wringend moment.

R : rand van de dwarsdoorsnede.

V : potentiele energie.

V^* : complementaire energie.

Literatuur

[1] Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K.
„Finite elements in the solution of field problems". The Engineer, vol. 220, sept. 1965, pp. 507 - 510.

[2] Visser, W.
„The finite element method in deformation and heat conduction problems".
Proefschrift Technische Hogeschool Delft, 1968.

[3] Krahula, J.L. and Lauterbach, G.F.
„A finite element solution for Saint-Venant torsion". AAIA Journal, vol 7, december 1969, pp 2200 - 2203.

[4] Timoshenko, S. and Goodier, J.N.
„Theory of Elasticity". Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1951.

[5] Brekelmans, W.A.M.
„Torsie van een cilindrische balk met een dwarsdoorsnede, begrensd door een regelmatige veelhoek". Intern rapport groep „Technische Mechanica" van de Technische Hogeschool Eindhoven, 1967.

1 Inleiding

De methode der eindige elementen [2] is een zeer bruikbaar hulpmiddel gebleken bij de numerieke analyse van sterkte- en stijfheidsproblemen.

De in deze methode gevolgde werkwijze is bovendien geschikt om bepaalde soorten 2e orde partiele differentiaalvergelijkingen tot een numerieke oplossing te brengen. Het is dan een mathematisch gereedschap dat onder bepaalde omstandigheden identiek is met de differentiemethode, maar dat veel ruimere toepassingsmogelijkheden biedt [1, 2].

De Saint-Venant theorie voor de torsie van cilindrische balken is een goed voorbeeld om de werkwijze toe te lichten.

Drie verschillende formuleringen van deze theorie zullen worden bekeken. Aangegeven wordt wat de vòòr- en nadelen van ieder der werkwijzen is. Het blijkt mogelijk voor de torsiestijfheid een boven- en een benedengrens aan te geven. Aan de hand van enkele voorbeelden zal de gang van zaken worden toegelicht en vergeleken worden met andere procedures. Een indruk zal worden gegeven van de mogelijkheden van de beschreven aanpak.

2 Probleemstelling; differentiaalvergelijkingen en randcondities

Beschouwd wordt een prismatische balk, waarvan de dwarsdoorsnede in fig. 2.1 is weergegeven.
Het assenstelsel is zodanig gekozen dat x- en y-as liggen in het vlak van de doorsnede en met de z-as evenwijdig aan de as van de balk.

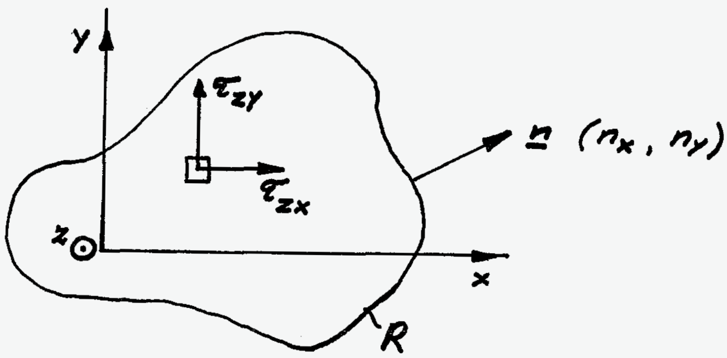


fig. 2.1 Doorsnede van een balk

De balk wordt in de eindvlakken belast door een wringend moment M, dat op een zodanige wijze wordt aangebracht, dat de torsietheorie volgens de Saint-Venant toepasbaar is. Dit betekent dat alle spanningen, die op een dwarsdoorsnede werken, nul zijn behalve τ_{zx} en τ_{zy} (zie fig. 2.1).

Het torsieprobleem kan op een aantal verschillende manieren worden geformuleerd [4].
Wanneer we voorlopig veronderstellen dat de dwarsdoorsnede een enkelvoudig samenhangend gebied F is, wanneer het materiaal homogeen en isotroop is met glijdingsmodulus G en wanneer de hoekverdraaiing per lengteeenheid β (constant) wordt genoemd, dan zijn de onder a, b en c vermelde formuleringen mogelijk:

a. $\Delta \phi_0 = 0$ (2.1)

Randconditie : $\dfrac{d\phi_0}{dn} = (\text{grad}\,\phi_0, \underline{n}) = y n_x - x n_y$ (2.2)

b. $\Delta \psi = 0$ (2.3)

Randconditie : $\psi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (2.4)

c. $\Delta \phi = -2$ (2.5)

Randconditie : $\phi = 0$ (2.6)

Bij elk van deze formuleringen geldt voor de spanningsgrootheden en het wringend moment:

a. $$\tau_{zx} = G\beta\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} - y\right) \tag{2.7}$$

$$\tau_{zy} = G\beta\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y} + x\right) \tag{2.8}$$

$$M = G\beta\left\{ I_p - \iint_F \left[\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy \right\} \tag{2.9}$$

waarbij $I_p = \iint_F (x^2+y^2)\,dx\,dy$,

het polaire oppervlakte traagheidsmoment

b. $$\tau_{zx} = G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y\right) \tag{2.10}$$

$$\tau_{zy} = -G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x\right) \tag{2.11}$$

$$M = G\beta\left[2 \iint_F \psi\,dx\,dy - I_p \right] \tag{2.12}$$

c. $$\tau_{zx} = G\beta\,\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.13}$$

$$\tau_{zy} = -G\beta\,\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2.14}$$

$$M = 2\,G\beta \iint_F \phi\,dx\,dy \tag{2.15}$$

In plaats van met de hiervoor gegeven partiële differentiaalvergelijkingen en de bijbehorende randcondities, kan het probleem ook worden beschreven door middel van de bewering dat de functionalen in (2.16), (2.17) en (2.18) stationair zijn voor bepaalde variaties van de gezochte functie.

a. $$I_1(\phi_0) = \iint_F \tfrac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy + \oint_R (x n_y - y n_x)\,\phi_0\,ds \tag{2.16}$$

b. $$I_2(\psi) = \iint_F \tfrac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy \tag{2.17}$$

c. $$I_3(\phi) = \iint_F \left\{ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right] - 2\phi \right\} dx\,dy \tag{2.18}$$

Op grond van bekende stellingen uit de variatierekening volgt een alternatieve formulering voor de onder a, b en c gegeven probleemstelling :

a. $\delta I_1 = 0$ voor alle $\delta\phi_0$ (2.19)

b. $\delta I_2 = 0$ voor alle $\delta\Psi$, waarbij $\Psi = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ op de rand R van het gebied (2.20)

c. $\delta I_3 = 0$ voor alle $\delta\phi$ waarvoor geldt dat $\phi = 0$ op de rand. (2.21)

Het is interessant om op te merken dat de condities (2.19) en (2.21) rechtstreeks geformuleerd kunnen worden door uit te gaan van respectievelijk de potentiële energie V en de complementaire energie V^* voor een getordeerde balk met lengte 1 en door de algemene stellingen voor deze energie uitdrukkingen toe te passen [3, 4]. Voor de potentiele energie geldt :

$$V = \frac{1}{2} G\beta^2 \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x} + x \right)^2 \right\} dx\,dy - \beta M \qquad (2.22)$$

terwijl de complementaire energie gegeven wordt door :

$$V^* = \frac{1}{2} G\beta^2 \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\,dy - 2G\beta^2 \iint_F \phi\, dx\,dy \qquad (2.23)$$

Afgeleid kan worden dat :

$$V = G\beta^2 I_1 + \frac{1}{2} G\beta^2 \cdot I_p - \beta M \qquad (2.24)$$

$$V^* = G\beta^2 I_3 \qquad (2.25)$$

Uit het principe van minimale potentiele energie volgt :

$$\delta I_1 = 0$$

$$G\beta \left(2I_1 + I_p \right) = M$$

Het voor M gevonden resultaat blijkt na uitwerking in overeenstemming te zijn met formule (2.9).

Uit het variatieprincipe voor de complementaire energie volgt:

$$\delta I_3 = 0$$

Het voorgaande impliceert dat bij een gegeven wringend moment de uit (2.19) volgende waarde voor β niet groter is dan de exacte waarde wanneer voor ϕ_0 een benadering wordt gekozen. De waarde voor β die op grond van (2.21) wordt gevonden door ϕ beperkingen op te leggen is groter dan of gelijk aan de werkelijke β. De werkelijke torsiestijfheid van de beschouwde balk is op deze wijze in te sluiten.

3 Benaderingsoplossingen

3.1 Inleiding

Slechts voor een beperkt aantal dwarsdoorsneden is de exacte oplossing van het torsieprobleem bekend [4]. In een aantal gevallen is werken met oneindige reeksen noodzakelijk. Het verkrijgen van numerieke resultaten vereist dan uitgebreid rekenwerk.

Voor dunwandige balken zijn benaderingsoplossingen in gebruik, die voor open profielen gebaseerd zijn op de resultaten voor een smalle rechthoek en die voor gesloten profielen (kokers) uitgaan van de veronderstelling dat de schuifspanningen constant zijn over de wanddikte. Het is moeilijk om aan te geven wanneer deze benaderingstheorieën gebruikt mogen worden.

Benaderingsoplossingen kunnen soms geconstrueerd worden door gebruik te maken van een semi-inverse methode. Uitgegaan wordt van oplossingen van de differentiaalvergelijking. Voor een bepaalde lineaire combinatie van dergelijke oplossingen, kan een contour gevonden worden, waarop aan de randvoorwaarden is voldaan. Gezocht moet dan worden naar een combinatie, waarvoor de bijbehorende contour zo goed mogelijk de gewenste contour benadert.

Deze methode zal worden toegelicht aan de hand van een balk waarvan de dwarsdoorsnede begrensd wordt door een regelmatige veelhoek. Voor de geschetste werkwijze is de derde formulering van het torsieprobleem, formule (2.5) en (2.6), het meest geschikt.

Het is bovendien mogelijk benaderingsoplossingen te construeren op basis van de gegeven variatieprincipes. Voor een balk, begrensd door een regelmatige veelhoek, zal deze werkwijze, in het algemeen bekend als de methode Ritz, worden toegepast, eveneens in de formulering van (2.5) en (2.6).

De differentiemethode biedt de mogelijkheid de bepalende differentiaal vergelijking numeriek op te lossen.

In het volgende hoofdstuk zal aan deze methoden de methode der eindige elementen worden toegevoegd, een methode die gezien kan worden als een speciaal geval van de methode Ritz.

3.2 Semi-inversemethode : een voorbeeld

Wanneer de dwarsdoorsnede van een getordeerde prismatische balk begrensd wordt door een regelmatige n-hoek (zie fig 3.1) dan kan de oplossing van de in (2.5) en (2.6) gegeven differentiaalvergelijking en de bijbehorende randconditie verkregen worden door voor ϕ te stellen:

$$\phi = -\tfrac{1}{2} r^2 + C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} C_p r^{np} \cos(np\vartheta) \tag{3.1}$$

waarbij r en ϑ de in fig. 3.1 aangegeven poolcoördinaten zijn.

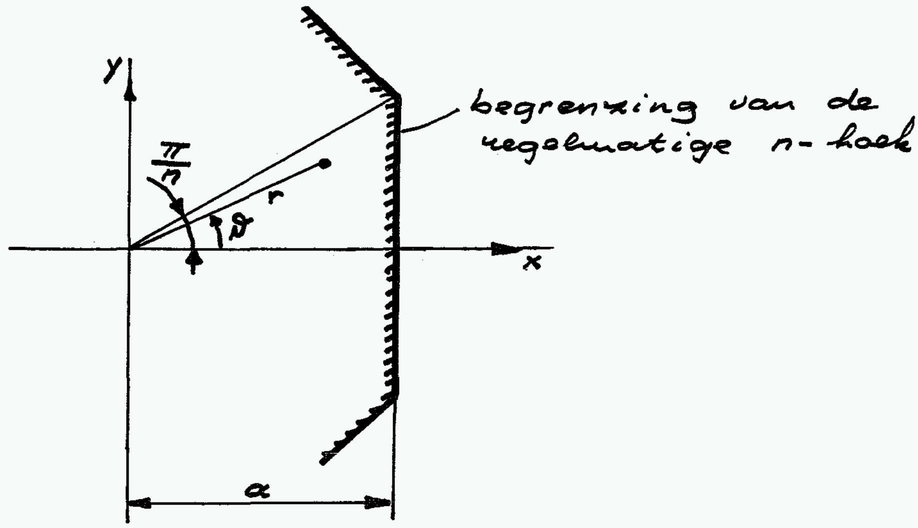


fig. 3.1 Regelmatige n-hoek

Door (3.1) is voor elke waarde van C_p ($p=0, 1, \ldots\ldots$) voldaan aan (2.5). Wanneer de constanten $C_0, C_1, \ldots$ zodanig bepaald kunnen worden dat voor $0 \leq \vartheta \leq \pi/n$ voldaan is aan de randconditie $\phi = 0$ dan is het torsieprobleem tot een oplossing gebracht. (Een analoge oplossingsmethode is aanwezig wanneer de dwarsdoorsnede niet enkelvoudig samenhangend is maar zowel aan binnen- als buitenzijde wordt begrensd door een regelmatige veelhoek.)

Een praktisch bruikbare werkwijze ontstaat door slechts een gering aantal termen van de reeks in de beschouwing te betrekken (dus bijvoorbeeld alleen voor $p=1$ en $p=2$) en door voldoende condities te formuleren om de constanten (C_0, C_1 en C_2) te bepalen.

Met C_0, C_1 en C_2 als onbekende constanten is het probleem verder uitgewerkt, waarbij ter bepaling van deze constanten twee verschillende criteria zijn gebruikt, namelijk:

a.

$$\phi = 0 \quad \text{voor} \quad \begin{cases} r = a & , \ \vartheta = 0 \\ r = \dfrac{a}{\cos\frac{\pi}{2n}} & , \ \vartheta = \dfrac{\pi}{2n} \\ r = \dfrac{a}{\cos\frac{\pi}{n}} & , \ \vartheta = \dfrac{\pi}{n} \end{cases} \tag{3.2}$$

b.

$$\left.\begin{aligned} \phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{voor} \quad x = a, \ y = 0 \tag{3.3}$$

(zie fig 3.1)

Uiteraard zijn er allerlei andere criteria te verzinnen.

Wanneer ϕ op de hiervoor aangegeven wijze wordt bepaald, kan achteraf worden aangegeven voor welke doorsnede de gevonden resultaten exact zijn. Gezocht moet dan worden naar de kromme waarvoor $\phi = 0$. In het algemeen wordt deze kromme gegeven door (zie fig 3.1):

$$r(\vartheta) = \frac{a}{\cos\vartheta}\left[1 + \delta(\vartheta)\right] \qquad (0 \leq \vartheta \leq \pi/n) \tag{3.4}$$

Uit een vergelijking van $|\delta|$ en 1 is een kwalitatief beeld te verkrijgen van de waarde van de gevonden benadering.

Voor de maximale schuifspanning kan geschreven worden:

$$\tau_{max} = \frac{M}{k_1 \cdot a^3} \tag{3.5}$$

waarbij k_1 als vergelijkingsmaatstaf gebruikt zal worden.

Evenzo wordt voor de torsiestijfheid geschreven:

$$\frac{M}{G\beta} = k_2\, a^4 \tag{3.6}$$

Wanneer de hiervoor geschetste werkwijze wordt toegepast op een balk met als dwarsdoorsnede een gelijkzijdige driehoek dan geldt voor ϕ op grond van de in (3.2) gegeven criteria :

$$\phi = -\frac{1}{2} r^2 + \frac{2}{3} a^2 - \frac{r^3}{6a} \cos(3\vartheta) \qquad (3.7)$$

Het gevonden resultaat voldoet exact aan de randcondities [4].

Voor een balk met een dwarsdoorsnede in de vorm van een vierkant wordt uit (3.2) berekend:

$$\phi = -\frac{1}{2} r^2 + 0{,}5903\, a^2 - 0{,}0928 \frac{r^4}{a^2} \cos 4\vartheta + 0{,}0024 \frac{r^8}{a^6} \cos 8\vartheta \qquad (3.8)$$

Dit resultaat is niet exact. Aangetoond kan worden dat $|\delta| < 0{,}008$, terwijl de maximale schuifspanning 1% te laag is en de torsiestijfheid 1% te hoog wordt gevonden [5].

De resultaten, die voor een regelmatige zeshoek berekend zijn, op basis van (3.2) resp. (3.3) zijn in tabel 3.1 weergegeven. De resultaten die uit de criteria (3.2) volgen stemmen overeen met de uit de literatuur bekende [6].

	c_0	c_1	c_2	$\lvert\delta\rvert_{max}$	k_1	k_2
criteria (3.2)	0,5412	-0,0447	0,0035	0,01	1,511	1,853
criteria (3.3)	0,5373	-0,0385	0,0012	0,05	1,497	1,821

tabel 3.1 Regelmatige zeshoek

3.3 Methode Ritz : een voorbeeld

De energieuitdrukking (2.18) die direct samenhangt met de complementaire energie in een getordeerde balk (2.23), kan geschikt gebruikt worden als uitgangspunt voor de constructie van een benaderingsoplossing. Voor ϕ wordt uit een verzameling van functies gekozen, waarin de vrijheid bestaat enige constanten nader te bepalen. De beste keuze voor deze parameters is die keuze, waarbij de energieuitdrukking een stationaire waarde bezit voor alle toelaatbare variaties van deze parameters.

In het principe van complementaire energie moet tijdens het variatieproces steeds voldaan zijn aan alle evenwichtsbetrekkingen. Wanneer ϕ twee maal differentieerbaar is, is het inwendige evenwicht gegarandeerd. De eis dat ook voldaan is aan het evenwicht op het cilindrisch oppervlak brengt met zich mee dat geeist moet worden dat $\phi = 0$ op de begrenzing van het gebied der dwarsdoorsnede.

In [4] is deze methode onder andere toegepast voor een balk met vierkante dwarsdoorsnede. Wanneer voor ϕ gesteld wordt:

$$\phi = b_0 (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \tag{3.9}$$

resulteert (2.21) in een lineaire vergelijking waaruit b_0 berekend kan worden. De torsiestijfheid blijkt $1\frac{1}{3}$ % te hoog te zijn. Worden twee constanten meegenomen en wordt de symmetrie uitgebuit dan blijkt het mogelijk de torsiestijfheid op 0,15 % nauwkeurig te bepalen. De maximale schuifspanning verschilt dan echter nog 4 %.

Voor een dwarsdoorsnede, begrensd door een regelmatige zeshoek, kan op analoge wijze te werk worden gegaan. Wanneer voor ϕ bijvoorbeeld gekozen wordt:

$$\phi = (x^2 - a^2)(x^2 + 3y^2 - 2xy\sqrt{3} - 4a^2)(x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{3} - 4a^2) \cdot f(x,y) \tag{3.10}$$

is voldaan aan $\phi = 0$ op de begrenzing van het gebied. Een benaderingsoplossing kan gevonden worden door voor $f(x,y)$ te kiezen:

$$f(x,y) = b_0 + b_1 (x^2 + y^2) \tag{3.11}$$

Hierdoor is aan alle symmetriecondities voldaan.

De onbekenden b_0 en b_i zijn te bepalen uit de condities :

$$\frac{\partial I_3(b_0, b_1)}{\partial b_i} = 0 \qquad (i = 0, 1) \tag{3.12}$$

$I_3(b_0, b_1)$ volgt uit (2.18) door substitutie van (3.10) en (3.11).

Het zal duidelijk zijn, dat de aangegeven werkwijze zeer veel rekenwerk met zich meebrengt. Rekenwerk, dat bovendien bijzonder slecht in een vorm te brengen is, die doeltreffend gebruik van de digitale computer mogelijk maakt.

Als resultaat van de hier geschetste werkwijze werd in [5] berekend :

$$b_0 = -0{,}03264 \quad G\beta/a^4$$

$$b_1 = -0{,}02621 \quad G\beta/a^6$$

$$k_1 = 1{,}678 \quad (\text{zie } 3.5)$$

$$k_2 = 1{,}777 \quad (\text{zie } 3.6)$$

Wij constateren dat met deze methode in k_1 een fout van 11 % en in k_2 een fout van 4% wordt gevonden. Het feit dat de torsiestijfheid overschat wordt is een algemeen kenmerk van benaderingsoplossingen, die uitgaan van complementaire energie.

4 De methode der eindige elementen, toegepast op het torsieprobleem (enkelvoudig samenhangend gebied)

Evenals bij de in het vorige hoofdstuk gevolgde werkwijze, wordt bij de methode der eindige elementen uitgegaan van integraal uitdrukkingen, waaruit – op grond van variatieprincipes – de bepalende differentiaalvergelijkingen zouden volgen, wanneer aan de daarin optredende functies geen beperkingen worden opgelegd.

In 3.3 is voor het hele gebied een analytische uitdrukking voor ϕ gekozen, waarin nog twee parameters gekozen konden worden.

In de elementenmethode wordt het gebied van de dwarsdoorsnede verdeeld in een aantal delen met meestal eenvoudige geometrische begrenzingen (elementen), zoals driehoeken, rechthoeken, trapezia, etc..

Voor ieder element wordt – wij richten onze aandacht voorlopig op de beschrijving van het probleem met behulp van ϕ – een veronderstelling gemaakt over het gedrag van ϕ binnen het element. Zo zou voor het in fig. 4.1 getekende element voor ϕ verondersteld kunnen worden:

$$\phi = c_1 + c_2 x + c_3 y \tag{4.1}$$

waarbij c_1, c_2 en c_3 nader te bepalen constanten zijn.

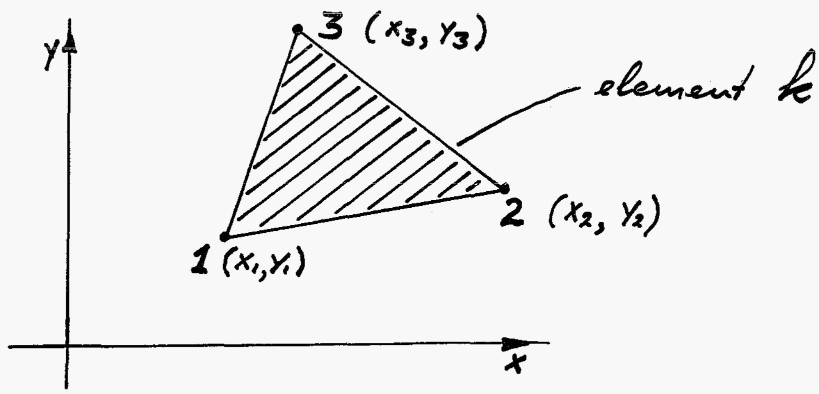


fig. 4.1 Voorbeeld van een element

Wanneer op deze manier voor alle elementen, die het beschouwde gebied formeren, veronderstellingen worden gemaakt, zou I_3 op eenvoudige wijze in een aantal constanten kunnen worden uitgedrukt. De stelling dat $\delta I_3 = 0$ kan dan echter niet zonder meer worden toegepast met betrekking tot al deze constanten omdat tijdens het varieren ϕ in elk geval continu moet blijven.

In elk knooppunt van het gebied van de dwarsdoorsnede moet de waarde van ϕ eenduidig vast liggen. Een eenvoudige manier om de continuïteit van ϕ te garanderen wordt gevonden door van de constanten c_1, c_2 en c_3 over te gaan op de waarden van ϕ in de knooppunten 1, 2 en 3 van het element. Wanneer voor een aangrenzend element op dezelfde manier te werk wordt gegaan is de continuïteit ook op de begrenzing gerealiseerd (van twee aangrenzende elementen vallen twee knooppunten samen).

De waarden van ϕ voor de knooppunten 1, 2 en 3 worden aangeduid als respectievelijk ϕ_1, ϕ_2 en ϕ_3. Voor het k^e element definiëren wij de kolomvector:

$$\phi^k = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Voor ϕ binnen het k^e element wordt in plaats van (4.1) geschreven:

$$\phi(x,y) = \phi_1 \cdot P_1(x,y) + \phi_2 \cdot P_2(x,y) + \phi_3 \cdot P_3(x,y) \tag{4.3}$$

Voor $P_1(x,y)$ geldt:

$$P_1 = \frac{1}{2\Delta}\left[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\right] \tag{4.4}$$

waarbij Δ het oppervlak is van het beschouwde element. P_2 en P_3 volgen uit (4.4) door cyclische verwisseling van de indices.

Voor de functionaal (2.18) kan geschreven worden:

$$I_3 = \sum_{\substack{\text{over alle} \\ \text{elementen}}} I_3^{\,k} \tag{4.5}$$

waarbij voor $I_3^{\,k}$ geldt:

$$I_3^{\,k} = \iint_\Delta \left\{ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] - 2\phi \right\} dx\,dy \tag{4.6}$$

Wordt voor ϕ de uitdrukking (4.3) gebruikt dan is met behulp van (4.4) de uitdrukking (4.5) te schrijven als:

$$I_3^{\,k} = \tfrac{1}{2}\,\phi'^{k} H^k \phi^k - \phi'^{k} f^k \tag{4.7}$$

(Opm: De getransponeerde van een matrix A wordt aangegeven met het symbool A'.

Voor H^k en f^k geldt:

$$H^k = \frac{1}{4\Delta}\begin{bmatrix} (y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2 & (y_3-y_1)(y_2-y_3)+(x_3-x_1)(x_2-x_3) & (y_1-y_2)(y_2-y_3)+(x_1-x_2)(x_2-x_3) \\ (y_2-y_3)(y_3-y_1)+(x_2-x_3)(x_3-x_1) & (y_3-y_1)^2+(x_3-x_1)^2 & (y_1-y_2)(y_3-y_1)+(x_1-x_2)(x_3-x_1) \\ (y_2-y_3)(y_1-y_2)+(x_2-x_3)(x_1-x_2) & (y_3-y_1)(y_1-y_2)+(x_3-x_1)(x_1-x_2) & (y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$f'^{k} = \tfrac{2}{3}\Delta\,[\,1 \quad 1 \quad 1\,] \tag{4.9}$$

Uit (4.7) kan door middel van (4.5) I_3 voor het gehele gebied worden bepaald. De randcondities van het variatieprobleem vereisen dat op de rand van het beschouwde gebied $\phi(x,y) = 0$. Dit betekent dat voor de knooppunten op de begrenzing van het gebied de waarde van ϕ nul gesteld dient te worden.

Wanneer de waarden van ϕ in alle knooppunten binnen het onderzochte gebied opgevat worden als de componenten van de vector Φ, dan biedt de hiervoor geschetste procedure de mogelijkheid voor I_3 te schrijven:

$$I_3 = \tfrac{1}{2}\,\Phi' H_3 \Phi - \Phi' f \tag{4.10}$$

waarbij tevens geldt dat $H_3' = H_3$.
De matrix H_3 kan eenvoudig worden opgebouwd uit de matrices H^k van alle elementen en evenzo is f te bepalen uit alle f^k.

Bij de gemaakte keuze voor $\phi(x,y)$ in het gebied zijn de daarin aanwezige parameters (namelijk de componenten van Φ te bepalen door te eisen dat $\delta I_3 = 0$ voor alle variaties van Φ.

Deze werkwijze resulteert in het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$H_3 \Phi = f \tag{4.11}$$

Door (4.11) op te lossen wordt Φ gevonden:

$$\Phi = H_3^{-1} f \tag{4.12}$$

De door (4.3) gegeven uitdrukking voor $\phi(x,y)$, die lineair is in x en y, impliceert dat in een element de schuifspanning constant is. Uit (2.13) en (2.14) volgt:

$$\tau^k = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \frac{G\beta}{2\Delta} \begin{bmatrix} (x_3-x_2) & (x_1-x_3) & (x_2-x_1) \\ (y_3-y_2) & (y_1-y_3) & (y_2-y_1) \end{bmatrix} \phi^k \tag{4.13}$$

Wanneer ϕ^k bekend is kan τ^k uit (4.13) berekend worden.

De torsiestijfheid is in een aantal gevallen een interessante grootheid. Uit (2.15) volgt:

$$J_d = \frac{M}{G\beta} = 2 \sum_{\substack{\text{over alle} \\ \text{elementen}}} \left\{ \tfrac{2}{3}\Delta [1 \quad 1 \quad 1] \phi^k \right\} \tag{4.14}$$

De met (4.14) berekende torsiestijfheid is altijd groter of gelijk aan de exacte torsiestijfheid voor dezelfde doorsnede. Het bewijs van deze bewering volgt uit het feit, dat de benaderingsoplossing, die geconstrueerd is uitgaat van het principe van complementaire energie. Wanneer gebruik wordt gemaakt van de zeepvliesanalogie kan op grond van het principe van minimale potentiele energie tot dezelfde uitspraak gekomen worden.

In een aantal gevallen zal de dwarsdoorsnede van de getordeerde balk een of meerdere symmetrielijnen bezitten. De component van de schuifspanning in de richting van de symmetrielijn is dan nul. Dit wil zeggen dat $\frac{d\phi}{dn} = 0$ waarbij $\frac{d}{dn}$ de afgeleide loodrecht op de symmetrielijn symboliseert. In 2 is aangegeven (zie (2.16)) dat randcondities van het type $\frac{d\phi}{dn} = f(x,y)$ in rekening kunnen worden gebracht door aan de functionaal toe te voegen de lijnintegraal: $-\oint_R f(x,y)\, \phi \, ds$.

In dit geval geldt $f(x,y) = 0$ op een symmetrielijn zodat aan I_3 (2.18) geen term behoeft te worden toegevoegd, wanneer van een symmetrische doorsnede slechts een geschikt gekozen gedeelte wordt beschouwd. Voor de randpunten, die dan op een symmetrie-as liggen, moet uiteraard – in tegenstelling met de situatie bij een materiele rand – ϕ vrij gelaten worden.

In het voorgaande is de werkwijze bij de elementenmethode toegelicht met als basis de functionaal $I_3(\phi)$. We kunnen op volkomen analoge wijze te werk gaan met als basis $I_1(\phi_0)$ of $I_2(\psi)$.

Wanneer wij analoog met (4.2) de kolomvectoren ϕ_0^k en ψ^k definiëren en voor ϕ_0 respectievelijk ψ een lineaire verandering in elk element veronderstellen, kunnen wij de met (4.7) overeenkomende uitdrukkingen bepalen:

$$I_1^k = \tfrac{1}{2}\, \phi_0^{k\prime} H^k \phi_0^k - \phi_0^{k\prime} f_0^k \tag{4.15}$$

$$I_2^k = \tfrac{1}{2}\, \psi^{k\prime} H^k \psi^k \tag{4.16}$$

De in (4.15) en (4.16) voorkomende matrix H^k is identiek met (4.8).

Wanneer de waarden van ϕ_0 in alle knooppunten van het gebied, <u>inclusief</u> de randpunten worden samengevoegd tot de vector Φ_0 dan geldt:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\, \Phi_0' H_1 \Phi_0 - \Phi_0' f_0 \tag{4.17}$$

De term $\Phi_0' f_0$ is afkomstig van $\oint_k (x n_y - y n_x)\, ds$ (zie (2.16)).

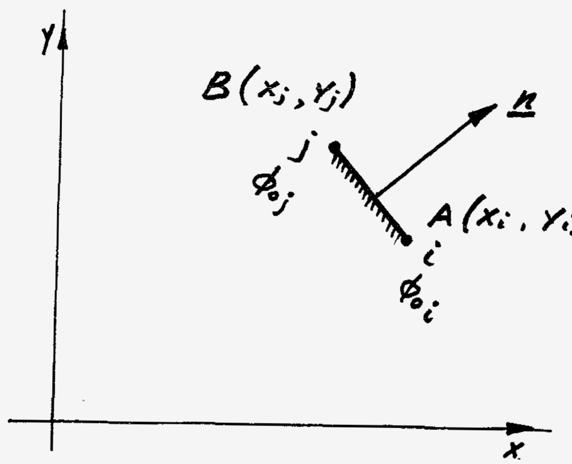


fig. 4.2 Gedeelte van de rand

De bijdrage in $\Phi_0' f_0$ van de integratie over het gedeelte AB van de rand (zie fig 4.2) is:

$$\begin{bmatrix} \phi_{0i} & \phi_{0j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{3}x_i^2 + \tfrac{1}{6}x_j^2 + \tfrac{1}{6}x_i x_j - \tfrac{1}{3}y_i^2 + \tfrac{1}{6}y_j^2 + \tfrac{1}{6}y_i y_j \\ -\tfrac{1}{6}x_i^2 + \tfrac{1}{3}x_j^2 - \tfrac{1}{6}x_i x_j - \tfrac{1}{6}y_i^2 + \tfrac{1}{3}y_j^2 - \tfrac{1}{6}y_i y_j \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Met behulp van (4.18) is f_0 te berekenen.

Wanneer de waarden van ψ in alle knooppunten binnen het gebied de vector Ψ vormen en wanneer de waarden van ψ in de randpunten de vector Ψ_0 vormen, dan is voor I_2 te schrijven:

$$I_2 = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} \Psi & \Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2 & H_{20} \\ H_{20} & H_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

In (4.19) kan Ψ gevarieerd worden met als resultaat:

$$H_2 \Psi + H_{20} \Psi_0 = 0 \tag{4.20}$$

De componenten van Ψ_0 volgen uit de randconditie (2.4). Het stelsel vergelijkingen (4.20) kan worden opgelost en resulteert in:

$$\Psi = -H_2^{-1} H_{20} \Psi_0 \tag{4.21}$$

Ook wanneer het probleem in ϕ_0 of ψ wordt opgelost kunnen de schuifspanningen en torsiestijfheid worden bepaald op eenvoudige wijze.

Wanneer er sprake is van symmetrie kan daar, ook bij de laatste twee methoden, voordelig gebruik van gemaakt worden.

5 Enige voorbeelden

5.1 Rechthoekige dwarsdoorsnede

In [4] zijn als functie van $\frac{b}{a}$ (zie fig 5.1) een aantal karakteristieke grootheden voor de Saint-Venant torsie van balken met een rechthoekige doorsnede vermeld.

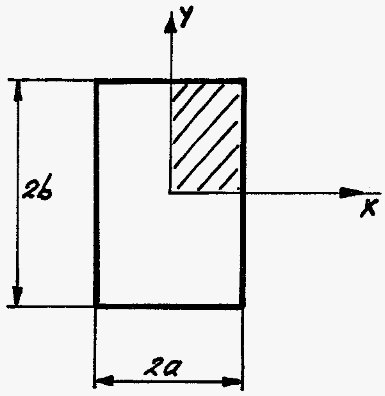


fig. 5.1 Rechthoekige dwarsdoorsnede

Met behulp van de in hoofdstuk 4 geschetste werkwijze gebaseerd op de bepaling van ϕ, zijn dezelfde grootheden berekend. Op grond van symmetrie-overwegingen is het voldoende louter het in fig. 5.1 gearceerde gedeelte in elementen te verdelen. Het patroon van de verdeling in elementen is weergegeven in fig. 5.2.
Als randvoorwaarde geldt:

$$\phi = 0 \quad \text{voor} \begin{cases} x = a \quad , \quad 0 \leq y \leq b \\ y = b \quad , \quad 0 \leq x \leq a \end{cases} \tag{5.1}$$

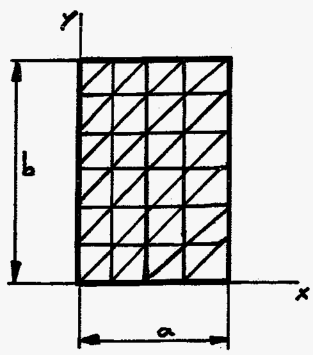


fig. 5.2 Patroon van de elementen verdeling

De belangrijkste gegevens worden afgeleid uit de factoren k en k_1, die overeenkomstig [4] gedefinieerd worden door:

$$M = k\, G \beta\, a^4 \tag{5.2}$$

$$\tau_{max} = k_1\, G \beta\, a \tag{5.3}$$

In tabel 5.1 zijn voor een aantal waarden van b/a k en k_1 weergegeven, zoals zij volgen uit een berekening met 450 elementen. De waarden uit [4] zijn in deze tabel eveneens vermeld. Opgemerkt dient te worden dat voor de bepaling van k_1 extrapolatie van de uit de berekening verkregen resultaten dient plaats te vinden.

b/a	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0
k (el. meth.)	2.238	3.173	4.674	7.278	9.917	12.560	17.850	23,130	49.410
k (uit [4])	2.248	3.187	4.704	7.328	9.960	12.624	17.984	23,280	49.920
k_1 (el. meth.)	1,345	1,512	1,690	1,856	1,933	1,967	1.991	1,996	1,993
k_1 (uit [4])	1,350	1,518	1,696	1,860	1,936	1,970	1.994	1,998	2.000

tabel 5.1 Rechthoekige dwarsdoorsneden

Geconstateerd kan worden dat de op grond van de elementenmethode berekende waarden van k kleiner zijn dan de werkelijke waarden. Dit resultaat was reeds voorspeld. De onderschatting van de torsiestijfheid varieert van 0,4 % bij $b/a = 1$ tot 1 % bij $b/a = 10$. De onnauwkeurigheid in de maximale schuifspanning is minder dan 0.5 %

Door meer elementen te kiezen kan de realiteit dichter benaderd worden. Wanneer voor $b/a = 5$ bijvoorbeeld van 900 elementen wordt uitgegaan dan wordt gevonden: $k = 23,230$ en $k_1 = 1,996$. Voor $b/a = 10$ geldt bij 900 elementen : $k = 49,770$ en $k_1 = 1,997$; bij 1800 elementen : $k = 49,870$ en $k_1 = 1,999$.

5.2 Dwarsdoorsnede in de vorm van een cirkelsector

Voor een dwarsdoorsnede als in fig. 5.3 is – voor het gearceerde gedeelte – weergegeven is – voor het gearceerde gedeelte – de elementenmethode toegepast, eveneens gebaseerd op de bepaling van ϕ.

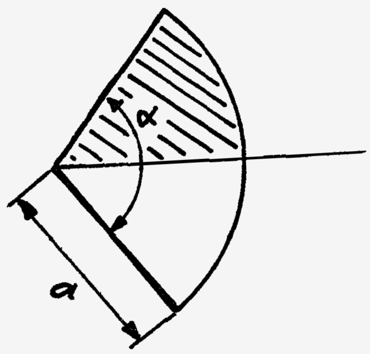


fig. 5.3 Dwarsdoorsnede : cirkelsector

Het patroon van de elementen verdeling is weergegeven in fig. 5.4.

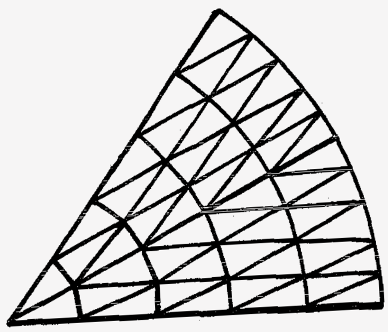


fig. 5.4 Het elementenpatroon

Overeenkomstig [4] definiëren wij :

$$M = k\, G\, a^4 \tag{5.4}$$

$$\tau_{max} = \begin{cases} k_1\, G \beta a & \text{op de kromme rand} \\ k_2\, G \beta a & \text{op de rechte rand} \end{cases} \tag{5.5}$$

Met name voor grote waarden van α (bijv. $\alpha > \pi$) is de maximale spanning op de rechte rand, ten gevolge van noodzakelijke extrapolaties, met het gekozen elementenpatroon onnauwkeurig te bepalen.

In tabel 5.2 zijn de resultaten die met behulp van 450 elementen berekend zijn vergeleken met die uit [4]. Geconstateerd kan worden dat er een bevredigende overeenkomst bestaat.

α	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π
k (el. meth.)	0,0179	0,0345	0,0816	0,143	0,295	0,565	0,660	0,852
k (uit [4])	0,0181	0,0349	0,0825	0,148	0,296	0,572	0,672	0,878
k_1 (el. meth.)	0,38	0,45	0,56	0,63	0,73	0,80	0,82	0,84
k_1 (uit [4])	……	0,452	……	0,622	0,719	……	……	……
k_2 (el. meth.)	0.41	0,49	0,60	0,68	0,86	……	……	……
k_2 (uit [4])	……	0,490	……	0,652	0,849	……	……	……

tabel 5.2 Dwarsdoorsnede : cirkelsector

5.3 Dwarsdoorsnede in de vorm van een regelmatige veelhoek

In hoofdstuk 3 is nagegaan hoe diverse benaderingsmethoden toegepast konden worden indien de dwarsdoorsnede van een getordeerde balk de vorm had van een regelmatige n-hoek (zie fig. 3.1).

Ook de elementenmethode blijkt een geschikt hulpmiddel te zijn. Wanneer optimaal gebruik wordt gemaakt van de aanwezige symmetrie kan het elementenpatroon een vorm hebben zoals fig. 5.5 aangeeft.

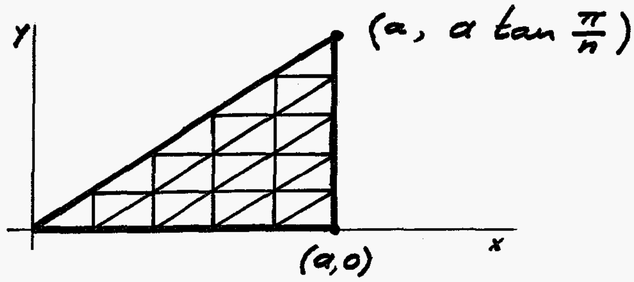


fig. 5.5 Het elementenpatroon

Aan het einde van hoofdstuk 2 is aangetoond dat de werkelijke torsiestijfheid ingesloten kan worden door zowel een berekening uit te voeren ter bepaling van ϕ_0 als ter bepaling van ϕ. Dit zal gedemonstreerd worden aan de hand van een regelmatige zeshoek. Onder de nu volgende letters a en b worden de onder- respectievelijk bovengrens voor k_2 (zie (3.6)) gegeven.

a. De ondergrens wordt bepaald met de methode gebaseerd op ϕ.

Als randvoorwaarden geldt:

$$\phi = 0 \quad \text{voor} \quad x = a \; , \quad 0 \leq y \leq a \tan\frac{\pi}{n} \qquad (5.6)$$

Als resultaat werd verkregen:

$$k_2 = 1,838$$

b. De bovengrens wordt bepaald met de methode gebaseerd op ϕ_0.

Bij een keuze van het coördinatenstelsel als gegeven in fig. 5.5, waarbij de oorsprong ligt in het snijpunt der symmetrie assen, kan worden nagegaan dat als randvoorwaarde voor ϕ_o moet gelden:

$$\phi_o = 0 \quad \text{op de symmetrieassen} \begin{cases} y = 0 \\ y = x \tan\frac{\pi}{n} \end{cases} \tag{5.7}$$

Als resultaat werd verkregen:

$$k_2 = 1{,}842$$

Voor de werkelijke torsiestijfheid, weergegeven met k_2, kan dus geconcludeerd worden:

$$1{,}838 \leq k_2 \leq 1{,}842$$

Ter volledigheid dient nog te worden vermeld dat voor beide berekeningen het aantal elementen 324 bedroeg.

Voor een aantal waarden van n zijn met behulp van de elementenmethode de karakteristieke grootheden bepaald. We definiëren de volgende dimensieloze getallen:

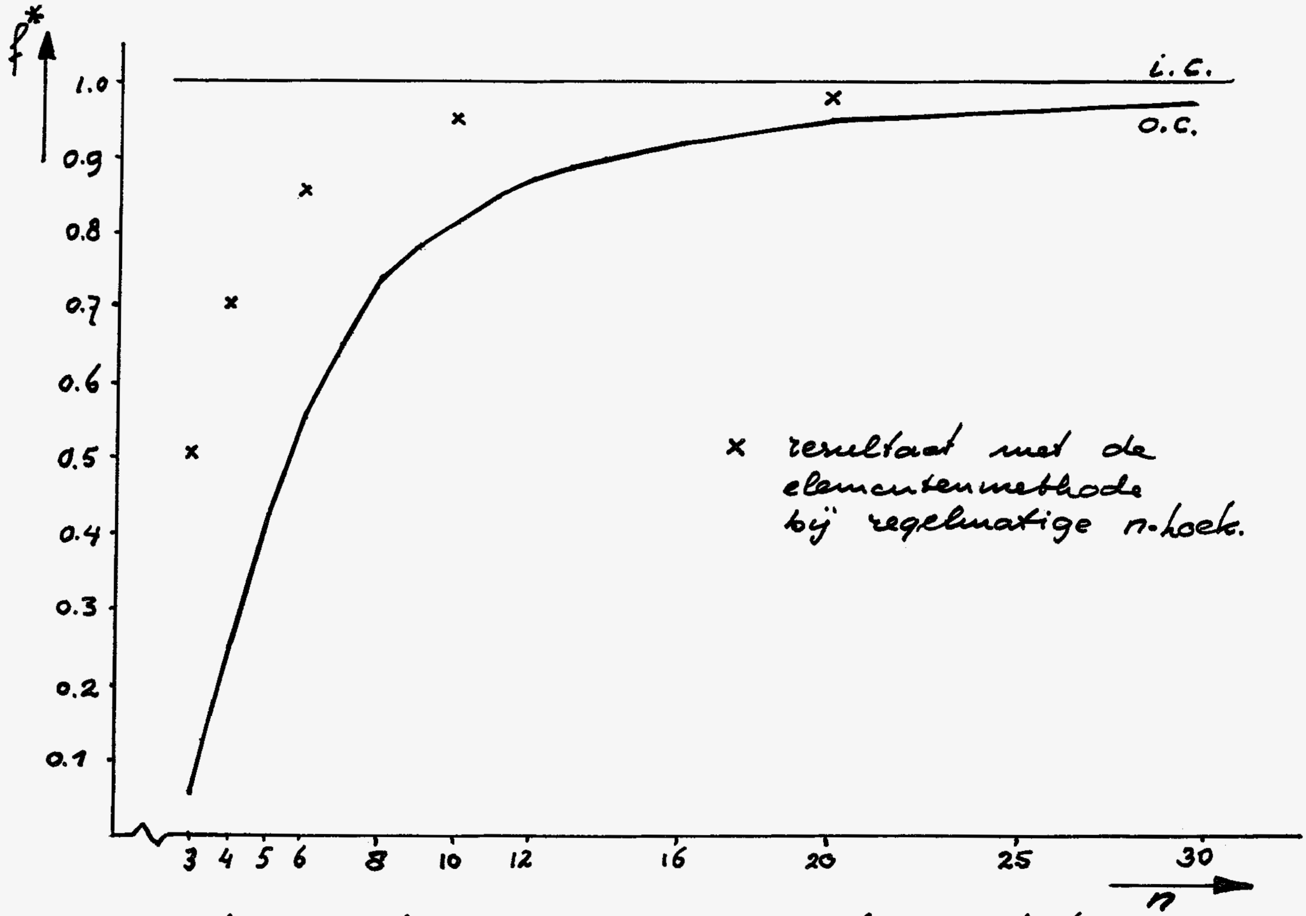
$$f^* = \frac{1}{2}\pi a^4 \frac{G\theta}{M_W} \tag{5.8}$$

$$\tau^*_{max} = \frac{1}{2}\pi a^3 \frac{\tau_{max}}{M_W} \tag{5.9}$$

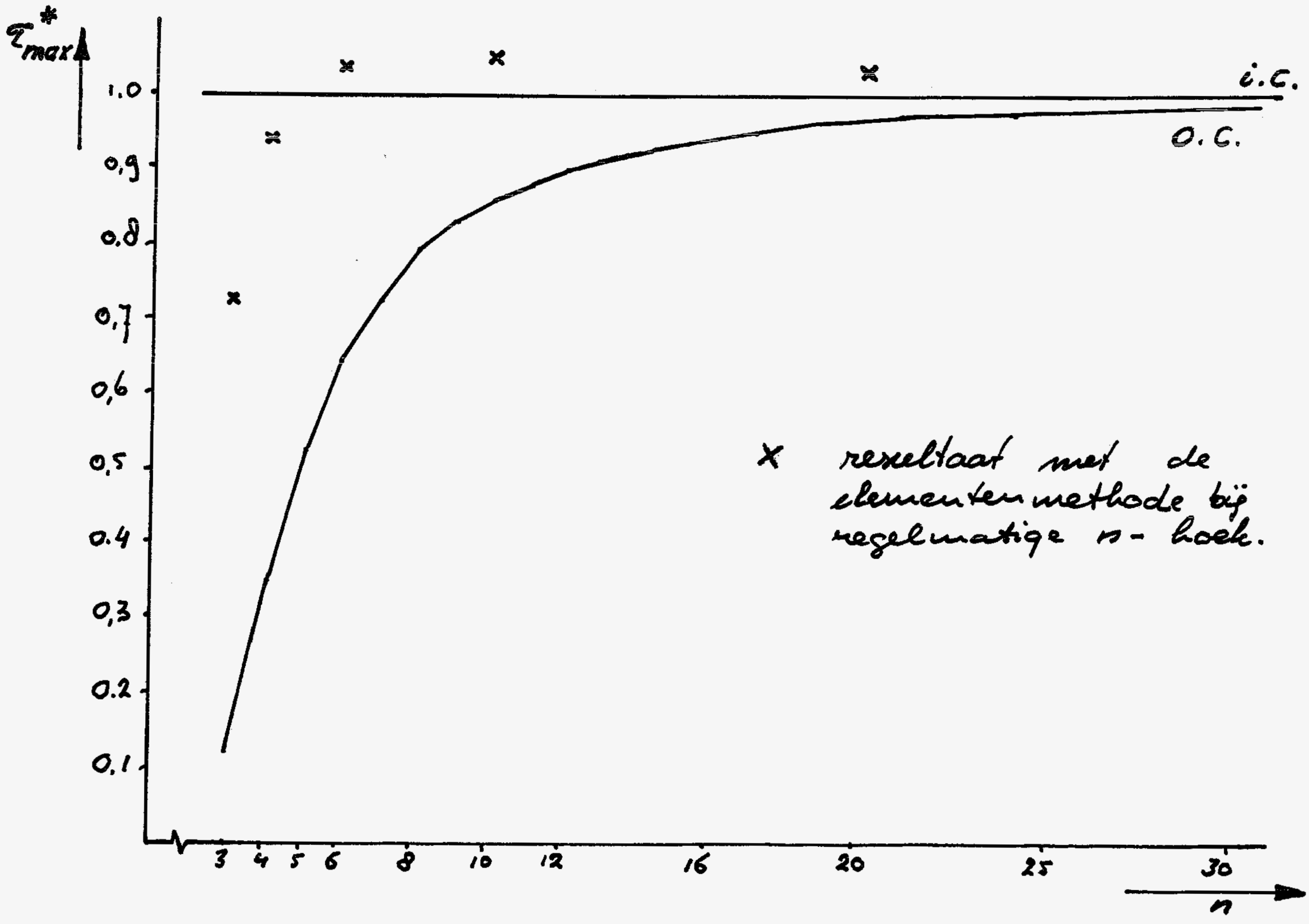
waarbij f^* en τ^*_{max} respectievelijk een maat zijn voor de flexibiliteit en de maximale schuifspanning. In grafiek 5.1 en grafiek 5.2 zijn de resultaten voor f^* en τ^*_{max} weergegeven en tevens de overeenkomstige waarden voor de ingeschreven en omgeschreven cirkel, waarbij geldt:

Straal ingeschreven cirkel, i.c. : a

Straal omgeschreven cirkel, o.c. : $\dfrac{a}{\cos\frac{\pi}{n}}$



grafiek 5.1 Vergelijking van de flexibiliteit



grafiek 5.2 Vergelijking van de maximale schuifspanning

6 Meervoudig samenhangende dwarsdoorsneden

Wanneer de dwarsdoorsnede niet enkelvoudig samenhangend is, zie fig. 6.1, kunnen de formuleringen van het torsievraagstuk, gegeven in (2.1) t/m (2.6) niet gehanteerd worden.

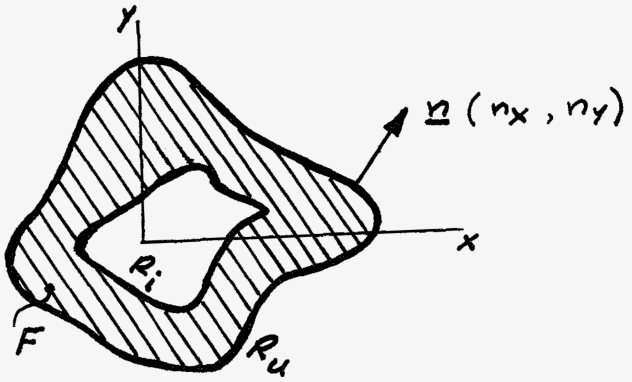


fig. 6.1 Meervoudig samenhangende dwarsdoorsnede

Onder de letters a, b en c zullen de wijzigingen, die ontstaan in de formuleringen met respectievelijk ϕ_0, ψ en ϕ als bepalende onbekenden, worden behandeld, wanneer de dwarsdoorsnede slechts één holte bevat, zoals in fig. 6.1.

a. $$\Delta\phi_0 = 0 \quad \text{in } F \tag{6.1}$$

$$\frac{d\phi_0}{dn} = (\text{grad}\,\phi_0, \underline{n}) = y n_x - x n_y \quad \text{op } R_u \text{ en } R_i \tag{6.2}$$

De formulering in ϕ_0 ondergaat geen enkele wijziging.

b. $$\Delta\psi = 0 \quad \text{in } F \tag{6.2}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad \text{op } R_u \tag{6.3}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + C_1 \quad \text{op } R_i \tag{6.4}$$

Hierin is C_1 een nog onbekende constante, die bepaald kan worden uit de eis dat:

$$\oint_{R_i} \frac{d\psi}{dn}\, ds = 0 \tag{6.5}$$

c. $\Delta\phi = -2$ in F (6.6)

$\phi = 0$ op R_u (6.7)

$\phi = C_2$ op R_i (6.8)

Hierin is C_2 een onbekende constante, die, wanneer we oppervlak van de holte aanduiden met A_i, bepaald kan worden uit de eis:

$$\oint_{R_i} \frac{d\phi}{dn}\, ds = -2A_i \qquad (6.9)$$

Nagegaan zal worden hoe de werkwijze met behulp van de elementenmethode dient te worden aangepast, voor de formuleringen b en c.

b. Met de elementenmethode kan bepaald worden $\Psi(x,y)$ bij expliciet gegeven randvoorwaarden. Bepaald worden:

$$\Psi_1(x,y) \quad \text{uit} \quad \begin{cases} \Delta\Psi_1 = 0 & \text{in } F \\ \Psi_1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) & \text{op } R_u \\ \Psi_1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) & \text{op } R_i \end{cases}$$

$$\Psi_2(x,y) \quad \text{uit} \quad \begin{cases} \Delta\Psi_2 = 0 & \text{in } F \\ \Psi_2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) & \text{op } R_u \\ \Psi_2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + A_i & \text{op } R_i \end{cases}$$

De werkelijke oplossing moet dan een lineaire combinatie zijn van $\Psi_1(x,y)$ en $\Psi_2(x,y)$:

$$\Psi = p\,\Psi_1 + q\,\Psi_2 \qquad (6.10)$$

Hierbij kunnen p en q opgelost worden uit het volgende stelsel:

$$p + q = 1 \qquad (6.11)$$

$$p \oint_{R_i} \frac{d\Psi_1}{dn}\, ds + q \oint_{R_i} \frac{d\Psi_2}{dn}\, ds = 0 \qquad (6.12)$$

c. De werkwijze bij deze formulering kan op analoge manier worden aangegeven als bij formulering b, eveneens gebaseerd op superpositie.

Nadat de werkelijke functies ψ en ϕ bekend zijn geworden, volgt de berekening van schuifspanningen en torsiestijfheid. Bewezen kan worden dat de torsiestijfheid voor formulering b en c bepaald moet worden respectievelijk met:

$$M = G\beta \left[I_p - \iint_F \left(y \frac{d\psi}{dy} + x \frac{d\psi}{dx} \right) dx\,dy \right] \tag{6.13}$$

$$M = G\beta \left[2 \iint_F \phi \, dx\,dy + 2 \phi_{R_i} A_i \right] \tag{6.14}$$

Het bezwaar van de aangegeven werkwijze is voornamelijk, dat de kringintegralen over de binnencontour slechts met een beperkte nauwkeurigheid bepaald kunnen worden. De met deze methodiek berekende resultaten voor een doorsnede begrensd door twee concentrische cirkels bleken desondanks toch goed met de exacte waarden overeen te stemmen.

Een andere mogelijkheid om niet enkelvoudig samenhangende doorsneden op torsie te berekenen, kan worden gevonden door uit te gaan van een enkelvoudig samenhangende doorsnede met een variabele glijdingsmodulus. Wanneer we een theorie kunnen vinden, die dit fenomeen beschrijft, kan een holte gesimuleerd worden door daar ter plaatse de glijdingsmodulus enige orden kleiner te veronderstellen dan voor de rest van de doorsnede.

Onder de letters a, b en c zullen we de veranderingen in de formules beschrijven voor respectievelijk de formulering met ϕ_0, ψ en ϕ. Hierbij is vooral van belang de uitdrukking voor de functionalen I_1, I_2 en I_3 omdat deze de grondslag vormen voor de werkwijze met de elementenmethode.

a. De uitdrukkingen voor de spanningen houden we identiek met (2.7) en (2.8):

$$\tau_{zx} = G\beta\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x} - y\right) \tag{6.15}$$

$$\tau_{zy} = G\beta\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial y} + x\right) \tag{6.16}$$

Door deze formules als uitgangspunt te kiezen is automatisch aan de compatibiliteitseisen voldaan.

De differentiaalvergelijking en de randconditie, die het probleem volkomen beschrijven volgen uit het evenwicht:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(G\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\right) + x\frac{\partial G}{\partial y} - y\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad \text{in } F \tag{6.17}$$

$$\frac{d\phi_0}{dn} = (\text{grad}\ \phi_0, \underline{n}) = y n_x - x n_y \quad \text{op } R \tag{6.18}$$

We definieren de functionaal $I_1(\phi_0)$:

$$I_1(\phi_0) = \iint_F G\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\right)^2\right] - x\frac{\partial\phi_0}{\partial y} + y\frac{\partial\phi_0}{\partial x}\right\} dx\,dy \tag{6.19}$$

Wanneer voor <u>alle</u> variaties van ϕ_0 voldaan is aan $\delta I_1 = 0$ hebben we de exacte oplossing gevonden. De torsiestijfheid kan dan bepaald worden uit:

$$M = \beta\iint_F G\left[-y\frac{\partial\phi_0}{\partial x} + x\frac{\partial\phi_0}{\partial y} + x^2 + y^2\right] dx\,dy \tag{6.20}$$

b. De uitdrukkingen voor de spanningen kiezen we zodanig dat aan het evenwicht binnen de contour is voldaan:

$$\tau_{zx} = \beta\left(\frac{\partial G\psi}{\partial y} - G^* y\right) \tag{6.21}$$

$$\tau_{zy} = -\beta\left(\frac{\partial G\psi}{\partial x} - G^* x\right) \tag{6.22}$$

G^* is een willekeurig te kiezen constante met dezelfde dimensie als G.

De differentiaalvergelijking, die het probleem beschrijft, wordt verkregen uit compatibiliteitsvoorwaarden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{G}\left(\frac{\partial G\psi}{\partial y}-G^{*}x\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{G}\left(\frac{\partial G\psi}{\partial y}-G^{*}y\right)\right\}+2=0 \quad \text{in } F \tag{6.23}$$

De bijbehorende randvoorwaarde volgt uit het evenwicht langs de rand:

$$G\psi=\frac{1}{2}G^{*}(x^{2}+y^{2}) \quad \text{op } R \tag{6.24}$$

We definiëren de functionaal $I_2(\psi)$:

$$I_2=\iint_F\left\{\frac{1}{2G}\left[\left(\frac{\partial G\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G\psi}{\partial y}\right)^2\right]+G\psi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G^{*}}{G}x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{G^{*}}{G}y\right)-2\right]\right\}dx\,dy \tag{6.25}$$

Wanneer voor alle toelaatbare variaties van ψ, met in achtneming van (6.24) voldaan is aan $\delta I_2=0$ is de exacte oplossing gevonden. Voor de torsiestijfheid geldt:

$$M=2\beta\iint_F G\psi\,dx\,dy-G^{*}\beta I_p \tag{6.26}$$

Opgemerkt dient nog te worden dat een differentieerbaar verloop van G voor deze werkwijze noodzakelijk is.

c. In afwijking van (2.13) en (2.14) wordt een andere spanningsfunctie ϕ geïntroduceerd:

$$\tau_{zx}=\beta\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{6.27}$$

$$\tau_{zy}=-\beta\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{6.28}$$

De opzet verloopt analoog met die beschreven onder b.

Differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+2\beta=0 \quad \text{in } F \tag{6.29}$$

Randvoorwaarde:

$$\phi=0 \quad \text{op } R \tag{6.30}$$

We definiëren de functionaal $I_3(\phi)$:

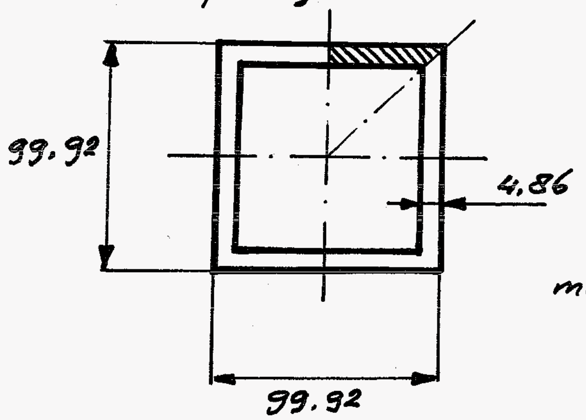
$$I_3 = \iint_F \left\{ \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] - 2\beta\phi \right\} dx\,dy \qquad (6.31)$$

Wanneer voor alle toelaatbare variaties van ϕ met op de rand $\phi = 0$ geldt dat $\delta I_3 = 0$ hebben we de exacte oplossing gevonden. De torsiestijfheid wordt bepaald met:

$$M = 2\beta \iint_F \phi\,dx\,dy \qquad (6.32)$$

Zowel formulering a als c lenen zich uitstekend voor toepassing bij niet-enkelvoudig samenhangende doorsneden omdat een discontinuïteit in G geen enkel probleem met zich meebrengt.

Tenslotte geven we de resultaten voor een doorsnede als fig. 6.2 aangeeft, een koker met geringe wanddikte.



maten in mm

fig. 6.2 Voorbeeld van een dwarsdoorsnede.

Op grond van symmetrieoverwegingen behoefde van deze doorsnede slechts het gearceerde gedeelte beschouwd te worden.

Het gekozen elementenpatroon is gegeven in fig. 6.3. Het totaal aantal elementen bedroeg 700.

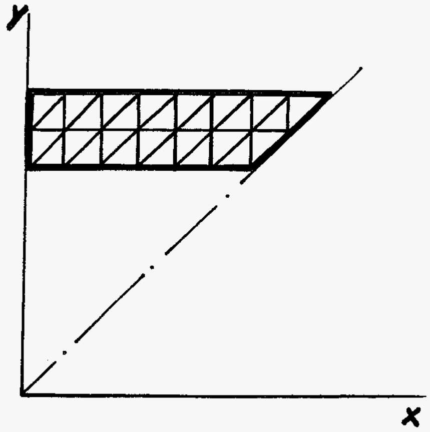


fig. 6.3 Het elementenpatroon

Gekozen is voor de werkwijze met ϕ_0 als bepalende grootheid, die in een fysisch model een maat is voor de welving. Grafiek 6.1 geeft deze welving voor een aantal rechten over de wand, zoals fig. 6.3 aangeeft.

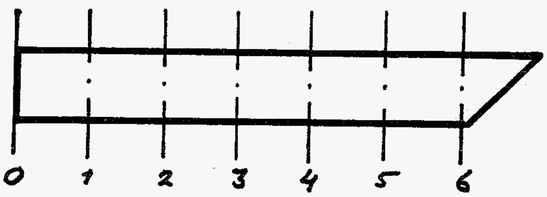
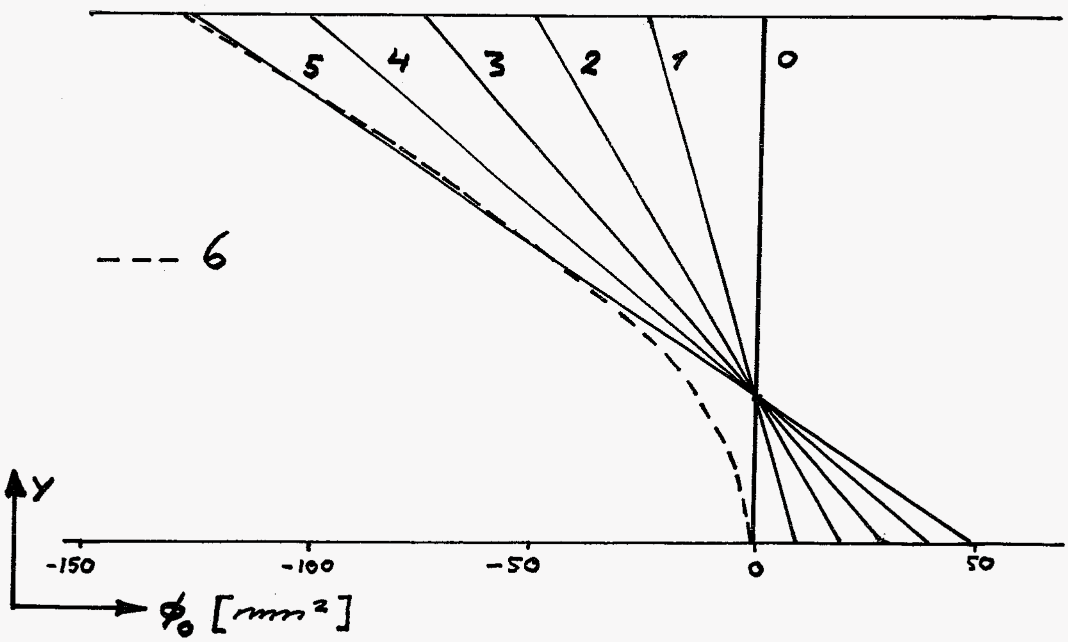
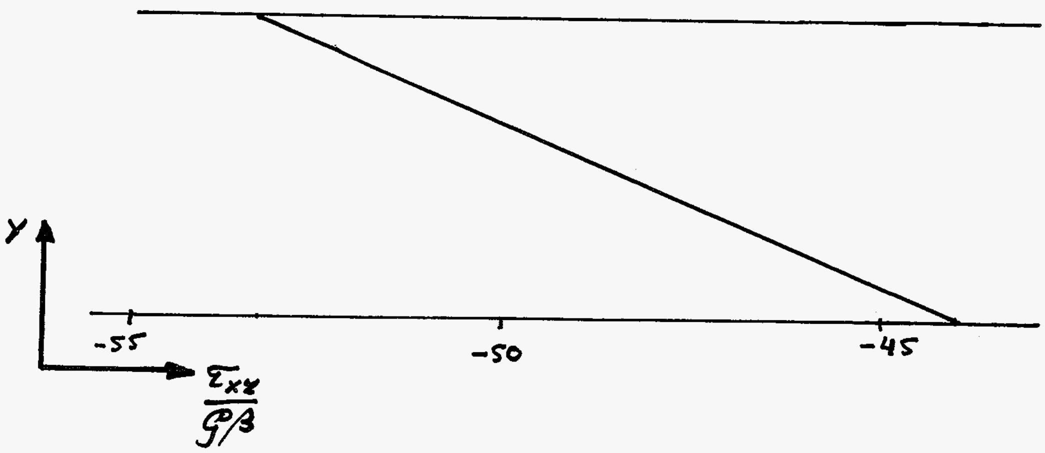


fig. 6.3 Rechten over de wand



Grafiek 6.1 Welving over de wanddikte

De schuifspanningsverdeling over een snede over de wand, niet in de buurt van de hoek, is weergegeven in grafiek 6.2.



Grafiek 6.2 De schuifspanningsverdeling

Met de analytische theorie, gebaseerd op een constante schuifspanningsverdeling over de wanddikte wordt voor de stijfheid gevonden:

$$\frac{M}{G\beta} = 4,175 \cdot 10^6 \ [mm^4]$$

Met de elementenmethode wordt gevonden:

$$\frac{M}{G\beta} = 4,284 \cdot 10^6 \ [mm^4]$$

Zonder verdere berekening is geen uitspraak mogelijk over de nauwkeurigheid van het gevonden resultaat. Wel kan geconcludeerd worden dat voor de exacte stijfheid moet gelden:

$$\frac{M}{G\beta} \leq 4,284 \cdot 10^6 \ [mm^4]$$

$$4,268 \cdot 10^6 \leq \frac{M}{G\beta} \leq 4,284 \cdot 10^6$$

7 Slotopmerkingen

Getracht is aan te geven dat de werkwijze met de elementenmethode voor een bepaalde type problemen bijzonder geschikt is.
Gekozen is het voorbeeld van de torsie theorie van de Saint-Venant maar problemen van dezelfde orde zijn bijvoorbeeld het berekenen van temperatuursverdelingen of het bepalen van de snelheidsverdeling in stromende media.
Niet alle aspecten konden worden aangeroerd. De nauwkeurigheid van de resultaten in afhankelijkheid van de elementenverdeling en het aantal elementen is nauwelijks besproken.
Het is interessant na te gaan of hier kwalitatieve uitspraken over gedaan kunnen worden.

In het voorgaande is slechts genoemd een element met daarbinnen een lineair verloop van de bepalende grootheid. Vermeld dient te worden dat elementen met bijvoorbeeld een kwadratisch verloop van de bepalende grootheid in zich opgesloten, geen enkele complicatie behoeven op te leveren. Bij een gelijk aantal elementen zal het laatst genoemde element vergeleken met het door ons toegepaste element aanzienlijk betere resultaten geven.