

Onderzoek meedragende breedte

Citation for published version (APA):

Kortman, J. C. (1967). *Onderzoek meedragende breedte*. (DCT rapporten; Vol. 1967.017). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1967

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Onderzoek meedragende breedte

Inhoud : 13 blz.

	blz.
I Doel van het onderzoek	2
II Definitie	2
III Literatuur	2
IV Experiment	2
1 Proefstuk	2
2 Proefopstelling	3
3 Meetmethode	3
4 Uitvoering	6
5 Meetresultaten	7
V Theorie	8
VI Toepassing theorie op doorgemeten proefstuk	9
1 Bepaling spanningsverdeling	9
2 Maximale hoekverdraaiing van de balk	11
3 Maximale hoekverdraaiing van elementaire balk	11
4 Bepaling meedragende breedte	11
VII Conclusies	12
VIII Opmerkingen	12

3 grafieken.

Eindhoven 22-6-'67



J.C. Kortman

Onderzoek meedragende breedte

I Doel van het onderzoek :

Het vergelijken van de resultaten van een experiment met de theoretische uitwerking van dit probleem.

Het theoretisch bepalen van de spanningsverdeling in het proefstuk.

II Definieering .

Volgens de elementaire theorie van Bernoulli heeft een lichaam met een dwars doorsnede volgens fig. 1 met flensbreedte λ een zekere buigingsstijfheid.

Deze geeft bij bepaalde belasting en lengte van het lichaam en bij ondersteuning aan de einden, een zekere f_λ in het midden, die afhankelijk is van λ .

Volgens de theorie van Girkmann heeft hetzelfde lichaam, echter met oneindig brede flenzen, dat op dezelfde manier ondersteund en belast is, in het midden een zakkings f .

De meedragende breedte λ is die flensbreedte, waarbij $f_\lambda = f$.

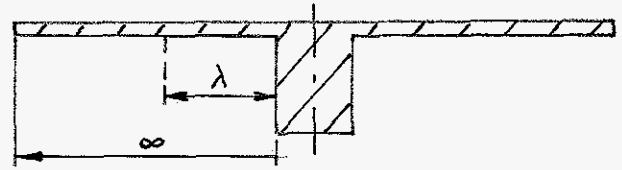


fig. 1

III Literatuur :

Girkmann : Flächentragwerke pag 119.

Timoshenko - Goodier : Theory of Elasticity pag 171.

IV Experiment :

1 Proefstuk

materiaal :
polystyreenschuim
(symprotex)

maten in mm

spiegeltjes
zie IV. 3

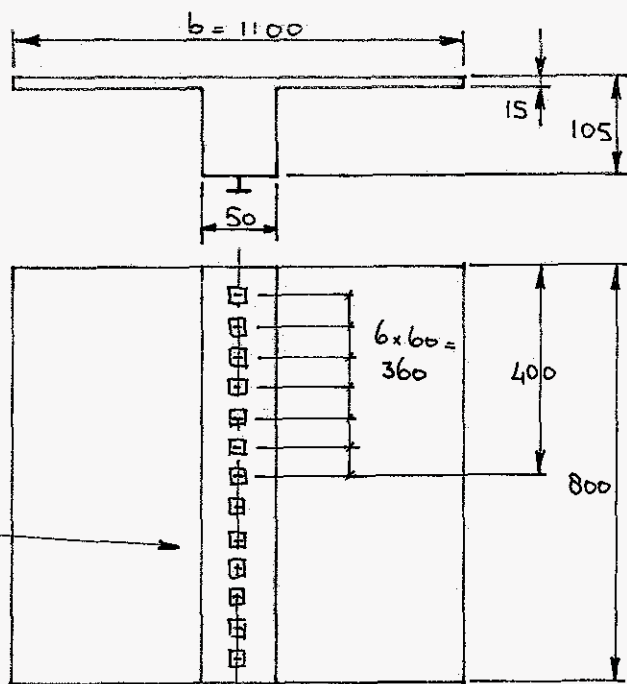


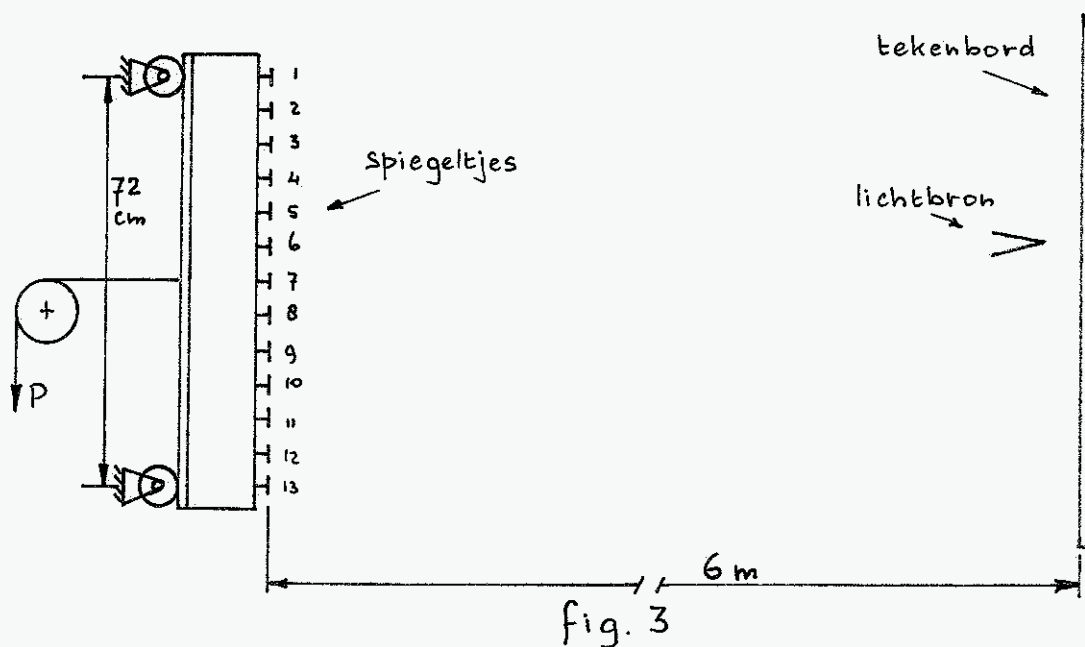
fig. 2

Polystyreenschuim is enerzijds zeer geschikt voor vervormingsmetingen door zijn lage elasticiteits- en glijdingsmodulus en gemakkelijke bewerking, anderzijds minder geschikt voor metingen, waarbij grote nauwkeurigheid is vereist, wegens de inhomogeniteit en de kruip van het materiaal. (zie rapport THE WE 67-6)

De bewerking kan snel geschieden, door m.b.v. een door een elektrische stroom verhitte weerstandsdraad het materiaal in de gewenste vorm te "snijden" (= smelten).

Bij dunwandige proefstukken is het raadzaam het gesneden oppervlak licht na te schuren, omdat door het snijden een gesmolten en verhard laagje ontstaat, dat invloed heeft op de stijfheid van het proefstuk.

2 Proefopstelling:



3 Meetmethode:

De meetmethode is ontleend aan een artikel in:
Heron (I.B.C. mededelingen) jaargang 10 no.2
Jr. W.J. Beranek: Modellen van polystyreenschuim.

Deze komt in het kort op het volgende neer :
De methode berust op een interferentieverschijnsel van licht.

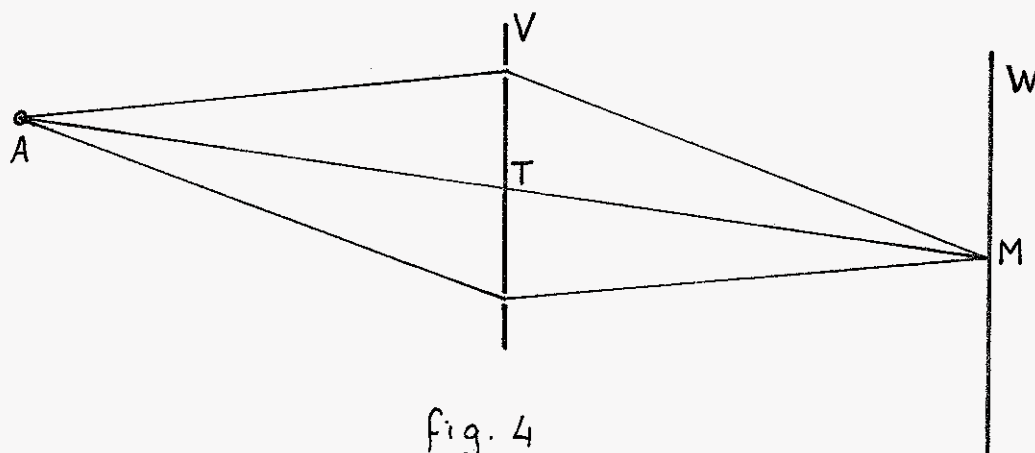


fig. 4

Proef van Young :

A is een puntvormige lichtbron

V is een scherm met 2 spleten.

W is een tweede scherm met $AT = TM$.

In punt M van scherm W komen lichtgolven samen met gelijke optische weglengten, en versterken elkaar dus. Op andere plaatsen van het scherm, waar het weglengteverschil van de lichtgolven een oneven aantal halve golflengten bedraagt, verzwakken zij elkaar; waar het weglengteverschil een geheel aantal golflengten bedraagt, versterken zij elkaar weer. Er ontstaan opvolgend lichte en donkere banden bij monochromatisch licht, gekleurde banden bij wit licht. De band door M is altijd wit.

Vervangen we het scherm met de spleten door een spiegeltje, waarvan de spiegellende laag gedeeltelijk als aequidistante ringen is weggeslepen, dan ontstaat als interferentiebeeld een wit centrum, waaromheen lichte en donkere of gekleurde banden. Het interferentiebeeld ontstaat aan dezelfde kant van het spiegeltje, als de plaats van de lichtbron.

De spiegellende ringen vervullen hier de rol van de spleten. Zie fig. 5

Het interferentie centrum is eenvoudig op een scherm af te tekenen, als de kamer donker is

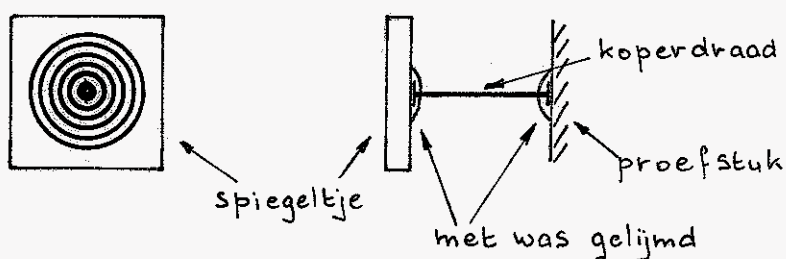
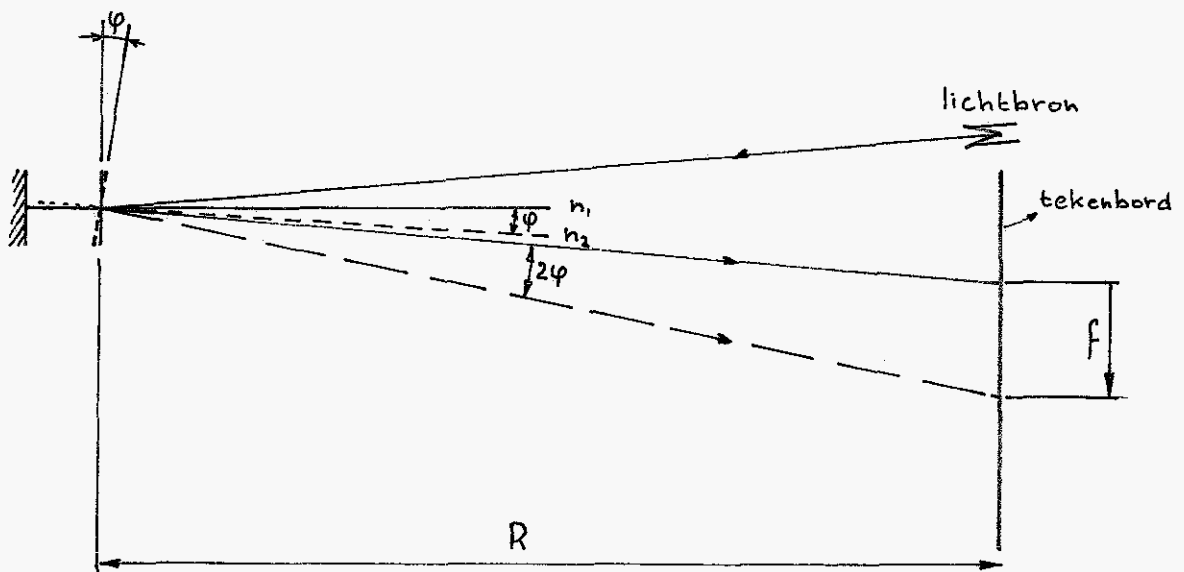


fig. 5

We bevestigen het spiegeltje via een koperdraadje met bijenwas aan het proefstuk en kunnen het koperdraadje zodanig verbuigen, dat de interferentie- vlek op de gewenste plaats op het scherm valt zie fig. 6

Bij belasten van het proefstuk krijgt het spiegeltje dezelfde hoekverdraaiing, als de plaats van het proefstuk, waar het draadje bevestigd is, en de verplaatsing van de interferentie vlek is een maat voor deze verdraaiing.

Als de lichtstraal een kleine hoek maakt met de normaal op het vlak van het spiegeltje, zijn de afwijkingen van de formule bij fig. 6 klein. Dit wordt bereikt, door de afstand van scherm en lichtbron tot het proefstuk vrij groot te kiezen (in ons geval ca. 6m) en de grootte van de hoekverdraaiing te beperken (in ons geval tot verplaatsingen van de interferentie vlek binnen de afmetingen 1,5 x 1 m van een tekenbord)



- n_1 is de normaal op het spiegeltje voor belasten
- n_2 is de normaal op het spiegeltje na belasten
- φ is hoekverdraaiing spiegeltje
- f is verplaatsing interferentie vlek = $2\varphi R$

$$\text{dus } \varphi = \frac{f}{2R}$$

fig. 6

Bij het met enige zorg richten van de spiegeltjes en aftekenen op het bord, is de onnauwkeurigheid van de formule $\varphi = \frac{f}{2R}$ bij genoemde afmetingen volgens Beranek kleiner dan 2%.

Als lichtbron is een projector genomen. Om een puntvormige lichtbron te benaderen, is op de plaats van de dia een diafragma met kleine opening, en om te veel licht in de kamer te vermijden een afscherming met juist voldoende grote opening op de uitrede van de projector geplaatst.

4 Uitvoering:

De metingen zijn a.v. uitgevoerd: Vanaf een bepaalde voorbelasting zijn een aantal belastingstappen aangebracht, waaruit informatie over de mate van lineariteit en een gemiddelde hoekverdraaiing per belastingstap voor ieder spiegeltje verkregen wordt.

Gebleken is, dat bij te lage en te hoge belasting, ongewenst grote afwijkingen in materiaal eigenschappen optreden. (zie WE 67-6)

Door het optreden van kruip, moet steeds dezelfde tijdsduur van belasten aangehouden worden, om afwijkingen zo klein mogelijk te houden.

Hier is voor de tijdsduur van belasten tot hoger belasten 3 minuten aangehouden, terwijl de tijd voor het aftekenen van de beeldpunten van de spiegeltjes 1 t.e.w. 13 ongeveer 30 seconden is.

Het aantal belastingstappen is 8.

Belastingtoename per stap 0,5 kgf.

Begonnen is met bij de plaatbreedte $b = 1100$ mm de belasting trapsgewijs aan te brengen en hierbij het verloop van de beeldpunten af te tekenen.

Vervolgens is de breedte van de flenzen in stapjes vermindert, door aan beide einden gelijke repen af te snijden, terwijl bij iedere breedte is belast en afgetekend, als hiervoor genoemd.

Uit de gemiddelde hoekverdraaiing van de spiegeltjes aan de einden van het stuk, dat ten slotte overblijft, als de flenzen geheel zijn afgesneden, n.l. de balk, is de elasticiteitsmodulus van het proefstuk-materiaal bepaald.

5 Meetresultaten :

Omdat de hoekverdraaiingen van de spiegeltjes 1 resp. 13 iets kleiner zijn, dan die van 2 resp. 12, terwijl zij theoretisch vrijwel gelijk moeten zijn, is φ_{max} bepaald, door het totaal gemiddelde te nemen over de 8 belastingstappen van de spiegeltjes 1, 2, 12 en 13.

Het blijkt, dat het gemiddelde van 1 en 2 ca. 1.5% lager ligt, dan over 12 en 13, terwijl zij wegens symmetrie gelijk moeten zijn.

Als illustratie van de mate van lineariteit in het door ons gebruikte belastinggebied, is voor een aantal waarden van b , de verplaatsing van het beeldpunt voor de opvolgende belastingstappen in grafiek no 1 uitgezet, voor het gemiddelde van de spiegeltjes 1, 2, 12 en 13. We zien, dat de grootste verschillen gemiddeld ca. 8% bedragen.

De verdraaiing van spiegel no. 7 is vrijwel nul.

De resultaten voor φ_{max} bij de toegepaste belastingstappen als functie van de totale plaatbreedte b , echter omgerekend tot belastingstappen van 1 kgf, zijn a.v

b cm	φ_{max}/kgf rad	b cm	φ_{max}/kgf rad
110	$3,29 \cdot 10^{-3}$	39	$3,46 \cdot 10^{-3}$
100	$3,33 \cdot 10^{-3}$	34	$3,48 \cdot 10^{-3}$
90	$3,29 \cdot 10^{-3}$	29	$3,58 \cdot 10^{-3}$
80	$3,31 \cdot 10^{-3}$	25	$3,63 \cdot 10^{-3}$
70	$3,32 \cdot 10^{-3}$	21	$3,84 \cdot 10^{-3}$
62	$3,39 \cdot 10^{-3}$	17	$4,01 \cdot 10^{-3}$
54	$3,39 \cdot 10^{-3}$	13	$4,39 \cdot 10^{-3}$
49	$3,41 \cdot 10^{-3}$	9	$4,96 \cdot 10^{-3}$
44	$3,41 \cdot 10^{-3}$	5	$6,13 \cdot 10^{-3}$

Deze resultaten zijn uitgezet in grafiek no. 2

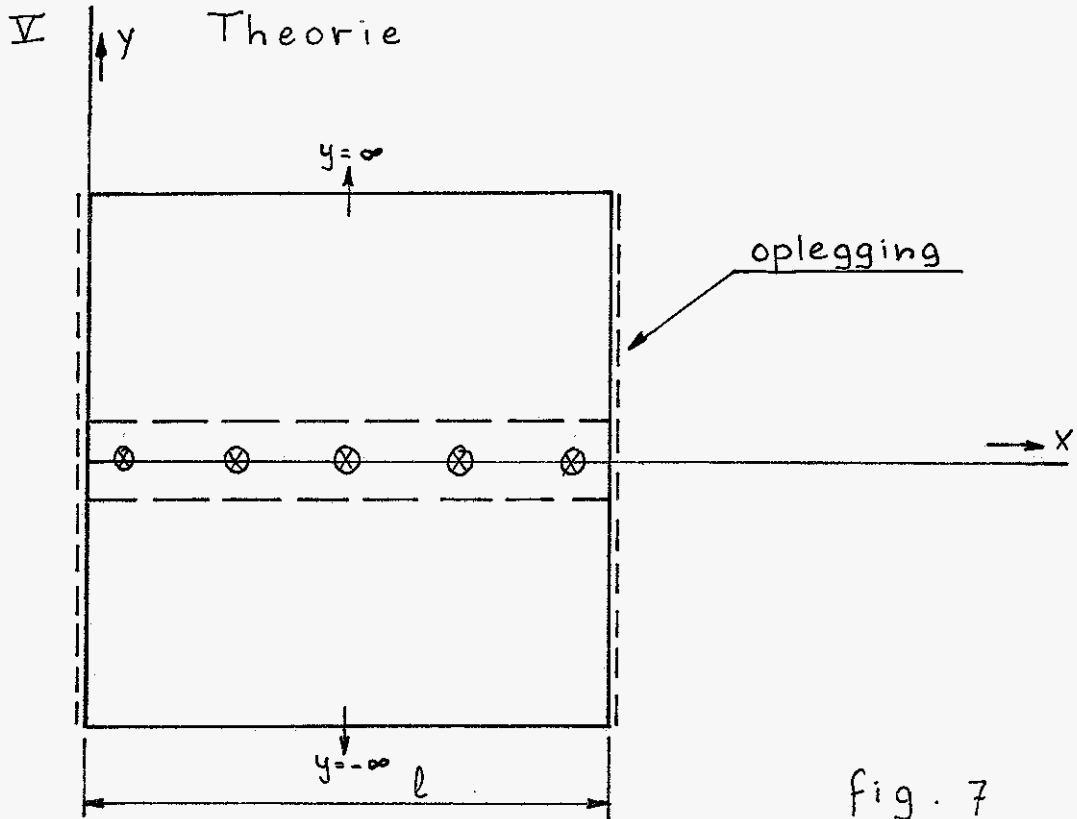


fig. 7

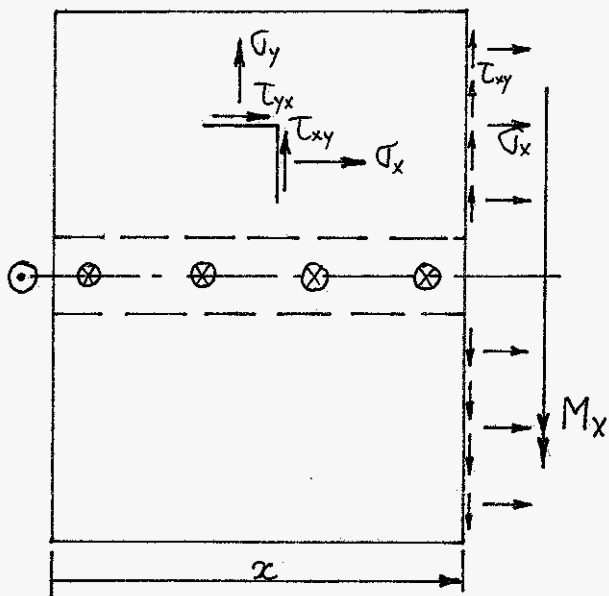


fig. 8

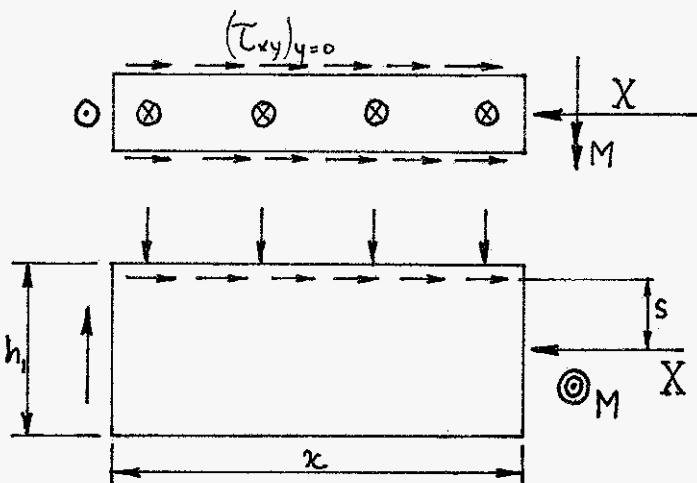


fig. 9

Volgens Girkmann: Flächentragwerke pag. 119-126
geldt voor oneindig brede flenzen:

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n - 2B_n) + \alpha_n y B_n \} e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x.$$

$$\sigma_y = - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - \alpha_n y B_n) e^{-\alpha_n y} \sin \alpha_n x.$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n - B_n) + \alpha_n y B_n \} e^{-\alpha_n y} \cos \alpha_n x.$$

$$A_n = - \frac{m_n s (1-\nu)}{(3+\nu)J + \frac{4h}{\alpha_n} (s^2 + i^2)}$$

$$B_n = \frac{m_n s (1+\nu)}{(3+\nu)J + \frac{4h}{\alpha_n} (s^2 + i^2)}$$

hierin is:

$$M_x = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \sin \alpha_n x \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{\ell} \quad n = 1, 2, \dots$$

m_n is afhankelijk van de uitwendige belasting.

s is de afstand van middenvlak van de flens tot het hart van de balk.

ν is de dwars contractie coëfficiënt.

h is de dikte van de flens.

J is het traagheidsmoment van de balk.

$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ is de traagheidsstraal van de balk.

verder geldt:

$$M = M_x + X \cdot s$$

met

$$X = 2h \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n) \frac{\sin \alpha_n x}{\alpha_n}$$

VI Toepassing theorie op doorgemeten proefstuk:

$$E = 108,4 \text{ kgf/cm}^2 \quad \text{uit } \varphi_{\max} \text{ van de balk.}$$

$$s = 4,5 \text{ cm}$$

$$\nu = 0,13 \quad \text{uit vroegere metingen (zie rapport WE 67-6)}$$

$$h = 1,5 \text{ cm}$$

$$J = 488,3 \text{ cm}^4$$

$$F = 53,0 \text{ cm}^2$$

$$i^2 = 9,21 \text{ cm}^2$$

1 Bepaling spanningsverdeling.

$$A_n = - \frac{3.915 m_n}{1.528 \cdot 10^3 + \frac{0.1768}{\alpha_n} \cdot 10^3}$$

$$B_n = \frac{5.085 m_n}{1.528 \cdot 10^3 + \frac{0.1768}{\alpha_n} \cdot 10^3}$$

De belasting en momentenlijn zijn a.v. :

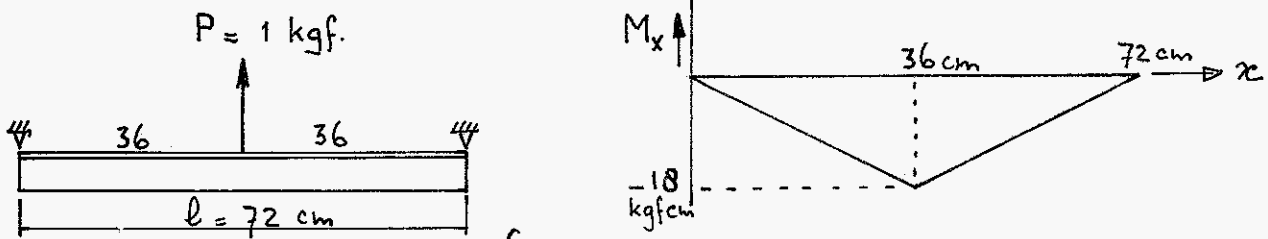


Fig. 10

Als we de momentenlijn in een Fourrierreeks ontwikkelen en daarvan 3 termen meenemen, krijgen we de volgende resultaten :

n	m_n kgf/cm	α_n $\frac{1}{cm}$	A_n kgf/cm ²	B_n kgf/cm ²
1	-14.59	$\frac{\pi}{72} = 0.0436$	$10.23 \cdot 10^{-3}$	$-13.29 \cdot 10^{-3}$
2	+ 1.62	$\frac{\pi}{24} = 0.1309$	$-2.20 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$
3	- 0.58	$\frac{10\pi}{144} = 0.2182$	$0.97 \cdot 10^{-3}$	$-1.26 \cdot 10^{-3}$

Dit geeft de volgende spanningsverdeling :

y cm	σ_x kgf/cm ²		σ_y kgf/cm ²		τ_{xy} kgf/cm ²	
	$x = 36$ cm	$x = 18$ cm	$x = 36$	$x = 18$	$x = 36$	$x = 18$
0	$48.22 \cdot 10^{-3}$	$17.96 \cdot 10^{-3}$	$-9.00 \cdot 10^{-3}$	$-4.98 \cdot 10^{-3}$	0	$18.63 \cdot 10^{-3}$
10	$21.19 \cdot 10^{-3}$	$13.27 \cdot 10^{-3}$	$-2.24 \cdot 10^{-3}$	$-2.24 \cdot 10^{-3}$	0	$8.36 \cdot 10^{-3}$
20	$10.58 \cdot 10^{-3}$	$7.47 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$0.09 \cdot 10^{-3}$	0	$3.47 \cdot 10^{-3}$
30	$5.18 \cdot 10^{-3}$	$3.76 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	0	$1.09 \cdot 10^{-3}$
40	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	0	$0.03 \cdot 10^{-3}$
50	$0.89 \cdot 10^{-3}$	$0.63 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$	0	$-0.43 \cdot 10^{-3}$
60	$0.15 \cdot 10^{-3}$	$0.11 \cdot 10^{-3}$	$1.79 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	0	$-0.58 \cdot 10^{-3}$

Deze spanningen zijn in grafiek no. 3 uitgezet.

2 Maximale hoekverdraaiing van de balk :

Als ons xyz-assenkruis rechtsdraaiend is, is

$$z'' = - \frac{M}{EJ} = - \frac{M_x + X \cdot s}{EJ} = \varphi'$$

$$EJ \varphi_{\max} = - \sum_{n=1}^3 \frac{m_n}{\alpha_n} - 2hs \sum_{n=1}^3 \frac{A_n - B_n}{\alpha_n^2}$$

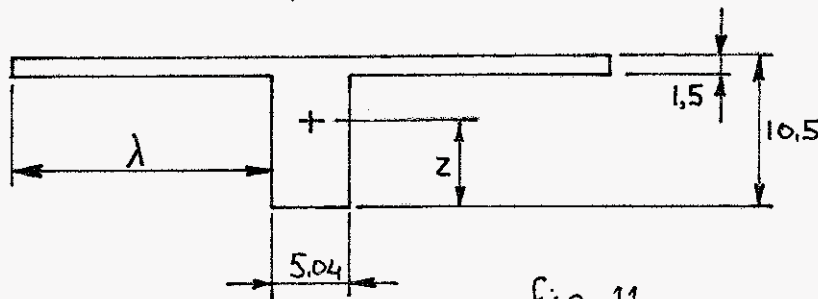
$$\varphi_{\max} = 3,044 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

3 Maximale hoekverdraaiing van elementaire balk met gelijke uitwendige belasting (1 kgf) :

$$EJ \varphi_{\max} = - \sum_{n=1}^3 \frac{m_n}{\alpha_n}$$

$$\varphi_{\max} = 6,138 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

4 Bepaling van meedragende breedte λ volgens definitie uit II :



elementair :

$$z = \frac{29,25 \lambda + 277,83}{3 \lambda + 52,92} \text{ cm. (plaats zwaartepunt)}$$

$$J = \frac{0,5625 \lambda^3 + 1577,56 \lambda^2 + 36216,89 \lambda + 151345,05}{\lambda^2 + 35,3 \lambda + 311,52} \text{ cm}^4$$

theorie Girkmann :

f = verplaatsing richting z-as. (zie VI.2)

f_{\max} = verplaatsing richting z-as voor $\kappa = \frac{l}{2}$

$$EJ f_{\max} = - \left| \sum_{n=1}^3 \frac{m_n}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n \kappa + 2hs \sum_{n=1}^3 \frac{(A_n - B_n)}{\alpha_n^3} \sin \alpha_n \kappa \right|_{\kappa = \frac{l}{2}}^{\kappa = 0}$$

$$EJ f_{\max} = 3909 \text{ kgf cm}^3$$

$$f_{\max} = 0,0742 \text{ cm}$$

Neem nu een fictieve balk met traagheidsmoment J_f . Deze moet met momentenlijn $\sum m_n \sin \alpha_n x$ een maximale zakking $0,0742 \text{ cm}$ geven.

$$E J_f f_{\max} = \left| - \sum_{n=1}^3 \frac{m_n}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x \right|_{x=\frac{l}{2}}^{x=0} = 7597 \text{ kgfcm}^3$$

$$J_f = 944,46 \text{ cm}^4$$

Gelijkstelling $J = J_f$ levert :

$$\lambda^3 + 1126,31 \lambda^2 + 5115,45 \lambda - 253995,50 = 0$$

een oplossing hiervoor is: $\lambda = 12,85 \text{ cm}$
dit geeft een totale plaatbreedte van
 $2 \times 12,85 + 5 = 30,7 \text{ cm}$.

VII Conclusies :

Meedragende breedte :

Plaatsen we de breedte $b = 30,7 \text{ cm}$ in grafiek no. 2, die de experimentele resultaten voor φ_{\max} bij variabele b geeft, dan zien we, dat de theoretisch bepaalde meedragende breedte, bij de overgang van het vlaklopende gebied naar het gebied met snel toenemende φ_{\max} bij afnemende plaatbreedte ligt.

De resultaten van theorie en experiment komen dus goed overeen.

Hoekverdraaiing van de balk :

theoretisch $\varphi_{\max} = 3,044 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ voor $b = \infty$

experimenteel $\varphi_{\max} = 3,29 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ voor $b = 110 \text{ cm}$.

Het verschil is ca. 8%, terwijl verwacht kan worden, dat dit percentage nog iets kleiner wordt, als de maximale plaatbreedte groter wordt.

Dus ook hier een vrij goede overeenstemming.

VIII Opmerkingen :

Het proefstukmateriaal, polystyreen schuim, is niet homogeen en niet isotroop.

De elasticiteitsmodulus is bepaald uit de hoekverdraaiing van de einden van de balk

Gebleken is, dat de op deze manier bepaalde E voor twee gelijke balken van deze afmetingen, die zich in het blok, waaruit het proefstuk gesneden is, vrij dicht naast elkaar en centraal in het blok bevonden, ongeveer een factor 2 uit elkaar kunnen liggen.

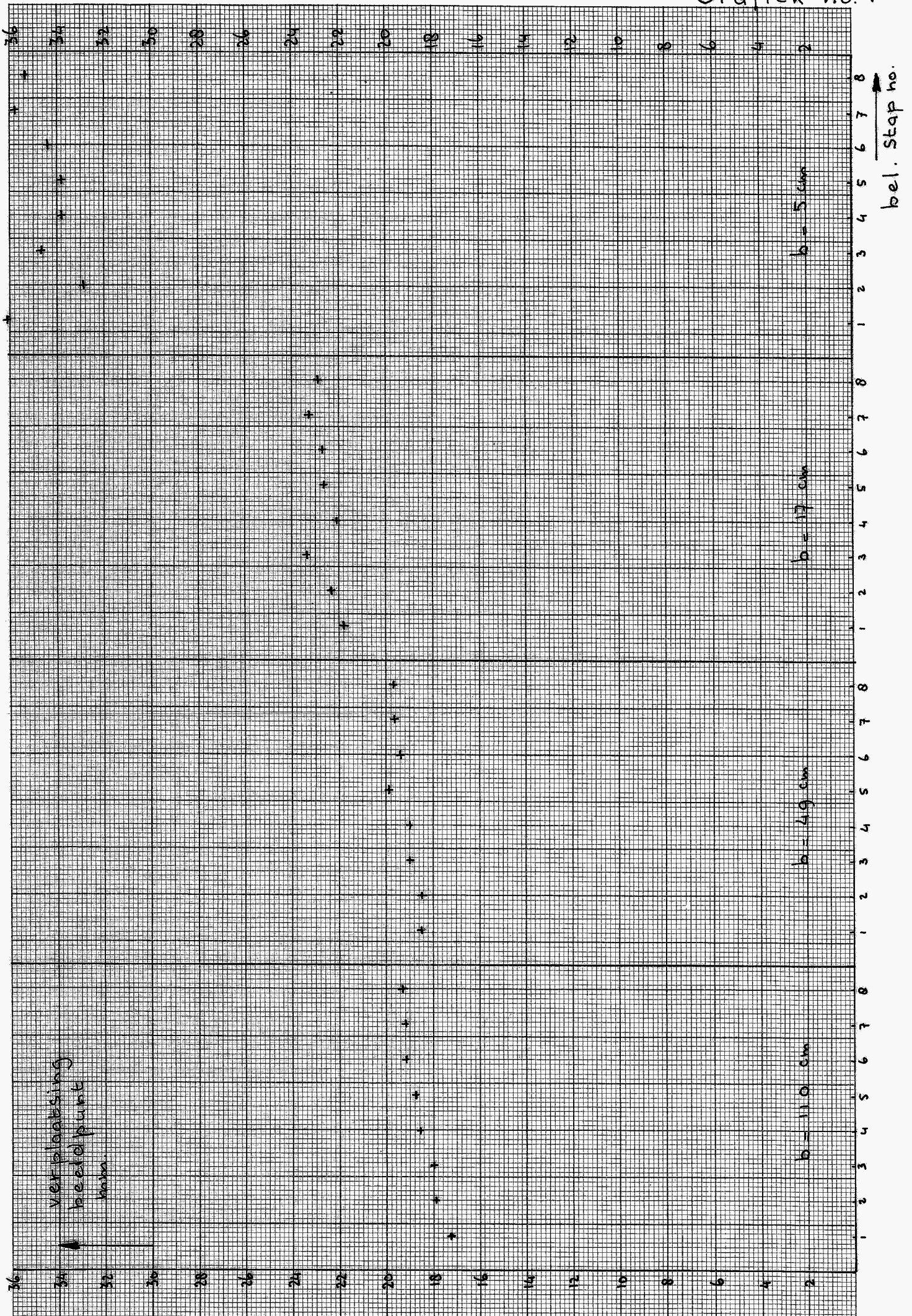
Een betere benadering voor E zou gevonden kunnen worden, door gebruik te maken van de verdraaiingen van alle spiegeltjes en hieruit een gemiddelde te bepalen.

Informatie over de stijfheid van het materiaal van de plaat is niet beschikbaar.

De oorzaak van een grotere verdraaiing van de spiegels 12 en 13, dan die van 1 en 2, kan inhomogeniteit zijn, kan echter ook een gevolg zijn van de volgorde van het aftekenen van de beeldpunten n.l. 1, 2, 3 12, 13, dus een kruipeffect.

Bij de uitdrukking voor \bar{E}_x heeft Girkmann de invloed van de dwarscontractie verwaarloosd. Daardoor ontstaat een discontinuïteit in \bar{T}_x voor $y=0$ (zie abb. 68.a) Wij hebben deze beïnvloeding niet verwaarloosd, en daarom zijn de noemers van de uitdrukkingen voor A_n en B_n iets anders, dan bij Girkmann.

Grafiek no. 1



Graphik no. 2

max
load

6.13

5.10

4.16

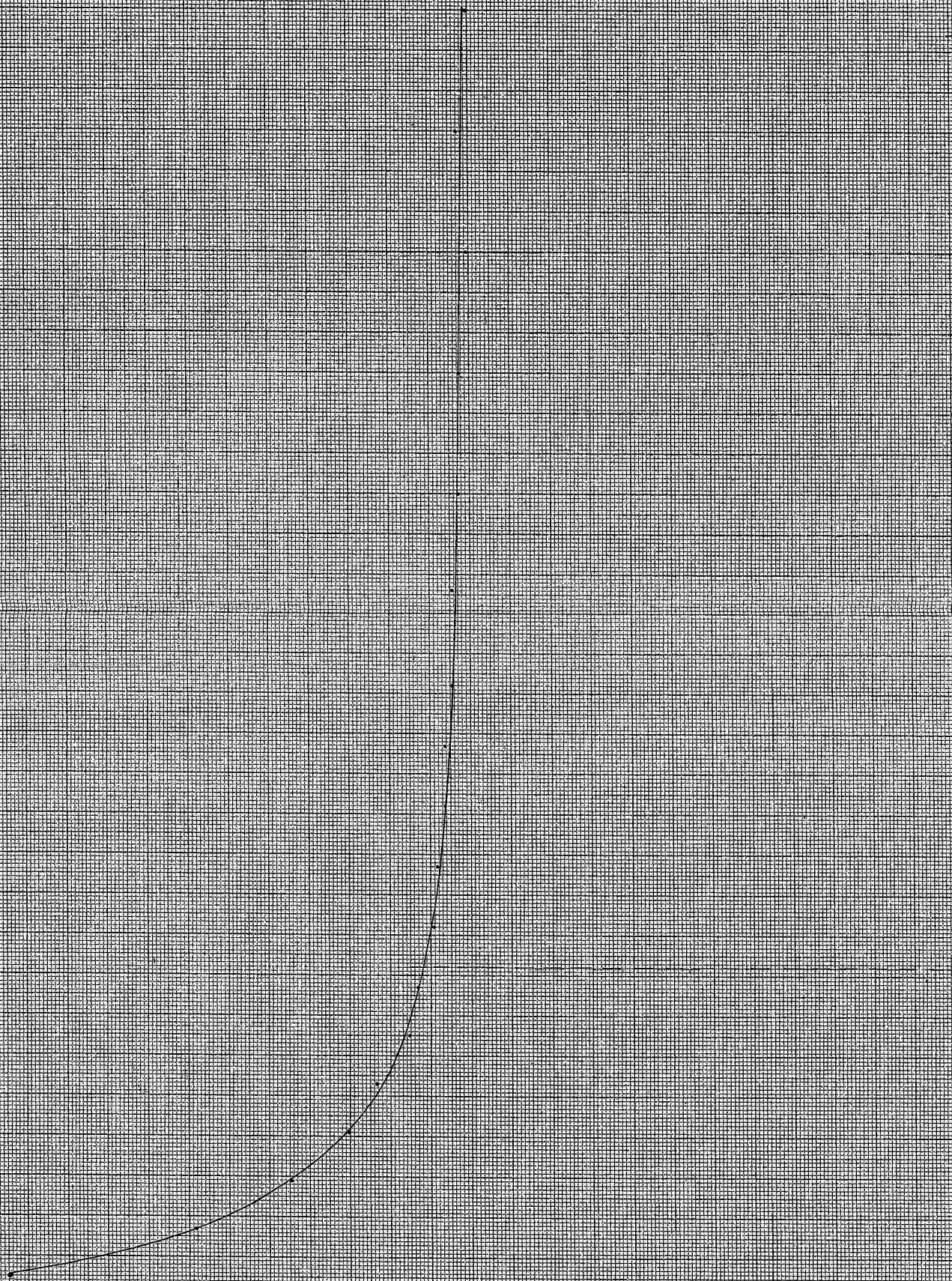
3.03

2.01

1.05

0.5

20 10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100



Grafiek no 3

