Het Signorini probleem in de elastostatica

HET SIGNORINI PROBLEEM IN DE ELASTOSTATICA.

Frank Baaijens.
Eindhoven, 25-6-85.
WFW 85.037.

Het Signorini probleem in de elastostatica.

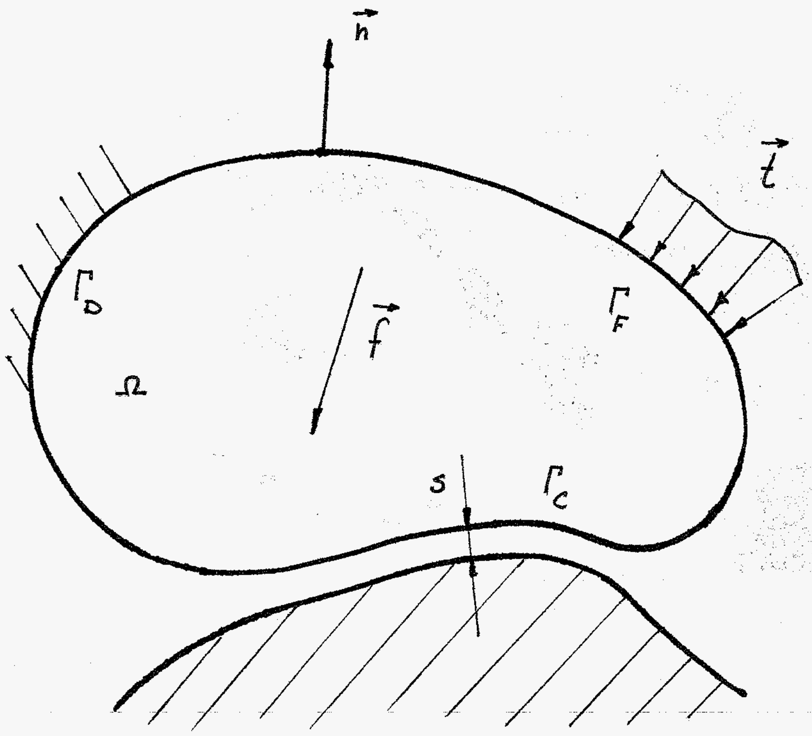
0 Inleiding.

We bekijken in dit rapport het probleem waarbij een lineair elastisch lichaam in kontakt kan komen met een starre ondersteuning. We beperken ons tot de geometrisch lineaire en wrijvingsloze situatie.

In hoofdstuk 1 wordt het probleem gedefinieerd. Dit wordt gedaan aan de hand van de evenwichts- en constitutieve vergelijkingen met randvoorwaarden. In hoofdstuk 2 wordt een variationele ongelijkheid afgeleid vanuit de evenwichtsvergelijkingen met randvoorwaarden die het Signorini probleem beschrijven. Tevens wordt bewezen dat deze ongelijkheid equivalent is met het probleem zoals in hoofdstuk 1 is gedefinieerd. Verder wordt er een uitspraak gedaan met betrekking tot de existentie en eenduidigheid van de oplossing. In het daarop volgende hoofdstuk blijkt dat het kontaktprobleem ook beschreven kan worden met behulp van een minimumprincipe. Het oplossen van de variationele ongelijkheid of van het minimaliseringsprobleem is, uit numeriek oogpunt, niet eenvoudig omdat de oplossing gezocht moet worden binnen een beperkte klasse van functies. Een veel gebruikte techniek om dit probleem te verhelpen, de introductie van een Lagrangiaan, wordt in hoofdstuk 4 besproken. Door de Lagrangiaan op een geschikte manier te verstoren kan de penaltyfunctie-methode worden afgeleid. Indien we een eindige elementenmethode benadering willen toepassen op basis van de penaltyfunctie-methode , dan blijkt dat we ons beperkingen moeten opleggen ten aanzien van de numerieke integratie van de penaltyterm. Het blijkt mogelijk om op theoretische gronden een criterium te formuleren waaraan de te kiezen integratieregel moet voldoen opdat de benaderende oplossing volgens de penaltyfunctie-methode convergeert naar de exacte oplossing. Dit wordt in hoofdstuk 5 bekeken. Een groot nadeel van de penaltyfunctie-methode is dat de stijfheidsmatrix vaak slecht geconditioneerd is. Binnen de optimaliseringswereld heeft men dit weten op te lossen door gebruik te maken van de z.g. geaugmenteerde Lagrangiaan. Deze combineert de effecten van de penaltyfunctie-methode en de klassieke Lagrange methode. In hoofdstuk 6 worden een tweetal werkwijzen besproken waarbij een geaugmenteerde Lagrangiaan wordt gebruikt. In hoofdstuk 7 wordt tenslotte de discretisatie van een aantal methoden besproken alsmede een aantal algorithmen en het z.g. LBB-criterium.

1 Probleemdefinitie.

We bekijken een lineair elastisch lichaam Ω met rand Γ, dat in kontakt kan komen met de fundering G. De eenheidsbuitennormaal op Γ wordt aangegeven met $\vec{n}$.



De rand Γ is in drie deelranden $-\Gamma_D$, Γ_F, Γ_C- verdeeld die elkaar niet overlappen. Langs de rand Γ_D is de verplaatsing $\vec{u}$ verhinderd. We veronderstellen dat hierdoor alle bewegingen van Ω als star lichaam zijn onderdrukt. Op Γ_F is de uitwendige belasting $\vec{t}$ voorgeschreven. De rand Γ_C vertegenwoordigt dat deel van Γ dat in kontakt <u>kan</u> komen met de starre fundering G. Verondersteld wordt dat er geen voorgeschreven uitwendige belasting werkt op Γ_C. Op Ω werkt een volumebelasting $\vec{f}$. We eisen dat $\vec{f} \in L_2(\Omega)$ en $\vec{t} \in L_2(\Gamma)$, waarbij $L_2(\Omega)$ resp. $L_2(\Gamma)$ de ruimte van kwadratisch Lebesgue integreerbare functies op Ω resp. Γ is.

Het hier omschreven probleem staat in de literatuur bekend als het Signorini probleem uit de elastostatica. De Cauchyspanningstensor σ moet voldoen aan de evenwichtsvergelijking

$$\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f} = \vec{0} \qquad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$

en de natuurlijke randvoorwaarde

$$\sigma.\vec{n} = \vec{t} \qquad \text{op } \Gamma_F \tag{1.2}$$

De kinematische randvoorwaarde leidt tot de eis dat de verplaatsingsvector $\vec{u}$ moet voldoen aan

$$\vec{u} = \vec{0} \qquad \text{op } \Gamma_D \tag{1.3}$$

De verplaatsing van punten op de rand Γ_C zijn beperkt door de aanwezigheid van de starre fundering G op geringe initiële afstand s. De eis dat er geen doordringing mag optreden formuleren we als

$$\vec{u}.\vec{n} - s \leq 0 \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{1.4}$$

Aan de toepasbaarheid van deze kontaktvoorwaarde zijn een aantal voorwaarden verbonden. Ten eerste moet worden geëist dat de verplaatsingen en rotaties voldoende klein zijn. Daarnaast moet het kontaktvlak voldoende glad zijn. Indien $\vec{u}.\vec{n} = s$ dan is er sprake van kontakt, terwijl er speling is tussen de fundering G en het lichaam Ω als $\vec{u}.\vec{n}-s < 0$. Voor de normaalspanning σ_n en de schuifspanning $\vec{\sigma}_T$ langs de rand geldt

$$\sigma_n = \sigma.\vec{n}.\vec{n}, \qquad \vec{\sigma}_T = \sigma.\vec{n} - \sigma_n\vec{n} \tag{1.5}$$

Indien er geen kontakt is moet σ_n op Γ_C gelijk zijn aan nul, terwijl σ_n bij kontakt niet positief mag zijn, dus

$$\sigma_n \leq 0 \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{1.6}$$

De eis dat de kontaktspanning alleen ongelijk aan nul kan zijn als er kontakt optreedt formuleren we als volgt

$$\sigma_n(u_n-s) = 0 \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{1.7}$$

Dat we de wrijvingsloze situatie bekijken komt tot uitdrukking in de eis dat de schuifspanning $\vec{\sigma}_T$ gelijk is aan nul

$$\vec{\sigma}_T = \vec{0} \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{1.8}$$

Als constitutieve relatie gebruiken we

$$\sigma = {}^4\mathbb{L}:\varepsilon(\vec{u}), \qquad \varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\,(\vec{\nabla}\vec{u} + (\vec{\nabla}\vec{u})^c) \tag{1.9}$$

In het vervolg noteren we $\varepsilon(\vec{u})$ als ε_u. Ten aanzien van de vierde orde materiaaltensor ${}^4\mathbb{L}$ stellen we de volgende eisen. Laat $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ een basis zijn in de drie dimensionale ruimte. Voor de matrix representatie van ${}^4\mathbb{L}$ t.o.v. deze basis geldt

$$L_{ijkl} = ({}^4\mathbb{L}:\vec{e}_l\vec{e}_k):\vec{e}_j\vec{e}_i \tag{1.10}$$

We eisen dat de absolute waarde van de componenten L_{ijkl} begrensd is

$$\exists\ M > 0 \quad \text{z.d.d.} \quad \max_{1\leq i,j,k,l\leq 3} |L_{ijkl}| \leq M \tag{1.11}$$

Verder eisen we dat ${}^4\mathbb{L}$ voldoet aan de volgende symmetrie eigenschappen

$$\mathbb{A}:{}^4\mathbb{L} = \mathbb{A}^c:{}^4\mathbb{L}; \quad {}^4\mathbb{L}:\mathbb{A} = \mathbb{A}:{}^4\mathbb{L}; \quad {}^4\mathbb{L}:\mathbb{A} = {}^4\mathbb{L}:\mathbb{A}^c \qquad \forall\ \mathbb{A} \tag{1.12}$$

alsmede dat

$$\exists\ m > 0 \quad \text{z.d.d.} \quad ({}^4\mathbb{L}:\mathbb{A}):\mathbb{A} \geq m\ \mathbb{A}:\mathbb{A} \qquad \forall\ \mathbb{A} \tag{1.13}$$

Bij lineair elastisch isotroop materiaalgedrag, waartoe we ons in dit rapport beperken, is aan al deze eisen voldaan. De vierde orde tensor ${}^4\mathbb{L}$ is in dat geval een een konstante tensor. Dit heeft ondermeer tot gevolg dat σ een lineaire functie is van $\vec{\nabla}\vec{u}$.

In dit hoofdstuk hebben we het klassieke Signoriniprobleem uit de elastostatica gedefinieerd. In het algemeen is het onmogelijk om een exacte oplossing te vinden. Daarom worden er in de hierna volgende hoofdstukken een aantal werkwijzen gepresenteerd waarmee een benaderingsoplossing kan worden gevonden. In de meeste gevallen leidt dit tot een formulering die, in zwakke zin, equivalent is met het Signoriniprobleem. (Wanneer we in het vervolg van equivalentie spreken bedoelen we vrijwel steeds equivalentie in de zwakke zin.) De niet-lineariteit van het Signoriniprobleem bestaat uit het onbekend zijn van dat deel van de rand Γ_C dat daadwerkelijk in kontakt is met het starre lichaam. Een belangrijk resultaat voor het vervolg blijkt de constatering te zijn dat het Signoriniprobleem als een minimaliseringsprobleem geschreven kan worden. Dit geeft aanleiding tot de toepassing van een aantal optimaliseringstechnieken, waarvor wordt verwezen naar Baaijens [1].

2 Variatieprincipe voor het Signoriniprobleem.

In dit hoofdstuk leiden we een variationele ongelijkheid af voor het Signoriniprobleem uit de elastostatica. Bij klassieke problemen uit de elastostatica kunnen we in het algemeen een variationele gelijkheid afleiden. De ongelijkheidsrandvoorwaarde op Γ_C geeft echter aanleiding tot een ongelijkheid in het variatieprincipe.
Overigens moet het begrip 'variatieprincipe' ruim worden geinterpreteerd. De hier gekozen werkwijze verloopt volkomen analoog aan die volgens de gewogen afwijkingen methode. Het verschil ligt in het feit dat we ons tot een bepaalde klasse van weegfuncties beperken.

In dit hoofdstuk zullen we bewijzen dat het Signorini probleem beschreven wordt door

vind $\vec{u} \in K$ z.d.d.

$$a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \geq f(\vec{v}-\vec{u}) \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{2.1}$$

De bilineaire vorm a(.,.) definieren we als

$$a(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \sigma(\vec{u}):\vec{\nabla}\vec{v}\ d\Omega = \int_\Omega ({}^4\mathbb{L}:\vec{\nabla}\vec{u}):\vec{\nabla}\vec{v}\ d\Omega \tag{2.2}$$

Merk op dat in het algemeen de Cauchyspanningstensor een niet-lineaire functie van $\vec{u}$ (en een aantal voorgeschiedenis grootheden) zal zijn. In dat geval zal a(.,.) geen bilineaire vorm zijn. De bilineairiteit is een direct gevolg van de beperking tot lineair elastisch materiaalgedrag die we ons hebben opgelegd.

De lineaire begrensde functionaal f definieren we als

$$f(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\ d\Omega + \int_{\Gamma_F} \vec{t}.\vec{v}\ d\Gamma \tag{2.3}$$

Omdat we volgens de geometrisch lineaire theorie werken vatten we alle integralen op t.o.v. de onbelaste maagdelijke configuratie. Ook de gradient operator $\vec{\nabla}$ kiezen we t.o.v. de oorsponkelijke configuratie.
De verzameling K definieren we als

$$\begin{aligned} K &= \text{deelverzameling van V bestaande uit alle toegelaten verplaatsingen} \\ &\quad \vec{v} \text{ die voldoen aan de randvoorwaarden op } \Gamma_D \text{ en } \Gamma_C, \\ &= \{\vec{v} \in V \mid \vec{v}.\vec{n} - s \leq 0 \text{ op } \Gamma_C\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

met

$$\begin{aligned} V &= \text{ruimte van alle verplaatsingen die voldoen aan de kinematische} \\ &\quad \text{randvoorwaarden op } \Gamma_D, \\ &= \{\vec{v} \in H^1(\Omega) \mid \vec{v} = \vec{0} \text{ op } \Gamma_D\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Op de ruimte V definieren we de norm

$$||\vec{v}|| = [\int_\Omega \vec{\nabla}\vec{v} : (\vec{\nabla}\vec{v})^c \, d\Omega]^{1/2} \tag{2.6}$$

Opdat $||.||$ inderdaad een norm is moet ondermeer gelden dat $||\vec{v}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$. Uit de bovenstaande definitie volgt direct $||\vec{v}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 0$ in Ω. We moeten dus laten zien dat $\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 0$ in Ω. Dit kunnen we alleen indien we Γ_D zodanig kiezen dat alle starre lichaamsbewegingen zijn onderdrukt. Verder is $H^1(\Omega)$ een Hilbert ruimte, meer precies: het is een Sobolev-ruimte van orde 1, ofwel

$$H^1(\Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in L_2(\Omega) \text{ en } (\vec{\nabla}\vec{v}).\vec{e}_i \in L_2(\Omega)\} \tag{2.7}$$

terwijl $L_2(\Omega)$, ruwweg, de ruimte van alle kwadratisch Lebesgue integreerbare functies is.

Er kan bewezen worden dat er een eenduidige oplossing voor $\vec{u}$ van (2.1) bestaat indien voldaan wordt aan de volgende eisen (Lions [1])

(i) $a(\vec{u},\vec{v})$ is begrensd, d.w.z.

$$\exists\ M > 0 \quad \text{z.d.d.} \quad a(\vec{u},\vec{v}) \leq M\ ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \qquad \forall\ \vec{u},\ \vec{v} \in K \tag{2.8}$$

en is coersief, d.w.z.

$$\exists\ m > 0 \quad \text{z.d.d.} \quad a(\vec{v},\vec{v}) \geq m\ ||\vec{v}||^2 \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{2.9}$$

(ii) K is convex, d.w.z als $\vec{u}$, $\vec{v} \in K$, dan

$$(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}) \in K \qquad \forall\ \theta \in (0,1) \tag{2.10}$$

In een twee-dimensionale ruimte kunnen we de laatste eis als volgt interpreteren. Beschouw twee willekeurige elementen $\vec{u}$ en $\vec{v}$ van K. Als K een convex gebied is dan moeten alle punten op de verbindingslijn van $\vec{u}$ naar $\vec{v}$ ook in K liggen. M.a.w. vanuit ieder willekeurig punt $u \in K$ moet ieder ander punt $v \in K$ 'zichtbaar' zijn.

Dat de verzameling K convex is kunnen we als volgt inzien. Er geldt $\vec{u} \in K$ $\Leftrightarrow$ $[\vec{u} \in V \wedge u_n - s \leq 0$ op $\Gamma_C]$. Voor alle $\theta \geq 0$ volgt uit $\vec{u} \in K$ dat $(\theta\vec{u}) \in V$ en $\theta u_n - \theta s \leq 0$ op Γ_C. Op dezelfde manier volgt uit $\vec{v} \in K$ en $\theta \leq 1$ dat moet gelden $(1-\theta)\vec{v} \in V$ en $(1-\theta)v_n - (1-\theta)s \leq 0$ op Γ_C. Omdat V convex is volgt $[\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}] \in V$ terwijl bovendien geldt $\theta u_n - \theta s + (1-\theta)v_n - (1-\theta)s \leq 0$ op Γ_C voor alle $\theta \in [0,1]$. Dit betekent dat $\theta u_n + (1-\theta)v_n - s \leq 0$ op Γ_C voor alle $\theta \in$

alle $\theta \in [0,1]$. Dit betekent dat $\theta u_n+(1-\theta)v_n-s \leq 0$ op Γ_C voor alle $\theta \in [0,1]$ en met $\theta\vec{u}+(1-\theta)\vec{v} \in V$ voor alle $\theta \in [0,1]$ volgt dat K inderdaad convex is.

We zullen nu laten zien dat de variationele ongelijkheid equivalent is met het kontaktprobleem zoals dit in hoofdstuk 1 is gedefinieerd. Dit doen we in twee stappen: (A) we laten zien dat uit het Signoriniprobleem de ongelijkheid (2.1) volgt en (B) we tonen dat uit (2.1) het Signoriniprobleem volgt.

(A) Kies een willekeurige weegfunctie $\vec{w} \in H^1(\Omega)$, dan geldt op basis van $(\vec{\nabla}.\sigma).\vec{w} = \vec{\nabla}.(\sigma.\vec{w}) - \sigma:(\vec{\nabla}\vec{w})^C$

$$\int_\Omega (\vec{\nabla}.\sigma).\vec{w}\, d\Omega = \int_\Omega \vec{\nabla}.(\sigma.\vec{w})\, d\Omega - \int_\Omega \sigma:(\vec{\nabla}.\vec{w})^C\, d\Omega \qquad \forall\, \vec{w} \in H^1(\Omega) \qquad (2.11)$$

Toepassen van de stelling van Gauss levert

$$\int_\Omega \sigma:(\vec{\nabla}.\vec{w})^C\, d\Omega = \int_\Gamma (\sigma.\vec{n}).\vec{w}\, d\Gamma - \int_\Omega (\vec{\nabla}.\sigma).\vec{w}\, d\Omega \qquad \forall\, \vec{w} \in H^1(\Omega) \qquad (2.12)$$

Op basis van evenwicht weten we dat $\vec{\nabla}.\sigma = -\vec{f}$, dus

$$\int_\Omega \sigma:(\vec{\nabla}.\vec{w})^C\, d\Omega = \int_\Gamma (\sigma.\vec{n}).\vec{w}\, d\Gamma + \int_\Omega \vec{f}.\vec{w}\, d\Omega \qquad \forall\, \vec{w} \in H^1(\Omega) \qquad (2.13)$$

Beperk de keuze van $\vec{w}$ tot $\vec{w} = \vec{v}-\vec{u}$ met $\vec{v}$, $\vec{u} \in K$, waarbij $\vec{u}$ de gewenste oplossing is. We weten dat $\vec{v} = \vec{u} = \vec{0}$ op Γ_D en dat $\sigma.\vec{n} = \vec{t}$ op Γ_F, zodat

$$\int_\Omega \sigma:(\varepsilon_v-\varepsilon_u)\, d\Omega = \int_\Omega \vec{f}.(\vec{v}-\vec{u})\, d\Omega + \int_{\Gamma_F} \vec{t}.(\vec{v}-\vec{u})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}).(\vec{v}-\vec{u})\, d\Gamma \qquad \forall\, \vec{v} \in K \qquad (2.14)$$

Omdat $\vec{\sigma}_T = \vec{0}$ op Γ_C kunnen we schrijven $(\sigma.\vec{n}).(\vec{v}-\vec{u}) = \sigma_n(v_n-u_n)$. Er geldt op basis van (1.5), $\sigma_n \leq 0$ op Γ_C en met $\vec{v} \in K$

$$\sigma_n(v_n-u_n) = \sigma_n(v_n-s-(u_n-s))$$

$$= \sigma_n(v_n - s)$$

$$\geq 0 \tag{2.15}$$

Merk op dat we dankzij de keuze $\vec{w} = \vec{v}-\vec{u}$ in staat zijn een afschatting te geven voor $\sigma_n w_n = \sigma_n(v_n-u_n)$. In het algemeen kunnen we namelijk geen uitspraak doen over $\sigma_n w_n$ voor alle $\vec{w} \in H^1(\Omega)$. Het nut van de gedane keuze wordt nog duidelijker in deel B van dit equivalentiebewijs.
Daarmee volgt uit (2.14)

$$a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \geq f(\vec{v}-\vec{u}) \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{2.16}$$

(B) Maak gebruik van $\sigma:(\vec{\nabla}(\vec{v}-\vec{u}))^c = \vec{\nabla}.(\sigma.(\vec{v}-\vec{u})) - (\vec{\nabla}.\sigma).(\vec{v}-\vec{u})$ en de stelling van Gauss om relatie (2.1) te herschrijven tot

$$-\int_\Omega (\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f}).(\vec{v}-\vec{u})\ d\Omega + \int_{\Gamma_F} (\sigma.\vec{n}-\vec{t}).(\vec{v}-\vec{u})\ d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}).(\vec{v}-\vec{u})\ d\Gamma \geq 0 \tag{2.17}$$

Kies $\vec{v} = \vec{u}$ op Γ_C, dan volgt uit (2.17) op eenvoudige wijze

$$\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f} = \vec{0} \qquad \text{in } \Omega \tag{2.18}$$

$$\sigma.\vec{n} = \vec{t} \qquad \text{op } \Gamma_F \tag{2.19}$$

Hiermee resteert

$$\int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}).(\vec{v}-\vec{u})\ d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{2.20}$$

Kies $\vec{v}$ z.d.d. $\vec{v}.\vec{n} = 0$ op Γ_C dan volgt uit (2.20) direct dat $\vec{\sigma}_T = \vec{0}$ op Γ_C.
Daarmee kunnen we (2.20) schrijven als

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n(v_n-u_n)\ d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \sigma_n[(v_n-s)-(u_n-s)]\ d\Gamma \geq 0 \tag{2.21}$$

We kunnen v_n-s echter zodanig kiezen dat $v_n - s - (u_n - s) = (v_n - u_n) \leq 0$ overal op Γ_C. Dan blijkt uit (2.21) onmiddellijk dat $\sigma_n \leq 0$.
Kies vervolgens $v_n = s$ en $v_n = 2u_n - s$ op Γ_C, dan volgt

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n (u_n - s) \, d\Gamma = 0 \tag{2.22}$$

Omdat $\sigma_n \leq 0$ en $u_n - s \leq 0$, geldt

$$\sigma_n (u_n - s) = 0 \tag{2.23}$$

hetgeen precies de kontaktconditie is op Γ_C.
Hadden we in onderdeel A van dit bewijs niet de keuze $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ gedaan dan waren we niet in staat geweest eenduidig de kontaktvoorwaarden op Γ_C af te leiden uit het variatieprincipe.

Het in dit hoofdstuk geformuleerde variatieprincipe is slecht bruikbaar voor het genereren van een benaderingsoplossing. Dat komt omdat we de oplossing $\vec{u}$ binnen de verzameling K moeten kiezen. Met name de eis $u_n - s \leq 0$ is numeriek gezien lastig. In het volgende hoofdstuk blijkt echter dat het Signoriniprobleem ook als een minimaliseringsprobleem geschreven kan worden. Dit geeft aanleiding tot het toepassen van een aantal optimaliseringstechnieken voor het minimaliseren van een functionaal onder ongelijkheidsnevenvoorwaarden.

<u>Bibliografie.</u> De variationele ongelijkheid (1.9) is representatief voor een veel grotere klasse van problemen die bestudeerd is door Lions en Stampacchia [1]. De criteria voor eenduidigheid en existentie van de oplossing worden ondermeer gegeven door Oden en Kikuchi [1]. Anderen die gebruik maken van de variationele ongelijkheid (1.9) zijn bijv. Panagiotopoulos [1,2] en Kalker [1].

3 Minimaliseringsprobleem

Ondanks het feit dat het Signorini probleem niet lineair is (onbekend kontaktoppervlak) kan het geformuleerd worden door middel van een minimaliseringsprobleem (zie ondermeer Oden en Kikuchi [1] en P.D. Panagiotopoulos [1,2]). Laat de functionaal F: $V \to R$ gedefinieerd zijn door

$$F(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v},\vec{v}) - f(\vec{v}) \qquad \forall\ \vec{v} \in V \tag{3.1}$$

dan zoeken we $\vec{u} \in K$ z.d.d.

$$F(\vec{u}) \leq F(\vec{v}) \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{3.2}$$

Merk op dat we een globaal minimum zoeken. Er bestaat een unieke oplossing $\vec{u}$ voor (3.2) indien voldaan is aan (zie Cuvelier [1], p.20-22 of Lions [1], p.6-8)

M1: K is convex. (3.3)

M2: F is een strikt convexe functionaal , d.w.z. als $\vec{u} \neq \vec{v}$ en $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ dan

$$F(\theta\vec{u} + (1-\theta)\vec{v}) < \theta F(\vec{u}) + (1-\theta)F(\vec{v}) \qquad \forall\ \theta \in (0,1) \tag{3.4}$$

M3: F is coersief, d.w.z. voor $\vec{v} \in K$ geldt

$$\exists\ m > 0 \ \text{ z.d.d. } \ F(\vec{v}) \geq m\ ||\vec{v}||^2 \qquad \forall\ \vec{v} \in K \tag{3.5}$$

We zullen laten zien dat (3.2) equivalent is met (2.1). Daartoe bestuderen we eerst de functionaal F: $V \to R$ nader. Er geldt

$$F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) = \frac{1}{2} a(\vec{u},\vec{u}) + \theta a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) + \frac{\theta^2}{2} a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{u}) - \theta f(\vec{v}-\vec{u})$$

$$= \theta[a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u})] + F(\vec{u}) + \frac{\theta^2}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{3.6}$$

Dit resultaat gebruiken we bij de uitwerking van

$$F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u}) = \theta[a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u})] + \frac{\theta^2}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{3.7}$$

voor alle $\vec{u},\vec{v} \in V$ (dus ook alle $\vec{u},\vec{v} \in K$) en $\theta \in [0,1]$. Delen door θ levert

$$\frac{1}{\theta}\,[F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u})] = a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u}) + \frac{\theta}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{3.8}$$

voor alle $\vec{u},\vec{v} \in V$ en $\theta \in (0,1]$ (let op: $\theta \neq 0$).

De equivalentie van (3.2) met (2.1) volgt dan uit

(a) Indien $a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u})-f(\vec{v}-\vec{u}) \geq 0$ voor alle $\vec{v} \in K$ dan volgt met $\theta = 1$ onmiddellijk dat $F(\vec{v})-F(\vec{u}) \geq 0$ voor alle $\vec{v} \in K$.

(b) Als gegeven is dat $F(\vec{w})-F(\vec{u}) \geq 0$ voor alle $\vec{w} \in K$ dan volgt met $\vec{w} = \vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})$ direct dat voor alle $\theta \in (0,1]$ en alle $\vec{v} \in K$ zal gelden

$$a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u}) = \lim_{\theta \to 0} \frac{F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u})}{\theta} \geq 0 \tag{3.9}$$

Q.E.D.

Omdat (2.1) equivalent is met (3.2) moet voor het verkrijgen van een eenduidige oplossing voor (3.2) dezelfde eisen worden gesteld als bij (2.1). Er moet dus gelden dat de eisen M1, M2 en M3 equivalent zijn met de eisen (i) en (ii) uit hoofdstuk 2. De eis M1 is dezelfde als (ii). Dat F strikt convex is kan als volgt worden ingezien. Kies $\theta = 1$ in (3.8)

$$F(\vec{v}) - F(\vec{u}) = a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u}) + \frac{1}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{3.10}$$

Waaruit met (3.6) volgt

$$F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u}) = \theta[F(\vec{v}) - F(\vec{u})] - \frac{\theta(1-\theta)}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{3.11}$$

voor alle $\vec{u},\vec{v} \in V$ en $\theta \in [0,1]$. Vanwege de coersiviteit van de bilineaire vorm a(.,.) mogen we concluderen dat

$$F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u}) < \theta[F(\vec{v}) - F(\vec{u})] \quad \text{als } \vec{v} \neq \vec{u} \tag{3.12}$$

dus is $F: V \to R$ strikt convex. De coersiviteit van F volgt direct uit

$$F(\vec{v}) = \frac{1}{2}\, a(\vec{v},\vec{v}) - f(\vec{v}) \geq m||\vec{v}||^2 - c||\vec{v}|| \to \infty \quad \text{als } ||\vec{v}|| \to \infty \tag{3.13}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de coersive eigenschap van a(.,.) alsmede het feit dat $f: V \to R$ een begrensde lineaire functionaal op V is, d.w.z. er bestaat een $c > 0$ z.d.d. $f(\vec{v}) \leq c||\vec{v}||$ voor alle $\vec{v} \in V$.

4 Lagrange multiplicatoren.

In het voorgaande hebben we laten zien dat het Signorini probleem beschreven kan worden met behulp van een minimalisingsprincipe. Een probleem bij het numeriek oplossen is dat de oplossing binnen een beperkte klasse van functies gezocht moet worden. Meer precies, we hebben een minimaliseringsprobleem met ongelijkheden als beperking. In principe bestaan er mathematische algorithmen om dit probleem op te lossen. Deze zijn echter niet erg efficient indien het aantal onbekenden relatief groot is. Daarom heeft men gezocht naar optimaliseringsmethoden die ongelijkheden eenvoudig in rekening brengen. Een methode wordt in deze paragraaf besproken: de Lagrange multiplicatoren methode. Deze werkwijze wordt bijvoorbeeld toegepast bij de programmapakketten MARC en ABAQUS. Theoretische beschouwingen worden gegeven in Oden en Kikuchi [1], Kikuchi en Skalski [1] en Kikuchi en Song [1,2]. Brezzi, Hager en Raviart [1] bekijken het gebruik van Lagrange multiplicatoren in een wat algemenere context.

Als uitgangspunt voor de klassieke Lagrange multiplicatoren methode dient de Lagrangiaan $L: V \times M \to R$. Deze ontstaat door aan de functionaal $F: V \to R$ gedefinieerd door (3.1) de kontaktvoorwaarde met een multiplicator toe te voegen

$$L: V \times M \to R; \quad L(\vec{v},q) = F(\vec{v}) - \langle q, v_n - s \rangle \tag{4.1}$$

Hierin wordt de verzameling M en de bilineaire vorm $\langle .,. \rangle$ gegeven door

$$M = \{q \in H^{1/2}(\Gamma_C) \mid q \leq 0\} \tag{4.2}$$

$$\langle q, v_n - s \rangle = \int_{\Gamma_C} q(v_n - s)\, d\Gamma \tag{4.3}$$

Voor de definitie van $H^{1/2}(\Gamma_C)$ zie Oden [1]. Gezocht wordt naar het zadelpunt $(\vec{u},p) \in V \times M$ dat voldoet aan

$$L(\vec{u},q) \leq L(\vec{u},p) \leq L(\vec{v},p) \qquad \forall\, q \in M, \quad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.4}$$

Vanwege de convexe eigenschappen van F(.) en K kunnen een globaal zadelpunt zoeken. We zullen hierna eerst aantonen dat dit zadelpunt gevonden wordt door

vind $\vec{u} \in V$ en $p \in M$ z.d.d.

$$a(\vec{u},\vec{v}) - f(\vec{v}) - \langle p,v_n\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.5}$$

$$\langle q-p,u_n-s\rangle \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{4.6}$$

en zullen daarna laten zien dat dit equivalent is met het Signorini probleem. Merk op dat het zadelpunt van L(.,.) een variotionele ongelijkheid oplevert. Dit komt omdat we q (en ook p) zodanig moeten kiezen dat q (en p) ≤ 0.
We zullen eerst enkele eigenschappen van L onderzoeken. Voor alle $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ en alle $\theta \in [0,1]$ geldt

$$L(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u}),q) - L(\vec{u},q) = F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u}) - \theta\langle q,v_n-u_n\rangle \tag{4.9}$$

De keuze $\theta=1$ leidt tot een relatie voor $\langle q,v_n-u_n\rangle$. Na substitutie in (4.9) volgt vanwege de convexiteit van F dat

$$L(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u}),q) - L(\vec{u},q) - \theta[L(\vec{v},q) - L(\vec{u},q)] =$$

$$= F(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u})) - F(\vec{u}) - \theta[F(\vec{v}) - F(\vec{u})] < 0 \tag{4.10}$$

voor alle $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ z.d.d. $\vec{u} \neq \vec{v}$ en alle $\theta \in (0,1)$. Hieruit volgt dat L(.,.) (strikt) convex is met betrekking tot $\vec{v}$. Door substitutie van (3.7) in (4.9) blijkt tevens dat

$$L(\vec{u}+\theta(\vec{v}-\vec{u}),q) - L(\vec{u},q) = \theta[a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u}) - \langle q,v_n-u_n\rangle] + \\ + \frac{\theta^2}{2}\, a(\vec{v}-\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) \tag{4.11}$$

voor alle $\vec{v},\vec{u} \in V$ en alle $\theta \in [0,1]$.

Omdat $p+\theta(q-p) \in M$ voor alle $\theta \in [0,1]$ als $p, q \in M$ volgt uit de definitie van $L(.,.)$ onmiddellijk

$$L(\vec{u},p+\theta(q-p)) - L(\vec{u},p) = -\theta\langle q-p,u_n-s\rangle \tag{4.12}$$

Na de keuze θ=1 en substitutie van het resultaat in (4.12) ontstaat

$$L(\vec{u},p+\theta(q-p)) - L(\vec{u},p) - \theta[L(\vec{u},q) - L(\vec{u},p)] = 0 \tag{4.13}$$

zodat $L(.,.)$ concaaf is m.b.t. het tweede argument q.
De convexiteit resp. concaviteit van $L(.,.)$ t.a.v. $\vec{v}$ resp. q heeft tot gevolg dat als er een minimum t.a.v. $\vec{v}$ resp. een maximum t.a.v. q van $L(.,.)$ wordt gevonden dat dit dan een globaal minimum resp. maximum is.

Op basis van bovenstaande eigenschappen kunnen we eenvoudig verifieren dat de eis $L(\vec{u},p) \leq L(\vec{v},p)$ voor alle $\vec{u},\vec{v} \in V$ en alle $p \in M$ equivalent is met

$$a(\vec{u},\vec{v}) - f(\vec{v}) - \langle p,v_n\rangle = 0 \tag{4.14}$$

Immers,

(i) veronderstel dat (4.14) geldt. Kies θ =1 in (4.11) dan volgt

$$L(\vec{v},p) - L(\vec{u},p) = \frac{1}{2}\, a(\vec{v},\vec{v}) \geq 0 \tag{4.15}$$

(ii) Veronderstel dat $L(\vec{v},p)-L(\vec{u},p) \geq 0$. Deel (4.11) door θ en neem de limiet $\theta \to 0$

$$a(\vec{u},\vec{v}-\vec{u}) - f(\vec{v}-\vec{u}) - \langle p,v_n-u_n\rangle \geq 0 \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.16}$$

Kies $\vec{v} = 2\vec{u}-\vec{w}$ dan

$$a(\vec{u},\vec{w}-\vec{u}) - f(\vec{w}-\vec{u}) - \langle p,w_n-u_n\rangle \leq 0 \qquad \forall\, \vec{w} \in V \tag{4.17}$$

De ongelijkheden (4.16) en (4.17) kunnen alleen geldig zijn indien

$$a(\vec{u},\vec{w}-\vec{u}) - f(\vec{w}-\vec{u}) - \langle p,w_n-u_n\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec{w} \in V \tag{4.18}$$

Kies $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ dan

$$a(\vec{u},\vec{v}) - f(\vec{v}) - \langle p,v_n\rangle = 0 \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.19}$$

Kies $\theta = 1$ in (4.12) dan blijkt direct dat de eis $L(\vec{u},q) \leq L(\vec{u},p)$ voor alle $q \in M$ equivalent is met $\langle q-p,u_n-s\rangle \geq 0$ voor alle $q \in M$. Q.E.D.

We laten vervolgens zien dat het Lagrange multiplatoren probleem equivalent is met het in hoofdstuk 1 gedefinieerde Signoriniprobleem. We zullen dit nagaan door uit deze relaties de evenwichtsvergelijkingen en randvoorwaarden te destilleren. Kies als uitgangspunt relatie (4.5). Uit de definities van $a(.,.)$ en $\langle .,.\rangle$ volgt

$$\int_\Omega \sigma(\vec{u}):(\vec{\nabla}\vec{v})^c \, d\Omega = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_F} \vec{t}.\vec{v}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} p\, v_n \, d\Gamma \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.20}$$

De eerste integraal kan worden omgewerkt door gebruik te maken van $\vec{\nabla}.(\sigma.\vec{v}) = (\vec{\nabla}.\sigma).\vec{v} + \sigma:(\vec{\nabla}\vec{v})^c$ en op de term $\vec{\nabla}.(\sigma.\vec{v})$ de stelling van Gauss toe te passen. Omdat $\vec{v} \in V$ en $\vec{v} = \vec{0}$ op Γ_D volgt

$$\int_\Omega -(\vec{\nabla}.\sigma+\vec{f}).\vec{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_F} (\sigma.\vec{n}-\vec{t}).\vec{v}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}-p\vec{n}).\vec{v}\, d\Gamma = 0 \quad \forall\, \vec{v} \in V \tag{4.21}$$

waaruit onmiddellijk blijkt

$$\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f} = \vec{0} \qquad \text{in } \Omega \tag{4.22}$$

$$\sigma.\vec{n} = \vec{t} \qquad \text{op } \Gamma_F \tag{4.23}$$

$$\sigma.\vec{n}.\vec{n} = p \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{4.24}$$

$$\vec{\sigma}_T = \vec{0} \qquad \text{op } \Gamma_C \tag{4.25}$$

waaruit blijkt dat de Lagrange multiplicator p geidentificeerd kan worden met de normaalspanning σ_n op de rand Γ_C. Tevens blijkt dat de schuifspanning langs de rand Γ_C gelijk is aan nul.

De kontaktcondities volgen uit (4.6)

$$\int_{\Gamma_C} (q-p)(u_n-s)\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{4.26}$$

Kies $q = p + z$ met $z \leq 0$, dan

$$\int_{\Gamma_C} z(u_n-s)\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\, z \in M \tag{4.27}$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $u_n-s \leq 0$. Kies vervolgens $q = 2p$ en $q = 0$ in (4.26) dan blijkt direct

$$\int_{\Gamma_C} p(u_n-s)\, d\Gamma = 0 \tag{4.28}$$

terwijl $u_n-s \leq 0$ en $p \leq 0$ dus volgt uit het bovenstaande dat

$$p(u_n-s) = 0 \tag{4.29}$$

Tesamen met de identificatie van p ($p = \sigma_n$ op Γ_C), de eis dat $p \leq 0$ en de conclusie dat $u_n-s \leq 0$ levert (4.29) de kontaktconditie op Γ_C. Q.E.D.

Het afleiden van (4.5) uit de evenwichtsvergelijking en de randvoorwaarden is na identificatie van de normaalspanning met p eenvoudig. We beperken ons hier tot het afleiden van de ongelijkheid (4.6) uit de kontaktcondities. Indien gegeven is dat

$$\sigma_n(u_n-s) = 0,\ \sigma_n \leq 0 \text{ en } u_n-s \leq 0 \text{ op } \Gamma_C \tag{4.30}$$

dan kunnen we schrijven

$$\int_{\Gamma_C} q(u_n-s)\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{4.31}$$

Omdat $\sigma_n = p$ en $\sigma_n(u_n-s) = 0$ volgt hieruit direct dat

$$\int_{\Gamma_C} (q-p)(u_n-s)\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{4.32}$$

Waarmee we hebben bewezen dat het Lagrange multiplicatoren probleem equivalent is met het kontaktprobleem zoals dat in hoofdstuk 1 is gedefinieerd.
Q.E.D.

Volgens Brezzi, Hager en Raviart [1] bestaat er een unieke oplossing voor (4.5)-(4.6) als er een constante $\beta > 0$ bestaat z.d.d.

$$\inf_{q\in M} \sup_{\vec{v}\in V} \frac{\langle q, v_n - s\rangle}{||q||_M ||\vec{v}||_V} \geq \beta, \qquad ||q||_M,\ ||\vec{v}||_V \neq 0 \tag{4.33}$$

met

$$||q||_M = [\int_{\Gamma_C} q^2\, d\Gamma]^{1/2}$$

De variationele ongelijkheid (4.6) is numeriek gezien lastig. Er is echter een eenvoudige uitspraak te doen t.a.v. de Lagrange multiplicator p. Daartoe merken we ten bate van een oplosalgorithme op dat de ongelijkheid (4.6)

$$(q-p, u_n-s\rangle \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{4.34}$$

equivalent is met

$$p = \min(0, p-\varrho(u_n-s)) \quad \forall\, \varrho \geq 0 \ \text{ op } \Gamma_C \tag{4.35}$$

In het voorgaande hebben we bewezen dat (4.34) equivalent is met de kontaktcondities op Γ_C. Door de equivalentie tussen (4.35) en de kontaktcondities te bewijzen verifieren de bovenstaande bewering. In plaats van (4.35) kunnen we schrijven

$$p = 0 \ \text{ als } p-\varrho(u_n-s) \geq 0 \quad \forall\, \varrho \geq 0 \tag{4.36}$$

$$p = p-\varrho(u_n-s) \leq 0 \ \text{ als } p-\varrho(u_n-s) \leq 0 \quad \forall\, \varrho \geq 0 \tag{4.37}$$

Uit (4.36) volgt onmiddellijk dat $u_n-s \leq 0$ op Γ_C als $p = 0$, terwijl uit (4.37) blijkt dat

$$\text{als } p < 0 \text{ dan } u_n-s = 0 \tag{4.38}$$

Dus

$$p(u_n-s) = 0, \quad u_n-s \leq 0, \quad p \leq 0 \tag{4.39}$$

Indien (4.39) geldig is volgt direct (4.35). Bekijk daartoe de situatie u_n-s < 0 dan moet p = 0 en inderdaad volgt dan

$$p = \min(0, p-\varrho(u_n-s)) = 0 \quad \forall\, \varrho > 0 \tag{4.40}$$

Evenzo moet $p \leq 0$ als $u_n-s = 0$ dus

$$p = \min(0,p) = \min(0, p-\varrho(u_n-s)) \leq 0 \quad \forall\, \varrho > 0 \tag{4.41}$$

5 Verstoorde Lagrangiaan, penaltyfunctie-methode.

Een gebruikelijke manier om de penalty functie methode te introduceren is door aan de functionaal F(.) een, in de nevenvoorwaarde, kwadratische term vermenigvuldigd met een penalty factor toe te voegen. Hierop komen we later summier terug. Omdat er een nauw verband bestaat tussen de penalty functie methode en de Lagrange multiplicator methode volgen we hier een andere weg. Een elegante manier om de penalty functie methode af te leiden is uit te gaan van de verstoorde Lagrangiaan $L_\varepsilon(\vec{v},q)$, die gedefinieerd is door

$$L_p(\vec{v},q) = L(\vec{v},q) - \frac{1}{2}\varepsilon(q,q)_M, \quad \varepsilon > 0, \quad \forall\, \vec{v} \in V, \quad \forall\, q \in M \tag{5.1}$$

waarbij $(.,.)_M$ het inwendige product is op M

$$(q,q)_M = \int_{\Gamma_C} q^2 \, d\Gamma \qquad \forall\, q \in M \tag{5.2}$$

Evenals in het voorgaande zoeken we het zadelpunt $(\vec{u}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V\times M$ dat voldoet aan

$$L_p(\vec{u}_\varepsilon,q) \le L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon) \le L_p(\vec{v},p_\varepsilon) \qquad \forall\, q \in M, \quad \forall\, \vec{v} \in V \tag{5.3}$$

We kunnen vrij eenvoudig aantonen dat de eisen in (5.3) equivalent zijn met

vind $\vec{u}_\varepsilon \in V$ en $p \in M$ z.d.d.

$$a(\vec{u}_\varepsilon,\vec{v}) - \langle p_\varepsilon, v_n\rangle = f(\vec{v}) \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{5.4}$$

$$\langle q-p_\varepsilon, \varepsilon p_\varepsilon + u_{\varepsilon n} - s\rangle \ge 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{5.5}$$

We zullen eerst een aantal eigenschappen van $L_p(.,.)$ onderzoeken. Dat $L_p(.,.)$ convex is ten aanzien van het eerste argument kan op precies dezelfde manier worden bewezen als voor de Lagrangiaan L(.,.). De concaviteit van $L_p(.,.)$ ten aanzien van het tweede argument volgt uit

$$L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon+\theta(q-p_\varepsilon))-L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon) = -\theta\langle q-p_\varepsilon,u_{\varepsilon n}-s\rangle - \frac{1}{2}\,\varepsilon\theta^2(q-p_\varepsilon,q-p_\varepsilon)_M +$$

$$-\varepsilon\theta(p_\varepsilon,q_\varepsilon-p_\varepsilon)_M$$

$$= -\theta\langle q-p_\varepsilon,\varepsilon p_\varepsilon+u_{\varepsilon n}-s\rangle - \frac{1}{2}\,\varepsilon\theta^2(q-p_\varepsilon,q-p_\varepsilon)_M \qquad (5.6)$$

voor alle $q \in M$ en alle $\theta \in [0,1]$. Door in de bovenstaande vergelijking $\theta = 1$ te kiezen volgt onmiddellijk

$$L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon+\theta(q-p_\varepsilon))-L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon) - \theta[L_p(\vec{u}_\varepsilon,q)-L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)] = 0 \qquad (5.7)$$

zodat $L_p(.,.)$ inderdaad concaaf is m.b.t. tot het tweede argument.

Het bewijs dat $L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon) \leq L_p(\vec{v},p_\varepsilon)$ voor alle $\vec{v} \in V$ equivalent is met (5.4) is volkomen analoog aan hetgeen t.a.v. $L(.,.)$ is bewezen in hoofdstuk 4. We beperken ons hier dan ook tot de equivalentie tussen (5.5) en $L_p(\vec{u}_\varepsilon,q) \leq L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$ voor alle $q \in M$. Veronderstel dat deze laatste ongelijkheid geldig is. Deel (5.6) door θ en neem de limiet $\theta\downarrow 0$, dan volgt direct

$$\langle q-p_\varepsilon,\varepsilon p_\varepsilon+u_{\varepsilon n}-s\rangle \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \qquad (5.8)$$

Het tweede deel van dit equivalentie bewijs maakt direct gebruik van dit resultaat. Substitueer (5.8) in (5.6) en kies $\theta = 1$

$$L_p(\vec{u}_\varepsilon,q)-L_p(\vec{u}_\varepsilon,p_\varepsilon) \leq 0 \qquad \forall\, q \in M \qquad (5.9)$$

Uit (5.5) kan p_ε worden geëlimineerd. Uitschrijven van (5.5) levert

$$\int_{\Gamma_C} (q-p_\varepsilon)\,(\varepsilon p_\varepsilon+u_{\varepsilon n}-s)\,d\Gamma \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \qquad (5.10)$$

We laten zien dat

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\,(u_{\varepsilon n}-s)^+ \qquad (5.11)$$

met $\varphi^+ = \max(0,\varphi)$, noodzakelijk en voldoende is om aan (5.10) te voldoen. Bekijk daartoe (5.10) nader. Voer ter afkorting p en a in

$$p = p_\varepsilon; \qquad a = \frac{u_{\varepsilon n} - s}{\varepsilon} \tag{5.12}$$

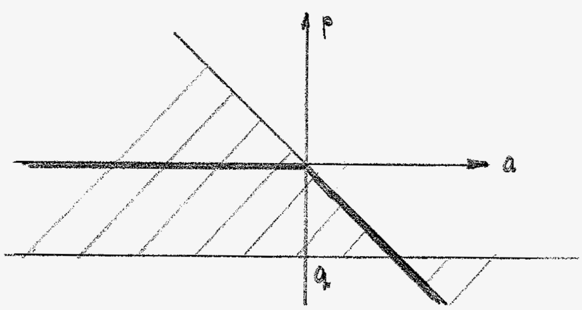
Omdat $\varepsilon > 0$ mogen we (5.10) delen door ε, maak daarbij gebruik van (5.15) dan volgt

$$\int_{\Gamma_C} (q-p)(p+a)\, d\Gamma \geq 0 \qquad \forall q \leq 0 \tag{5.13}$$

Hieruit volgt dat

$$f = (q-p)(p+a) \geq 0 \qquad \forall q \leq 0 \tag{5.14}$$

Dit is als volgt in te zien. Indien f in een punt op Γ_C negatief is dan kunnen we q zodanig kiezen dat f = 0 op de rest van de rand Γ_C. Het gevolg hiervan is dat $\int_{\Gamma_C} f\, d\Gamma \leq 0$ hetgeen in tegenspraak is met (5.16). De functie f is gelijk aan nul als q=p of als p=-a.



In het gearceerde gebied geldt $f \geq 0$. Echter $f \geq 0$ voor alle $q \leq 0$. Dat geldt alleen voor punten (p,a) op de dikke lijn. Immers $p \leq 0$. Dus

$$p = 0 \quad \text{of} \quad p = -\frac{1}{\varepsilon}(u_{\varepsilon n} - s) \quad \text{als } u_{\varepsilon n} - s \geq 0 \tag{5.15}$$

Q.E.D.

Substitutie van (5.11) in (5.4) levert

theorie uit Baaijens [1] kan als volgt worden gegeven. Definieer de volgende functionaal

$$H(\vec{v}): V \rightarrow R: \quad H(\vec{v}) = F(\vec{v}) + \frac{1}{\varepsilon} ||(u_n - s)^+||^2 \tag{5.19}$$

met $\varphi^+ = \max(0,\varphi)$. We zoeken dan die $\vec{u} \in V$ waarvoor

$$H(\vec{u}) \leq H(\vec{v}) \qquad \forall \, \vec{v} \in V \tag{5.20}$$

Als we het stationaire punt van H(.) zoeken dan vinden we juist relatie (5.16).

<u>Bibliografie.</u> De afleiding van de penalty functie methode met behulp van de verstoorde Lagrangiaan zoals die hier gegeven is kan gevonden worden in Oden en Kikuchi [1] en Bercovier [1]. De penalty functie methode wordt veelvuldig toegepast, zowel voor gelijkheidsbeperkingen (Carey [1], Utku en Carey [1]) als voor ongelijkehidsbeperkingen (Campos et. al. [1], Kikuchi [1,2], Kikuchi en Song [1,3], Oden [1], Oden, Kikuchi en Song [1], Oden en Kim [1], Oden en Kikuchi[1], Song, Oden en Kikuchi[1]).

6 Geaugmenteerde Lagrangiaan.

In dit hoofdstuk generaliseren we een aantal resultaten ten aanzien van de geaugmenteerde Lagrange methode zoals deze in Baaijens [1] is geintroduceerd. We bespreken een tweetal varianten. De eerste methode is een directe generalisatie van de werkwijze uit Baaijens [1]. De tweede methode voegt aan de klassieke Lagrangiaan een penalty term toe.

Mogelijkheid 1.

Splits de rand Γ_C in twee deelranden: Γ_{C+} en Γ_{C-}, dit z.d.d. $\Gamma_{C+}\ \ \Gamma_{C-} = \{\emptyset\}$ en $\Gamma_C = \Gamma_{C+}\ \ \Gamma_{C-}$ met

$$\Gamma_{C+} = \{\ \vec{x} \in \Gamma_C \mid (u_n - s)(\vec{x}) \geq \varepsilon p(\vec{x})\ \} \tag{6.1}$$

$$\Gamma_{C-} = \{\ \vec{x} \in \Gamma_C \mid (u_n - s)(\vec{x}) < \varepsilon p(\vec{x})\ \} \tag{6.2}$$

Waarbij ε een konstante groter dan nul is. We zullen $p(\vec{x})$ interpreteren als de normaalspanning op de rand Γ_C. Γ_{C+} en Γ_{C-} vooralsnog onbekend. Defini-eer de verzameling S als

$$S = \{(v_n - s)(\vec{x}) \in H^{1/2}(\Gamma_C) \mid \vec{x} \in \Gamma_{C+}\} \tag{6.3}$$

Op S definieren we het inproduct $(.,.)_+$ en de norm $||.||_+$

$$(u_n - t, v_n - s)_+ = \int_{\Gamma_{C+}} (u_n - t)(v_n - s)\, d\Gamma \tag{6.4}$$

$$||v_n - s||_+ = \{(v_n - s, v_n - s)_+\}^{1/2} \tag{6.5}$$

Analoog definieren we de verzameling T en daarop het inproduct $(.,.)_-$ en norm $||.||_-$

$$T = \{\ q(\vec{x}) \in Q \mid \vec{x} \in \Gamma_{C+}\} \tag{6.6}$$

$$(p,q)_- = \int_{\Gamma_{C-}} p\ q\ d\Gamma \tag{6.7}$$

$$||q||_- = \{(q,q)_-\}^{1/2} \tag{6.8}$$

met

$$Q = \{q \in H^{1/2}(\Gamma_C)\} \tag{6.9}$$

De eerste manier om een geaugmenteerde Lagrangiaan te definieren is hiermee

$$L_\varepsilon(\vec{v},q) = F(\vec{v}) - \langle q,v_n-s\rangle_+ + \frac{1}{2\varepsilon}\ ||v_n-s||_+^2 - \frac{1}{2}\ \varepsilon\ ||q||_-^2 \tag{6.10}$$

$$\forall\ \vec{v} \in V, \quad \forall\ q \in Q$$

met

$$\langle q,v_n-s\rangle_+ = \int_{\Gamma_{C+}} q(v_n-s)\ d\Gamma \tag{6.11}$$

Merk op dat er aan de Lagrange multiplicator geen beperking wordt opgelegd.

We zoeken het zadelpunt $(\vec{u},p) \in VxQ$ van L_ε dat voldoet aan

$$L_\varepsilon(\vec{u},q) \leq L_\varepsilon(\vec{u},p) \leq L_\varepsilon(\vec{v},p) \qquad \forall\ \vec{v} \in V, \quad \forall\ q \in Q \tag{6.12}$$

Op analoge wijze als in hoofdstuk 4 kunnen we hieruit afleiden dat deze eisen leiden tot

vind $(\vec{u},p) \in VxQ$ z.d.d.

$$a(\vec{u},\vec{v}) - \langle p,v_n\rangle_+ + \frac{1}{\varepsilon}\ (u_n-s,v_n)_+ = f(\vec{v}) \qquad \forall\ \vec{v} \in V \tag{6.13}$$

$$\langle q,u_n-s\rangle_+ - \varepsilon(p,q)_- = 0 \qquad \forall\ q \in Q \tag{6.14}$$

We laten zien dat de formulering (6.13)-(6.14) equivalent is aan het Signoriniprobleem zoals beschreven in hoofdstuk 1.
Door gebruik te maken van $\vec{\nabla}.(\sigma.\vec{v}) = (\vec{\nabla}.\sigma).\vec{v} + \sigma:(\vec{\nabla}\vec{v})^c$ en toepassing van de stelling van Gauss volgt direct uit (6.13)

$$\int_\Omega -(\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f}).\vec{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_F} (\sigma.\vec{n}-\vec{t}).\vec{v}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_{C+}} \{\sigma.\vec{n}-[p - \frac{1}{\varepsilon}(u_n-s)\vec{n}\}.\vec{v}\, d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_{C-}} \sigma.\vec{n}.\vec{v}\, d\Gamma = 0 \qquad \forall\ \vec{v} \in V \tag{6.15}$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$\vec{\nabla}.\sigma + \vec{f} = \vec{0} \qquad \text{in } \Omega \tag{6.16}$$

$$\sigma.\vec{n} = \vec{t} \qquad \text{op } \Gamma_F \tag{6.17}$$

$$\sigma.\vec{n} = (p - \frac{1}{\varepsilon}(u_n-s))\vec{n} \qquad \text{op } \Gamma_{C+} \quad (\text{dus } \vec{\sigma}_T = \vec{0} \text{ op } \Gamma_{C+}) \tag{6.18}$$

$$\sigma.\vec{n} = \vec{0} \qquad \text{op } \Gamma_{C-} \tag{6.19}$$

Omdat (6.14) geldig is voor alle $q \in Q$ volgt

$$u_n-s = 0 \qquad \text{op } \Gamma_{C+} \tag{6.20}$$

$$p = 0 \qquad \text{op } \Gamma_{C-} \tag{6.21}$$

Uit de definities van Γ_{C+} en Γ_{C-} volgt dat op Γ_{C+}: $p \leq 0$ en op Γ_{C-}: $u_n - s < 0$. Het voorgaande impliceert dat aan de kontaktcondities op Γ_C wordt voldaan.

Veronderstel vervolgens dat aan (6.16) tm. (6.21) wordt voldaan. Vermenigvuldig de evenwichtsrelatie (6.16) met een willekeurige $\vec{v} \in V$, integreer over Ω en pas de stelling van Gauss toe

$$\int_\Omega (\vec{\nabla}\vec{v})^c : \sigma\, d\Omega = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v}\, d\Omega + \int_\Gamma \sigma.\vec{n}.\vec{v}\, d\Omega \qquad \forall\ \vec{v} \in V \tag{6.23}$$

Maak gebruik van de randvoorwaarde op Γ_F en de eis $\vec{v} = \vec{0}$ op Γ_D voor alle $\vec{v} \in V$ dan volgt

$$\int_\Omega (\vec{\nabla}\vec{v})^c : \sigma \, d\Omega = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_F} \vec{t}.\vec{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_C} \sigma.\vec{n}.\vec{v} \, d\Omega \qquad \forall \vec{v} \in V \qquad (6.24)$$

Splits de rand Γ_C in Γ_{C+} en Γ_{C-} z.d.d.

$$\begin{aligned} &\text{op } \Gamma_{C+} \text{ geldt } u_n - s = 0 \\ &\text{op } \Gamma_{C-} \text{ geldt } u_n - s < 0 \end{aligned} \qquad (6.25)$$

We weten dat op Γ_C: $\sigma.\vec{n} = \sigma_n\vec{n}$. We beschouwen de normaalspanning σ_n als extra onbekende en schrijven $\sigma_n = p$. Omdat $(u_n-s)\sigma_n = (u_n-s)p = 0$ en $\sigma_n = p \leq 0$ op Γ_C geldt op Γ_C m.b.v. (6.25)

$$\begin{aligned} &\text{op } \Gamma_{C+}: u_n - s = 0 \rightarrow p \leq 0 \\ &\text{op } \Gamma_{C-}: u_n - s < 0 \rightarrow p = 0 \end{aligned} \qquad (6.26)$$

Op Γ_{C+} geldt dan ook zeker $\varepsilon p \leq 0$ voor alle $\varepsilon > 0$, dus ook $\varepsilon p \leq 0 = u_n-s$ voor alle $\varepsilon > 0$. Analoog geldt op Γ_{C-}: $\varepsilon p > u_n-s$ voor alle $\varepsilon > 0$. Dit heeft tot gevolg dat de integraal over Γ_C geschreven kan worden als

$$\int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}).\vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{C+}} p \, v_n \, d\Gamma \qquad (6.27)$$

Omdat $u_n-s = 0$ op Γ_{C+} mogen we ook schrijven

$$\int_{\Gamma_C} (\sigma.\vec{n}).\vec{v} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{C+}} [p - \frac{1}{\varepsilon} (u_n-s)] \, v_n \, d\Gamma \qquad (6.28)$$

Substitutie van (6.28) in (6.23) levert direct (6.13)

$$a(\vec{u},\vec{v}) - \langle p, v_n \rangle_+ + \frac{1}{\varepsilon} (u_n-s, v_n)_+ = f(\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in V \qquad (6.29)$$

De eisen $\varepsilon p = 0$ op Γ_{C-} en $u_n-s = 0$ op Γ_{C+} kunnen we in rekening brengen door

$$\int_{\Gamma_{C+}} q(u_n-s)\, d\Gamma + \varepsilon \int_{\Gamma_{C-}} q\, p\, d\Gamma = 0 \qquad \forall\, q \in Q \tag{6.30}$$

Hetgeen overeenkomt met (6.14).

Mogelijkheid 2.

Zoals gezegd voegen we bij deze methode aan de klassieke Lagrangiaan een penalty term toe. Definieer eerst de verzameling W

$$W = \{(v_n-s) \in H^{1/2}(\Gamma_C)\} \tag{6.31}$$

Op deze verzameling definieren we op de gebruikelijke manier een inproduct $(.,.)_W$ en een norm $||.||_W$. Hiermee kunnen we een andere geaugmenteerde Lagrangiaan definieren

$$L_a(\vec{v},q) = L(\vec{v},q) + \frac{1}{2\varepsilon}\, ||(v_n-s)^+||_M^2 \qquad \forall\, \vec{v} \in V, \quad \forall\, q \in M \tag{6.32}$$

met $\varphi^+ = \max(0,\varphi)$. Merk op dat $q \in M$, dus $q < 0$. Evenals in het voorgaande zoeken we het zadelpunt van L_a. Dit voldoet aan

vind $(\vec{u},p) \in V\times M$ z.d.d.

$$a(\vec{u},\vec{v}) - \langle p,v_n\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\,((u_n-s)^+,v_n) = f(\vec{v}) \qquad \forall\, \vec{v} \in V \tag{6.33}$$

$$\langle q-p,u_n-s\rangle \geq 0 \qquad \forall\, q \in M \tag{6.34}$$

Op de gebruikelijke manier kunnen we uit (6.33) de evenwichtsvergelijkingen in Ω en de randvoorwaarden op Γ_F afleiden. Op Γ_C volgt

$$\sigma.\vec{n} = [p - \frac{1}{\varepsilon}\,(u_n-s)^+] \;\rightarrow\; \vec{\sigma}_t = 0 \tag{6.35}$$

Uit hoofdstuk 4 is bekend dat uit (6.34) de kontaktcondities op Γ_C volgen

$$u_n-s \leq 0, \quad p(u_n-s) = 0 \quad \text{en} \quad p \leq 0 \tag{6.36}$$

Omdat $u_n - s \leq 0$ op Γ_C zal $(u_n - s)^+ = 0$ op Γ_C.

Vanuit theoretisch oogpunt heeft deze tweede formulering het nadeel dat relatie (6.33) niet differentieerbaar is als de oplossing exact aan de randvoorwaarde voldoet. Praktisch zal dit vanwege numerieke onnauwkeurigheden waarschijnlijk geen problemen geven.

7 Discretisatie, oplosprocessen, discreet LBB-criterium.

In het voorgaande zijn een drietal methoden besproken om de randvoorwaarde langs Γ_C in rekening te brengen. Dit zijn: 1) de Lagrange multilicatoren methode, 2) de penalty functie methode en 3) de geaugmenteerde Lagrange methode. In het algemeen kan op basis van deze formuleringen geen exacte oplossing worden gevonden. De werkwijzen zijn daarintegen zeer geschikt om benaderingsoplossingen te vinden op basis van de eindige elementen methode. Daartoe verdelen we het lichaam Ω in een eindig aantal elementen. Deze verdeling zal Ω in het algemeen niet exact bedekken, met name aan de rand ontstaan afwijkingen. Bij verdere beschouwingen beperken we ons tot het benaderde volume Ω_h en rand Γ_h. Een element geven we aan met Ω_e. Per knooppunt k van een element definieren we een z.g. vormfunctie, φ_k, z.d.d.

φ_k voldoende continu, differentieerbaar en begrensd is,

$$\varphi_k(\vec{x}_k) = 1, \qquad \varphi_k(\vec{x}_j) = 0, \qquad \varphi_k(\vec{x}) = 0 \ \text{ als } \vec{x} \notin \Omega_e$$

Hierbij is $\vec{x}_k$ resp $\vec{x}_j$ de positievector van knooppunt k resp. j z.d.d. $j \neq k$. Met $k \in \Omega_e$ geven we in het vervolg aan dat k behoort tot verzameling van knooppunten van Ω_e. Bij de keuze van φ_k beperken we ons tot volledige polynomen van orde kleiner dan b.v. m. Het verplaatsingsveld $\vec{v}$ binnen een element wordt als volgt geinterpoleerd

$$\vec{v}_h^{\,e} = \underset{\sim}{\varphi}^T \underset{\sim}{\vec{v}} \tag{7.1}$$

waarin $\underset{\sim}{\vec{v}}$ de kolom met verplaatsingsvectoren van alle knooppunten van element Ω_e en $\underset{\sim}{\varphi}$ de kolom met interpolatiefuncties is. De bilineaire vorm $a(\vec{u},\vec{v})$ wordt hiermee benaderd door

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}_h) = \sum_{e\in\Omega_h} a_e(\vec{u}_h^{\,e},\vec{v}_h^{\,e}) \tag{7.2}$$

We hebben hierbij onderscheid gemaakt tussen het verplaatsingsveld op locaal (element) niveau, $\vec{u}_h^e$, en op globaal (constructie) niveau, $\vec{u}_h$. Definieer de functie ϕ_k z.d.d.

$\phi_k = \varphi_k^e$ binnen ieder element met knooppunt k waarbij φ_k^e de interpolatiefunctie is behorende bij het knooppunt k van element e,

$\phi_k = 0$ voor het overige deel van Ω_h.

We veronderstellen dat ϕ_k langs de elementranden voldoende (probleemafhankelijke) continuiteit vertoond. Met bovenstaande definitie kunnen we schrijven

$$\vec{v}_h = \sum_{k\in\Omega_h} \phi_k(\vec{x})\vec{v}_k, \qquad \vec{v}_k \in R^3 \tag{7.3}$$

De discretisatie van de ruimte V, V_h, kunnen we hiermee als volgt definieren

$$V_h = \{\vec{v}_h \in V \mid \vec{v}_h = \sum_{k\in\Omega_h} \phi_k\vec{v}_k,\ \vec{v}_k \in R^3,\ \vec{v}_h = 0 \text{ op } \Gamma_{Dh}\} \tag{7.4}$$

waarbij Γ_{Dh} de benadering voor Γ_D (dat deel van Γ waar $\vec{v} = \vec{0}$) is. De gediscretiseerde ruimte van Lagrangemultiplicatoren kunnen we geheel analoog schrijven als

$$Q_h = \{q_h \in Q \mid q_h = \sum_{k\in\Gamma_{ch}} \Psi_k q_k,\ q_k \in R\} \tag{7.5}$$

In het algemeen kunnen we voor de discretisatie van q andere knooppunten definieren als voor de discretisatie van $\vec{v}$. Dit betekent bijvoorbeeld dat we in staat zijn om voor de kontaktdruk berekening een fijnere elementverdeling te gebruiken als dat we voor het verplaatsingsveld doen. Aan Ψ_k stellen we overigens soortgelijke eisen als aan ϕ_k. De ruimte M wordt als volgt gediscretiseerd

$$M_h = \{q_h \in Q_h \mid q_h \leq 0 \text{ op } \Gamma_C\} \tag{7.6}$$

Eem probleem hierbij is dat indien $q_k \leq 0$ 0 dat dan niet noodzakelijk $q_h \leq 0$. We gaan hier echter niet nader op in. Merk op dat V_h, Q_h en M_h in tegenstelling tot V, Q en M eindig dimensionale ruimten zijn die worden opgespannen door resp. ϕ_k, Ψ_k en Ψ_k.

Op basis van het voorgaande kunnen we de verschillende methoden als volgt in een gediscretiseerde vorm schrijven

1: Lagrange multiplicatoren methode

vind $(\vec{u}_h,p_h) \in V_h x M_h$ z.d.d.

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}_h) - \langle p_h,v_{nh}\rangle = f(\vec{v}_h) \qquad \forall\ \vec{v}_h \in V_h \tag{7.7}$$

$$\langle q_h-p_h,u_{nh}-s\rangle \geq 0 \qquad \forall\ q_h \in M_h \tag{7.8}$$

2: penalty functie methode

vind $\vec{u}_h \in V_h$ z.d.d.

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}_h) + \frac{1}{\varepsilon}\langle (u_{nh}-s)^+,v_{nh}\rangle = f(\vec{v}_h) \qquad \forall\ \vec{v}_h \in V_h \tag{7.9}$$

3: geaugmenteerde Lagrange methode

vind $(\vec{u}_h,p_h) \in V_h x Q_h$ z.d.d.

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}_h) - \langle p_h,v_{nh}\rangle_+ + \frac{1}{\varepsilon}(u_{nh}-s,v_{nh})_+ = f(\vec{v}_h) \qquad \forall\ \vec{v}_h \in V_h \tag{7.10}$$

$$\langle q_h-p_h,u_{nh}-s\rangle_+ - \varepsilon(p_h,q_h)_- = 0 \qquad \forall\ q_h \in Q_h \tag{7.11}$$

De in hoofdstuk 6 geopperde tweede mogelijkheid voor de definitie van een geaugmenteerde Lagrangiaan wordt hier niet verder uitgewerkt. Echter deze discretisatie verloopt volkomen analoog aan hetgeen voor de klassieke Lagrange multiplicatoren methode geldt.

Bij de penalty functie methode moet ε voldoende klein zijn opdat de benaderde oplossing voldoende dicht bijde exacte oplossing ligt. Immers naast de fout die gemaakt wordt door de discretisatie wordt er een fout gemaakt doordat nooit exact aan de randvoorwaarde $u_n-s \leq 0$ op Γ_C wordt voldaan. De geaugmenteerde Lagrange methode vertoond dit laatste verschijnsel niet, in principe kan de penalty factor willekeurig (positief) worden gekozen.

Oplosprocessen.

In deel A van dit rapport hebben we drie verschillende oplosprocessen besproken: 1) het klassiek Uzawa algorithme, 2) het standaard Newton-Raphson algorithme en 3) een gemodificeerde vorm van het Newton-Raphson algorithme. We hebben gezien dat het standaard Newton-Raphson algorithme in vrijwel alle gevallen convergentie problemen geeft. De toepasbaarheid van dit algorithme beperkt zich in hoofdzaak tot de geaugmenteerde Lagrange methode en wel tot mogelijkheid 1 uit hoofdstuk 6. De toepassing van het gemodificeerde Newton-Raphson algorithme vraagt om een andere aanpak van het Signorinipro-bleem als in dit rapport is gehanteerd. In een later rapport zal uitvoerig op deze werkwijze worden teruggekomen. Het Uzawa algorithme wort in de literatuur het meest toegepast. Dit komt ondermeer doordat de multiplicator iteratie die op basis van de duale formulering is gedefinieerd juist over-eenkomt met de equivalente relatie voor $\langle q-p,u_n-s\rangle \leq 0$:

$$p = \min(0,p-\rho(u_n-s)$$

De preciese uitwerking van het Uzawa algorithme zullen we hier niet nader bespreken; deze is tamelijke recht toe recht aan en verloopt volkomen analoog aan hetgeen in deel A van dit rapport is beschreven.

Het discrete LBB-criterium.

De eindige elementmethode benadering voor de penalty functie methode luidt

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}) + \frac{1}{\varepsilon}\langle(u_{nh}-s)^+,v_{nh}\rangle = f(\vec{v}_h) \qquad \forall\, \vec{v}_h \in V_h,\quad \varepsilon > 0 \tag{7.12}$$

Door Oden, Kikuchi en Song [1] is aangetoond dat we alleen een unieke en stabiele oplossing kunnen vinden indien de penaltyterm gereduceerd wordt geintegreerd. Bij de keuze van de integratieregel voor de penaltyterm gaan we uit van de volgende grondvorm

$$I(f) = \sum_{i=1}^{G} w_i f(\xi_i) \tag{7.13}$$

Hierin is w_i de weegfactor voor het i-de integratiepunt met coordinaat ξ_i. In totaal zijn er G integratiepunten. De z.g. RIP-approximatie (Reduced Integration Penalty Method) luidt hiermee

$$a(\vec{u}_h,\vec{v}) + \frac{1}{\varepsilon} I((u_{nh}-s)^+,v_{nh}) = f(\vec{v}_h) \qquad \forall\, \vec{v}_h \in V_h,\quad \varepsilon > 0 \tag{7.14}$$

Zoals bekend is $\vec{v}_h$ een element van de eindig dimensionale ruimte V_h die wordt opgespannen door de functies ϕ_k. Binnen de elementen waarvan knooppunt k deel uitmaakt is ϕ_k een volledig n-de orde polynoom.
In de integratieregel kunnen we eenduidig de benaderde kontaktspanning $p_{\varepsilon h}$ in een integratiepunt bepalen uit

$$p_{\varepsilon h}(\xi_i) = -\frac{1}{\varepsilon}(u_{nh}-s)^+(\xi_i) \tag{7.15}$$

Indien er langs de rand van een element m integratiepunten liggen, dan kunnen we m waarden van $p_{\varepsilon h}$ bepalen, daarmee kunnen een (m-1)ste orde polynoom voor $p_{\varepsilon h}$ als functie van de locale coordinaat ξ vormen. De positie vane integratiepunten als mede het aantal integratiepunten leggen volledig het verloop van $p_{\varepsilon h}(\xi)$ vast. In deze zin beinvloed de integratieregel I het verloop van $p_{\varepsilon h}(\xi)$.

In het algemeen kunnen we $p_{\varepsilon h}$ schrijven als

$$p_{\varepsilon h}(\xi) = \sum_{g \in \Gamma_{Ch}} \Psi_g(\xi)\, p_{\varepsilon h}(\xi_g) \tag{7.16}$$

Met ξ_g de coordinaat van het g-de integratiepunt op de rand Γ_{Ch}. Hiermee kunnen we verzameling van de benaderende kontaktspanningen definieren als

$$P_h \{q_{\varepsilon h} \mid q_{\varepsilon h} = \sum_{g \in \Gamma_{Ch}} \Psi_g(\xi)\, q_{\varepsilon h}(\xi_g) \} \tag{7.17}$$

In het algemeen zullen de vormfuncties Ψ_g discontinu zijn ter plaatse van de elementranden. Een belangrijke voorwaarde voor het bestaan van een unieke oplossing $\vec{u}_h$ van het probleem (7.12) is het bestaan van een constante β_h z.d.d.

$$\beta_h \, ||q_h||_{0,\Gamma_C} \leq \sup_{\vec{v} \in V_h} \frac{I(q_h, v_{nh})}{||\vec{v}||} \qquad \forall\, q_h \in P_h \tag{7.18}$$

waarbij de norm $||.||_{0,\Gamma_C}$ gedefinieerd is door

$$||q_h||_{0,\Gamma_C} = \{ \int_{\Gamma_C} q_h^2 \, d\Gamma \}^{1/2} \tag{7.19}$$

Het criterium (7.18) noemen we het discrete LBB-criterium, zie Song, Oden en Kikuchi [1]. Of een bepaalde integratieregel voldoet aan (7.18) wordt op de volgende manier bestudeerd.

1. Voor een gegeven ruimte V_h wordt P_h vastgelegd door de integratieregel I(.). Voor een willekeurige vaste $q_h \in P_h$ kiezen we een $\vec{v}_\tau \in V_h$ z.d.d.

$$q_h(\xi_i) = v_{\tau nh}(\xi_i) \tag{7.20}$$

voor alle integratiepunten ξ_i van een element op Γ_{Ch}, dan volgt

$$I(q_h, v_{\tau nh}) = [I((q_h)^2)]^{1/2}[I((v_{\tau nh})^2)]^{1/2} \tag{7.21}$$

Immers

$$I(q_h, v_{\tau nh}) = \sum_{i=1}^{G} q_h(\xi_i)\ v_{\tau nh}(\xi_i)\ w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{G} w_i\ v_{\tau nh}(\xi_i)\ v_{\tau nh}(\xi_i)$$

$$= [\sum_{i=1}^{G} w_i\ v_{\tau nh}(\xi_i)^2]^{1/2}\ [\sum_{i=1}^{G} w_i\ v_{\tau nh}(\xi_i)^2]^{1/2}$$

$$= [I((q_h)^2)]^{1/2}\ [I((v_{\tau nh})^2)]^{1/2}$$

Merk op dat (7.20) impliceert dat het verloop van q_h ten hoogste van dezelfde orde mag zijn als van v_{nh}. Dus als v_{nh} langs de rand beschreven wordt door een m-de orde polynoom dan moet q_h orde m of lager zijn. Dit legt dus beperkingen op aan de integratieregel I(.), zie het voorgaande.

2. Bepaal, indien mogelijk, constanten C_1 en C_2 beide groter dan nul, onafhankelijk van h (een karakteristieke lengtemaat van een element), z.d.d.

$$[I((q_h)^2)]^{1/2} \geq C_1||q_h||_{0,\Gamma_C} \qquad \forall\ q_h \in P_h \tag{7.22}$$

$$[I((v_{\tau nh})^2)]^{1/2} \geq C_2||v_{\tau nh}||_{0,\Gamma_C} \qquad \forall\ \vec{v}_{\tau h} \in V_h \tag{7.23}$$

dan

$$I(q_h, v_{\tau nh}) \geq C_1C_2||q_h||_{0,\Gamma_C}\ ||v_{\tau nh}||_{0,\Gamma_C} \qquad \forall\ q_h \in P_h \tag{7.24}$$

3. Uit de inverse eigenschap en het trace theorema kan worden afgeleid dat

$$||v_{nh}||_{0,\Gamma_C} \geq C_3||\vec{v}_h|| \qquad \forall\ \vec{v}_h \in V_h \tag{7.25}$$

Waarbij $||.||$ de norm op $V(\Omega))$ is

$$||\vec{v}_h|| = \{ \int_\Omega (\vec{\nabla}\vec{v}_h):(\vec{\nabla}\vec{v}_h)^c\ d\Omega \}^{1/2} \tag{7.26}$$

Zodat

$$I(q_h,v_{nh}) \geq C_1C_2C_3h^{1/2}||q_h||_{0,\Gamma_C}\ ||\vec{v}_h|| \qquad \forall\ \vec{v}_h \in V_h \tag{7.27}$$

dus met (7.18) volgt

$$\beta_h = C_1C_2C_3h^{1/2} \tag{7.28}$$

Conclusie: indien de integratieregel zodanig is dat aan punt 1 voldaan kan worden en indien er constanten C_1 en C_2 bepaald kunnen worden zodanig dat aan (7.22) en (7.23) voldaan wordt, dan kunnen we een unieke oplossing voor de penalty functie methode vinden.

Met C^i geven we de verzameling van functies aan die continu zijn t.m. de i-de afgeleide. De belangrijkste stap bij de toepassing van het bovenstaande schema is het vinden van een integratieregel die voldoet aan (7.22) en (7.23).

De volgende gevallen zijn in de literatuur onderzocht:

V_h	I
a. kwadratisch verpl.veld.	a.1 3-punts Gauss integratie. q_h: discontinu stuksgewijs kwadratisch.
	a.2 regel van Simpson. q_h: C^0 stuksgewijs kwadratisch.
	a.3 2-punts Gauss integratie.

q_h: discontinu stuksgewijs lineair.

a.4 trapezium regel.
q_h: C^0 stuksgewijs lineair.

b. lineair verpl.veld.

b.1 2-punts Gauss integratie.
q_h: discontinu stuksgewijs lineair.

b.2 trapeziumregel.
q_h: C^0 stuksgewijs lineair.

b.3 1-punts Gauss integratie.
q_h: stuksgewijs constant.

Doordat de integratiepunten bij Gauss integratie niet samenvallen met de knooppunten zal het verloop van de kontaktspanning discontinu zijn ter plaatse van de elementovergang. Dus m.b.t. de kontaktspanning hebben we te maken met niet conforme elementen. In de gevallen a.1 en b.1 wordt v_{nh} geheel bepaald door de waarden in de integratie punten. Daardoor is het onmogelijk om conforme $v_{\tau nh}$ te vinden die dezelfde waarde hebben in de integratiepunten als de niet conforme q_h die a priori zijn gegeven. Dan kan aan (7.20) niet voldaan worden voor beide gevallen.

Voor de overige gevallen wordt wel aan (7.20) voldaan, maar moeten de condities (7.22) en (7.23) geverifieerd worden. Bijvoorbeeld:
<u>Het geval a.2.</u> In dit geval hebben q_h en v_{nh} het volgende verloop

$$q_h = q_0 + q_1\xi + q_2\xi^2$$

$$v_{nh} = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2$$

Er geldt

$$||q_h||^2_{0,\Gamma_C} = h \int_{\xi=-1}^{1} (q_0 + q_1\xi + q_2\xi^2)^2 \, d\xi$$

$$= h(2q_0^2 + \frac{2}{3} q_1^2 + \frac{4}{3} q_0q_2 + \frac{2}{5} q_2^2)$$

$$||v_{nh}||^2_{0,\Gamma_C} = h(2v_0^2 + \frac{2}{3} v_1^2 + \frac{4}{3} v_0v_2 + \frac{2}{5} v_2^2)$$

en

$$I((q_h)^2) = ||q_h||^2_{0,\Gamma_C} + \frac{4}{15} h \, q_2^2 \geq ||q_h||^2_{0,\Gamma_C}$$

$$I((v_{nh})^2) \geq ||v_{nh}||^2_{0,\Gamma_C}$$

Dus aan (7.22) en (7.23) wordt voldaan.

Een soortgelijke berekening voor de overige gevallen levert dat voor de combinaties a.2, a.4 en b.2 een constante β gevonden kan worden die onafhankelijk is van h z.d.d.

$$\beta \, h^{1/2} ||q_h||_{0,\Gamma_C} \leq \sup_{\vec{v}_h \in V_h - \{\vec{0}\}} \frac{I(q_h, v_{nh})}{||\vec{v}_h||} \qquad \forall \, q_h \in P_h \tag{7.29}$$

Voor de andere gevallen is dit niet mogelijk. Bekijk bijvoorbeeld geval a.3.
Dan geldt

$$q_h = q_0 + q_1\xi \tag{7.30}$$

zodat

$$I((q_h)^2) = ||q_h||^2_{0,\Gamma_C} + \frac{4}{3} hq_1^2 \geq ||q_h||^2_{0,\Gamma_C} \tag{7.31}$$

Maar

$$I((v_{vh})^2) = ||v_{nh}||^2_{0,\Gamma_C} - \frac{8}{45} hv_2^2 \qquad (7.32)$$

waaruit blijkt dat niet aan (7.23) voldaan kan worden.

Literatuur.

[1] Baaijens F.P.T. Het Signorini probleem in de elastostatica.

[1] Bercovier. Pertubation methods of mixed variational problems.
Application to mixed finite element methods.
R.A.I.R.O. Num Anal., Vol.12, p.211-236 (1979)

[1] Bertekas. Multiplier methods: a survey .
Automatica, Vol.12, p.133-145 (1976)

[1] Brezzi, Hager, Raviart. Error estimates for finite element solution of variational inequalities, part I & II.
Numer. Math., Vol.28, p.431-443 (1979).

[1] Campos, J.T. Oden, N. Kikuchi. A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics.
Comp. Meth. Appl. Mech. Engn., Vol.34, p.821-845 (1982).

[1] C.F. Carey, Kabaila, M. Utku. On penalty methods for interelement constraints.
Comp. Meth. Appl. Mech. Engn., Vol.30, p.151-171 (1982).

[1] Cuvelier. Rapport NA-22, THD.

[1] de Jong. Numerieke algoritmen voor niet lineaire optimaliseringsproblemen.
Syllabus 1982.

[1] J.J. Kalker. Variational principles of contact elastostatics.
Jrnl. Inst. Math. Appl., Vol.20, p.199-219 (1977).

[1] N. Kikuchi. Convergence of a penalty-finite element approximation for an obstacle problem.
Numerische Math., Vol.37, p.105-120 (1981).

[2] N. Kikuchi. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems.
Int. Jrnl. Num. Meth. Engn., Vol.18, p.343-350 (1982).

[1] N. Kikuchi, Y.J. Song. Remarks on relations between penalty and mixed finite element methods for a class of variational inequalities.
Int. Jrnl. Num. Meth. Engn., Vol.15, p.1557-1579 (1980).

[2] N. Kikuchi, Y.L. song. Contact problems involving forces and moments for incompressibel linearly elastic materials.
Int. Jrnl. Engn. Sci., Vol.18, p.357-377 (1980).

[3] N. Kikuchi, Y.L. Song. Penalty/finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity.
Quart. Appl. Mech., p.1-22, (1981)

[1] N. Kikuchi, K. Skalski. An elastoplastic rigid punch problem using variational inequalities.
Arch. Mech., Vol.33, p.865-877 (1981).

[1] J.L. Lions. Optimal control of systems governed by partial differential equations. [DPQ 71 LIO]

[1] J.L. Lions, G. Stampacchia. Variational inequalities.
Comm. Pure Appl. Math., Vol.XX, p.493-519 (1967).

[1] J.T. Oden. Penalty methods for constrained problems in nonlinear elasticity.
Proc. IUTAM symp. of finite elasticity. 1980, p.281-299.

[1] J.T. Oden, N. Kikuchi, Y.L. Song. Reduced integration and exterior penalty methods for finite element approximations of contact problems in incompressibel elasticity.
TICOM-report 80-2 (maart 1980).

[1] J.T. Oden, S.J. Kim. Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics.
Comp. Maths. Appl., Vol.8, p.35-56 (1982).

[1] J.T. Oden, N. Kikuchi. Finite element methods for constrained problems in elasticity.
Int. Jrnl. Num. Meth. Engn., Vol.18, p.701-725 (1982).

[1] P.D. Panagiotopoulos. A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity.
Ing. Archiv., Vol.44, p.421-432 (1975)

[2] P.D. Panagiotopoulos. On the unilateral contact problem of structures with a non qaudratic strain energy density.
Int. Jrnl. Solids Struct., Vol.13, p.253-261 (1977)

[3] P.D. Panagiotopoulos. A variational inequality approach to the friction problem of stuctures with convex strain energy density and application to the frictional unilateral contact problem.
Jrnl. Struct. Mech., Vol.6, p.303-318 (1978)

[4] P.D. Panagiotopoulos. Optimal control of unilateral analysis problems.
Structural control. Ed. Leipholz. IUTAM 1982, p.555-562.

[1] P.D. Panagiotopoulos, D. Talaslidis. A linear analysis approach to the solution of certain classes of variational inequality problems in structural analysis.
Int. Jrnl. Solids Struct., Vol.16, p.991-1005 (1980)

[1] R.T. Rockafellar. The multiplier method of Hesteness and Powel applied to convex programming.
Jrnl. Opt. Theory Appl., Vol.12, p.555-562 (1973)

[1] Y.L. Song, J.T. Oden, N. Kikuchi. Discrete LBB-conditions for RIP-finite element methods.
TICOM-report 80-7 (Aug. 1980)

[1] J.D. Talaslidis, P.D. Panagiotopoulos. A linear finite element approach to the solution of variational inequalities in contact problems of structural dynamics.
Int. Jrnl. Num. Meth. Engn., Vol.18, p.1505-1520 (1982)

[1] M. Utku, G.F. Carey. Boundary penalty techniques.
Comp. Meth. Appl. Mech. Engn., Vol.30, p.103-118 (1982)