

Golfvoortplanting in het arteriële vatenstelsel

Citation for published version (APA):

Bosboom, E. M. H. (1996). *Golfvoortplanting in het arteriële vatenstelsel*. (DCT rapporten; Vol. 1996.058). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1996

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

**Golfvoortplanting in het arteriële
vatenstelsel**

E.M.H. Bosboom

stageverslag
WFW-rapport 96.058

stage-begeleider:
Dr.ir. F. van de Vosse

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Theorie	3
2.1	Golfvoortplanting in een elastische buis	3
2.2	Golfreflecties bij discrete overgangen	6
3	Resultaten	9
3.1	Golfvoortplanting en golfreflectie in eenvoudige geometriën	9
3.2	Golfvoortplanting in de aorta	12
4	Conclusies en aanbevelingen	17
A	Computermodel	19
A.1	Programma	19
A.2	Subroutine	21

Hoofdstuk 1

Inleiding

Via het arteriële vatenstelsel wordt bloed vanuit het hart naar de weefsels getransporteerd. Het bloed kan dan de verschillende weefsels van zuurstof voorzien. Behalve dat het arteriële vatenstelsel de anatomische functie heeft van verbindingsweg, heeft het ook een aantal hemodynamische functies. Zo zorgt het stelsel ervoor dat een discontinue stroming van het bloed, die veroorzaakt wordt door het pompen van het hart, omgezet wordt in een gelijkmatige stroming. Deze functie van het vatenstelsel staat bekend als de windketelfunctie en wordt mogelijk gemaakt door de elastische eigenschappen van de wand van de arteriën. Bovendien wordt in het arteriële vatenstelsel een relatief hoge bloeddruk gehandhaafd. Deze hoge druk is noodzakelijk om de hersenen van voldoende bloed te voorzien en om de nieren goed te laten functioneren.

Veranderingen van de eigenschappen van arteriën kunnen belangrijke gevolgen hebben. Hierbij valt te denken aan de gevolgen van aderverkalking of van het stijver worden van de vaatwanden bij ouderen. Inzicht in de relatie tussen de eigenschappen van het arteriële vatenstelsel en de optredende snelheden en drukken in het bloed is daarom relevant. Om dit inzicht te verkrijgen zijn er inmiddels een groot aantal modellen ontwikkeld. Deze modellen geven echter vaak slechts een deel van het arteriële vatenstelsel weer, bijvoorbeeld een vertakking, of zij gaan uit van een modellering met behulp van elektronische componenten, wat de toegankelijkheid van dergelijke modellen bemoeilijkt.

Het doel van deze studie is om een aanzet te geven tot het modelleren van de bloedstroming door het gehele arteriële vatenstelsel met behulp van de wetten uit de stromingsleer. In hoofdstuk 2 zal ingegaan worden op de theorie waarop dit model gebaseerd is. Vervolgens worden in hoofdstuk 3 de resultaten gegeven van een aantal problemen die doorgerekend zijn met het model. Tenslotte zullen in hoofdstuk 4 de conclusies en aanbevelingen besproken worden die uit deze studie volgen.

Hoofdstuk 2

Theorie

2.1 Golfvoortplanting in een elastische buis

De stroming van het bloed in het arteriële vatenstelsel wordt gemodelleerd als de stroming van een Newtonse vloeistof door elastische buizen. Aangenomen wordt dat de stroming axi-symmetrisch is, zodat de snelheid in ϕ -richting (v_ϕ), en de afgeleiden van de snelheid naar ϕ nul zijn. De Navier-Stokes vergelijkingen in cilindrische coördinaten worden dan:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (v_z) \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Doordat de buizen elastisch zijn, zullen er drukgolven en pulserende volumestromen ontstaan met een golfsnelheid c en een golflengte λ . Door de Navier-Stokes vergelijkingen dimensieloos te maken kan een indruk worden gekregen van de orde-grootte van de verschillende termen in de vergelijkingen. De dimensieloze vorm van de Navier-Stokes vergelijkingen wordt verkregen door de radiale coördinaten met de straal te schalen, $r' = r/a_0$, de axiale coördinaten met de golflengte λ , $z' = z/\lambda$ en de axiale snelheid met een karakteristieke waarde, $v'_z = v_z/V$. Uit de derde vergelijking van stelsel (2.1) volgt dan dat voor de dimensieloze radiale snelheid geldt $v'_r = (v_r/V)(\lambda/a_0)$. De dimensieloze tijd is gelijk aan $t' = \omega t = (c/\lambda)t$. Voor de dimensieloze druk wordt $p' = p/(\rho V c)$ gekozen. De dimensieloze

Navier-Stokes vergelijkingen worden hiermee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v'_r}{\partial t'} + \frac{V}{c} \left(v'_r \frac{\partial v'_r}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial v'_r}{\partial z'} \right) = -\frac{\lambda^2}{a_0^2} \frac{\partial p'}{\partial r'} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' v'_r) \right) + \frac{a_0^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v'_r}{\partial z'^2} \right) \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t'} + \frac{V}{c} \left(v'_r \frac{\partial v'_z}{\partial r'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial}{\partial r'} (v'_z) \right) + \frac{a_0^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right) \\ \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' v'_r) + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

waarin α de Womersley parameter is:

$$\alpha = a_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (2.3)$$

Onder de aannamen dat de golfsnelheid veel groter is dan de snelheid van de vloeistof $\frac{V}{c} \ll 1$, en de golflengte veel groter dan de straal van de buis $\frac{a_0}{\lambda} \ll 1$, kan uit de dimensieloze Navier-Stokes vergelijkingen (2.2) afgeleid worden dat de Navier-Stokes vergelijkingen (2.1) overgaan in:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Gezocht wordt nu naar harmonische oplossingen met een hoekfrequentie ω en een golfgetal k van de vorm:

$$p = \hat{p} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.5)$$

en

$$v_z = \hat{v}_z(r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.6)$$

Wanneer wordt aangenomen dat de wand niet in axiale richting beweegt, wat in vivo een relevante aanname is (Pedley, 1980), geldt als randvoorwaarde $\hat{v}_z(r) = 0$ op $r = a(z, t)$. Substitutie van de harmonische oplossingen in het stelsel (2.4) en oplossen van dit stelsel met de randvoorwaarde geeft dan (Womersley, 1957):

$$\hat{v}_z(r) = \frac{k}{\rho \omega} \left[1 - \frac{J_0(i^{3/2} \alpha r / a)}{J_0(i^{3/2} \alpha)} \right] \hat{p} \quad (2.7)$$

Deze oplossing staat bekend als de Womersley-oplossing.

Het golfgetal k kan bepaald worden uit de beweging van de wand en is afhankelijk van de eigenschappen van die wand. Uit het toepassen van de Leibnitz formule op de tweede en derde vergelijking uit het stelsel van gereduceerde Navier-stokes vergelijkingen (2.4) met de aanname dat de wand niet in de lengte richting beweegt ($v_z(a, t) = 0$), volgt (v.d. Vosse, 1995):

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ \rho \frac{\partial q}{\partial t} + A_0 \frac{\partial p}{\partial z} = -f_0 q \end{cases} \quad (2.8)$$

Hierin is $q(z, t)$ een volumestroom, A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de buis en f_0 een bepaalde frictie-functie ($f_0(\omega) = i\omega\rho \frac{F_{10}(\omega)}{1-F_{10}(\omega)}$). Een oplossing van dit stelsel volgt uit de substitutie van de volgende harmonische oplossingen:

$$\begin{aligned} p(\omega, z, t) &= \hat{p}(\omega, 0)e^{i(\omega t - kz)} \\ q(\omega, z, t) &= \hat{q}(\omega, 0)e^{i(\omega t - kz)} \\ A(\omega, z, t) &= \hat{A}(\omega, 0)e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

De relatie tussen het dwarsoppervlak en de druk wordt gegeven door de dynamische compliantie $C(\omega)$ ($\hat{A} = C(\omega)\hat{p}$). Hiermee volgt dat voor k geldt (v.d. Vosse, 1995):

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{1}{1 - F_{10}(\omega)}} \quad (2.10)$$

met c_0 de Moens-Korteweg golfsnelheid:

$$c_0(\omega) = \sqrt{\frac{A_0}{\rho C(\omega)}} \quad (2.11)$$

en F_{10} de volgende functie van de Besselfuncties:

$$F_{10}(\alpha) = \frac{2J_1(i^{3/2}\alpha)}{i^{3/2}\alpha J_0(i^{3/2}\alpha)} \quad (2.12)$$

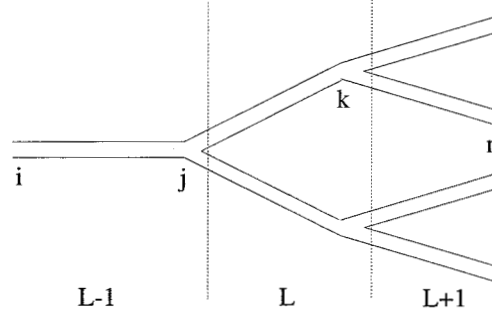
De verhouding van de druk \hat{p} en de volumestroom \hat{q} is afhankelijk van de impedantie Z of de admittantie Y van de buis. Deze volgt uit de eerste vergelijking van (2.8) en is gelijk aan:

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{\hat{q}(\omega, z)}{\hat{p}(\omega, z)} = \frac{\omega C(\omega)}{k(\omega)} \quad (2.13)$$

De admittantie is gedefinieerd voor golven die zich voortplanten in positieve z -richting. Voor deze golven geldt $\hat{q} = Y\hat{p}$. Voor golven die zich voortplanten in negatieve z -richting geldt $\hat{q} = -Y\hat{p}$.

2.2 Golfreflecties bij discrete overgangen

Er wordt nu gekeken naar een overgang tussen segmenten zoals weergegeven in figuur (2.1).



Figuur 2.1: Discrete overgang tussen segmenten

Een deel van de ingaande golf (q^i, p^i) wordt bij de overgang gereflecteerd (q^r, p^r) en een deel van de golf gaat door (q^t, p^t) . Wanneer de lengte van een overgang tussen segmenten klein is ten opzichte van de golflengte is er sprake van een discrete overgang. Er is dan geen verschil in druk of volumestroom tussen de uiteinden van de segmenten. Op een willekeurige overgang bij $z = L_{jk}^L$ geldt dan (z is de afstand in een buis tot het beginpunt van het segment):

$$p_{jk}^i(\omega, L_{jk}^L, t) + p_{jk}^r(\omega, L_{jk}^L, t) = p_{kn}^t(\omega, L_{jk}^L, t) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (2.14)$$

$$q_{jk}^i(\omega, L_{jk}^L, t) + q_{jk}^r(\omega, L_{jk}^L, t) = \sum_{n=1}^N q_{kn}^t(\omega, L_{jk}^L, t) \quad (2.15)$$

Verder geldt voor elk segment vergelijking (2.13):

$$Y_{jk}^L(\omega) = \frac{\hat{q}_{jk}^i(\omega, z)}{\hat{p}_{jk}^i(\omega, z)} = -\frac{\hat{q}_{jk}^r(\omega, z)}{\hat{p}_{jk}^r(\omega, z)} \quad (2.16)$$

$$Y_{kn}^{L+1}(\omega) = \frac{\hat{q}_{kn}^t(\omega, z)}{\hat{p}_{kn}^t(\omega, z)}$$

De reflectie-coëfficiënt Γ geeft de verhouding weer tussen de gereflecteerde en de ingaande drukgolven op de overgang tussen de twee segmenten. De transmissie-coëfficiënt T geeft de verhouding weer tussen de doorgaande en de ingaande drukgolven op de overgang tussen de segmenten. Voor knooppunt k op niveau L zijn zij als volgt gedefinieerd:

$$\Gamma_k^L(\omega) = \frac{\hat{p}_{jk}^r(\omega, L_{jk})}{\hat{p}_{jk}^i(\omega, L_{jk})} \quad T_k^L(\omega) = \frac{\hat{p}_{kn}^t(\omega, L_{jk})}{\hat{p}_{jk}^i(\omega, L_{jk})} \quad (2.17)$$

Substitutie van (2.14), (2.15) en (2.16) in (2.17) geeft voor knooppunt k op niveau L :

$$\Gamma_k^L = \frac{Y_{jk}^L - \sum_n Y_{kn}^{(L+1),e}}{Y_{jk}^L + \sum_n Y_{kn}^{(L+1),e}} \quad T_k^L = \frac{2Y_{jk}^L}{Y_{jk}^L + \sum_n Y_{kn}^{(L+1),e}} \quad (2.18)$$

Voor knooppunt j op niveau $(L-1)$ geldt:

$$\Gamma_j^{L-1} = \frac{Y_{ij}^{L-1} - \sum_k Y_{jk}^{L,e}}{Y_{ij}^{L-1} + \sum_k Y_{jk}^{L,e}} \quad T_j^{L-1} = \frac{2Y_{ij}^{L-1}}{Y_{ij}^{L-1} + \sum_k Y_{jk}^{L,e}} \quad (2.19)$$

In bovenstaande vergelijkingen (2.18) en (2.19) is Y^e , de effectieve admittantie. Dit is de admittantie van een segment wanneer de gereflecteerde golven, die zich in dit segment bevinden, worden meegenomen. Bij de berekening van de effectieve admittantie van een segment wordt het gehele netwerk van segmenten na het eindpunt van dit segment vervangen door een segment. Dit segment heeft een vervangende admittantie, de effectieve admittantie Y^e . Als er in buis kn geen gereflecteerde golven zijn dan is de effectieve admittantie gelijk aan de admittantie ($Y_{kn}^{(L+1),e} = Y_{kn}^{(L+1)}$). Voor de effectieve admittantie $Y_{jk}^{L,e}$ geldt:

$$Y_{jk}^{L,e} = Y_{jk}^L \frac{e^{ik_{jk}^L L_{jk}^L} - \Gamma_k^L e^{-ik_{jk}^L L_{jk}^L}}{e^{ik_{jk}^L L_{jk}^L} + \Gamma_k^L e^{-ik_{jk}^L L_{jk}^L}} \quad (2.20)$$

Voor een ingaande drukgolf $p^i = \hat{p}^i(\omega, 0)e^{i(\omega t - kz)}$ in een segment met een overgang op $z = L_{ij}^{L-1}$ is de totale drukgolf in dat segment gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{ij}(\omega, z, t) &= p_{ij}^i(\omega, z, t) + p_{ij}^r(\omega, z, t) \\ &= \hat{p}_{ij}^i(\omega, 0)e^{-ik_{ij}^{L-1} z} \left[1 + \Gamma_j^{L-1} e^{-2ik_{ij}^{L-1}(L_{ij}^{L-1} - z)} \right] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.21)$$

De amplitude van de drukgolf (\hat{p}_{jk}^i) van het segment na de overgang op $z = L_{ij}^{L-1}$ wordt berekend uit het evenwicht tussen de uiteinden van de segmenten. Voor het evenwicht in druk tussen de segmenten geldt:

$$\hat{p}_{ij}^i(\omega, 0)T_j^{L-1}e^{-ik_{ij}^{L-1}L_{ij}^{L-1}} = \hat{p}_{jk}^i(\omega, L_{ij}^{L-1})(1 + \Gamma_k^L e^{-2ik_{jk}^L L_{jk}^L}) \quad (2.22)$$

Hieruit volgt dat voor p_{jk}^i geldt:

$$\hat{p}_{jk}^i(\omega, L_{ij}^{L-1}) = \hat{p}_{ij}^i(\omega, 0) \frac{T_j^{L-1} e^{-ik_{ij}^{L-1} L_{ij}^{L-1}}}{1 + \Gamma_k^L e^{-2ik_{jk}^L L_{jk}^L}} \quad (2.23)$$

Samenvattend kan nu de voortplanting van een drukgolf door een stelsel van segmenten op de volgende manier bepaald worden. Allereerst worden op elke overgang de reflectie- en de transmissiecoëfficiënten berekend met (2.18). Voor het berekenen van deze coëfficiënten voor een overgang is de effectieve admittantie van het segment na deze overgang nodig

(2.20). Voor de berekening van deze effectieve admittantie is de reflectiecoëfficiënt aan het einde van dat segment nodig. Het berekenen van de reflectie- en de transmissiecoëfficiënten moet dus van achter in het stelsel naar voor in het stelsel worden uitgevoerd. Na de bepaling van de reflectie- en transmissie coëfficiënten volgt de voortplanting van de drukgolf uit (2.21). De amplitude van de drukgolf die hiervoor nodig is, wordt berekend met (2.23). Deze berekingen worden van voor in het stelsel naar achter uitgevoerd.

Hoofdstuk 3

Resultaten

3.1 Golfvoortplanting en golfreflectie in eenvoudige geometriën

Met behulp van de in hoofdstuk 2 beschreven theorie is een computermodel geschreven. Het programma van dit model is opgenomen in de bijlage. Dit programma heeft de volgende opzet. Allereerst wordt de structuur van het netwerk van segmenten ingegeven. Van al deze segmenten zijn de lengtes, diameters, wanddiktes en E-moduli bekend. Met deze gegevens wordt van elk segment het golfgetal k en de admittantie Y bepaald. Vervolgens worden de reflectie- en de transmissiecoëfficiënten, Γ en T van de overgangen berekend. Omdat bij deze berekening de segmenten na de overgang vervangen worden door een segment met een effectieve admittantie Y^e , worden de reflectie- en de transmissiecoëfficiënten van de laatste segmenten aan het eind van het netwerk als eerste bepaald en die van het eerste segment aan het begin van het netwerk als laatste. Tenslotte wordt de voortplanting van de drukgolf door het netwerk via de opgegeven route berekend. De drukgolven aan het begin, op iedere overgang, en aan het eind van de route worden dan weergegeven in een figuur.

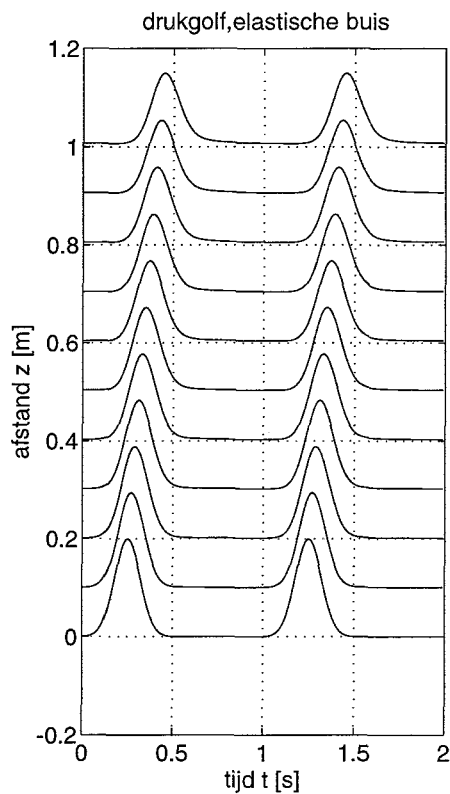
Om het model te controleren is de voortplanting van een drukgolf door een buis op twee verschillende manieren berekend. In het eerste geval bestaat de buis uit een enkel segment. In het tweede geval bestaat de buis uit tien segmenten met dezelfde eigenschappen. Wanneer het model correct is, treden er geen verschillen op. Voor deze berekening is gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen:

ν	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$Pa \cdot s$	viscositeit van de vloeistof
ρ	10^3	$kg \cdot m^{-3}$	dichtheid van de vloeistof
L	1	m	totale lengte van de buis
a_0	$3 \cdot 10^{-3}$	m	straal van de buis
h	$a_0/10$	m	wanddikte van de buis
E	$4.5 \cdot 10^5$	$N \cdot m^2$	E-modulus
μ	0.5	-	Poisson getal

De drukgolf die aan het begin van de buis wordt aangeboden, is gelijk gekozen aan:

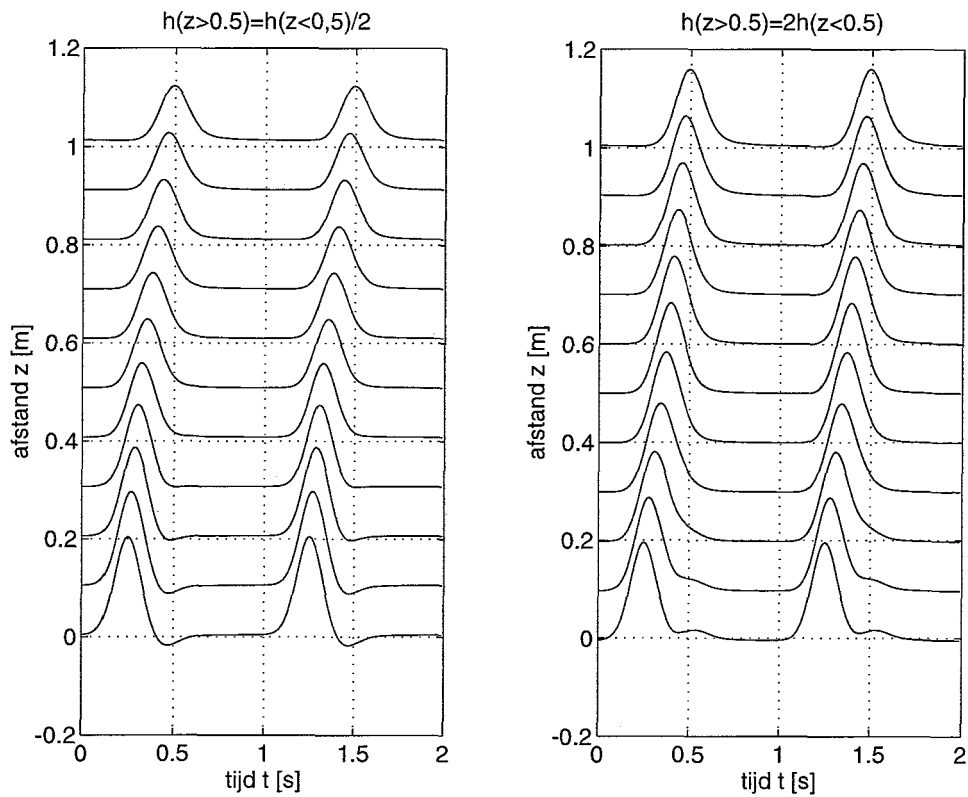
$$p(0, t) = e^{-\left(\frac{t-0.25}{0.1}\right)^2} + e^{-\left(\frac{t-1.25}{0.1}\right)^2} \quad (3.1)$$

De resultaten van de beide berekeningen zijn weergegeven in figuur 3.1 en zijn niet van elkaar te onderscheiden. Er treden dus geen verschillen op tussen een berekening met het model bestaande uit een segment en een berekening met het model bestaande uit tien segmenten.



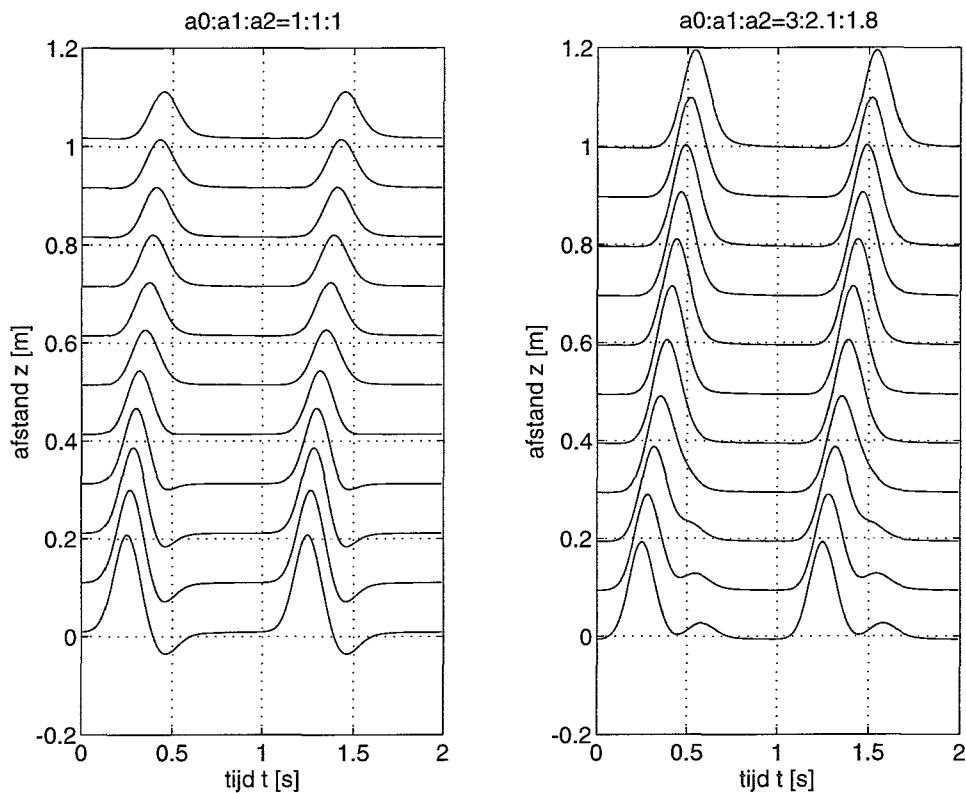
Figuur 3.1: Golfvoortplanting in een elastische buis

Dezelfde drukgolf (3.1) is aangeboden aan een buis waarvan de wand op $z = 0.5 \text{ m}$ de helft dikker of dunner wordt (respectievelijk $h(z > 0.5) = a/5$ en $h(z > 0.5) = a/20$). De resultaten van de berekeningen zijn weergegeven in figuur 3.2. In de figuur is te zien dat er golfreflecties optreden door een verandering in wanddikte en dus een verandering in de stijfheid van de buis.



Figuur 3.2: Golfvoortplanting en -reflectie in een elastische buis met een discrete overgang op $z = 0.5$ m veroorzaakt door het dunner (links) of dikker worden (rechts) van de wand

Ook bij een splitsing van een buis in twee buizen treedt er golfreflectie op. Figuur 3.3 is het resultaat van berekeningen wanneer een buis met een diameter a_0 op $z = 0.5 \text{ m}$ splitst in twee buizen met diameters a_1 en a_2 . De diameters verhouden zich tot elkaar als respectievelijk $a_0 : a_1 : a_2 = 1 : 1 : 1$ en $a_0 : a_1 : a_2 = 3 : 2.1 : 1.8$. Wanneer de doorsnede van de buizen na de splitsing groter is dan de doorsnede ervoor ($a_0^2 < a_1^2 + a_2^2$) is er sprake van een negatieve reflectie. Wanneer de doorsnede kleiner wordt ($a_0^2 > a_1^2 + a_2^2$) treedt er een positieve reflectie op.



Figuur 3.3: Golfvoortplanting en -reflectie in een elastische buis met een splitsing op $z = 0.5 \text{ m}$ waarbij de oppervlakte van de doorsnede groter (links) of kleiner (rechts) wordt

3.2 Golfvoortplanting in de aorta

Het is een bekend verschijnsel dat een drukgolf, die zich in de aorta voortplant, steeds hoger en steiler wordt ('pressure peaking'). 'Pressure peaking' wordt waarschijnlijk veroorzaakt door een afname van de diameter van de aorta. Met behulp van de eigenschappen van de aorta van de hond is onderzocht of het ontwikkelde programma dit fenomeen ook

beschrijft. Er zijn hiervoor berekeningen uitgevoerd aan vier modellen bestaande uit 2, 4, 8 en 16 segmenten om zo ook de invloed van het aantal segmenten te kunnen bestuderen. De segmenten hebben van elkaar verschillende diameters die bij opvolgende segmenten steeds kleiner worden. De diameter binnen een segment is echter wel constant. De modellen vormen zo dus een steeds betere benadering voor een aorta waarvan de diameter continu over de lengte afneemt. Voor de berekeningen is gebruik gemaakt van de volgende eigenschappen van de aorta van de hond (Caro, 1978):

ν	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$Pa \cdot s$	viscositeit van het bloed
ρ	10^3	$kg \cdot m^{-3}$	dichtheid van het bloed
L	0.3	m	totale lengte van de aorta
a_0	$8.2 \cdot 10^{-3} - 4.4 \cdot 10^{-3}$	m	straal van de aorta
h	$0.07 \cdot a_0$	m	wanddikte van de aorta
E	$4.8 \cdot 10^5$	$N \cdot m^2$	E-modulus van de aorta
μ	0.5	-	Poisson getal

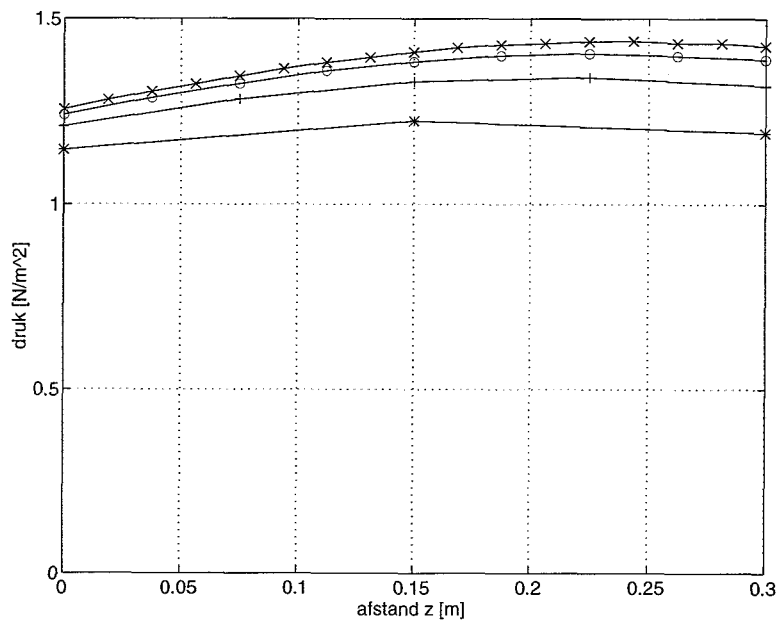
De drukgolf die aan het eerste segment is aangeboden, is weer gelijk gekozen aan:

$$p(0, t) = e^{-\left(\frac{t-0.25}{0.1}\right)^2} + e^{-\left(\frac{t-1.25}{0.1}\right)^2} \quad (3.2)$$

De resultaten van de berekeningen met 2 en 4 segmenten zijn weergegeven in figuur (3.5). Figuur (3.6) geeft de resultaten weer van de berekeningen met 8 en 16 segmenten. In figuur (3.4) is het verloop van de amplitude van de druk over de lengte van de aorta weergegeven voor 2, 4, 8 en 16 segmenten.

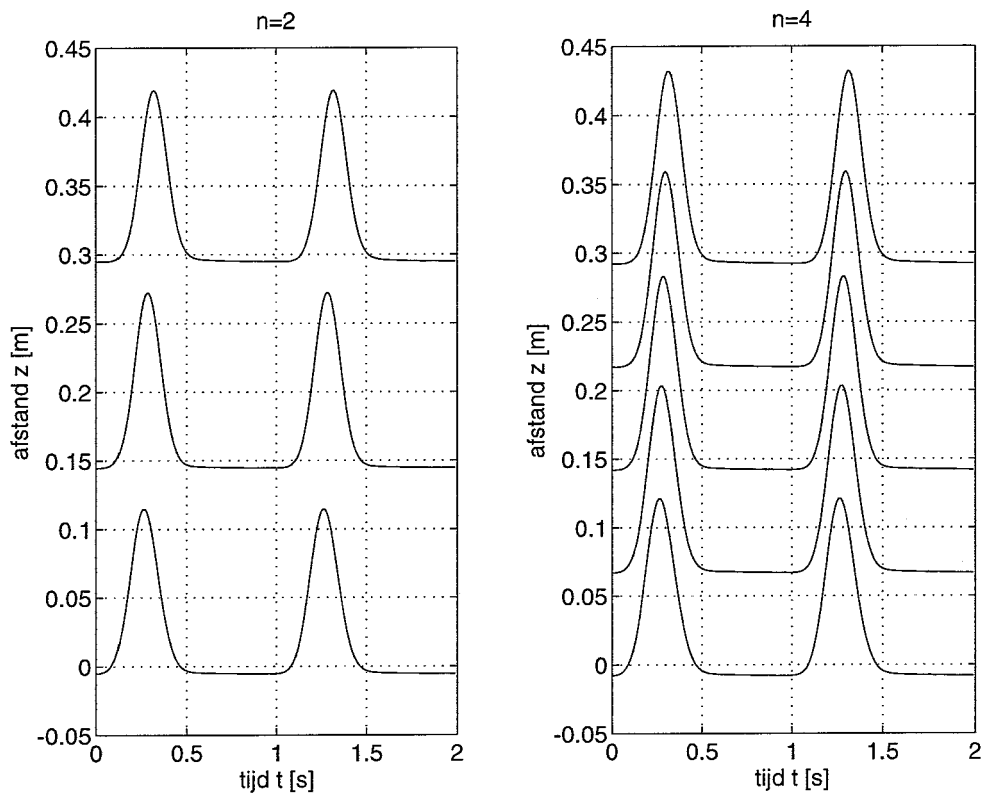
Uit de resultaten blijkt dat de drukgolf bij voortplanting door de aorta steeds hoger en steiler wordt; er treedt 'pressure peaking' op. Deze 'pressure peaking' is het resultaat van reflecties die veroorzaakt worden door een verschil van stijfheid tussen de segmenten. Omdat de lengte van de aorta veel kleiner is dan de lengte van de buizen gebruikt in paragraaf 3.1 is de reflectie nu niet terug te vinden als een extra piek maar is deze geheel opgenomen in de grote piek.

Wanneer de totale reflectie het grootst is, is de drukgolf aan het eind van de aorta het grootst. Een grotere totale reflectie kan veroorzaakt worden door een grotere reflectie per overgang, dus grotere verschillen tussen segmenten, of door een groter aantal overgangen, dus een groter aantal segmenten. De drukgolf wordt dus hoger bij het verhogen van het aantal segmenten van 2 naar 4, van 4 naar 8 en van 8 naar 16. Het verhogen van het aantal segmenten heeft steeds minder effect, omdat er een evenwicht bereikt wordt tussen aan de ene kant het kleiner worden van de reflectie per overgang, omdat de verschillen tussen de segmenten kleiner worden, en aan de andere kant het vergroten van het aantal overgangen. Het gebruik van meer segmenten om een betere benadering te krijgen van een continue verandering van de diameter van de aorta is bij een bepaald aantal segmenten niet meer

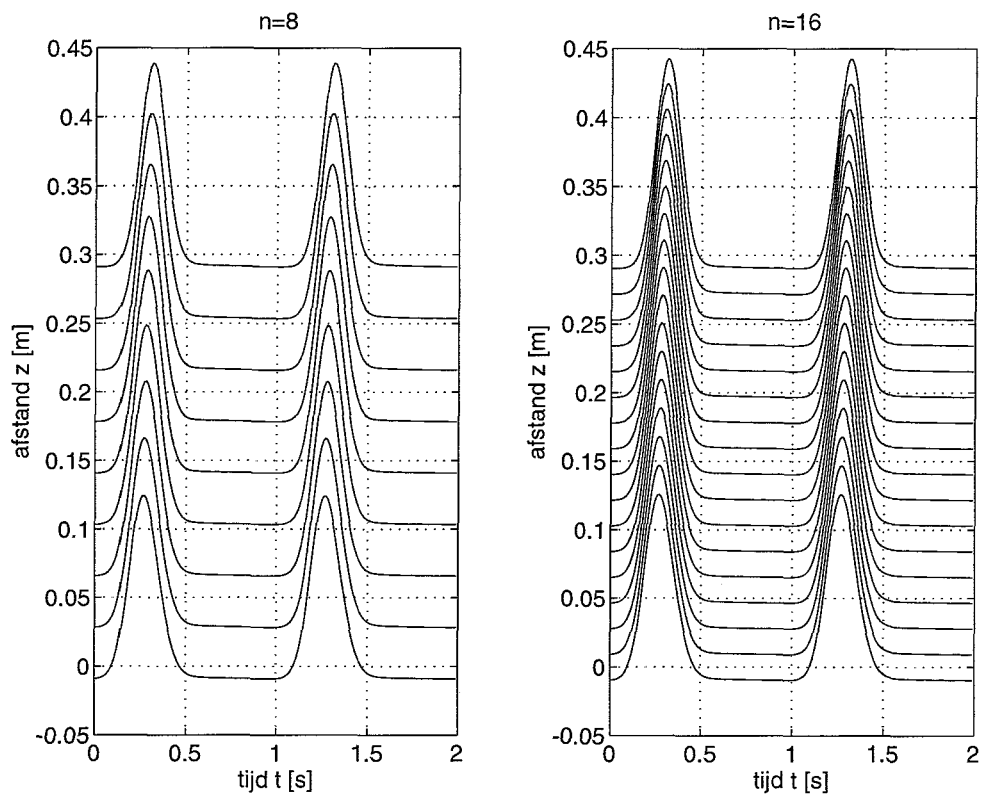


Figuur 3.4: Amplitude van de drukgolf in de aorta bestaande uit twee (*), vier (+), acht (o) en zestien (x) segmenten

zinnig. In het ontwikkelde programma kan dus een continu veranderende eigenschap gesimuleerd worden door over een beperkt aantal segmenten deze eigenschap sprongsgewijs te laten veranderen.



Figuur 3.5: Golfvoortplanting in een model van de aorta bestaande uit twee segmenten (links) en uit vier segmenten (rechts)



Figuur 3.6: Golfvoortplanting in een model van de aorta bestaande uit acht segmenten (links) en uit zestien segmenten (rechts)

Hoofdstuk 4

Conclusies en aanbevelingen

Uit de berekeningen van paragraaf 3.1 kan worden geconcludeerd dat golfvoortplanting en -reflectie door eenvoudige netwerkgeometriën goed worden beschreven door het ontwikkelde computermodel. Met het model kan ook de golfvoortplanting en -reflectie door ingewikkeldere netwerkgeometriën berekend worden. Uit de berekeningen beschreven in paragraaf 3.2 is zelfs duidelijk geworden dat het model gebruikt kan worden om continue veranderingen van eigenschappen van segmenten te beschrijven. Dit is vergeleken met de reeds aanwezige modellen waarin dit nog niet kon, een voordeel van dit model.

Tijdens deze stage is echter nog niet duidelijk geworden of het computermodel de golfvoortplanting en -reflectie door ingewikkelde netwerkgeometriën op een kwalitatief goede manier beschrijft. Aanbevolen wordt dan ook om berekeningen met het model aan ingewikkeldere netwerkgeometriën uit te voeren en deze te valideren.

Literatuur

Caro, C.G., Pedley, T.J., Schroter, R.C., Seed, W.A. (1978), *The mechanics of circulation*, Oxford University Press, Oxford.

Duan, B., Zamir, M. (1995), 'Pressure Peaking in Pulsatile Flow through Arterial Tree Structures', *Annals of Biomedical Engineering* 23, blz. 794-803.

Milnor, W.R. (1989), *Hemodynamics*, 2e editie, Williams and Wilkins, Baltimore.

Pedley, T.J. (1980), *The fluid mechanics of large blood vessels*, Cambridge University Press.

Vosse, F. v.d. (1995), aantekeningen bij het college Humane Stromingsleer, Technische Universiteit Eindhoven.

Womersley, J.R. (1957), *The mathematical analysis of the arterial circulation in a state of oscillatory motion*, Technical report wadc-tr-56-614, Wright Air Development Center.

Bijlage A

Computermodel

A.1 Programma

```
% voorbeeld: berekening van golfvoortplanting in buis met splitsing
clear;
clg;

% Input
lmax = 10;
Geo = [1 0
       1 0
       1 0
       1 0
       1 1
       1 2
       1 2
       1 2
       1 2];
P = [1;1;1;1;1;1;2;2;2;2;2];
a= 3d-3*[1 0
         1 0
         1 0
         1 0
         1 1
         1 1
         1 1
         1 1
         1 1
         1 1];
```

```

E = 4.5d5*[1 0
           1 0
           1 0
           1 0
           1 1
           1 1
           1 1
           1 1
           1 1];
h = 3d-4*[1 0
          1 0
          1 0
          1 0
          1 1
          1 1
          1 1
          1 1
          1 1];
L = [.1 0
     .1 0
     .1 0
     .1 0
     .1 0
     .1 .1
     .1 .1
     .1 .1
     .1 .1
     .1 .1];
leind=10;
peind=2;

p1=boom(Geo,P,a,E,h,L,lmax,leind,peind);

% Plot drukkolf
t=0:0.01:(2-0.01);
xz=1;
ze=L(xz);
z=[0;ze];
for xz=2:leind
    ze=ze+L(xz);
    z=[z;ze];

```

```

end
for nz=1:length(z)
    p1(nz,:)=0.2*p1(nz,:) + z(nz);
    txt(nz)='-';
end
subplot(121)
plot(t,real(p1));
xlabel('tijd t [s]');
ylabel('afstand z [m]');
title('a0:a1:a2=1:1:1');
grid;

```

A.2 Subroutine

```

function [p] = boom(Geo,P,a,E,h,L,lmax,leind,peind);

Ptot = 0;
for j=1:lmax
    Ptot=Ptot+P(j);
end

t=0:.01:(2-0.01);
nh = fix(length(t)/4);
omega=0:pi:(nh-1)*pi;
omega(1) = sqrt(eps);

eta = 3.5d-3;
rho = 1d3;
nu = eta/rho;
mu = 0.5;

% Berekenen golfgetal (k) en admittantie (Y) per segment
for l = 1:lmax
    for p = 1:P(l)
        D=2*a(l,p)*(1-mu*mu)/(h(l,p)*E(l,p));
        Do= ones (1,nh)*D;
        c0=sqrt(ones(1,nh)./(rho*Do));
        alpha = a(l,p)*sqrt(omega/nu);
        f10=womerf(alpha);
        [k1p,Y1p]=womerk(a(l,p), c0, f10, omega, Do);
        k=[k;k1p];
        Y=[Y;Y1p];
    end
end

```

```

        end
    end

    % Berekenen reflectie en transmissie coefficient (G en T) per overgang
    Ye=zeros(Ptot,nh);
    G=zeros(Ptot,nh);
    T=zeros(Ptot,nh);
    for l=lmax
        t1=0;
        for j= 1:(lmax-1)
            t1=P(l-j)+t1;
        end
        for p=1:P(l)
            G(t1+p,:)=zeros(1,nh);
            T(t1+p,:)=ones(1,nh);
            Ye(t1+p,:)=Y(t1+p,:);
        end
    end

    for h=1:(lmax-1)
        l=lmax-h;
        t1=0;
        for j=1:(l-1)
            t1=P(l-j)+t1;
        end

        th=t1+P(l);

        for p=1:P(l)
            Yke=0;
            for ke=1:P(l+1)
                if Geo(l+1,ke) == p
                    Yke=Yke+Ye(th+ke,:);
                end
            end
        end

        T(t1+p,:)=2.*Y(t1+p,:)./(Y(t1+p,:)+Yke);
        G(t1+p,:)=(Y(t1+p,:)-Yke)./(Y(t1+p,:)+Yke);
        Ye(t1+p,:)=Y(t1+p,:).* ...
            (exp(i*k(t1+p,:)*L(l,p))-G(t1+p,:).*exp(-i*k(t1+p,:)*L(l,p)))/ ...
            (exp(i*k(t1+p,:)*L(l,p))+G(t1+p,:).*exp(-i*k(t1+p,:)*L(l,p)));
    end
end

```



```

end

% Druk golf die wordt aangeboden aan het eerste segment
sigma=0.1;
pm= exp(-(t-0.25).*(t-0.25)/(sigma*sigma)) ...
    +exp(-(t-1.25).*(t-1.25)/(sigma*sigma));

% Overgangen langs route
pts=zeros(leind,1);
pts(leind,1)=peind;
for h=1:(leind-1)
    l=leind-h;
    pts(l,1)=Geo(l+1,pts(l+1,1));
end

z=zeros(leind,1);
LT=0;
for l=1:leind
    LT=LT+L(l,pts(l));
    z(l)=LT;
end

% Bereken druk golf in overgangen langs route in het frequentiedomein
p=ones(leind+1,length(t));

n=1;

l=1;
pd=fft(pm)/(2*nh);
pin=pd(1)*ones(1,length(t))/2;
ptot=pd(1)*ones(1,length(t))/2;
p(1,:)=ptot;
p(l+1,:)=pin;

for l=2:leind
    puit=pd(1)*ones(1,length(t))/2;
    pd=fft(puit)/(2*nh);
    pin=pd(1)*ones(1,length(t))/2;
    ptot=pd(1)*ones(1,length(t))/2;
    p(l,:)=ptot;
    p(l+1,:)=pin;
end

```

```

for n=2:nh

l=1;
th=0;
tl=pts(l)+th;
pd=fft(pm)/(2*nh);
ptot= pd(n)*(1+G(tl,n)*(exp(-2*i*k(tl,n)*L(l,pts(l)))))*(exp(i*omega(n)*t));
pin = pd(n)*(exp(-i*k(tl,n)*L(l,pts(l))))*(T(tl,n))*(exp(i*omega(n)*t));
p(l,:)=p(l,:)+ptot;

if leind > 1
l=2;
lv=1;
thv=0;
th=P(1)+th;
tl=pts(l)+th;
tv=pts(lv)+thv;
puit = pd(n)*((exp(-i*k(tv,n)*L(lv,pts(lv))))*(T(tv,n)))/ ...
        (1+G(tl,n)*(exp(-2*i*k(tl,n)*L(l,pts(l)))));
pd=puit;
ptot=pd*(1+G(tl,n)*(exp(-2*i*k(tl,n)*L(l,pts(l)))))*(exp(i*omega(n)*t));
pin =pd*(exp(-i*k(tl,n)*L(l,pts(l))))*(T(tl,n))*(exp(i*omega(n)*t));
p(l,:)=p(l,:)+ptot;

for l=3:leind
lv=l-1;
th=P(l-1)+th;
tl=pts(l)+th;           % tl positie van gegevens
                        % van overgang in matrices T,G etc.

thv=P(l-2)+thv;
tv=pts(lv)+thv;        % tv positie van gegevens
                        % van overgang in matrices T,G etc.
puit = pd*((exp(-i*k(tv,n)*L(lv,pts(lv))))*(T(tv,n)))/ ...
        (1+G(tl,n)*(exp(-2*i*k(tl,n)*L(l,pts(l)))));
pd=puit;
ptot=pd*(1+G(tl,n)*(exp(-2*i*k(tl,n)*L(l,pts(l)))))*(exp(i*omega(n)*t));
pin =pd*(exp(-i*k(tl,n)*L(l,pts(l))))*(T(tl,n))*(exp(i*omega(n)*t));
p(l,:)=p(l,:)+ptot;
end
p(l+1,:)=p(l+1,:)+pin;
end
end

```