

Stysteemreductie aan een vliegwielhybride aandrijving

Citation for published version (APA):

Radt, M. J. H. (1994). *Systeemreductie aan een vliegwielhybride aandrijving*. (DCT rapporten; Vol. 1994.066). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1994

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Systeemreductie aan een vliegwiel-
hybride aandrijving

M.J.H. Radt id.nr. 267460

WFW-nr. 94.066

Bijlage stageverslag

Vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde

Technische Universiteit Eindhoven

SAMENVATTING

Op de faculteit der werktuigbouwkunde in de vakgroep produktontwerp en constructie van de TUE is in 1987 een vliegwielhybride aandrijving ontwikkeld. In deze aandrijving is een Continue Variabele Transmissie gemonteerd. Tevens wordt er gebruik gemaakt van een extra vliegwiel, dat dient voor de opslag van energie tijdens het remmen.

Ten gevolge van de CVT, waarvan de overbrengingsverhouding op een toestandafhankelijke manier varieert in de tijd, gedraagt het totale systeem zich niet lineair. Dit veroorzaakt een probleem bij het reduceren van het aantal vrijheidsgraden, omdat de gebruikelijke reductie-methoden ontwikkeld zijn voor lineaire systemen. Het is echter mogelijk om toch te reduceren. Dit gebeurt bij een vaste overbrengingsverhouding. Ook kan het totale systeem ontkoppeld worden ter plaatste van de niet-lineariteit, waarbij men twee systemen verkrijgt die beide wel lineair zijn. Op deze twee modellen kan men wel zonder problemen vrijheidsgradenreductie toepassen. De zo verkregen twee submodellen kunnen weer gekoppeld worden met de niet-lineariteit, waardoor men het totale gereduceerde model verkrijgt.

De toegepaste reductie-methode heet de Guyan- of statische reductie-methode. Hierbij wordt alleen gekeken naar de 'externe' coördinaten, die als benadering dienen voor de lagere eigenfrequenties. De benadering kan tevens worden uitgebreid door een dynamisch deel van de overige vrijheidsgraden toe te voegen met behulp van de methode van Craig-Bampton. De met deze reductie-methode verkregen gereduceerde matrices, worden met behulp van Bode-diagrammen vergeleken met de Bode-diagram van het originele systeem. Dit gebeurt met het programma MATLAB. De gewenste nauwkeurigheid waar het gereduceerde systeem aan dient te voldoen, houdt in dat de Bode-diagram van het gereduceerde systeem het originele systeem in het frequentie gebied van 0 tot 100 Hz nauwkeurig beschrijft. Als hierbij de juiste vrijheidsgraden meegenomen worden, is de Guyan-reductie methode een goede methode voor het reduceren van het aantal vrijheidsgraden van het hier toegepaste systeem.

INHOUDSOPGAVE

SAMENVATTING	2
INHOUDSOPGAVE	3
HOOFDSTUK 1 INLEIDING	4
HOOFDSTUK 2 MDOF-SYSTEMEN	5
HOOFDSTUK 3 LINEAIRE SYSTEEM REDUCTIE	7
3.1 INLEIDING	7
3.2 REDUCEREN VAN VRIJHEIDSGRADEN	8
3.3 STATISCHE- OF GUYAN REDUCTIE	10
3.4 METHODE GRAIG-BAMPTON	12
HOOFDSTUK 4 DE VLEGWIEL-HYBRIDE AANDRIJFLIJN	16
4.1 INLEIDING	16
4.2 DE COMPLETE SYSTEEM-REDUCTIE	17
4.3 DE SUBMODELLEN	20
4.3.1 HET MOTORISCHE SUBMODEL	20
4.3.2 HET LAST SUBMODEL	22
4.3.3 HET GEKOPPELDE SYSTEEM	23
HOOFDSTUK 5 CONCLUSIE	25
LITERATUURLIJST	26

HOOFDSTUK 1 INLEIDING

Op de faculteit Werktuigbouwkunde van de TUE is door Van der Graaf in 1987 een vliegwielhybride aandrijving ontwikkeld. Deze aandrijving kan gebruikt worden in een personenauto. De koppeling met de motor gebeurt door middel van een continue variabele transmissie. Tevens wordt er gebruikt gemaakt van een extra vliegwiel. Ten gevolge van de continue variabele transmissie (CVT), waarvan de overbrengingsverhouding op een toestandafhankelijke manier varieert in de tijd, gedraagt de complete aandrijflijn, die verder als het systeem zal worden aangeduid, zich niet-lineair. Deze niet-lineariteit geeft een probleem bij het reduceren van het aantal vrijheidsgraden, omdat de reductie-methode die gebruikt zal worden, ontwikkeld is voor lineaire systemen. Het is echter mogelijk om vrijheidsgraden reductie toe te passen bij een vaste CVT-overbrengingsverhouding waarna het verkregen model weer niet-lineair gemaakt kan worden. Ook kan het systeem ontkoppeld worden bij de niet-lineariteit, waarbij men twee systemen verkrijgt, die beide wel lineair zijn. Op deze twee sub-modellen kan men wel zonder problemen een reductie-methode gebruiken. De zo verkregen twee gereduceerde modellen kunnen weer gekoppeld worden met de niet-lineariteit, waardoor men het totale gereduceerde systeem verkrijgt.

De toegepaste statische reductie-methode wordt de Guyan reductie methode genoemd. Hierbij wordt alleen gekeken naar de 'externe' coördinaten, die als benadering dienen voor de lagere eigenfrequenties. Deze 'externe' coördinaten zijn die coördinaten waarin we zijn geïnteresseerd. De benadering kan tevens uitgebreid worden door een dynamisch deel van de overige coördinaten toe te voegen met behulp van de methode van Craig-Bampton.

De aanpak hierbij is dat de met behulp van de Guyan-reductie verkregen gereduceerde matrices omgeschreven worden naar een standaard lineair systeem met de matrices A, B, C en D. De omschrijving naar de matrices A, B, C en D komt aan de orde in hoofdstuk 2 terwijl het berekenen van de gereduceerde matrices beschreven wordt in hoofdstuk 3. Hoofdstuk 4 bevat de Guyan-systeemreductie aan de vliegwielhybride aandrijving. Als eerste wordt hierbij het complete systeem gereduceerd, waarna het systeem ontkoppeld wordt in twee afzonderlijke submodellen. Op deze twee submodellen wordt ook de Guyan-reductie methode toegepast, waarna de zo verkregen twee gereduceerde modellen in paragraaf 4.3.3 weer aan elkaar gekoppeld worden.

In hoofdstuk 5 volgt dan tenslotte nog de conclusie met de eventuele aanbevelingen.

HOOFDSTUK 2 MDOF-SYSTEMEN

We gaan uit van de algemene vergelijking van een MDOF-systeem met demping:

$$\underline{M} \cdot \ddot{q}(t) + \underline{B} \cdot \dot{q}(t) + \underline{K} \cdot q(t) = f(t) \quad (2.1)$$

waarbij:

- \underline{M} de symmetrische ($n \times n$) massamatrix
- \underline{B} de symmetrische ($n \times n$) dempingsmatrix
- \underline{K} de symmetrische ($n \times n$) stijfheidsmatrix
- $q(t)$ de kolom bevattende de n gegeneraliseerde coördinaten (vrijheidsgraden)
- $f(t)$ de kolom bevattende de n gegeneraliseerde krachten

Om met behulp van het programma MATLAB Bode diagrammen te maken van bovenstaand MDOF-systeem, wordt de algemene vergelijking (2.1) omgeschreven naar een standaard lineair systeem met de matrices ($\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$) hetgeen leidt tot het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\dot{x}(t) = \underline{A} \cdot x(t) + \underline{B} \cdot u(t) \quad (2.2)$$

$$y(t) = \underline{C} \cdot x(t) + \underline{D} \cdot u(t) \quad (2.3)$$

waarbij:

- \underline{A} de ($2n \times 2n$) systeemmatrix
- \underline{B} de ($2n \times n$) systeemmatrix
- \underline{C} de rij bevattende $2n-1$ nullen en één 1, afhankelijk van welke vrijheidsgraad men wil bekijken
- \underline{D} de rij bevattende n nullen
- $x(t)$ de kolom bevattende de $2n$ gegeneraliseerde coördinaten (vrijheidsgraden)
- $u(t)$ de kolom bevattende de n gegeneraliseerde krachten
- $y(t)$ die vrijheidsgraad die men wil bekijken

Omwerking van vergelijking (2.1) in stelsel (2.2) levert:

$$\ddot{q}(t) = -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{B} \cdot \dot{q}(t) - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} \cdot q(t) + \underline{M}^{-1} \cdot f(t) \quad (2.4)$$

Met:

$$x^T(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t) \ \dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t) \ \dots \ \dot{q}_n(t)] \quad (2.5)$$

wordt dit:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{O} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \cdot \underline{B} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{O} \\ \underline{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\underline{C} = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots 0] \quad (2.8)$$

$$\underline{D} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (2.9)$$

$$u(t) = f(t) \quad (2.10)$$

Dit zijn de gevraagde matrices voor het maken van Bode diagrammen met behulp van het programma MATLAB.

HOOFDSTUK 3 LINEAIRE SYSTEEM REDUCTIE

3.1 INLEIDING

Om complexe constructies goed te modelleren, moeten deze worden opgedeeld in zeer veel elementen hetgeen veel rekentijd kost. Als er dan telkens een ander detail aangepast dient te worden vergt dit een nieuwe totale analyse van de gehele constructie. Bij substructurering wordt de constructie verdeeld in componenten, waarna elke component afzonderlijk wordt gereduceerd. De zo verkregen gereduceerde substructuren worden weer gekoppeld tot een totale constructie. Het reduceren per component dient wel zo te gebeuren zodanig dat het dynamische gedrag van elke component nog goed beschreven wordt in het beschouwde frequentiegebied. Doordat het aantal vrijheidsgraden per component gereduceerd is, is ook het totale aantal vrijheidsgraden van de complete constructie gereduceerd.

Door het kleinere aantal vrijheidsgraden vergt het analyseren van de constructie veel minder rekentijd. Een kleine verandering van de constructie vereist nu alleen maar een nieuwe analyse van één of meer componenten, afhankelijk van de grootte van de verandering. Dit betekent een flinke besparing van de rekentijd bij een nieuwe analyse, omdat niet de hele constructie opnieuw geanalyseerd hoeft te worden.

Bij het onderverdelen in meerdere componenten kunnen twee invalshoeken gekozen worden nl.:

- De Component Mode Synthese (CMS) methode, waarbij uitgegaan wordt van gereduceerde massa-,dempings- en stijfheidsmatrices voor elke component.
- De Impedantie koppelingsmethode waarbij uitgegaan wordt van berekende of gemeten frequentie-responsfuncties (FRF's) voor de componenten.

Aan de tweede methode wordt in dit verslag geen aandacht besteed, de CMS methode wordt in de volgende paragraaf verder besproken.

3.2 REDUCEREN VAN VRIJHEIDSGRADEN

Voor de vergelijking van Lagrange van een MDOF-systeem geldt het volgende:

$$\underline{M} \cdot \ddot{q}(t) + \underline{B} \cdot \dot{q}(t) + \underline{K} \cdot q(t) = f(t) \quad (3.2.1)$$

Hierin is:- $q(t)$: kolom met n vrijheidsgraden van de constructie
- \underline{M} : ($n \times n$) massamatrix
- \underline{B} : ($n \times n$) dempingsmatrix
- \underline{K} : ($n \times n$) stijfheidsmatrix
- $f(t)$: ($n \times 1$) uitwendige belastingen

Reductie van het aantal vrijheidsgraden is nu mogelijk door de n vrijheidsgraden q te schrijven als een lineaire combinatie van n_p gegeneraliseerde coördinaten p met n_p kleiner dan n :

$$q = \underline{T} \cdot p \quad (3.2.2)$$

Hierin is \underline{T} een ($n \times n_p$) transformatie-matrix.

Voor de kinetische energie volgt:

$$T_{kin} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot \underline{M} \cdot \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \cdot \underline{M}^{red} \cdot \dot{p} \quad (3.2.3)$$

waarin geldt:

$$\underline{M}^{red} = \underline{T}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{T} \quad : \text{gereduceerde massamatrix } (n_p \times n_p) \quad (3.2.4)$$

De elastische energie is:

$$U = \frac{1}{2} q^T \cdot \underline{K} \cdot q = \frac{1}{2} p^T \cdot \underline{K}^{red} \cdot p \quad (3.2.5)$$

Hierin is:

$$\underline{K}^{red} = \underline{T}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{T} : \text{gereduceerde stijfheidsmatrix } (n_p * n_p) \quad (3.2.6)$$

Met behulp van de virtuele arbeid van de gegeneraliseerde krachten volgt voor de dempingsmatrix en de krachten:

$$\underline{f}^{red} = \underline{T}^T \cdot \underline{f} \quad (n_p * 1) \quad (3.2.7)$$

$$\underline{B}^{red} = \underline{T}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{T} \quad (n_p * n_p) \quad (3.2.8)$$

Voor de vergelijking van Lagrange volgt nu:

$$\underline{M}^{red} \cdot \ddot{\underline{p}} + \underline{B}^{red} \cdot \dot{\underline{p}} + \underline{K}^{red} \cdot \underline{p} = \underline{f}^{red} \quad (3.2.9)$$

Het stelsel is dus gereduceerd van n tot n_p vrijheidsgraden.

Voor het bepalen van de transformatie-matrix \underline{T} zijn verschillende methoden ontwikkeld. In de volgende paragrafen zal de Guyan-reductie, die gebruikt wordt bij de methode van Graig-Bampton, worden behandeld.

3.3 STATISCHE- OF GUYAN REDUCTIE

We gaan uit van het stelsel van n differentiaalvergelijkingen voor de beschrijving van ongedempte systemen in de formulering van Lagrange:

$$\underline{M} \cdot \ddot{q}(t) + \underline{K} \cdot q(t) = f(t) \quad (3.3.1)$$

De essentie van de statische reductiemethode is nu het vervangen van de n vergelijkingen uit (3.3.1) door n_e vergelijkingen, waarbij $n_e \ll n$. Hierbij moet echter wel het dynamisch gedrag van het te analyseren systeem zo goed mogelijk benaderd worden. Dit hangt samen met de praktijk, waarin men veelal alleen geïnteresseerd is in een relatief klein aantal van de laagste eigenfrequenties en bijbehorende eigentrillingsvormen voor de beoordeling van het vrije trillingsgedrag.

We nemen aan dat de totale verzameling van n vrijheidsgraden opgesplitst kan worden in een deelverzameling van n_e vrijheidsgraden en een deelverzameling bestaande uit de resterende $n_i = n - n_e$ vrijheidsgraden. De vrijheidsgraden q_e en q_i worden de externe resp. de lokale of interne vrijheidsgraden genoemd. Na een eventuele ordening van de vrijheidsgraden in q schrijven we nu:

$$q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{I} \end{bmatrix} q_e = \underline{T} q_e \quad (3.3.2)$$

Hierbij is \underline{T} de $(n \times n_e)$ transformatie-matrix die bepaalt hoe de n vrijheidsgraden in q geschreven worden als functie van de n_e vrijheidsgraden in q_e . Dit betekent dat het stelsel in (3.3.1) ook geschreven kan worden als:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ie} \\ M_{ei} & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ie} \\ K_{ei} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ii} \\ f_{ee} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Het gereduceerde stelsel vergelijkingen wordt hiermee:

$$\underline{M}_e \ddot{q}_e + \underline{K}_e q_e = f_e \quad (3.3.4)$$

met:

$$\underline{M}_e = \underline{T}^T \underline{M} \underline{T} \quad (3.3.5)$$

$$\underline{K}_e = \underline{T}^T \underline{K} \underline{T} \quad (3.3.6)$$

$$f_e = \underline{T}^T f \quad (3.3.7)$$

In het statische reductieproces, ook wel Guyan-reductie genoemd, wordt nu verondersteld dat elk der stijfheidstermen $K_{ij} \cdot q_j$ en $K_{ie} \cdot q_e$ veel groter is dan de som der traagheidstermen $M_{ij} \cdot \ddot{q}_j + M_{ie} \cdot \ddot{q}_e$ en veel groter is dan de belastingkolom f_{ij} .

In dat geval kunnen we het interne deel van (3.3.3) benaderen door:

$$\underline{K}_{ii} q_i + \underline{K}_{ie} q_e = 0 \quad (3.3.8)$$

Aannemende dat K_{ii} regulier is, volgt uit (3.3.8):

$$q_i = -\underline{K}_{ii}^{-1} \cdot \underline{K}_{ie} q_e = \underline{T}_e q_e \quad \text{dus} \quad \underline{T}_e = -\underline{K}_{ii}^{-1} \cdot \underline{K}_{ie} \quad (3.3.9)$$

Substitutie in (3.3.5), (3.3.6) en (3.3.7) levert de gereduceerde matrices op:

$$\underline{M}_e = M_{ee} - M_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} K_{ie} - K_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} M_{ie} + K_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} M_{ii} \underline{K}_{ii}^{-1} K_{ie}$$

$$\underline{K}_e = K_{ee} - K_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} K_{ie}$$

$$f_e = f_{ee} - K_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} f_{ii} \quad (3.3.10)$$

Concluderend kan gesteld worden dat de statische reductie in principe een geschikte methode is om de orde van het stelsel vergelijkingen voor de beschrijving van ongedempte, dynamische problemen te reduceren met behoud van voldoende nauwkeurigheid. Men dient hierbij wel de juiste vrijheidsgraden mee te nemen om aan de gevraagde nauwkeurigheid te voldoen.

3.4 METHODE GRAIG-BAMPTON

De Graig-Bampton methode kan gezien worden als een uitbreiding van de statische- of Guyan-reductie methode. De totale set van vrijheidsgraden q wordt opgesplitst in n_b zogeheten boundary vrijheidsgraden q_b (dit zijn alle vrijheidsgraden die nodig zijn voor de koppeling met alle andere componenten en vrijheidsgraden nodig voor het later in rekening brengen van constraints of kinematische randvoorwaarden plus die vrijheidsgraden waar belangrijke krachten op de constructie werken) en n_i zogeheten interne vrijheidsgraden q_i , dus:

$$q = \begin{bmatrix} q_b \\ q_i \end{bmatrix} \quad n = n_b + n_i \quad (3.4.1)$$

Het stelsel (3.3.1) kan nu in gepartitioneerde vorm geschreven worden als:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ f_i \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

De totale verplaatsingen q splitsen we nu in een statisch vervormingsdeel q_s en een deel q_d voor het in rekening brengen van de vervormingen ten gevolge van de in de interne knooppunten aanwezige traagheidskrachten:

$$q = q_s + q_d \quad (3.4.3)$$

Voor de statische vervorming q_s nemen we aan dat deze volledig bepaald wordt door de boundary vrijheidsgraden q_b op de wijze welke ten grondslag ligt aan de statische- of Guyan reductie:

$$q_s = \begin{bmatrix} I_{bb} \\ T_{ib} \end{bmatrix} q_b \quad (3.4.4)$$

Hierbij is:

$$T_{ib} = -K_{ii}^{-1} \cdot K_{ib} \quad (3.4.5)$$

Voor de dynamische bijdrage q_d nemen we een lineaire combinatie van zogeheten constraint modes, ook wel fixed-interface normal modes genaamd. Dit wil zeggen eigenkolommen van de ongedempte, vrijtrillende componenten waarvoor alle boundary vrijheidsgraden q_b zijn onderdrukt:

$$M_{ii} \cdot \ddot{q}_i + K_{ii} \cdot q_i = 0 \quad (3.4.6)$$

Het hiermee geassocieerde eigenwaardeprobleem luidt:

$$(-\omega_k^2 \cdot M_{ii} + K_{ii}) \cdot u_k = 0 \quad (3.4.7)$$

We verzamelen de eigenhoekfrequenties ω_k in de diagonaalmatrix Ω_{ii} en de corresponderende eigenkolommen u_k in de matrix U_{ii} . De eigenkolommen worden genormeerd met M_{ii} als kern, dus:

$$\frac{U_{ii}^T \cdot M_{ii} \cdot U_{ii}}{M_{ii}} = I_{ii} \quad (3.4.8)$$

Voor de coördinatentransformatie geldt nu (3.4.3):

$$\underline{q} = \underline{q}_s + \underline{q}_d = \begin{bmatrix} \underline{I}_{bb} \\ \underline{T}_{ib} \end{bmatrix} \underline{q}_b + \begin{bmatrix} \underline{O}_{bi} \\ \underline{U}_{ii} \end{bmatrix} \dot{\underline{\xi}}_i = \underline{T} \underline{p} \quad (3.4.9)$$

Er geldt dus:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{bb} & \underline{O}_{bi} \\ \underline{T}_{ib} & \underline{U}_{ii} \end{bmatrix} ; \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} \underline{q}_b \\ \dot{\underline{\xi}}_i \end{bmatrix} \quad (3.4.10)$$

Bepaling van de gereduceerde massa-, dempings- en stijfheidsmatrix en de gereduceerde belastingvector volgt nu via:

$$\begin{aligned} \underline{M}^{red} &= \begin{bmatrix} \underline{M}_e & (\underline{M}_{bi} - \underline{K}_{bi} \cdot \underline{K}_{ii}^{-1} \cdot \underline{M}_{ii}) \cdot \underline{U}_{ii} \\ sym & \underline{I}_{ii} \end{bmatrix} \\ \underline{B}^{red} &= \begin{bmatrix} \underline{B}_e & (\underline{B}_{bi} - \underline{K}_{bi} \cdot \underline{K}_{ii}^{-1} \cdot \underline{B}_{ii}) \cdot \underline{U}_{ii} \\ sym & \underline{U}_{ii}^T \cdot \underline{B}_{ii} \cdot \underline{U}_{ii} \end{bmatrix} \\ \underline{K}^{red} &= \begin{bmatrix} \underline{K}_e & \underline{O}_{bi} \\ sym & \underline{\Omega}_{ii}^2 \end{bmatrix} \\ \underline{f}^{red} &= \begin{bmatrix} \underline{f}_e \\ \underline{U}_{ii}^T \underline{f}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Hierbij zijn \underline{M}_e , \underline{K}_e en \underline{f}_e de bekende bij Guyan reductie gehanteerde matrices (3.3.10). De matrix \underline{B}_e is hierbij analoog aan \underline{M}_e met B in plaats van M.

Tot zover heeft het nog geen zin om over gereduceerde matrices te spreken, want we hebben nog steeds (weliswaar andere) n vrijheidsgraden. Bij het reductieproces wordt er nu vanuit gegaan dat niet alle constraints modes, opgeslagen in \underline{U}_{ij} , meegenomen worden, maar alleen die modes waarvan de corresponderende eigenhoekfrequenties vallen in het gebied van belang: $[0, \omega_u]$. Stel dat de eigenhoekfrequenties gesorteerd zijn van klein naar groot en dat in het gebied dat van belang is niet i maar slechts n_k modes aanwezig zijn, dan wordt de dynamische bijdrage geschreven als:

$$q_d = \begin{bmatrix} O \\ \underline{U}_{ik} \end{bmatrix} \xi_k \quad (3.4.12)$$

met \underline{U}_{ik} de eerste n_k kolommen van \underline{U}_{ij} ($n_k < n_i$).

De na toepassing van de transformatiematrix resulterende en nu wel gereduceerde matrices luiden:

$$\underline{M}^{red} = \begin{bmatrix} \underline{M}_e & (\underline{M}_{bi} - \underline{K}_{bi-ii} \underline{K}^{-1} \underline{M}_{ii}) \underline{U}_{ik} \\ sym & \underline{U}_{ik}^T \underline{M}_{ii} \underline{U}_{ik} = \underline{I}_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}^{red} = \begin{bmatrix} \underline{K}_e & O_{bk} \\ sym & \underline{\Omega}_{kk}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^{red} = \begin{bmatrix} f_e \\ \underline{U}_{ik}^T f_i \end{bmatrix} \quad (3.4.13)$$

Voor \underline{B}^{red} geldt hetzelfde als \underline{M}^{red} met B i.p.v. M .

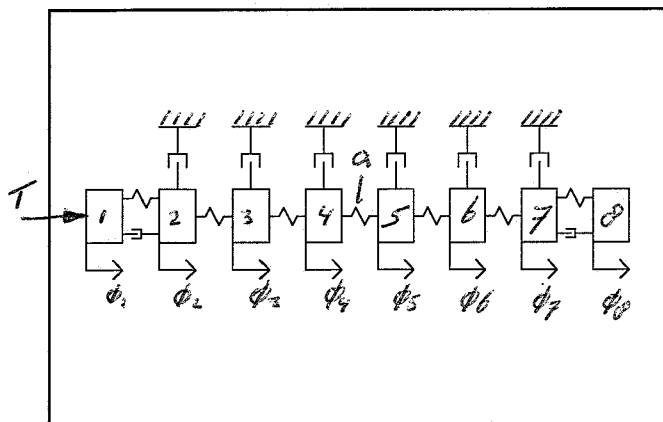
Nemen we $k = 0$ dan hebben we met een zuivere Guyan-reductie te maken en nemen we $k = i$ dan reduceren we helemaal niet.

HOOFDSTUK 4 DE VLEGWIEL-HYBRIDE AANDRIJFLIJN

Een mogelijk systeem waar reductie wenselijk is, is het vliegwiel-hybride systeem geanalyseerd door v.d. Ven. Dit systeem kan gebruikt worden in een personenwagen, waar vlak na de motor nog een extra vliegwiel wordt gebruikt om energie in op te slaan tijdens het remmen. Het systeem dat hier verder gebruikt zal worden, is het uiteindelijke lineaire model dat v.d. Ven beschrijft op pagina 38 in het verslag van zijn analyse. De gebruikte matrices zijn tevens die matrices die volgen uit zijn analyse en zijn gegeven in de bijlage.

4.1 INLEIDING

Het model waarop de reductie toegepast zal worden, is te zien in figuur (4.1.1):



figuur 4.1.1

- 1 = motor
- 2 = versnelling
- 3 = vliegwiel
- 4 = CVT-poelie
- 5 = CVT-poelie
- 6 = differentieel
- 7 = wielen
- 8 = voertuig
- a = metalen v-snaar

De bewegingsvergelijking van dit model wordt gegeven door:

$$\underline{J}\ddot{\phi} + \underline{R}\dot{\phi} + \underline{K}\phi = T_i \quad (4.1.1)$$

Hierin is ϕ de rotatie, \underline{J} de massamatrix, \underline{R} de dempingsmatrix en \underline{K} de stijfheidsmatrix. T_i is de kolom bevattende de externe krachten. Het is duidelijk dat het systeem niet lineair is, doordat de CVT-overbrengingsverhouding niet constant is in de tijd. Om toch aan dit systeem te kunnen rekenen wordt verondersteld dat de overbrengingsverhouding $i=1$.

Dit systeem kan op verschillende manieren gereduceerd worden, waarbij in dit verslag alleen aandacht geschonken zal worden aan de methode van Guyan. Als eerste zal het complete systeem zo veel als mogelijk gereduceerd worden, waarbij wel rekening gehouden wordt met een bepaalde nauwkeurigheid. Tenslotte wordt het systeem ontkoppeld in twee afzonderlijke submodellen, waarna ieder submodel gereduceerd wordt. Na de toegepaste reductie worden de twee modellen weer gekoppeld tot het complete systeem. Het zo ontstane systeem is dan ook gereduceerd.

4.2 DE COMPLETE SYSTEEM-REDUCTIE

We gaan er van uit dat de metalen v-snaar tussen de twee CVT-poelies zich gedraagt als een lineaire veer waarbij geen aandacht geschonken wordt aan de overbrengingsverhouding. De vergelijking (4.1.1), waarvan de matrices gegeven zijn in de bijlage, dient als eerste omgeschreven te worden naar het stelsel vergelijkingen in (2.2) en (2.3). Met $n = 8$ volgt hieruit:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{O} & \underline{I} \\ -\underline{J}^{-1} \cdot \underline{K} & -\underline{J}^{-1} \cdot \underline{R} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{O} \\ \underline{J}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$C^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

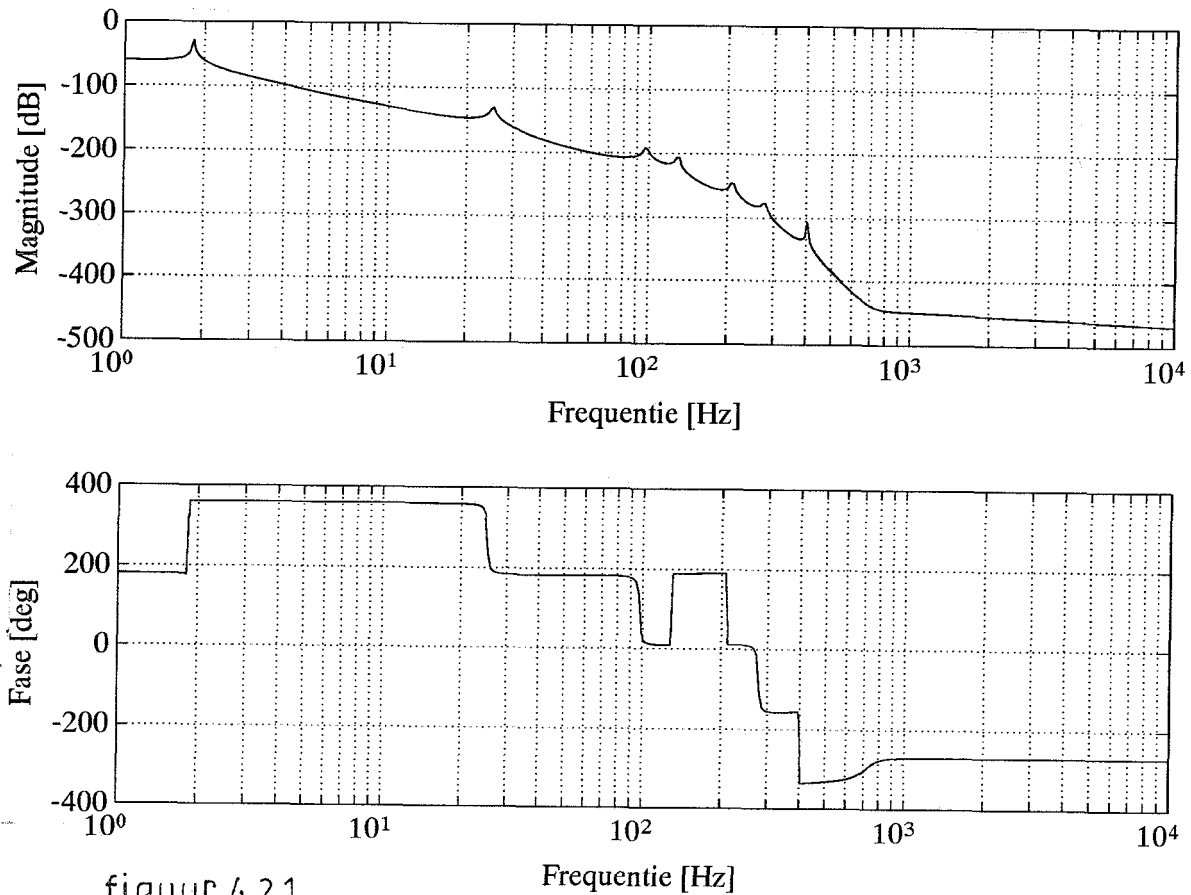
$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$y(t) = \phi_8 \tag{4.2.1}$$

Voor $x(t)$ geldt hierbij:

$$x^T(t) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_8 \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dots \ \dot{\phi}_8] \tag{4.2.2}$$

Voor het ongereduceerde systeem volgt met behulp van MATLAB de Bode-diagrammen zoals te zien in figuur (4.2.1).



figuur 4.2.1

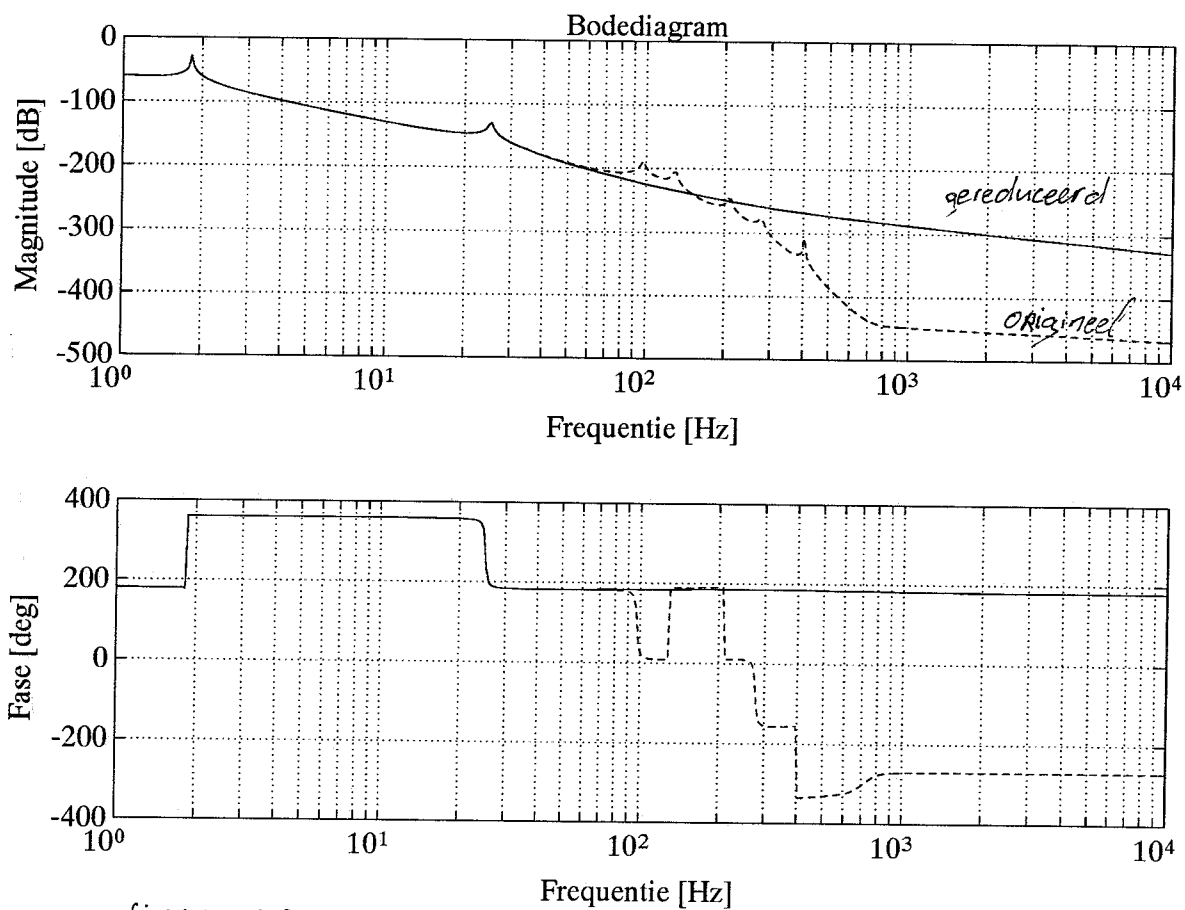
Als eerste wordt bij het reduceren alleen de eerste en achtste vrijheidsgraad meegenomen. Uit het zo ontstane Bode-diagram, zie bijlage, volgt dat deze reductie waarbij alleen ϕ_1 en ϕ_8 worden meegenomen, niet voldoet aan de gewenste nauwkeurigheid. Er dienen dus tenminste drie vrijheidsgraden meegenomen te worden. Na het proberen van verschillende vrijheidsgraden (zie de bijlagen) blijkt dat de derde vrijheidsgraad zeker meegenomen dient te worden om aan de nauwkeurigheid te voldoen. Dit is echter ook logisch omdat de beschouwde vrijheidsgraad ϕ_3 behoort bij het vliegwiel dat een relatief grote massa traagheid heeft, die niet verwaarloosd mag worden.

Bij het reduceren naar 4 vrijheidsgraden, blijkt dat de nauwkeurigheid ten opzichte van het maar meenemen van 3 vrijheidsgraden niet spectaculair verandert, zodat volstaan kan worden met het reduceren naar 3 vrijheidsgraden, omdat het de bedoeling is om zoveel mogelijk te reduceren. Dit houdt in dat er zo min mogelijk vrijheidsgraden meegenomen dienen te worden maar wel met behoud van de nauwkeurigheid.

Hieruit volgt dat uiteindelijk voor de gereduceerde vrijheidsgraden geldt:

$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_8 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

De zo resulterende Bode-diagram is te zien in figuur (4.2.2).

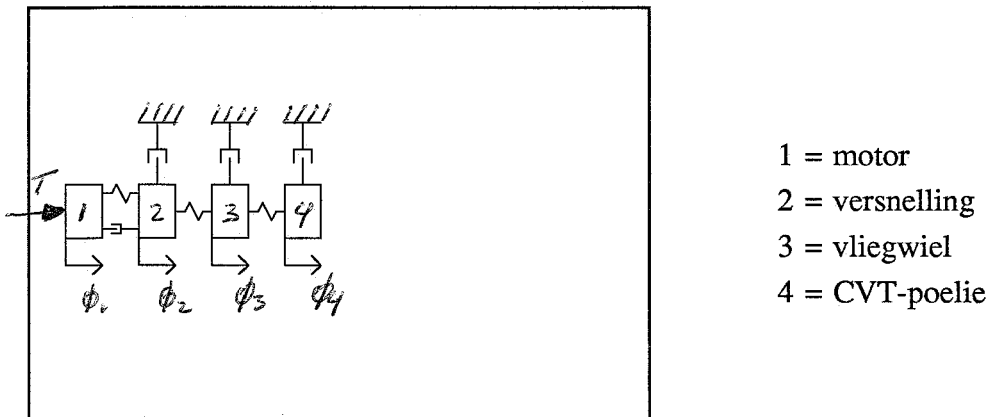


4.3 DE SUBMODELLEN

Het complete systeem wordt verdeeld in twee afzonderlijke deelsystemen. Ik kies voor een ontkoppeling ter plaatse van de niet-lineaire CVT. Hierbij snijd ik de constructie door midden tussen de vierde en vijfde vrijheidsgraad. In werkelijkheid kan het ook gezien worden als het verwijderen van de metalen V-snaar tussen de twee poelies. De ontkoppelde "veer" wordt tijdens het reduceren weggelaten, waarna de gereduceerde submodellen met behulp van deze veer weer aan elkaar gekoppeld worden. Het zo verkregen totale gereduceerde systeem wordt dan weer vergeleken met het originele systeem.

4.3.1 HET MOTORISCHE SUBMODEL

Onder dit submodel wordt verstaan, dat gedeelte dat voor de eigenlijke aandrijving zorgt. Uit het model uit figuur (4.1.1) zijn dit de eerste vier massa's, zodat het volgende deelsysteem ontstaat (zie figuur 4.3.1.1):



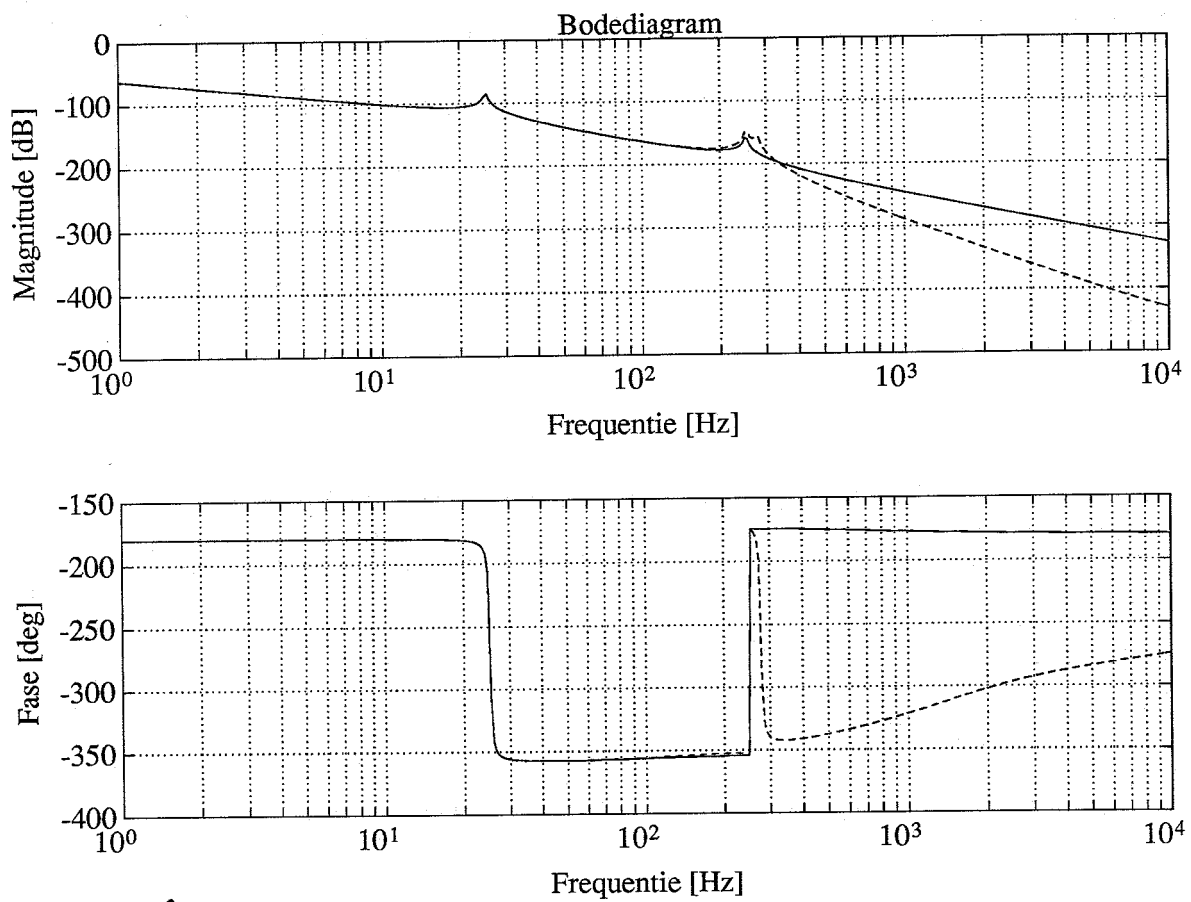
figuur 4.3.1.1

Bij het reduceren van dit subsysteem (zie bijlage) blijkt dat als alleen de eerste en vierde vrijheidsgraden meegenomen worden, dat het systeem niet aan de nauwkeurigheid voldoet. Er dienen dus ook hier meer vrijheidsgraden meegenomen te worden. Ook hier moet de grote massa's van de derde vrijheidsgraad meegenomen worden. Hieruit volgt dat voor de gereduceerde vrijheidsgraden geldt:

$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

(4.3.1.1)

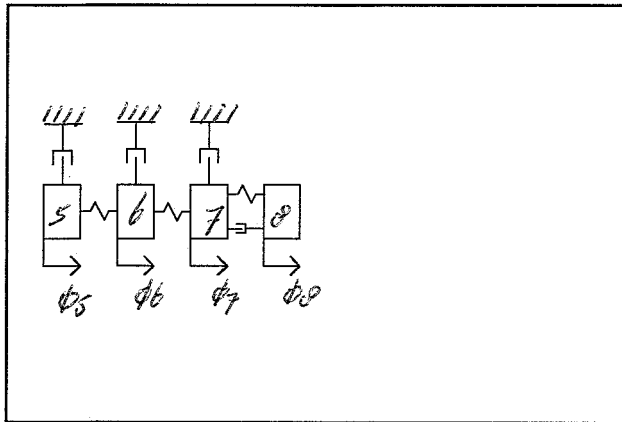
De zo resulterende Bode-diagram is te zien in figuur (4.3.1.2).



figuur 4.3.1.2

4.3.2 HET 'LAST' SUBMODEL

Onder dit gedeelte wordt verstaan dat deel dat aangedreven dient te worden door de motor. Uit het model in figuur (4.1.1) zijn dit de laatste vier vrijheidsgraden, zodat het volgende deelmodel ontstaat (zie figuur 4.3.2.1):



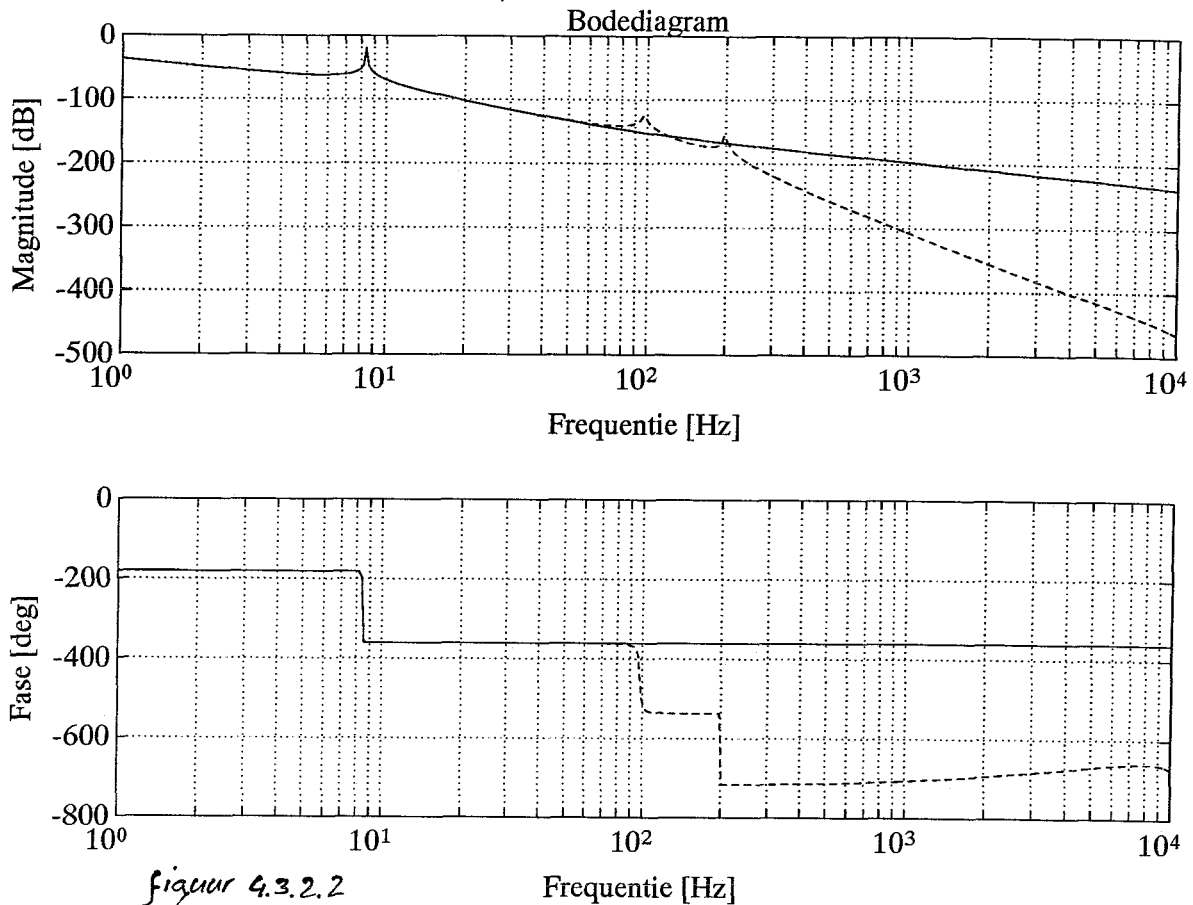
- 5 = CVT-poelie
- 6 = differentieel
- 7 = wielen
- 8 = voertuig

figuur 4.3.2.1

Bij het zoveel mogelijk reduceren van dit submodel (zie bijlage) blijkt dat het meenemen van de vijfde en achtste vrijheidsgraad voldoende is om aan de nauwkeurigheid te voldoen. Het is dus niet nodig om extra vrijheidsgraden mee te nemen, want dit vergt een grotere rekentijd. De gereduceerde vrijheidsgraden voor dit submodel wordt dus gegeven door:

$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_5 \\ \phi_8 \end{bmatrix} \quad (4.3.2.1)$$

De zo verkregen Bode-diagram is te zien in figuur (4.3.2.2).

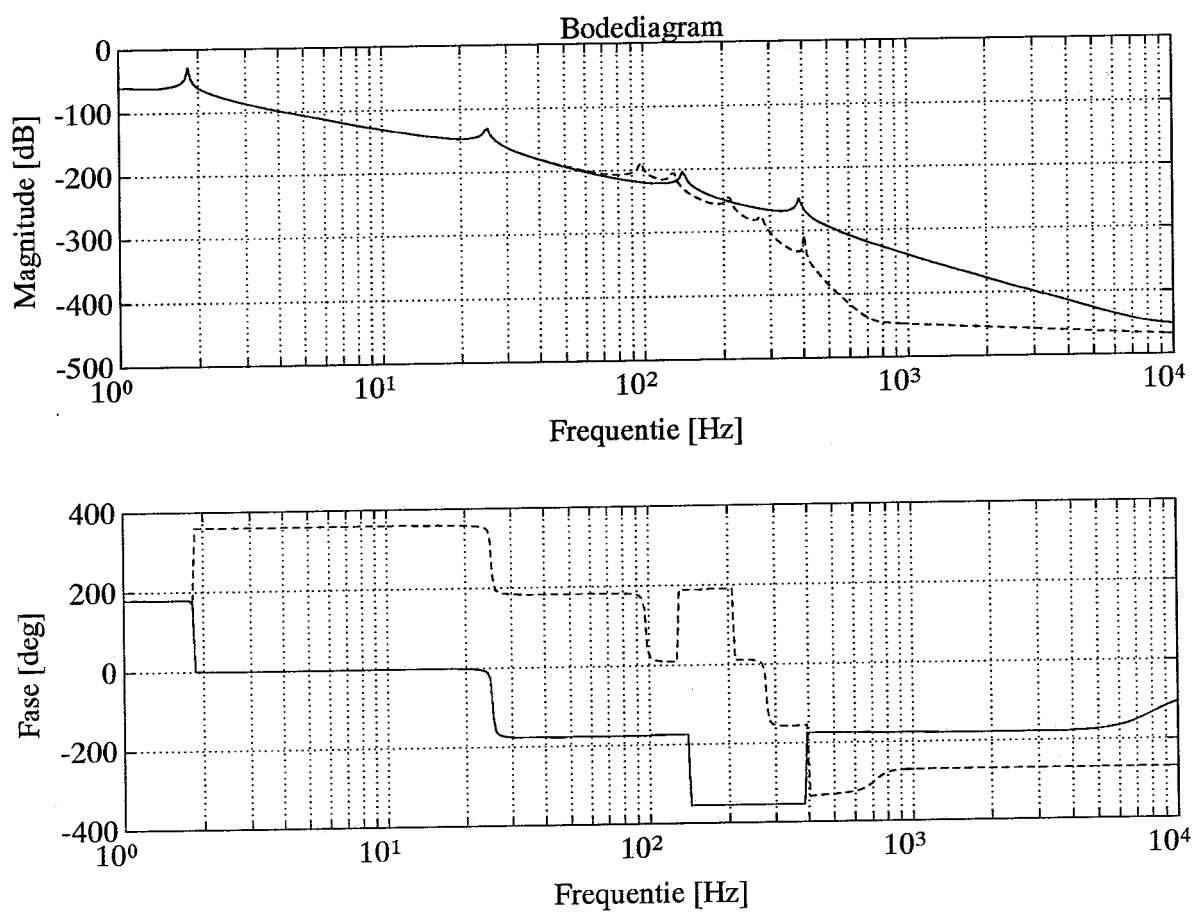


4.3.3 HET GEKOPPELDE SYSTEEM

De twee gereduceerde submodellen zoals besproken in de twee vorige paragrafen, dienen nu door middel van de eerder verwijderde veer weer aan elkaar gekoppeld te worden. Hierbij moet de veer geplaatst worden tussen de vierde vrijheidsgraad van het motorische submodel en de vijfde vrijheidsgraad van het last model. Van het zo ontstane systeem wordt weer een Bode-plot gemaakt, die vergeleken wordt met de Bode-plot van het originele systeem. Als eerste wordt het gekoppelde gereduceerde systeem, waarbij alleen vrijheidsgraad één en vier van het motorische submodel en vrijheidsgraad vijf en acht van het last submodel worden meegenomen, vergeleken met het originele totale systeem. Uit de Bode-diagram in de bijlage volgt dat het gekoppelde gereduceerde systeem niet voldoet aan de nauwkeurigheid. Dit was ook wel te verwachten, omdat bij het reduceren van het motorisch submodel al bleek dat de derde vrijheidsgraad meegenomen dient te worden.

Het uiteindelijk verkregen gekoppelde gereduceerde systeem is te zien in figuur (4.3.3.1).
De gereduceerde vrijheidsgraden zijn hierbij:

$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_8 \end{bmatrix} \quad (4.3.3.1)$$



figuur 4.3.3.1

HOOFDSTUK 5 CONCLUSIE

Uit het voorgaande hoofdstuk blijkt dat het reduceren van de gehele constructie nauwkeuriger kan dan het koppelen van de gereduceerde submodellen. Dit komt omdat je bij het koppelen van de gereduceerde subsystemen rekening moet houden met die vrijheidsgraden waaraan de subsystemen weer aan elkaar gekoppeld dienen te worden. Het nadeel van het reduceren van de hele constructie is dat bij het veranderen van een onderdeel van de constructie het gehele systeem opnieuw doorgerekend dient te worden. Bij het ontkoppelen dient alleen dat subsysteem waarin iets verandert opnieuw doorgerekend te worden. Dit kan bij een systeem van veel vrijheidsgraden (n veel groter als de hier gebruikte acht vrijheidsgraden) een aanzienlijke tijdwinst opleveren.

Een volgende stap in het kader van de analyse van deze hybride aandrijving, zou kunnen zijn dat er wel gekeken wordt naar de invloed van de overbrengingsverhouding, met andere woorden deze niet constant te veronderstellen. Een mogelijkheid hiervoor zou zijn het systeem doorrekenen bij verschillende overbrengingsverhoudingen. Aan de hand van de uitkomsten is het misschien mogelijk om tot een samenhang te komen tussen het dynamisch gedrag van constructie en de overbrengingsverhouding. In principe zou dit bij eenzelfde loskoppeling als besproken niet veel rekentijd hoeven te vergen, omdat niet de afzonderlijke deelsystemen veranderen bij een andere overbrengingsverhouding, maar alleen de losgekoppelde veer. Deze gedraagt zich bij niet constante overbrengingsverhouding niet meer lineair.

Als eindconclusie kan ik stellen dat de eigenlijke reductie methode zoals besproken zeer goed toepasbaar is op een MDOF-systeem. Zoals eerder gezegd dient hierbij wel rekening gehouden te worden met de nauwkeurigheid van het gereduceerde systeem. Dit is in de praktijk goed op te lossen door het proberen van enkele vrijheidsgraden. Via het zo ontstane Bode-diagram is duidelijk te zien of het gereduceerde systeem voldoet aan de nauwkeurigheid, met andere woorden of het systeem dezelfde dynamische eigenschappen heeft als het originele systeem.

LITERATUURLIJST

Bosch, S.P. van den

WFW Rapport 93.133, Model Reduction Methods in theory and applied on a hybrid-drive line,
Faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven.

Campen, D.H. van, Kraker, A. de

Collegedictaat 4552, Het Dynamisch Gedrag van Constructies,
Faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven.

Jager, B. de

Dictaat 4595, Practicumhandleiding Werktuigkundig Regelen II,
Faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven.

Kraker, A de

Collegedictaat 4668, Numerieke-Experimentele Analyse van Dynamische Systemen,
Faculteit Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven.

Ven, A.A.P. van de

Rapport nr. WV-155-137, Analyse van de Torsietrillingen in de Aandrijving van een Vliegwiel-Hybride Aangedreven Voertuig deel 1 Verslag,
Vakgroep Productontwerp en Constructie, Technische Universiteit Eindhoven.

Ven, A.A.P. van de

Rapport nr. WV-155-137, Analyse van de Torsietrillingen in de Aandrijving van een Vliegwiel-Hybride Aangedreven Voertuig deel 2 Bijlage,
Vakgroep Productontwerp en Constructie, Technische Universiteit Eindhoven.

**Systeemreductie aan een vliegwiel-
hybride aandrijving**

M.J.H. Radt id.nr. 267460

WFW-nr. 94.066

Bijlage stageverslag

Vakgroep Fundamentele Werktuigbouwkunde

Technische Universiteit Eindhoven

INHOUDSOPGAVE

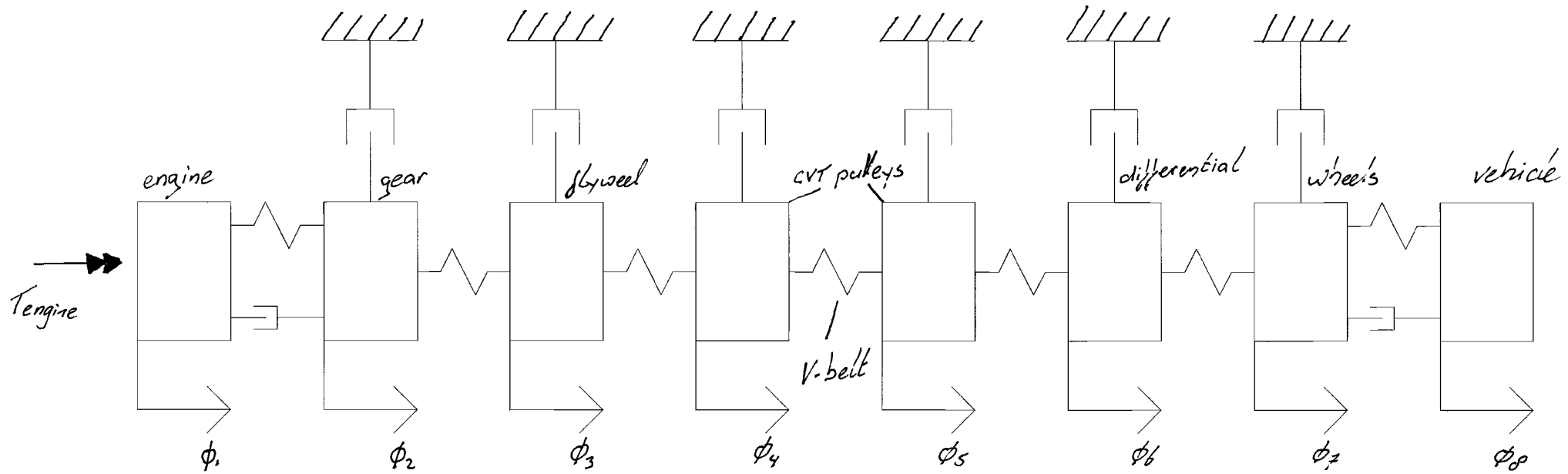
1 HET ORIGINELE SYSTEEM

- model van vliegwielhybride aandrijving	4
- gegeven matrices	5
- matlab-file	7
- bode-diagram	8

2 GUYAN-REDUCTIES

a matlab-file	9
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_8]^T$	10
bode-diagram	11
b matlab-file	12
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_2 P_8]^T$	13
bode-diagram	14
c matlab-file	15
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_3 P_8]^T$	16
bode-diagram	17
d matlab-file	18
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_2 P_3 P_8]^T$	19
bode-diagram	20
e matlab-file	21
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_3 P_7 P_8]^T$	22
bode-diagram	23
f matlab-file	24
gereduceerde matrices met $q_e = [P_1 P_3 P_4 P_7 P_8]^T$	25
bode-diagram	26
g enkele bode-diagrammen	27

<u>3</u>	<u>HET MOTORISCHE SUBMODEL</u>	
	a matlab-file subdeel 1	35
	b matlab-file met $q_e = [P_1 \ P_4]^T$	36
	bode-diagram	37
	c matlab-file met $q_e = [P_1 \ P_3 \ P_4]^T$	38
<u>4</u>	<u>HET LAST SUBMODEL</u>	
	a matlab-file subdeel 2	39
	b matlab-file met $q_e = [P_5 \ P_8]^T$	40
	c matlab-file met $q_e = [P_5 \ P_6 \ P_8]^T$	41
	bode-diagram	42
	d matlab-file met $q_e = [P_5 \ P_7 \ P_8]^T$	43
	bode-diagram	44
<u>5</u>	<u>HET GEKOPPELDE SYSTEEM</u>	
	a matlab-file met $q_e = [P_1 \ P_4 \ P_5 \ P_8]^T$	45
	bode-diagram	46
	b matlab-file met $q_e = [P_1 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_8]^T$	47



C =

Columns 1 through 7

0.1470	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0155	0	0	0	0	0	0
0	0	31.7000	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0630	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0630	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0175	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0035	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Column 8

0
0
0
0
0
0
0
1.6900

*

R =

Columns 1 through 7

0.5000	-0.5000	0	0	0	0	0	0
-0.5000	0.5010	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0043	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0002	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0004	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0001	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0401	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.0400

Column 8

0
0
0
0
0
0
-0.0400
0.0457

*

K =

Columns 1 through 6

4000	-4000	0	0	0	0
-4000	47000	-43000	0	0	0
0	-43000	300000	-157000	0	0
0	0	-157000	307000	-150000	0
0	0	0	-150000	171500	-21500
0	0	0	0	-21500	21770
0	0	0	0	0	-270
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 8

0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
-270	0
1320	-1050
-1050	1050

*

* f

f =

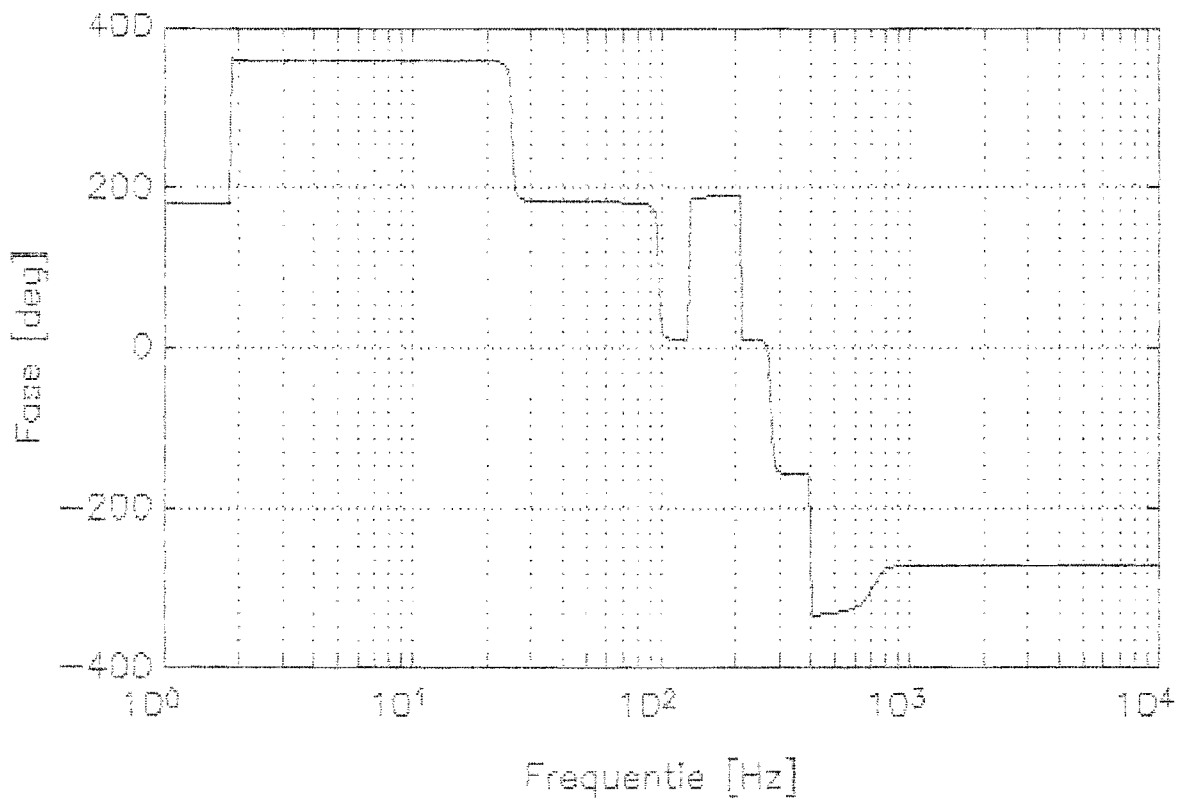
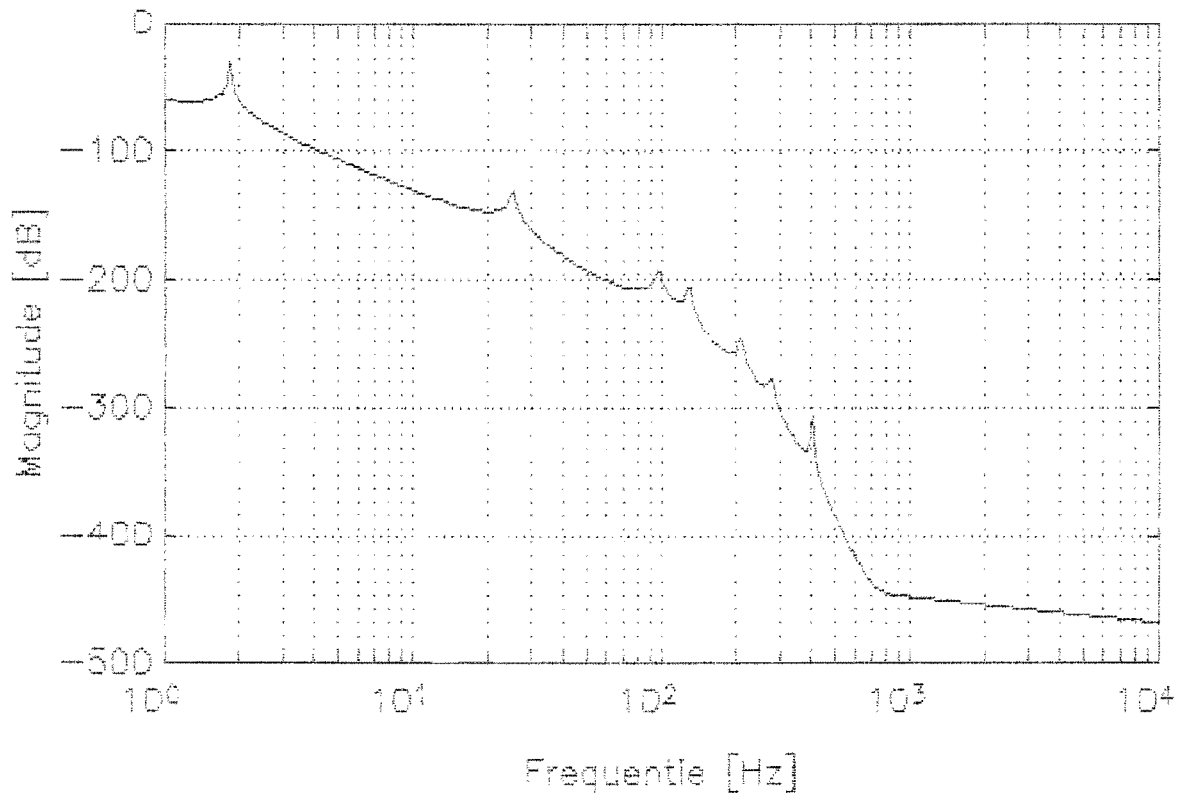
403.7341
277.3059
209.4714
129.1434
25.1609
97.4829
0.0000
1.8282

*

```

clear
load jkr
v = eig(inv(J)*K); f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(8,8) eye(8,8)
      -(inv(J)*K) -(inv(J)*R)I];
B = [zeros(8,8)
      inv(J)I];
C = zeros(1,16);
C(8)=1;
D = zeros(1,8);
fr= logspace(0,4,400);
w=fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag1 = 20*(log(mag)/(log(10)));
clf
subplot(2,1,1)
semilogx(fr,mag1)
xlabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
subplot(2,1,2)
semilogx(fr,phase)
xlabel('Fase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

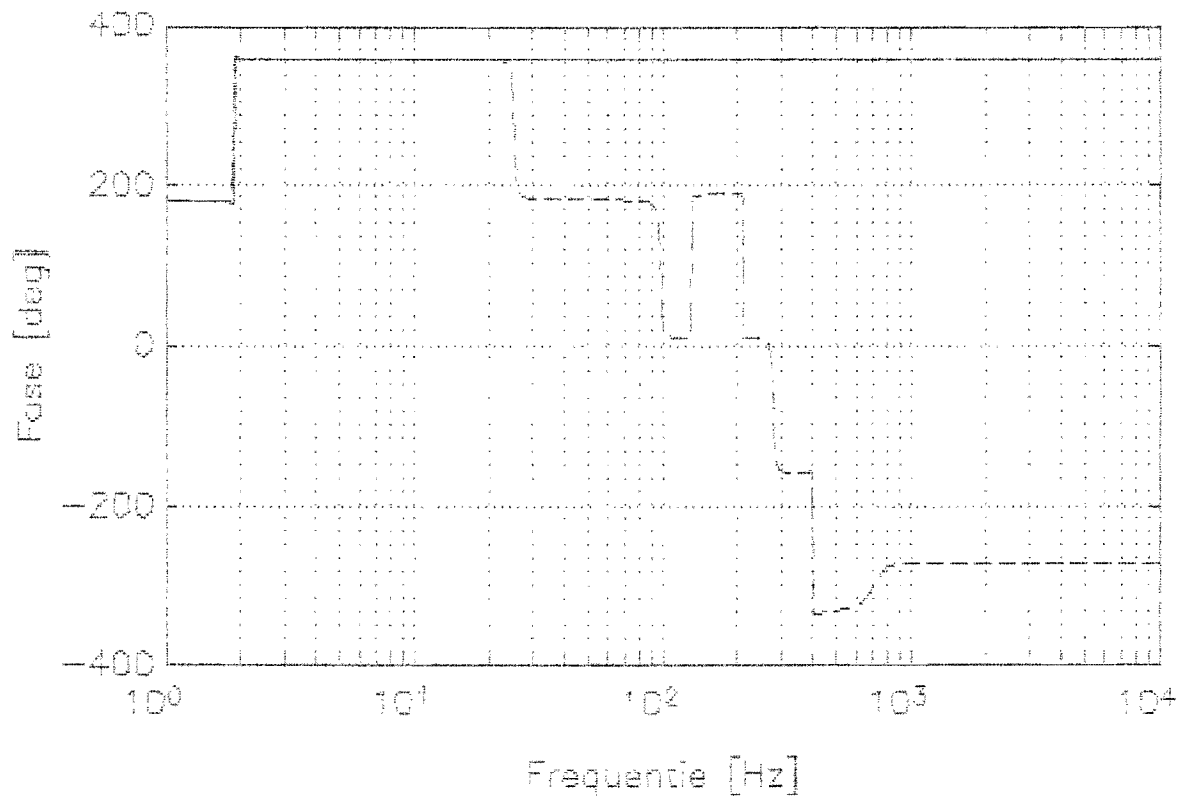
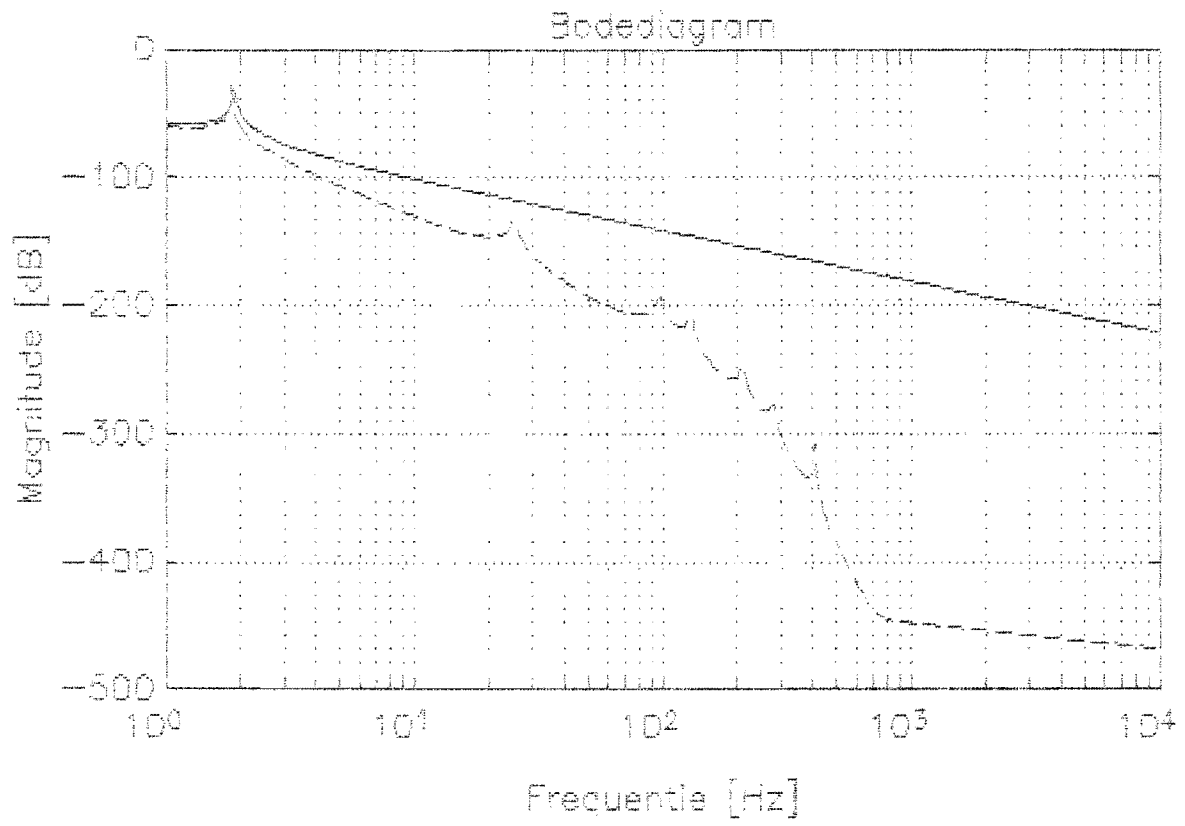
```



```

clear
load JKP
P = zeros(8,8);
P(1,1)=1;P(2,8)=1;P(3,2)=1;P(4,3)=1;P(5,4)=1;
P(6,5)=1;P(7,6)=1;P(8,7)=1;
Q = P*Q*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(3,:);
      K(4,:);
      K(5,:);
      K(6,:);
      K(7,:);
      K(8,:)];
K1b = [K1(1,1) K1(1,2)];
K1i = [K1(1,3) K1(1,4) K1(1,5) K1(1,6) K1(1,7) K1(1,8)];
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = Ieye(2,2);
T1b;
Jred= T'*J*T;
Kred= T'*K*T;
Rred= T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sort(v)/2/pi;
A = Izeros(2,2) eye(2,2)
-(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)';
B = Izeros(2,2)
inv(Jred)';
C = zeros(1,4);
D(2)= 1;
D = zeros(1,2);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase1 = bode (A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequency [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Phase [deg]'),xlabel('Frequency [Hz]'),grid
meta plot

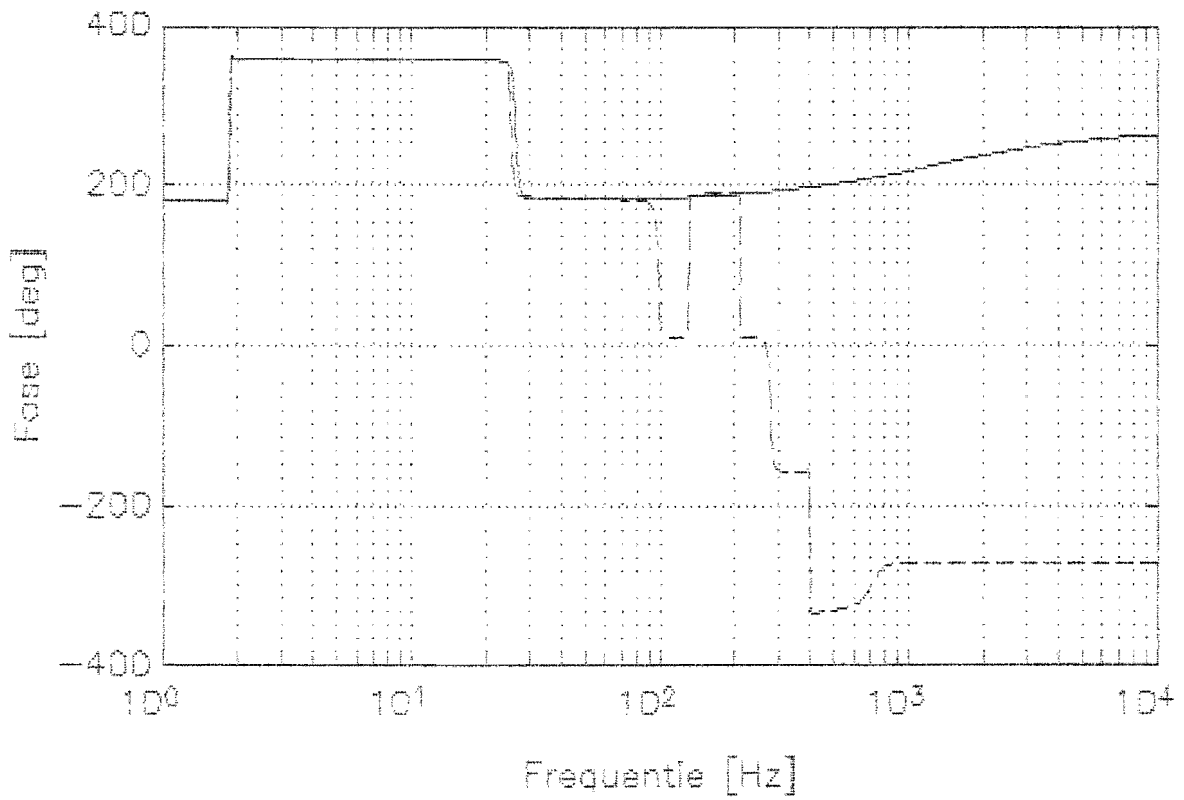
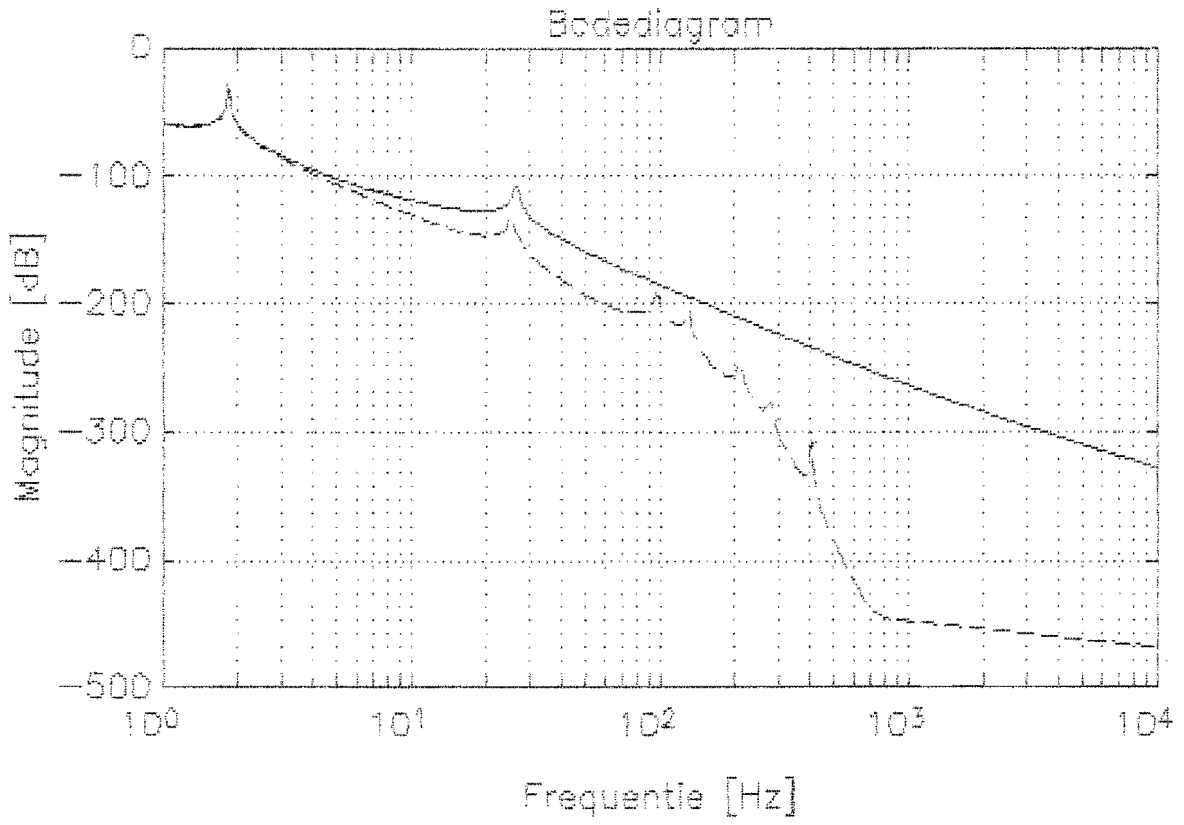
```



```

clear
load JKR
P = zeros(8,8);
P(1,1)=1;P(2,2)=1;P(3,5)=1;P(4,3)=1;P(5,4)=1;
P(6,5)=1;P(7,6)=1;P(8,7)=1;
J = P*J*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(4,:)
      K(5,:)
      K(6,:)
      K(7,:)
      K(8,:)];
K1b = [K1(:,1) K1(:,2) K1(:,3)];
K1i = [K1(:,4) K1(:,5) K1(:,6) K1(:,7) K1(:,8)];
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = [eye(3,3)
     T1b];
Jred= T'*J*T;
Kred= T'*K*T;
Rred= T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(3,3) eye(3,3)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)];
B = [zeros(3,3)
     inv(Jred)];
C = zeros(1,6);
C(3)= 1;
D = zeros(1,3);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase] = bode (A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Fase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

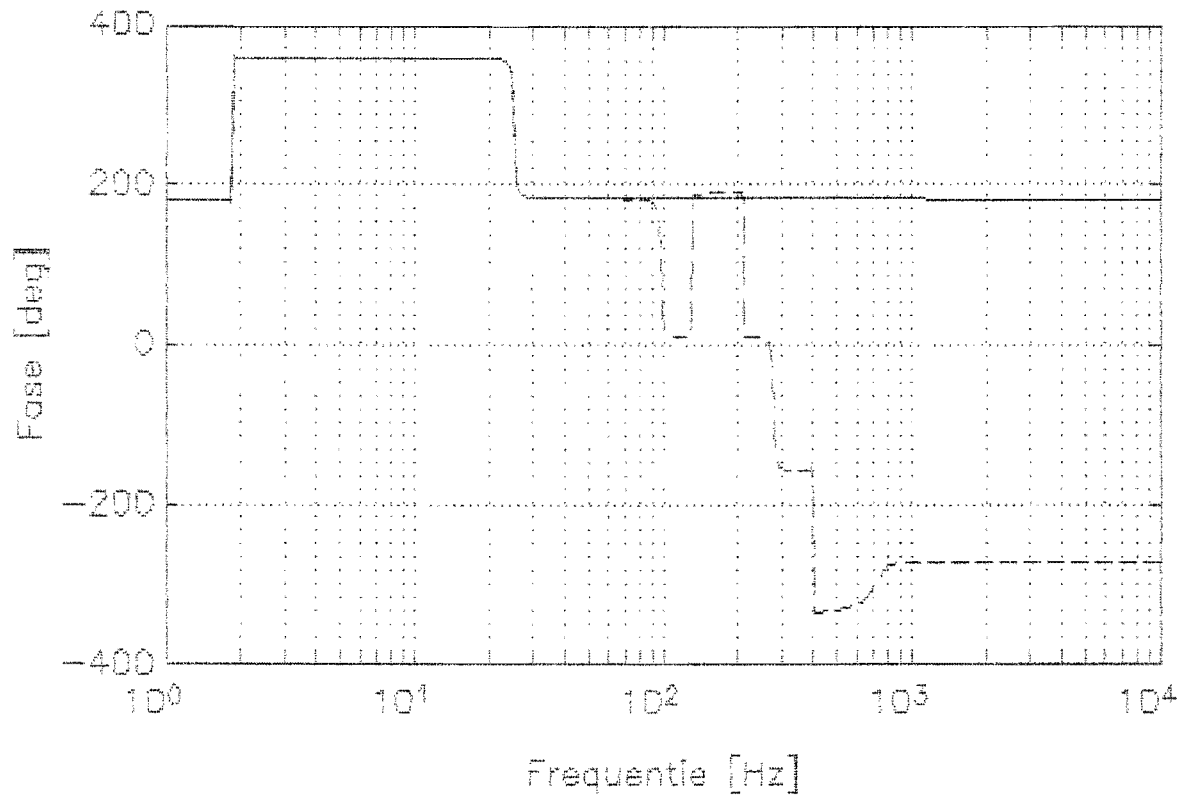
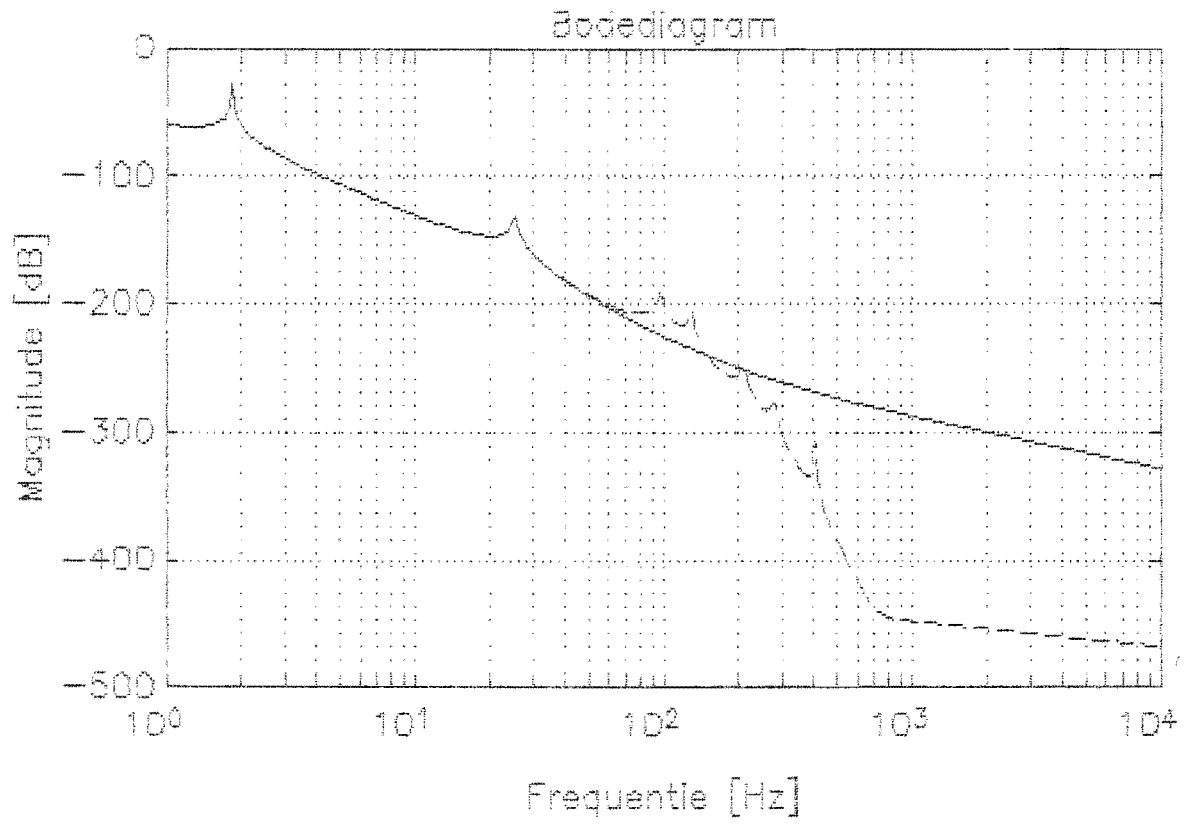
```



```

clear
load JKR
P = zeros(8,8);
P(1,1)=1;P(2,3)=1;P(3,8)=1;P(4,2)=1;P(5,4)=1;
P(6,5)=1;P(7,6)=1;P(8,7)=1;
J = P*J*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(4,:)
      K(5,:)
      K(6,:)
      K(7,:)
      K(8,:)];
K1b = [K1(1,1) K1(1,2) K1(1,3)];
K1i = [K1(1,4) K1(1,5) K1(1,6) K1(1,7) K1(1,8)];
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
Y = [eye(3,3)
     T1b];
Jred= T1*J*Y;
Kred= T1*K*Y;
Rred= T1*R*Y;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(3,3) eye(3,3)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)];
B = [zeros(3,3)
     inv(Jred)];
C = zeros(1,6);
C(7) = 1;
D = zeros(1,3);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Phase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

```

```

clear
load JKR
P = zeros(8,8);
P(1,1)=1;P(2,2)=1;P(3,3)=1;P(4,4)=1;P(5,4)=1;
P(6,5)=1;P(7,6)=1;P(8,7)=1;
J = P*J*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(5,1)
      K(6,1)
      K(7,1)
      K(8,1)]';
K1b = [K1(:,1) K1(:,2) K1(:,3) K1(:,4)]';
K1i = [K1(:,5) K1(:,6) K1(:,7) K1(:,8)]';
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = [eye(4,4)
      T1b];
Jred= T'*J*T;
Kred= T'*K*T;
Rred= T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sort(v)/2/ci;
A = [zeros(4,4) eye(4,4)
      -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)]';
E = [zeros(4,4)
      inv(Jred)]';
C = zeros(1,8);
C(4)= 1;
D = zeros(1,4);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase] = bode (A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Fase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

```

* Jred

Jred =

0.1470	0	0	0
0	0.0155	0	0
0	0	31.8430	0.0010
0	0	0.0010	1.6922

* Rred

Rred =

0.5000	-0.5000	0	0
-0.5000	0.5010	0	0
0	0	0.0086	-0.0016
0	0	-0.0016	0.0076

*

* Kred

Kred =

1.0e+004 *

0.4000	-0.4000	0	0
-0.4000	4.7000	-4.3000	0
0	-4.3000	4.3212	-0.0212
0	0	-0.0212	0.0212

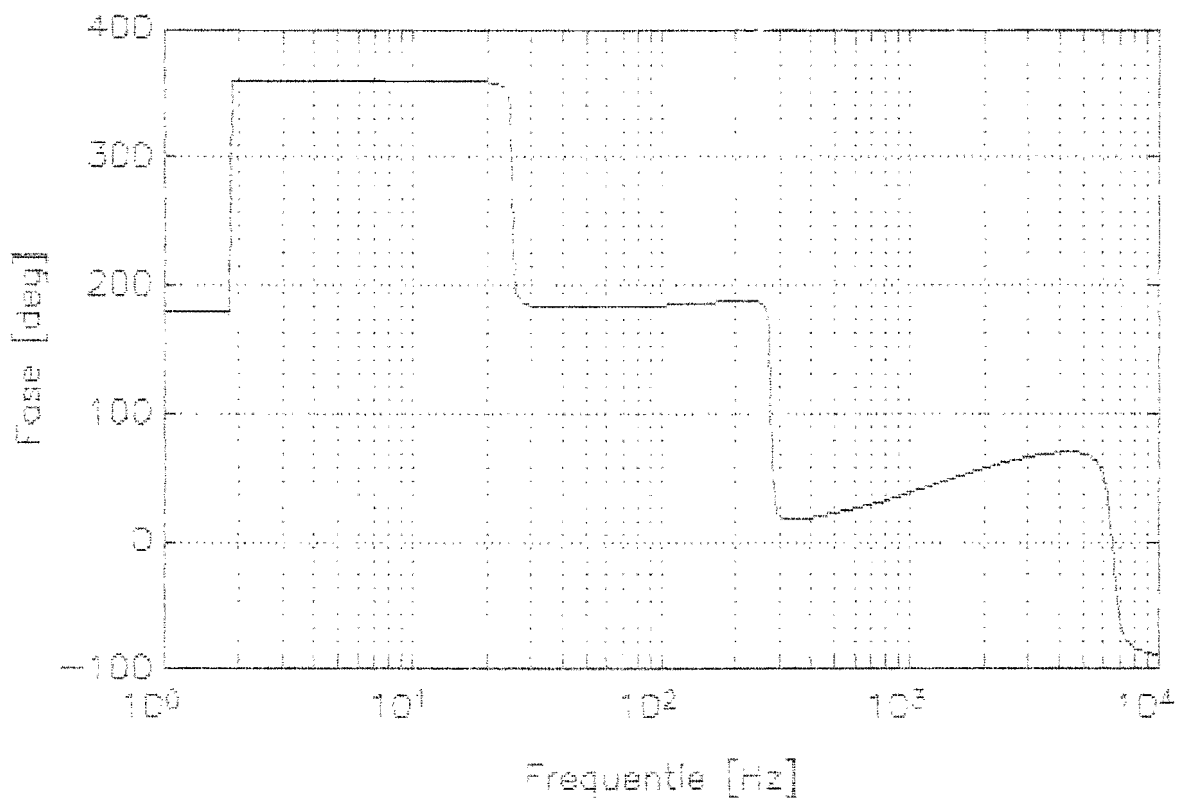
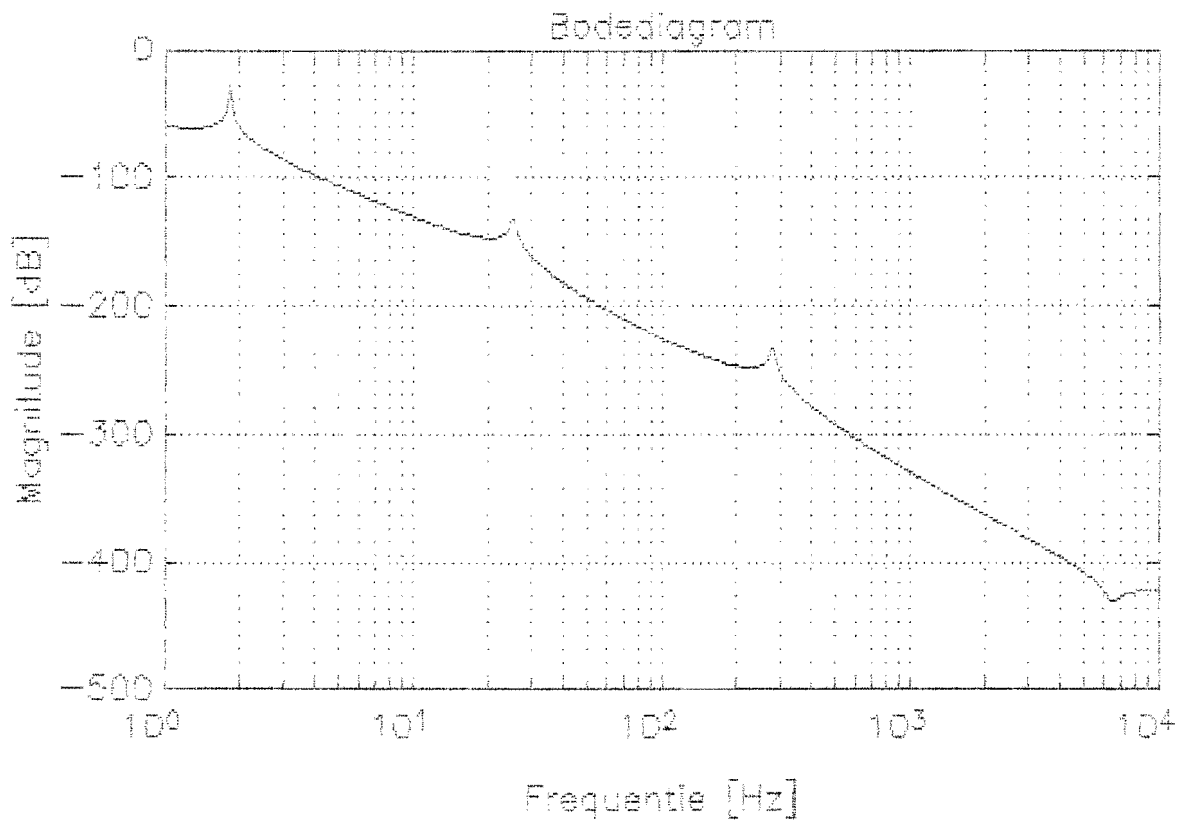
* f

f =

1.0e+002 *

2.7731
0.2516
0 + 0.000001
0.0153

*



```

clear
load JKR
P = zeros(5,3);
P(1,1)=1;P(2,3)=1;P(3,7)=1;P(4,2)=1;P(5,2)=1;
P(6,4)=1;P(7,5)=1;P(8,6)=1;
J = P*J*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(5,:);
      K(6,:);
      K(7,:);
      K(8,:)];
K1b = [K1(1,1) K1(1,2) K1(1,3) K1(1,4)];
K1i = [K1(1,5) K1(1,6) K1(1,7) K1(1,8)];
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = [eye(4,4)
     T1b];
Jred= T'*J*T;
Kred= T'*K*T;
Rred= T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(4,4) eye(4,4)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)];
B = [zeros(4,4)
     inv(Jred)];
C = zeros(1,8);
C(4) = 1;
D = zeros(1,4);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[mag,phase] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequency [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Phase [deg]'),xlabel('Frequency [Hz]'),grid
meta plot

```

* Jred

Jred =

0.1471	0.0012	0	0
0.0012	31.8556	0.0006	0
0	0.0006	0.0035	0
0	0	0	1.6900

* Rred

Rred =

0.4185	-0.4184	0	0
-0.4184	0.4264	0.0000	0
0	0.0000	0.0401	-0.0400
0	0	-0.0400	0.0439

*

* Kred

Kred =

1.0e+003 *

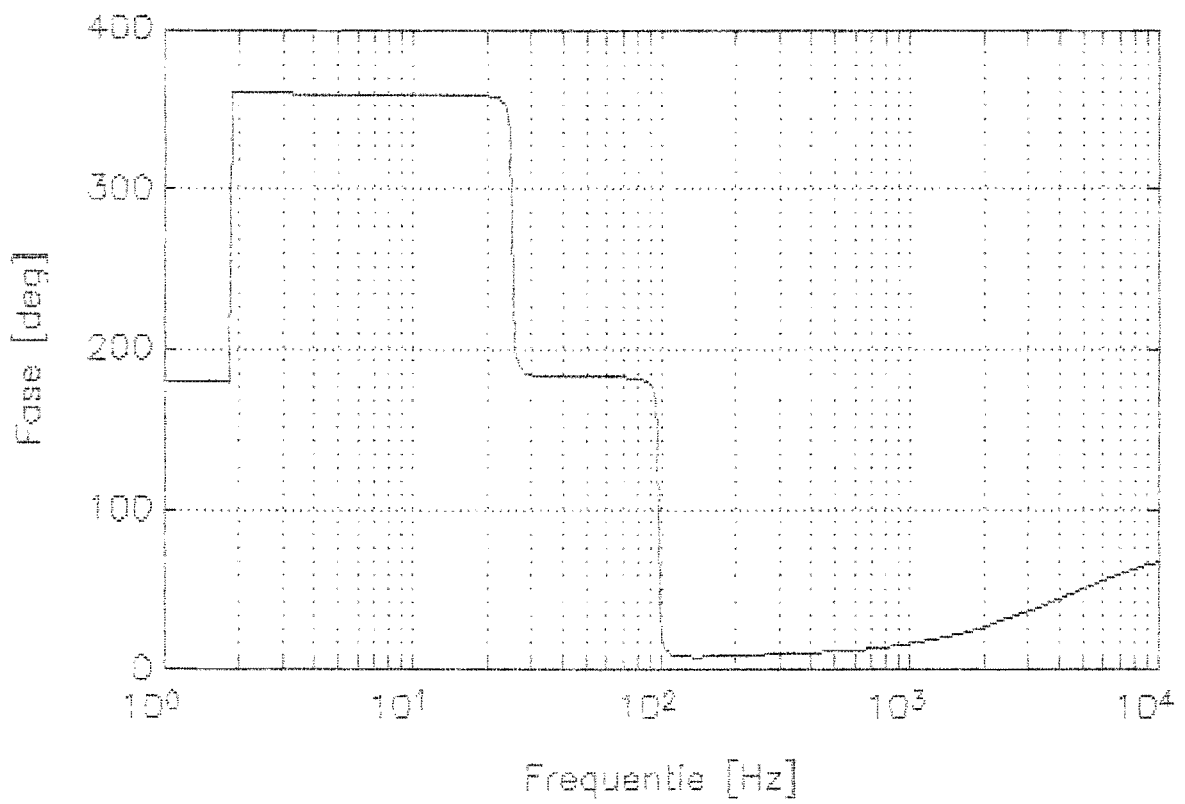
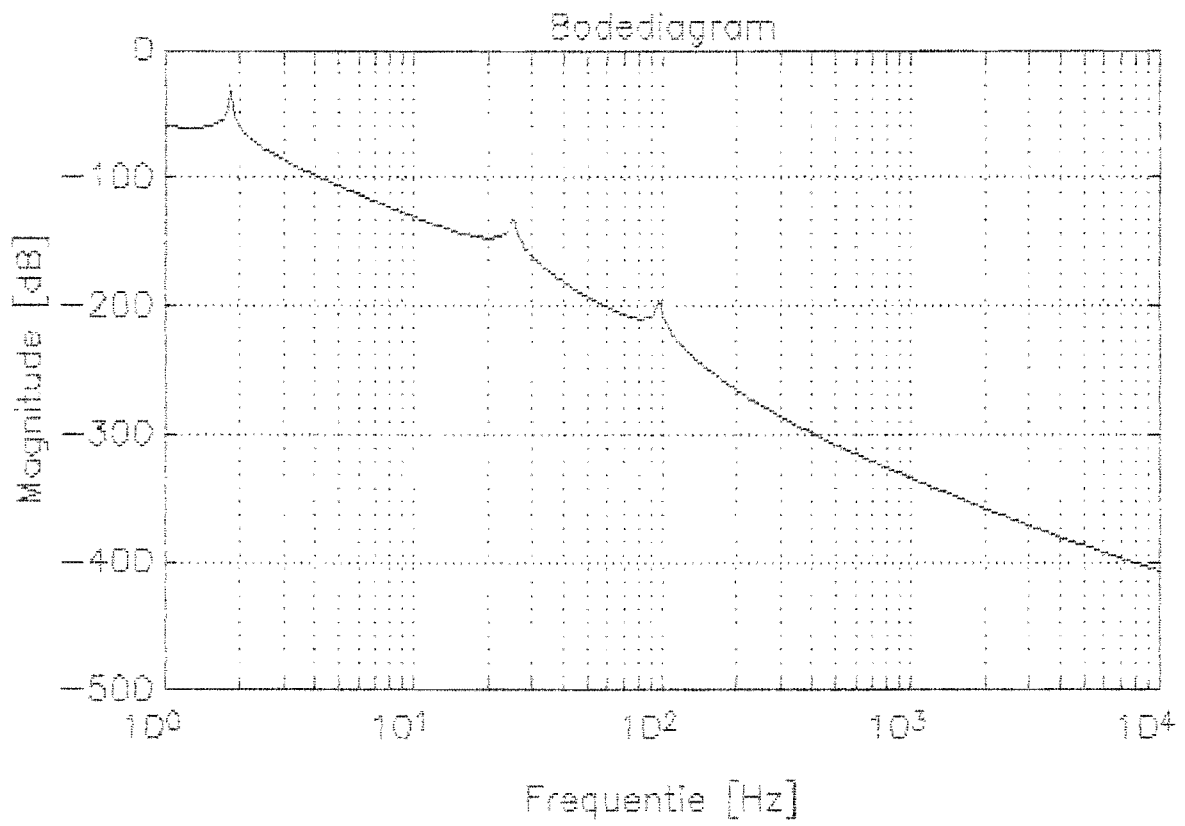
3.6596	-3.6596	0	0
-3.6596	3.9253	-0.2657	0
0	-0.2657	1.0500	-1.0500
0	0	-1.0500	1.0500

* #

=

25.1610
0.0000
1.8252
97.5719

*



```

clear
load JKF;
P = zeros(8,8);
P(1,1)=1;P(2,3)=1;P(3,4)=1;P(4,7)=1;P(5,9)=1;
P(6,2)=1;P(7,5)=1;P(8,6)=1;
J = P*J*P';
R = P*R*P';
K = P*K*P';
K1 = [K(6,1)
      K(7,1)
      K(8,1)]';
K1b = [K1(1,1) K1(1,2) K1(1,3) K1(1,4) K1(1,5)]';
K1i = [K1(1,6) K1(1,7) K1(1,8)]';
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = [eye(5,5)
     T1b];
Jred= T'*J*T;
Kred= T'*K*T;
Rred= T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred); f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(5,5) eye(5,5)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)]';
B = [zeros(5,5)
     inv(Jred)]';
C = zeros(1,10);
C(5) = 1;
D = zeros(1,5);
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
IU = 1;
[imag,phase] = bode (A,B,C,D,IU,w);
mag1= 20*(log(mag)/(log(10)));
subplot(211)
semilogx(fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase)
ylabel('Fase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

```


* Jred

Jred =

0.1471	0.0012	0	0	0
0.0012	31.7130	0	0	0
0	0	0.1431	0.0004	0
0	0	0.0004	0.0033	0
0	0	0	0	1.6900

* Fred

Fred =

0.4135	-0.4134	0	0	0
-0.4134	0.4256	0	0	0
0	0	0.0038	0.0000	0
0	0	0.0000	0.0401	-0.0400
0	0	0	-0.0400	0.0457

*

* Kred

Kred =

1.0e+00E k

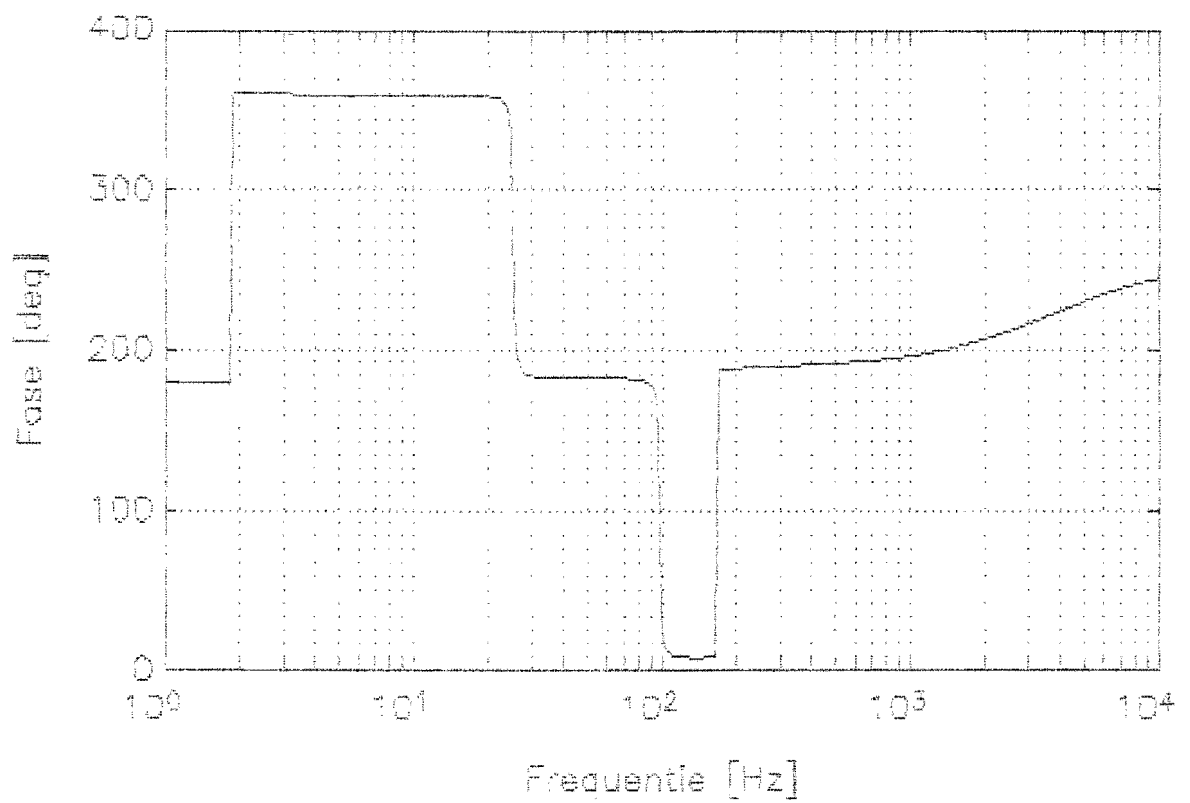
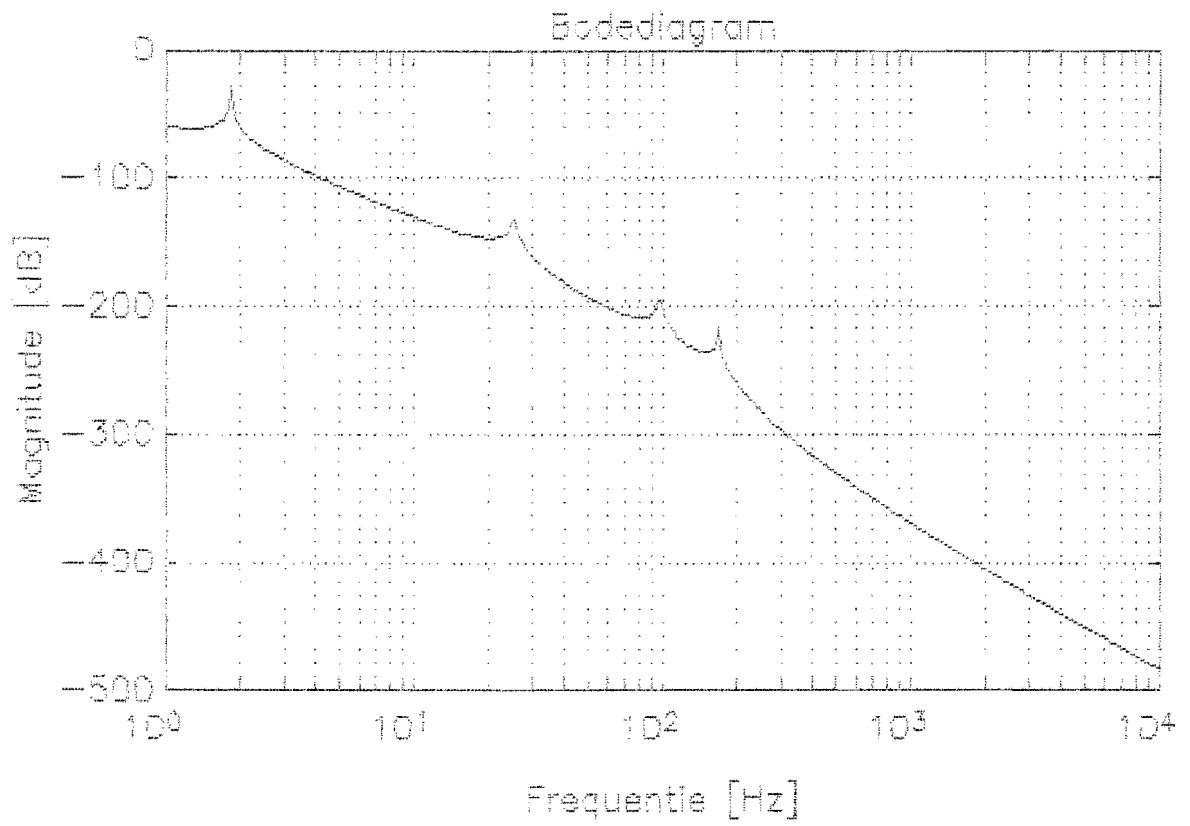
0.0366	-0.0366	0	0	0
-0.0366	1.6066	-1.5700	0	0
0	-1.5700	1.5737	-0.0037	0
0	0	-0.0027	0.0132	-0.0105
0	0	0	-0.0105	0.0105

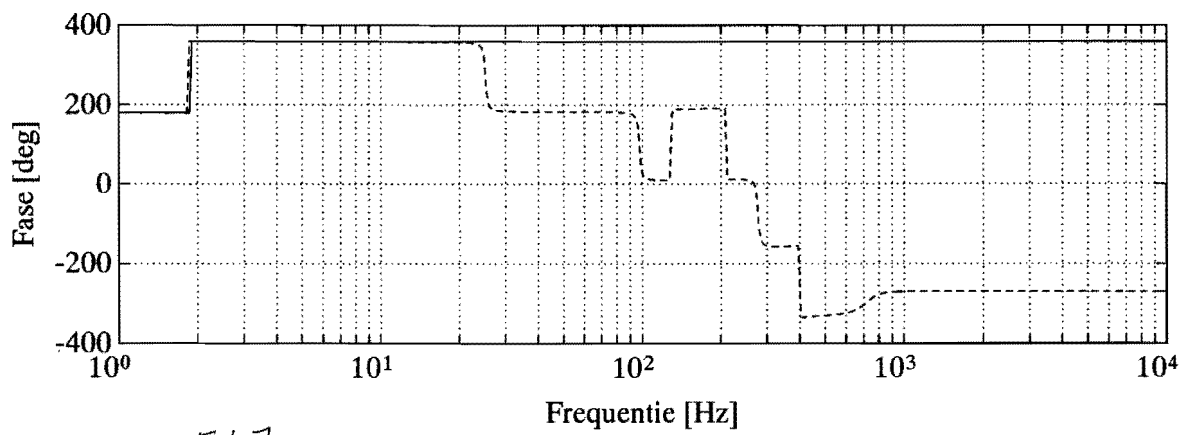
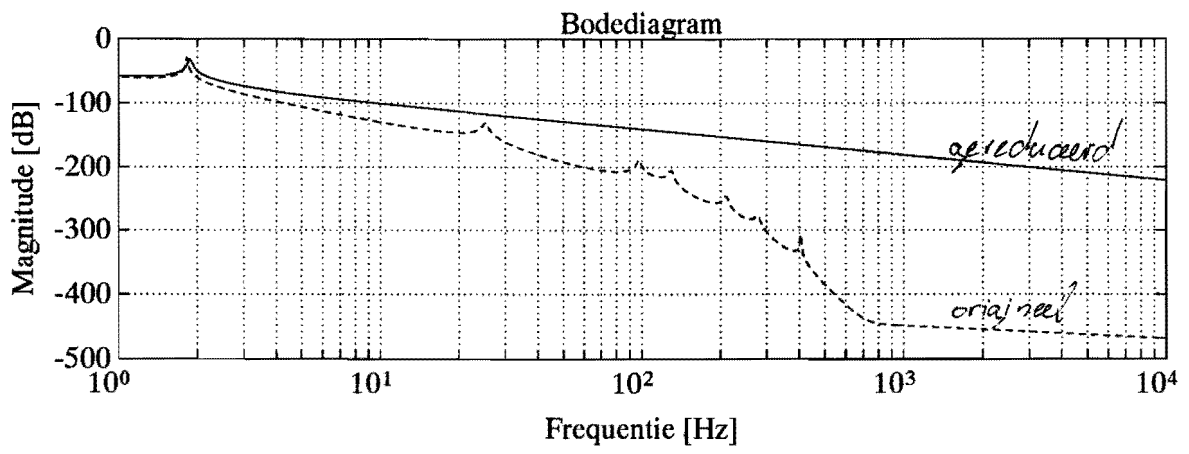
* F

F =

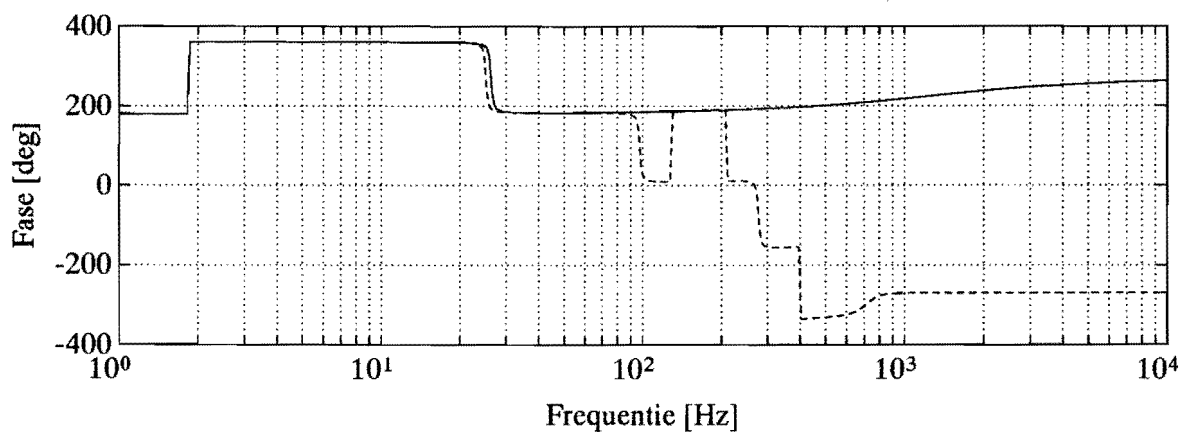
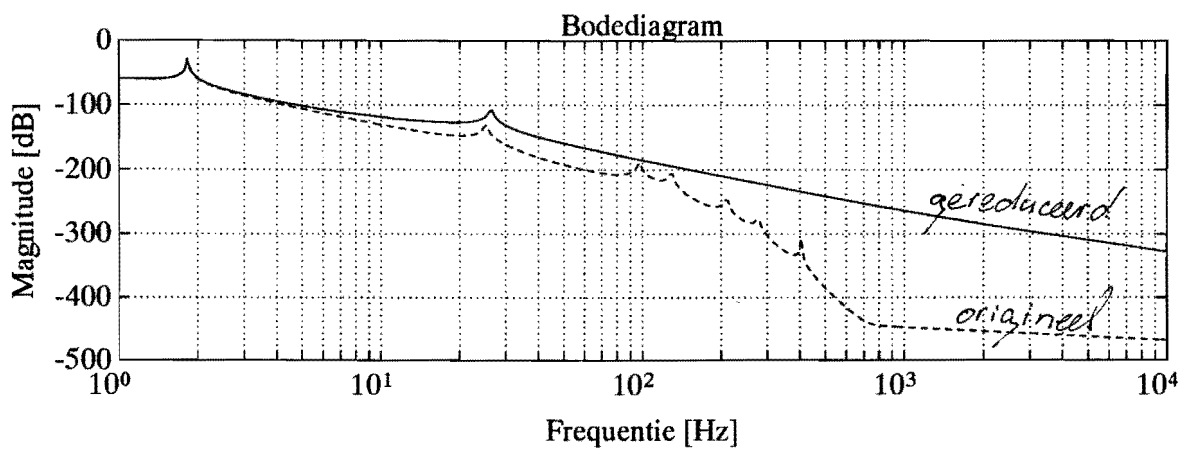
167.3263
 35.1610
 0.0000
 97.5340
 1.8252

*

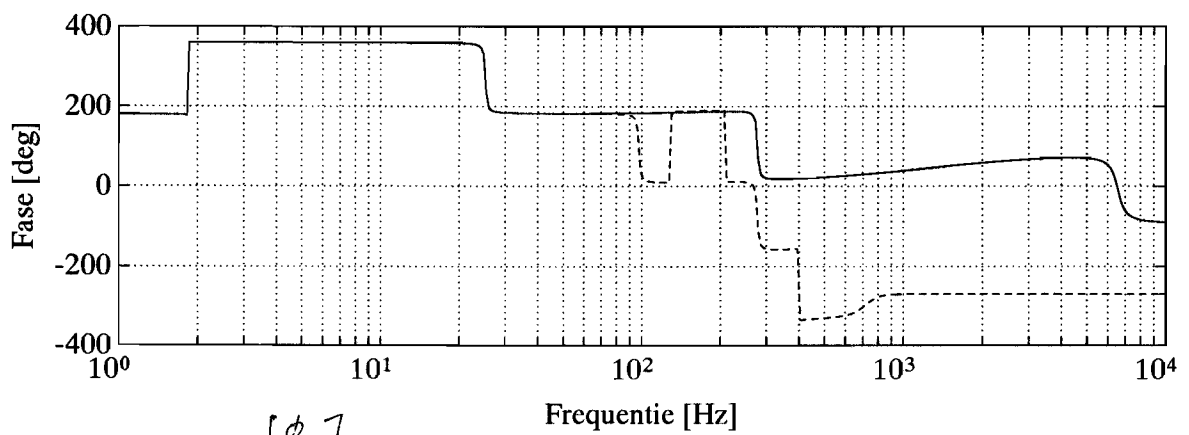
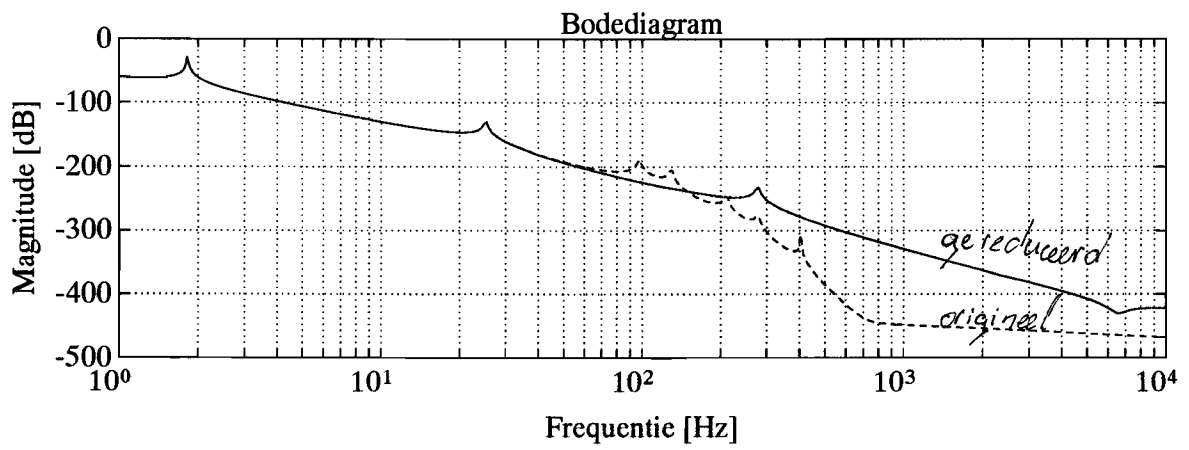




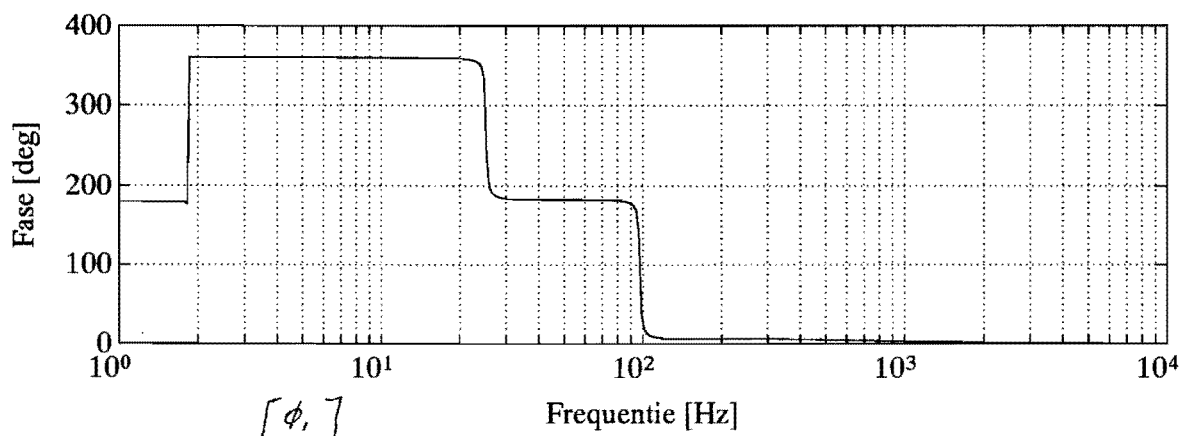
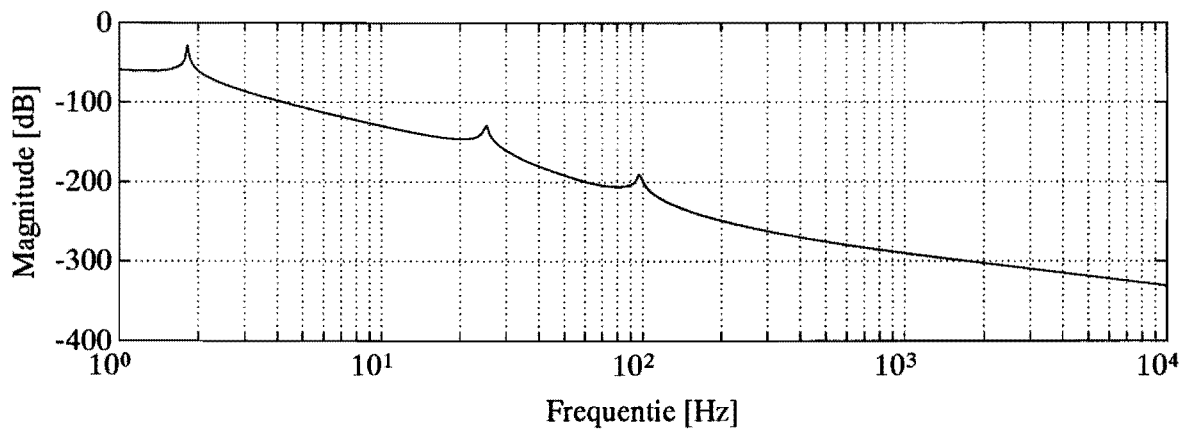
$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_o \end{bmatrix}$$



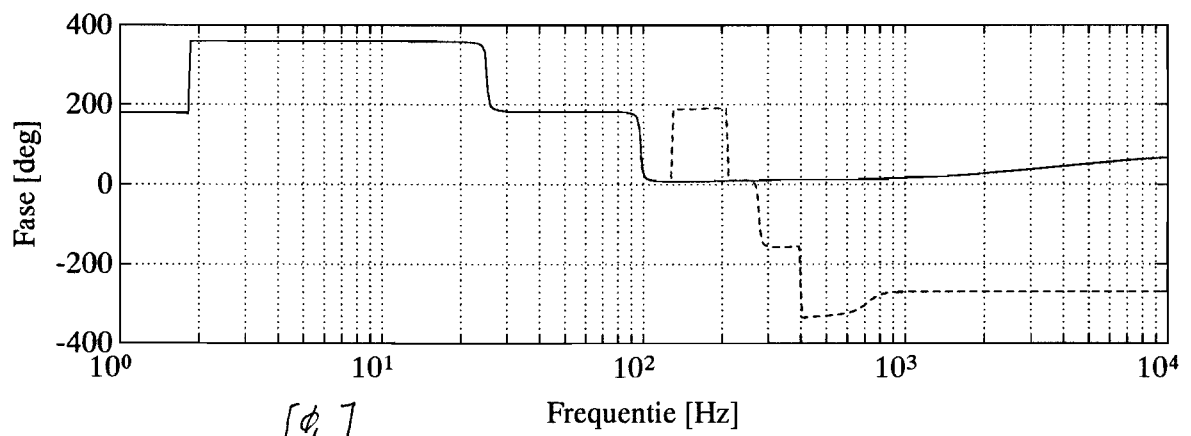
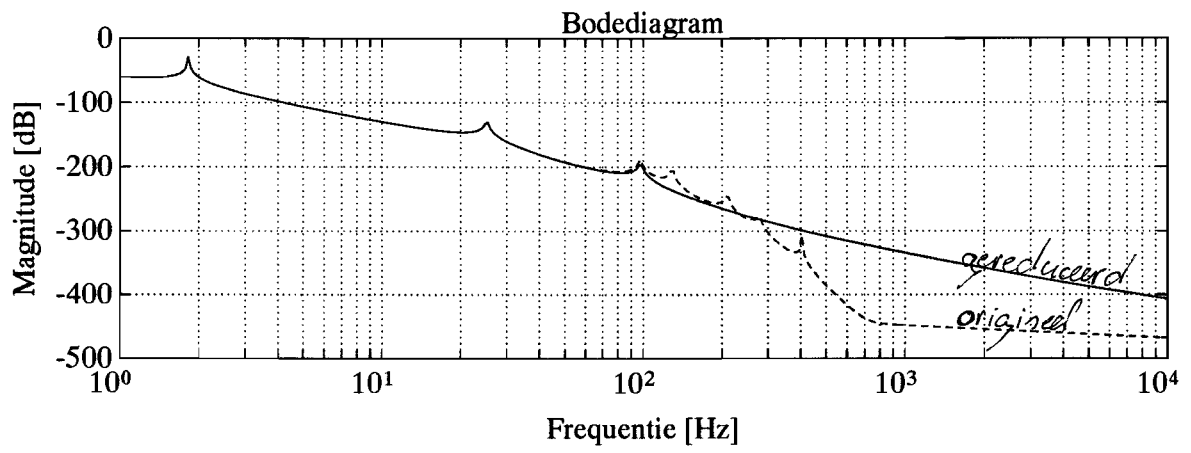
$$g_k = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



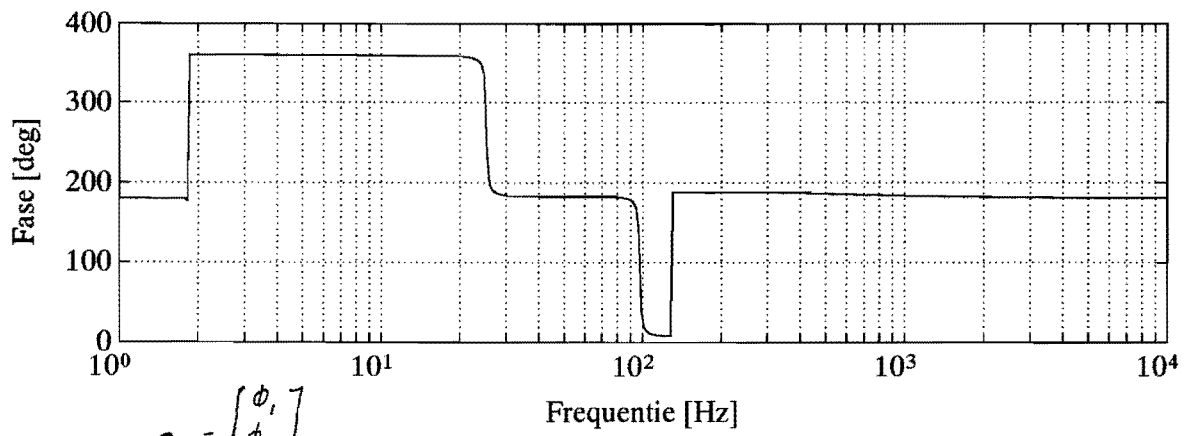
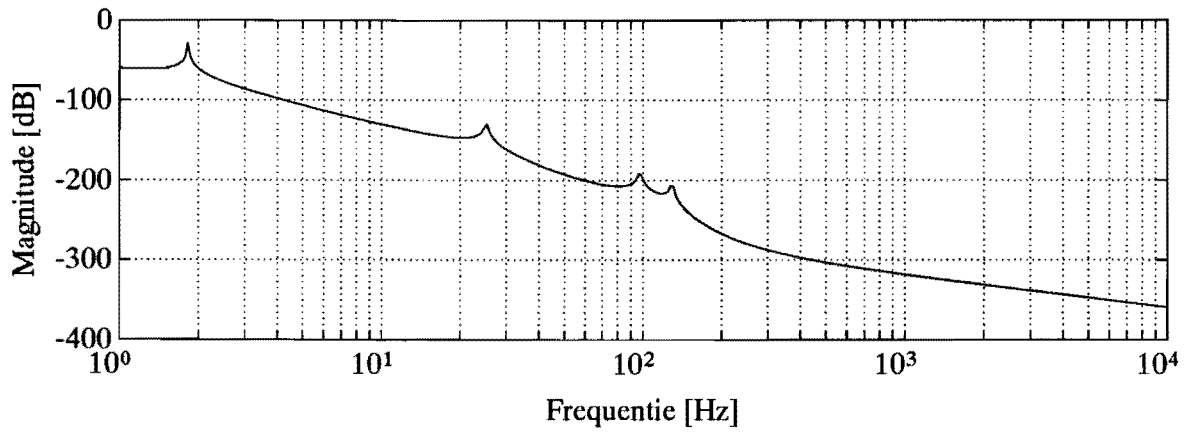
$$g_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



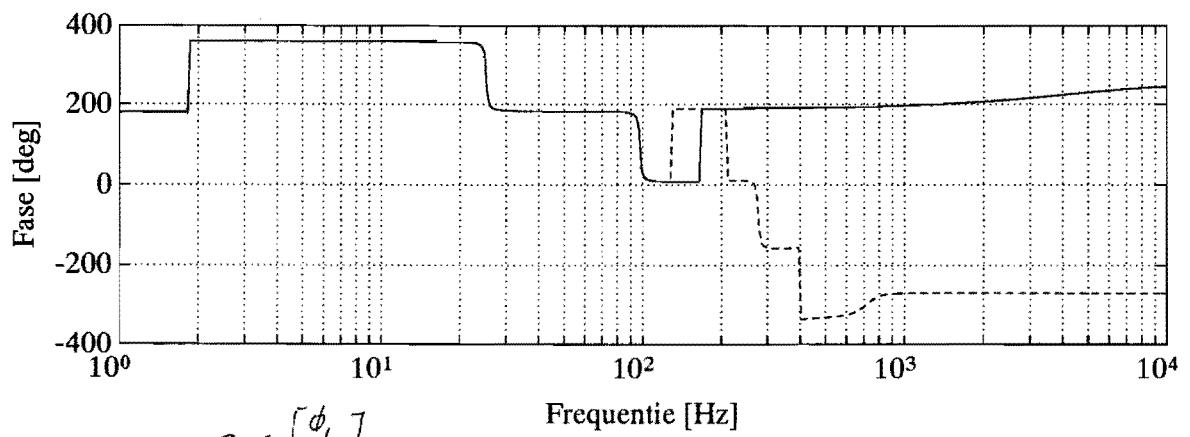
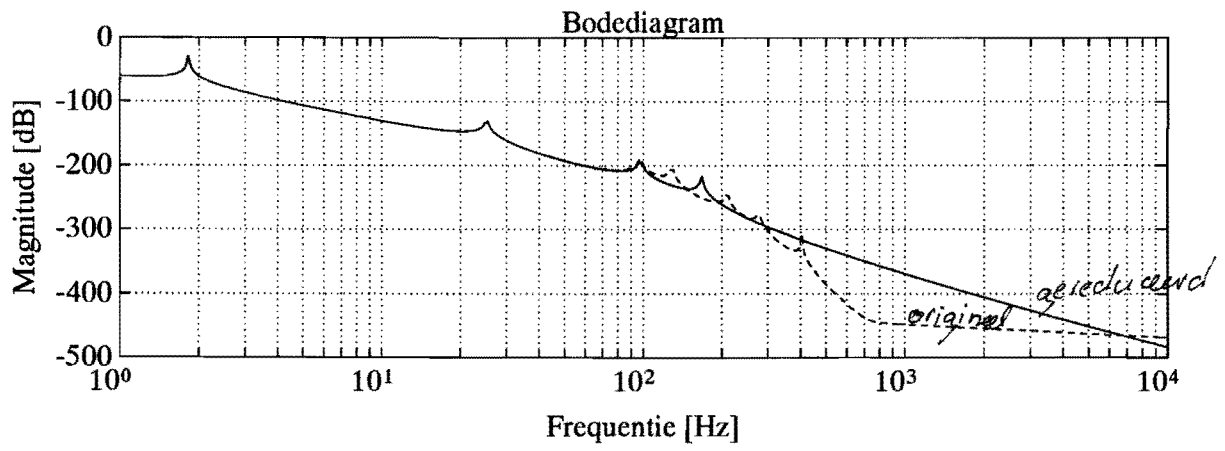
$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



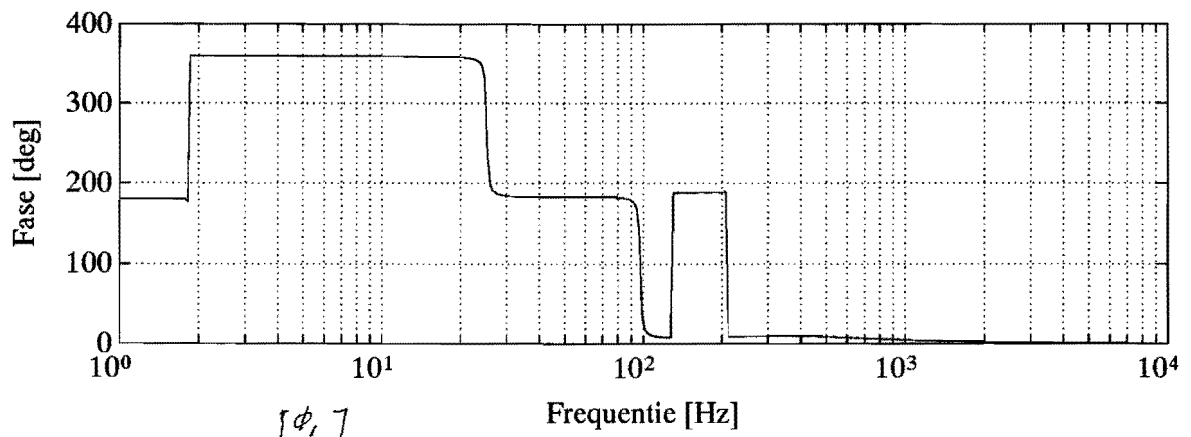
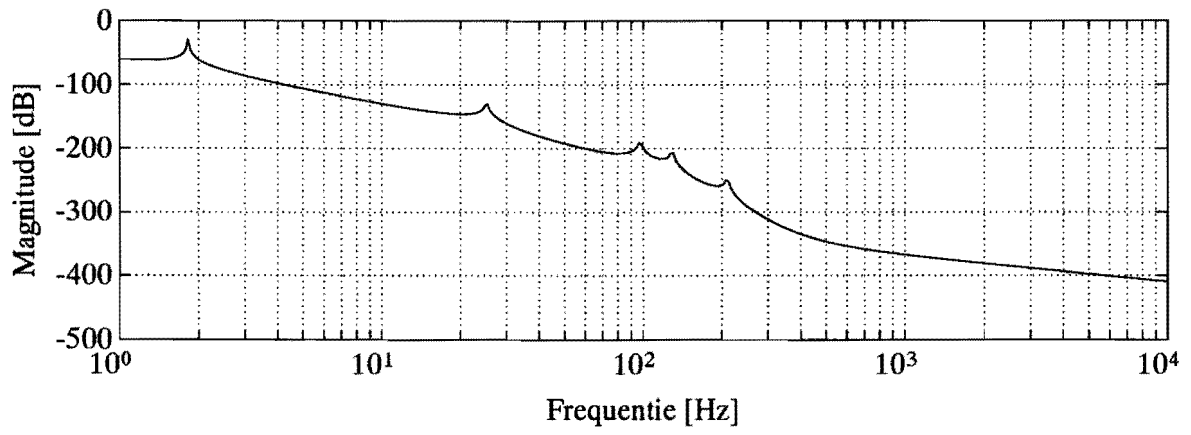
$$g_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



$$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



$$g_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$$



$q_e = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_8 \end{bmatrix}$

```

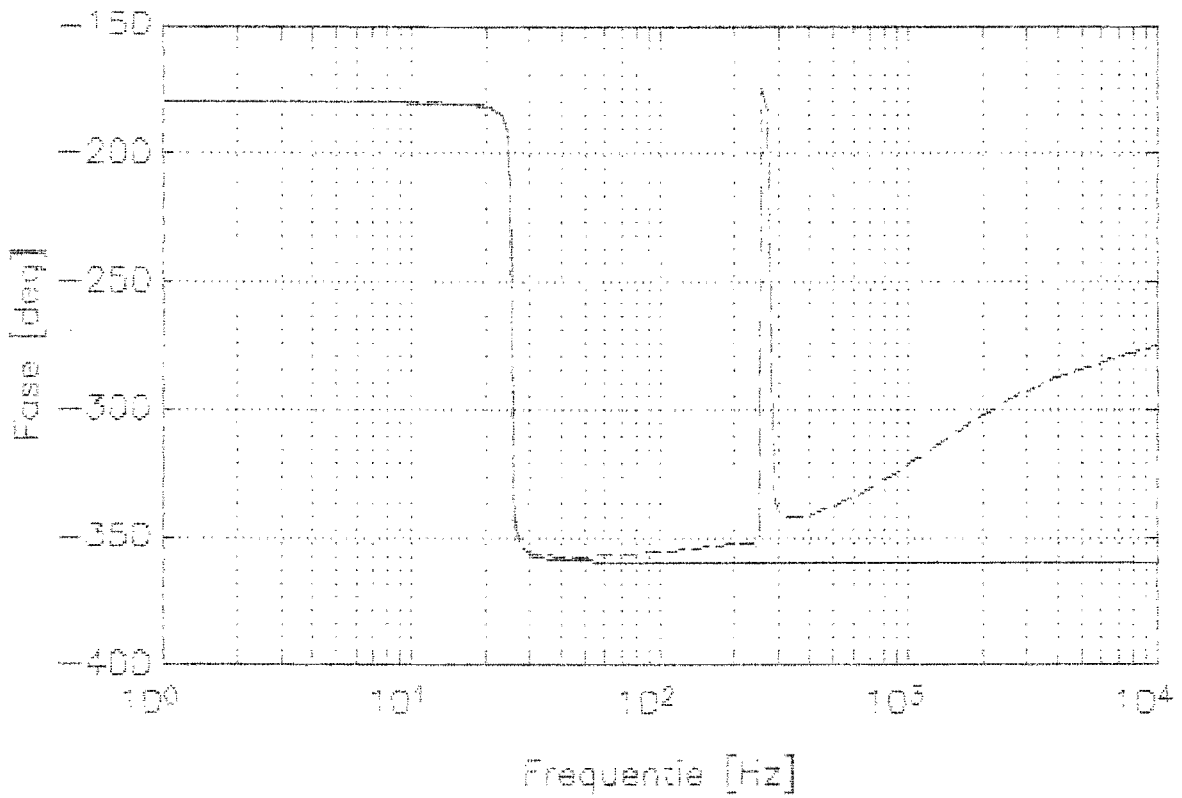
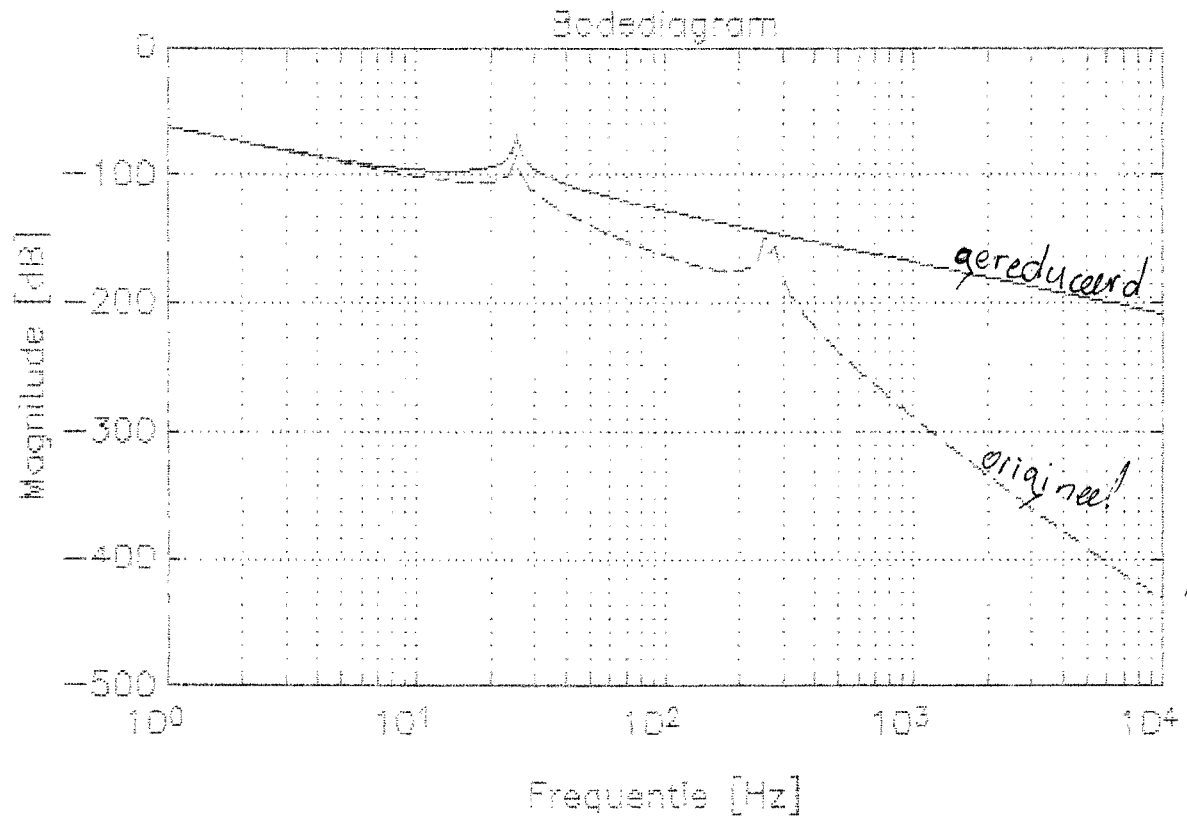
clear
J1 = diag([0.147;0.0155;31.7;0.0631]);
J2 = diag([0.063;0.0178;0.0025;1.693]);
K1 = [4000 -4000 0 0
      -4000 47000 -43000 0
      0 -43000 200000 -157000
      0 0 -157000 157000];
K2 = [21500 -21500 0 0
      -21500 21770 -270 0
      0 -270 1320 -1050
      0 0 -1050 1050];
R1 = [0.5 -0.5 0 0
      -0.5 0.501 0 0
      0 0 0.0063 0
      0 0 0 0.22e-3];
R2 = [0.44e-3 0 0 0
      0 0.1e-3 0 0
      0 0 0.0401 -40e-3
      0 0 -40e-3 0.059];
v = fig(inv(J1)*K1);f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(4,4) eye(4,4)
      -(inv(J1)*K1) -(inv(J1)*R1)];
B = [zeros(4,4)
      inv(J1)];
C = zeros(1,8);
C(4) = 1;
D = zeros(1,4);
IU = 1;
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
[mag,phase] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag1 = 20*(log(mag)/(log(10)));

```

```

clear
I = diag([0.147;0.0153;31.7;0.0631]);
K = [4000 -4000 0 0
     -4000 47000 -43000 0
     0 -43000 300000 -157000
     0 0 -157000 157000];
R = [0.5 -0.5 0 0
     -0.5 0.501 0 0
     0 0 0.0063 0
     0 0 0 0.22e-3];
P = zeros(4,4);
P(1,1)=1;P(2,4)=1;P(3,2)=1;P(4,3)=1;
J = P*I*P';
K = P*K*P';
R = P*R*P';
K1= [K(3,1)
      K(4,1)];
K1i= [K1(1,1) K1(1,2)];
K1ii= [K1(1,3) K1(1,4)];
T1b = -(inv(K1ii)*K1ib);
T = [eye(2,2) / ...
      T1b];
Jred=T'*J*T;
Kred=T'*K*T;
Rred=T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred);f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(2,2) eye(2,2)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)];
B = [zeros(2,2)
      inv(Jred)];
C = zeros(1,4);
D(2) = 1;
D = zeros(1,2);
f0 = 1;
fr = logspace(0.4,400);
w = fr*2*pi;
[mag0,phase0] = bode(A,B,C,D,f0,w);
mag01 = 20*(log(mag0)/(log(10)));
ont=1;
subplot(211)
semilogx(fr,mag01,fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bode diagram')
semilogx(fr,phase0,fr,phase)
ylabel('Phase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid

```



```

K1(1,1)=1;K1(1,2)=0;K1(1,3)=0;K1(1,4)=0;K1(2,1)=0;K1(2,2)=1;K1(2,3)=0;K1(2,4)=0;K1(3,1)=0;K1(3,2)=0;K1(3,3)=1;K1(3,4)=0;K1(4,1)=0;K1(4,2)=0;K1(4,3)=0;K1(4,4)=1;
% Transfer function
% num = num(s);
% den = den(s);
% sys = tf(num,den);
% [mag,phase] = bode(sys);
% plot(log(mag),log(phase));
% grid;
% xlabel('Frequency [Hz]');
% ylabel('Magnitude [dB]');
% title('Bode plot');
% save('bode.mat');
end

```

```

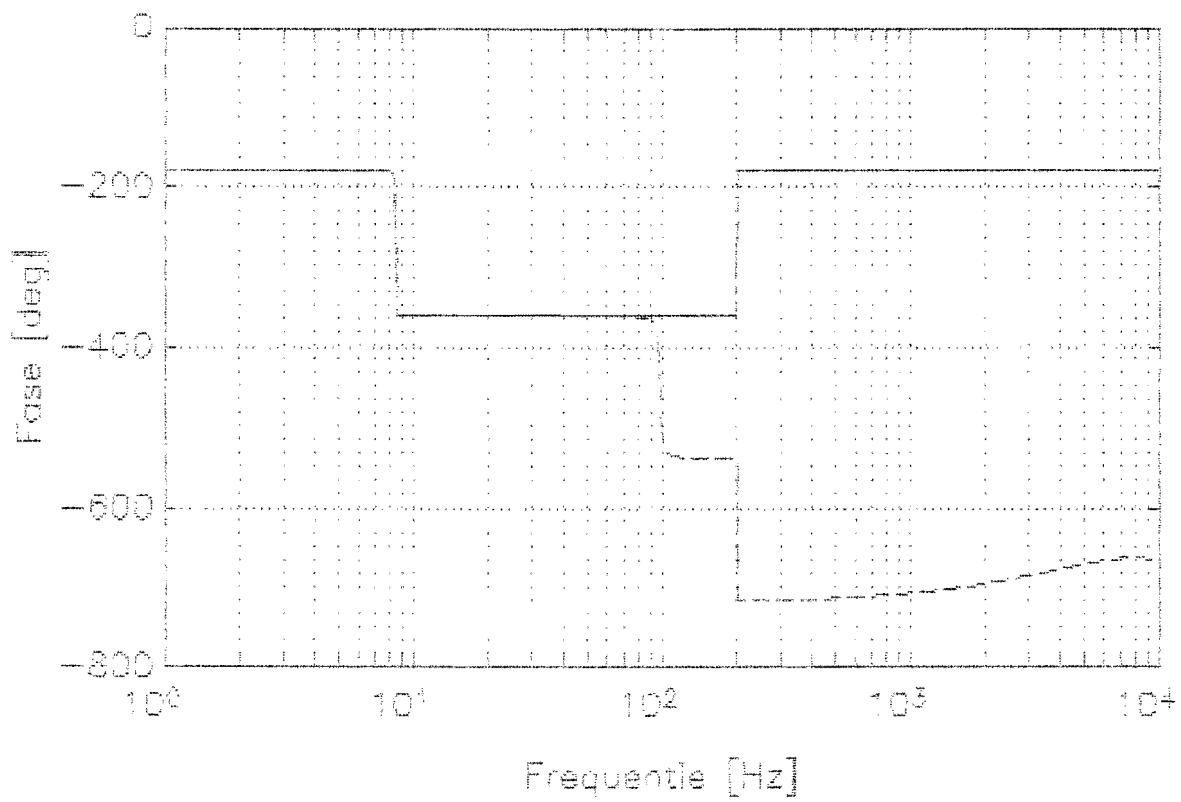
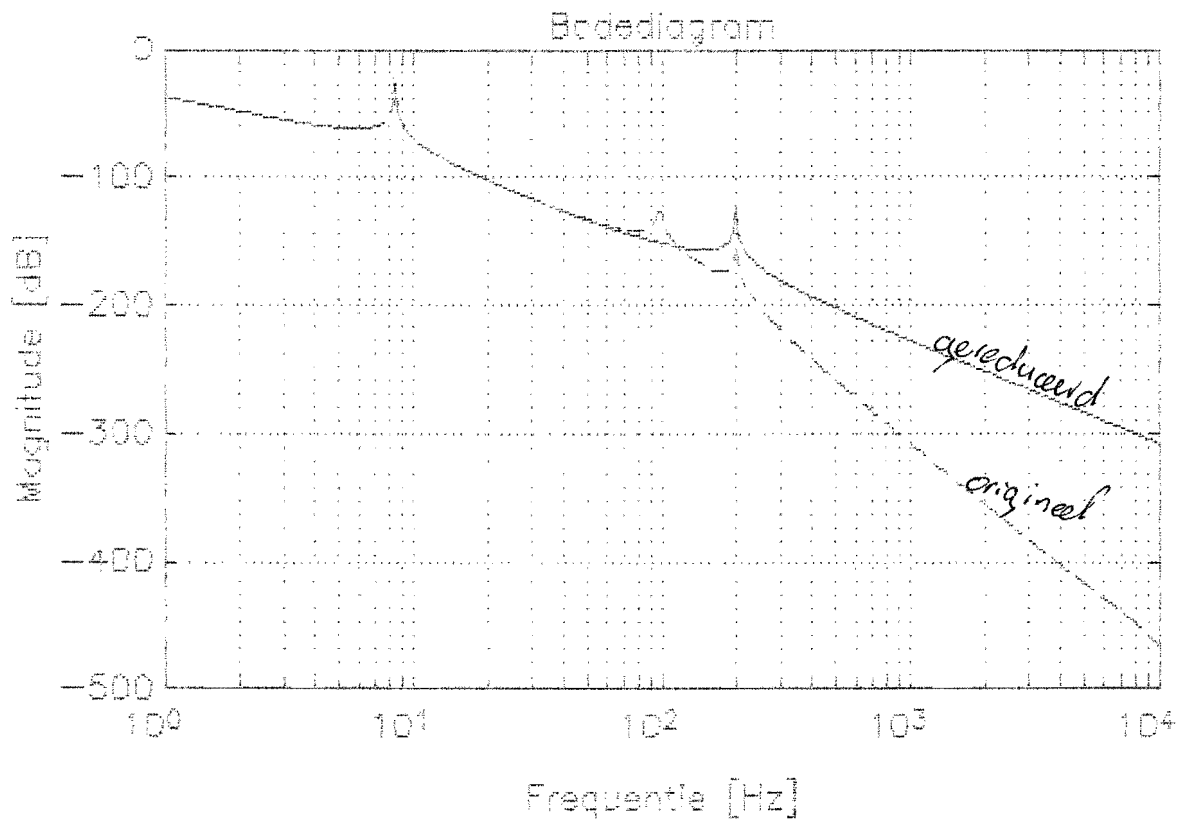
J1 = diag([0.147;0.0155;31.7;0.0e3]);
J2 = diag([0.063;0.0178;0.0033;1.69]);
K1 = [4000 -4000 0 0
      -4000 47000 -43000 0
        0 -43000 200000 -157000
        0 0 -157000 157000];
K2 = [21500 -21500 0 0
      -21500 21770 -270 0
        0 -270 1320 -1050
        0 0 -1050 1050];
R1 = [0.5 -0.5 0 0
      -0.5 0.501 0 0
        0 0 0.0063 0
        0 0 0 0.22e-3];
R2 = [0.44e-3 0 0 0
      0 0.1e-3 0 0
        0 0 0.0401 -40e-3
        0 0 -40e-3 0.0591];
v = eig(inv(J2)*K2);f = sqrt(v)/2/pi;
A = [zeros(4,4) eye(4,4)
      -(inv(J2)*K2) -(inv(J2)*R2)];
B = [zeros(4,4)
      inv(J2)];
C = zeros(1,8);
C(4) = 1;
D = zeros(1,4);
IU = 1;
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
[mag,phase] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag1 = 20*(log(mag)/(log(10)));

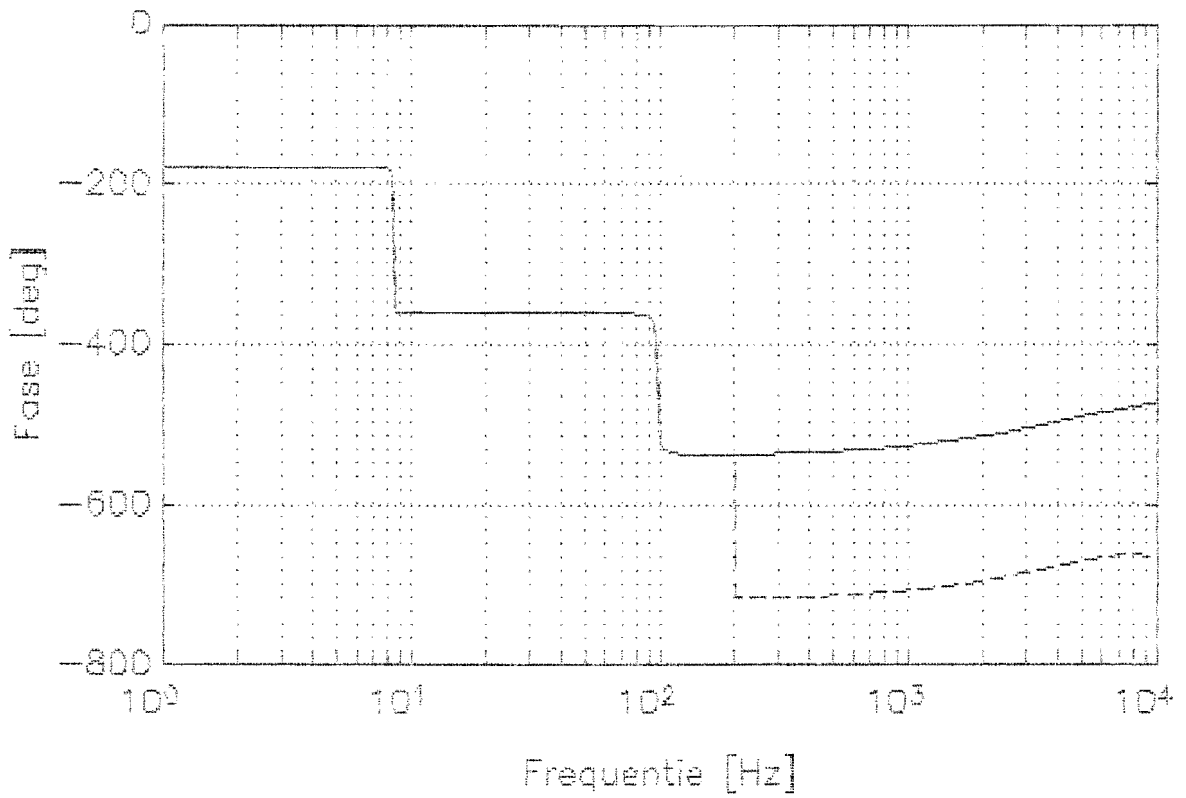
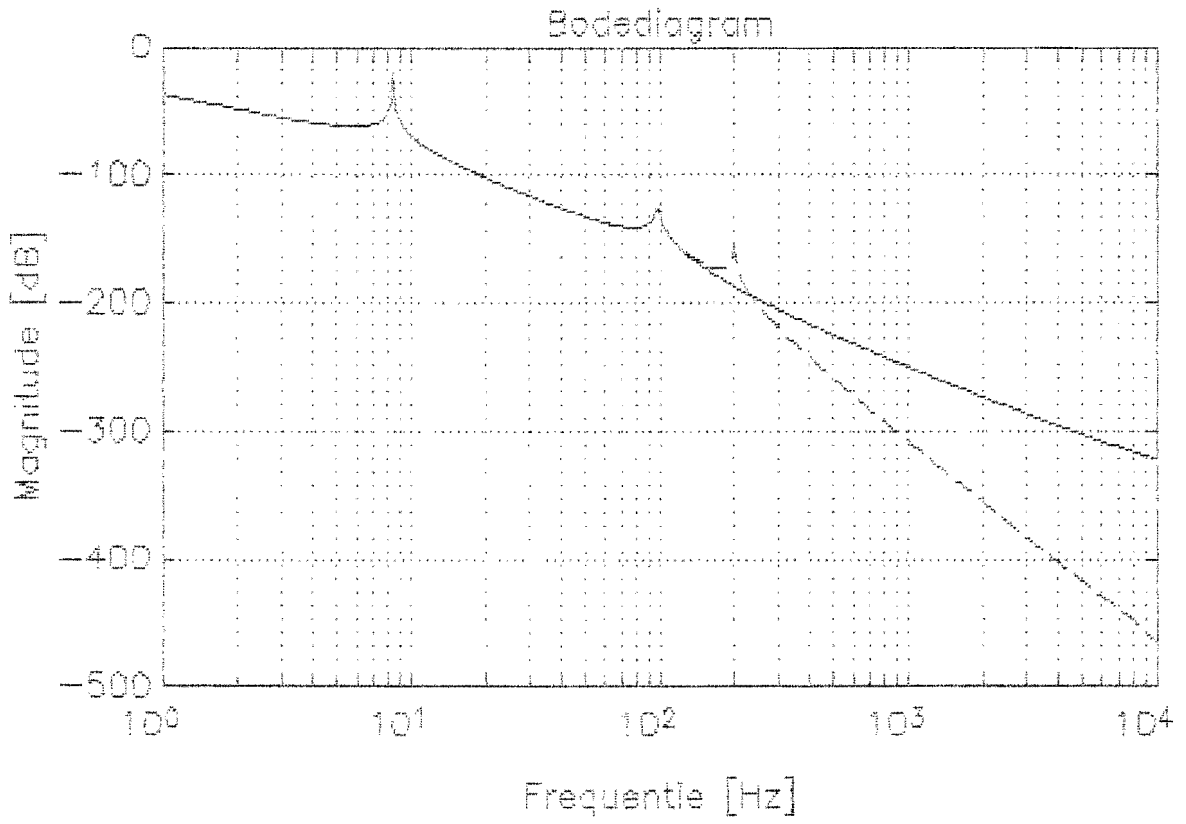
```

```

clear
clc
T = diag([0.063;0.0175;0.0035;1.69]);
K = [21500 -21500 0 0
     -21500 21770 -270 0
       0 -270 1520 -1050
       0 0 -1050 1050];
R = [0.44e-3 0 0 0
     0 0.1e-3 0 0
     0 0 0.0401 -40e-3
     0 0 -40e-3 0.059];
P = zeros(4,4);
P(1,1)=1;P(2,4)=1;P(3,2)=1;P(4,3)=1;
J = P*J*P';
K = P*K*P';
R = P*R*P';
K1= [K(3,1)
     K(4,1)];
K1b= [K1(:,1) K1(:,2)];
K1i= [K1(:,3) K1(:,4)];
T1b = -(inv(K1i)*K1b);
T = [eye(2,2)
     T1b];
Jred=T'*J*T;
Kred=T'*K*T;
Rred=T'*R*T;
v = eig(inv(Jred)*Kred);f = sort(v)/2/pi;
A = [zeros(2,2) eye(2,2)
     -(inv(Jred)*Kred) -(inv(Jred)*Rred)];
B = [zeros(2,2)
     inv(Jred)];
C = zeros(1,4);
C(2) = 1;
D = zeros(1,2);
IU = 1;
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
[mag0,phase0] = bode(A,B,C,D,IU,w);
mag01 = 20*(log(mag0)/(log(10)));
ontk2
subplot(211)
semilogx(fr,mag01,fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
title('Bodediagram')
semilogx(fr,phase0,fr,phase)
ylabel('Fase [deg]'),xlabel('Frequentie [Hz]'),grid
meta plot

```

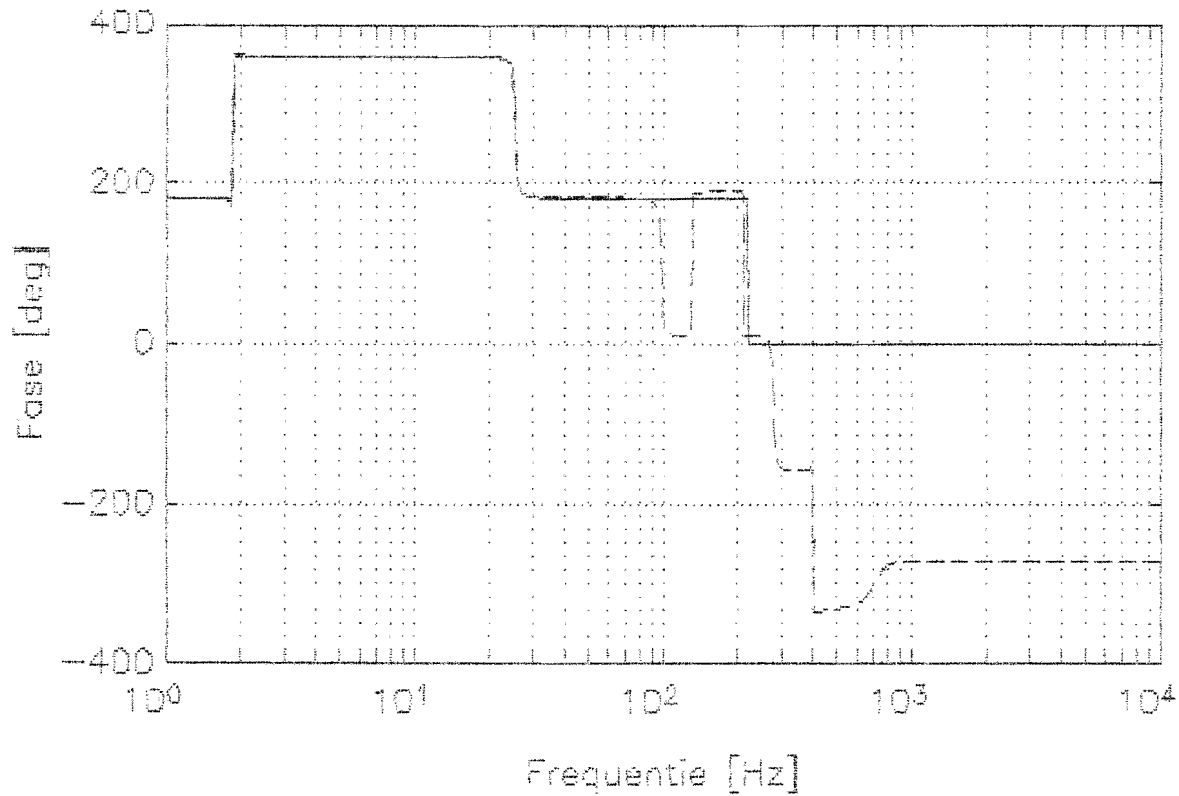
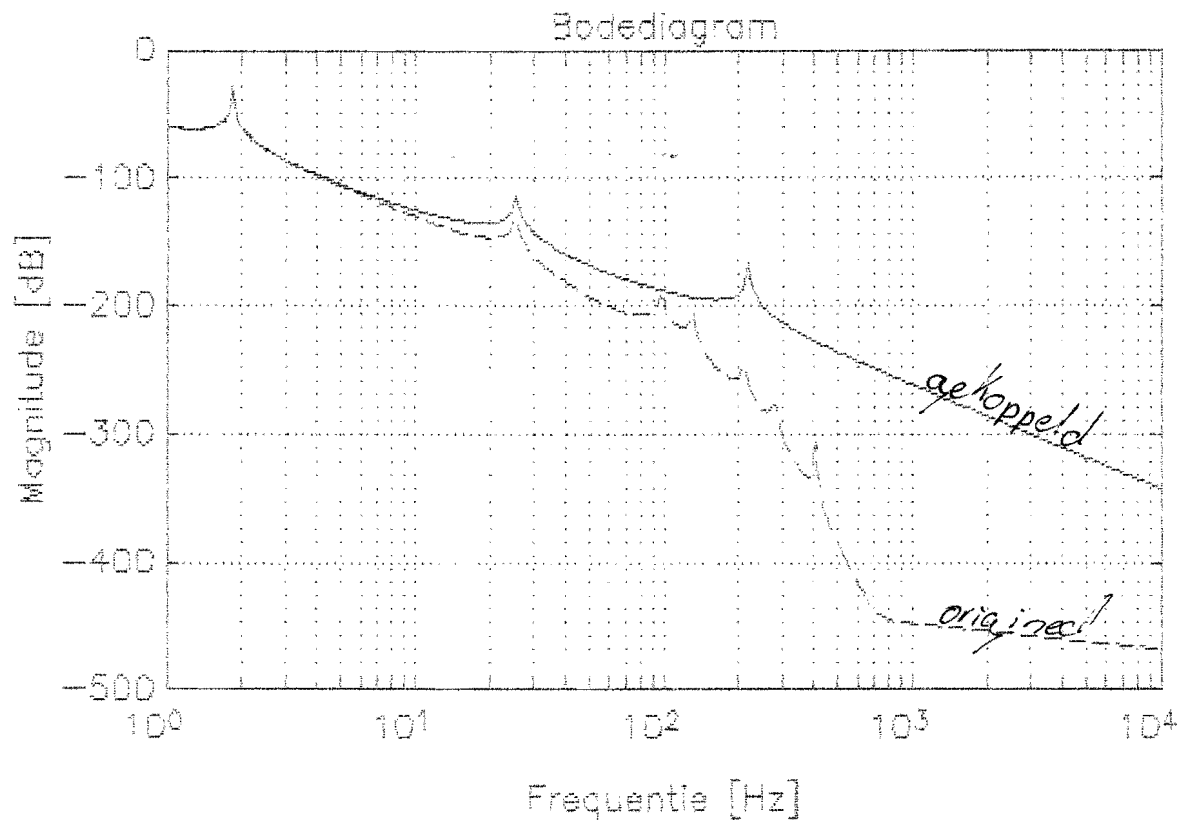





```

cig
J = [0.1636 0.7071 0 0
      0.7071 30.3477 0 0
      0 0 0.0505 0.0001
      0 0 0.0007 1.6922];
R = [0.3597 -0.3994 0 0
      -0.3994 0.4067 0 0
      0 0 0.0022 -0.0016
      0 0 -0.0016 0.0207];
K = [3576.2 -3576.2 0 0
      -3576.2 153576.2 -150000 0
      0 -150000 150212.7 -212.7
      0 0 -212.7 212.7];
v = eig(inv(J)*K); f = sort(v)/2/pi;
A = [zeros(4,4) eye(4,4)
      -(inv(J)*K) -(inv(J)*R)];
B = [zeros(4,4)
      inv(J)];
C = zeros(1,8);
C(4)=1;
D = zeros(1,4);
TU = 1;
Fr = logspace(0,4,400);
w = Fr*2*pi;
[mag0,phase0] = bode(A,B,C,D,TU,w);
mag01 = 20*(log(mag0)/(log(10)));
cig
st01
subplot(2,1)
semilogx(Fr,mag01,Fr,mag1)
xlabel('Magnitude [dB]',xlabel('Frequency [Hz]',grid
title('Bode diagram')
semilogx(Fr,phase0,Fr,phase)
ylabel('Phase [deg]',xlabel('Frequency [Hz]',grid
meta plot

```



```

J = [0.1471 0.0012 0 0 0
      0.0012 31.713 0 0 0
      0 0 0.063 0 0
      0 0 0 0.0806 0.0007
      0 0 0 0.0007 1.6922];
R = [0.4185 -0.4184 0 0 0
      -0.4184 0.4257 0 0 0
      0 0 0.002 0 0
      0 0 0 0.0022 -0.0016
      0 0 0 -0.0016 0.0207];
K = [3660 -3660 0 0 0
      -3660 160660 -157000 0 0
      0 -157000 307000 -150000 0
      0 0 -150000 150212.7 -212.7
      0 0 0 -212.7 212.7];
v = eig(inv(J)*K); f = sort(v)/2/pi;
A = [zeros(5,5) eye(5,5)
      -(inv(J)*K) -(inv(J)*R)];
B = [zeros(5,5)
      inv(J)];
C = zeros(1,10);
D(5) = 1;
D = zeros(1,5);
IU = 1;
fr = logspace(0,4,400);
w = fr*2*pi;
[mag0, phase0] = bode(A,R,C,D,IU,w);
mag01 = 20*(log(mag0)/(log(10)));
cid
st01
subplot(2,1)
semilogx(fr,mag01,fr,mag1)
ylabel('Magnitude [dB]'), xlabel('Frequentie [Hz]'), grid
title('Bode diagram')
semilogx(fr,phase0,fr,phase)
ylabel('Phase [deg]'), xlabel('Frequentie [Hz]'), grid
meta plot

```