

De Discrete Fourier Transform : achtergronden en gebruik van de Fast Fourier Transform

Citation for published version (APA):

Etten, van, W. C. (1971). *De Discrete Fourier Transform : achtergronden en gebruik van de Fast Fourier Transform*. Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1971

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

~~18~~ bse

Afdeling Elektrotechniek

groep ECA

De Discrete Fourier Transform

Achtergronden en gebruik van de
Fast Fourier Transform

W.C. van Etten

november 1971

Samenvatting

Dit rapport laat zien dat men de Discrete Fourier Transform kan gebruiken om Fouriertransformaties te benaderen. Aangegeven wordt wat de invloed op het transformatieresultaat is van de diverse parameters, die een rol spelen bij de Discrete Fourier Transform, en hoe deze parameters gekozen moeten worden om tot een aanvaardbare benadering van de Fouriertransformatie te komen.

Inleiding

Dit rapport behandelt de Discrete Fourier Transform (DFT). De Fast Fourier Transform (FFT) is een voorschrift om de DFT op snelle, efficiënte wijze te berekenen.

Rekencentra beschikken in het algemeen over procedures waarin het algoritme dat ten grondslag ligt aan de FFT verwerkt is.

In de meeste artikelen omtrent de FFT wordt uitgegaan van een definitie van de DFT als zelfstandige transformatie. Omdat in dit rapport de DFT gebruikt wordt om Fouriertransformaties te benaderen, zal uitgegaan worden van de Fourier-integralen om zo te komen tot een definitie van de DFT. Hierdoor wordt de relatie tussen beide transformaties verduidelijkt.

Uit een analyse van de DFT volgen een aantal parameters die van belang zijn bij het praktisch gebruik. Nagegaan zal worden wat de invloed is van deze parameters op het transformatieresultaat. Dit zal met een aantal voorbeelden worden toegelicht.

I. De Fouriertransformatie

De Fourierintegraal wordt meestal gegeven door :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

waarmee een functie $f(t)$, die aan bepaalde voorwaarden voldoet, getransformeerd kan worden in een functie $F(\omega)$, die soms eigenschappen heeft die beter te hantieren of fysisch gemakkelijker te interpreteren zijn, dan die van $f(t)$. De bijbehorende inverse transformatie luidt :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Sommige auteurs geven er de voorkeur aan de faktor $\frac{1}{2\pi}$ voor uitdrukking (1) te zetten in plaats van bij (2). Ook het gelijk verdelen van deze faktor door middel van een faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ over beide uitdrukkingen vindt voorstanders. Een derde mogelijkheid is over te gaan op $f = \frac{\omega}{2\pi}$, waardoor de uitdrukkingen (1) en (2) volkomen symmetrisch worden en men in het frekwentiedomein de resultaten krijgt in aantal trillingen per seconde f , in plaats van de minder sprekende hoekfrekwentie ω . In dit rapport is voor dit laatste gekozen.

De Fourierintegraal luidt dan :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3)$$

met als inverse transformatie

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)e^{j2\pi ft} df \quad (4)$$

De volkomen gelijkwaardigheid van tijd- en frekwentiedomein komt in deze uitdrukkingen goed tot zijn recht.

Deze definities hebben tevens tot gevolg dat allerlei rekenregels en eigenschappen die samenhangen met de Fouriertransformatie, in tijd- en frekwentiedomein volledig symmetrisch zijn.

II. Beschrijving van begrensde signalen d.m.v. Fourierreksen

Signalen die begrensd zijn in het frekwentiedomein

Stel dat een signaal $f(t)$ een spektrum $F(f)$ heeft dat nul is boven een zekere grensfrekwentie f_g (fig. 1)

$$F(f) = 0 \quad \text{voor} \quad |f| \geq f_g \quad (5)$$

We zetten deze functie periodiek voort met periode $B=2f_g$ en noemen de functie die aldus ontstaat $F_*(f)$.

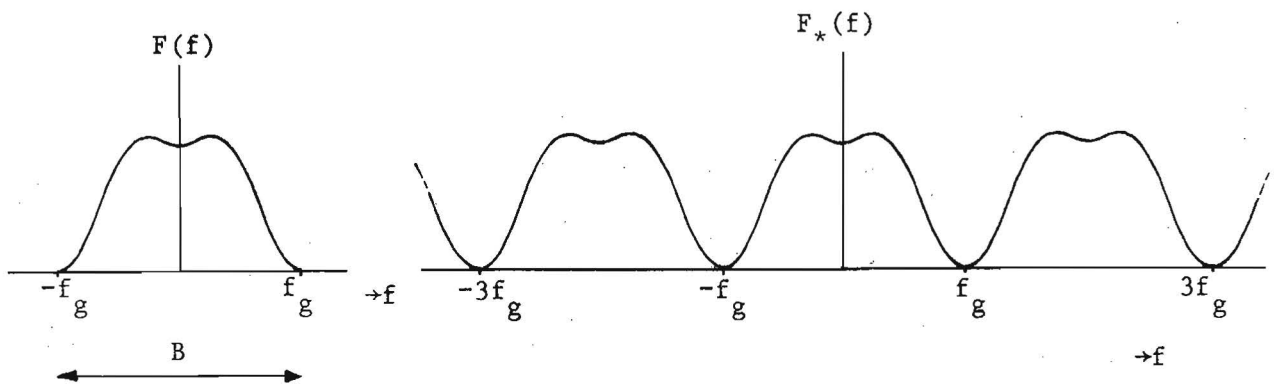


fig. 1

De functie $F_*(f)$ kan ontwikkeld worden in een Fourierreksen

$$F_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\pi f/f_g} \quad (6)$$

zodat voor $F(f)$ geschreven kan worden

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn\pi f/f_g} \quad \text{voor} \quad |f| < f_g \quad (7)$$

met

$$A_n = \frac{1}{B} \int_{-f_g}^{f_g} F(f) e^{jn\pi f/f_g} df \quad (8)$$

Uit de vergelijkingen (8) en (4) volgt :

$$A_n = \frac{1}{B} f\left(n \frac{1}{B}\right) \quad (9)$$

zodat (7) overgaat in :

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(n \frac{1}{B}\right) e^{-jn\pi f/f_g} \quad \text{voor } |f| < f_g \quad (10)$$

De frekwentiefunctie $F(f)$ kan dus uitgedrukt worden in de samplewaarden $f\left(n \frac{1}{B}\right)$ van de tijdsfunctie.

Signalen die begrensd zijn in het tijddomein

We gaan nu uit van een functie $f(t)$, waarvoor geldt (fig. 2) :

$$f(t) = 0 \quad \text{voor } |t| \geq t_g \quad (11)$$

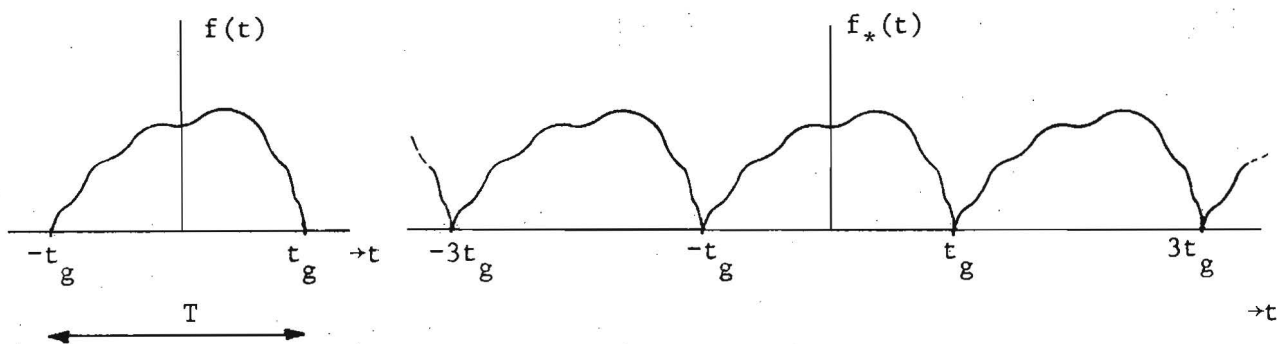


fig. 2

Deze functie wordt periodiek voortgezet met periode $T=2t_g$. De periodieke functie die zo ontstaat noemen we $f_*(t)$. Hiervoor kunnen we een Fourierreeks opschrijven

$$f_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{jn\pi t/t_g} \quad (12)$$

zodat

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{jn\pi t/t_g} \quad \text{voor } |t| < t_g \quad (13)$$

met

$$B_n = \frac{1}{T} \int_{-t_g}^{t_g} f(t) e^{-jn\pi t/t_g} dt \quad (14)$$

Uit (14) en (3) volgt :

$$B_n = \frac{1}{T} F(n \frac{1}{T}) \quad (15)$$

als $F(f)$ de Fouriergetransformeerde van $f(t)$ is.

Door substitutie van (15) in (13) wordt deze laatste uitdrukking :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(n \frac{1}{T}) e^{jn\pi t/t_g} \quad \text{voor } |t| < t_g \quad (16)$$

In dit geval is het dus mogelijk om de tijdsfunctie $f(t)$ uit te drukken in de samples $F(n \frac{1}{T})$ van de frekwentiefunctie.

N.B.

Het produkt $\frac{1}{T} F(n \frac{1}{T})$ behorende bij het n^e sample is gelijk aan het gearceerde oppervlak in fig. 3.

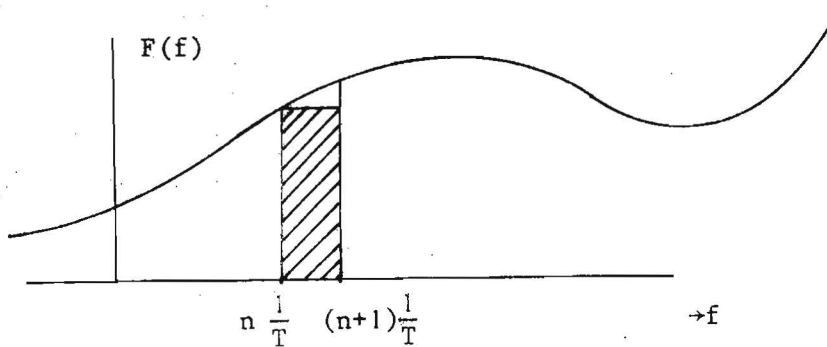


fig. 3

Een benadering van de integraal (4) m.b.v. de trapeziumregel luidt :

$$\sum_{n=-N+1}^{N-1} F(n \cdot \Delta f) e^{j2\pi n \cdot \Delta f \cdot t} \cdot \Delta f + \frac{1}{2} F(-N \cdot \Delta f) e^{-j2\pi N \cdot \Delta f \cdot t} \cdot \Delta f + \frac{1}{2} F(N \cdot \Delta f) e^{j2\pi N \cdot \Delta f \cdot t} \cdot \Delta f$$

Omdat een Fourierreeks een convergerende reeks is, zal in (16)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F(\pm N \cdot \Delta f) e^{\pm j2\pi N \cdot \Delta f \cdot t} = 0$$

Indien $\Delta f = \frac{1}{T}$ dan beschrijft vergelijking (16) voor dit geval de Fourier-integraal (4) d.m.v. de trapeziumregel en wel exakt.

Dit geldt eveneens voor de vergelijking (10) m.b.t. (3).

III. De Discrete Fourier Transform

We gaan een functie $f(t)$ met Fouriergetransformeerde $F(f)$ over een tijdsinterval $0 \leq t < T$ in N equidistante punten bemonsteren met sampleafstand τ_s . Het signaal dat op deze manier ontstaat kan beschreven worden door de gegeneraliseerde functie :

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(t) \delta(t - k\tau_s) \quad (17)$$

Nu geldt :

$$f(t) \delta(t - k\tau_s) \leftrightarrow f(k\tau_s) e^{-j2\pi f k \tau_s} \quad (18)$$

zodat

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(t) \delta(t - k\tau_s) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-j2\pi f k \tau_s} = F_N(f) \quad (19)$$

Uit (19) volgt dat $F_N(f)$ een periodieke functie is met periode $\frac{1}{\tau_s}$.

Stel $\frac{1}{\tau_s} = B$ en substitueer dit in (19) dan wordt :

$$F_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{1}{B}\right) e^{-j2\pi k f / B} \quad (20)$$

Deze functie bevat geen singulariteiten. Een computer zal deze functie slechts kunnen weergeven in een eindig aantal punten. Hiervoor kiezen we N equidistante punten in het interval $0 \leq f < B$. Dit interval bestrijkt dan dus één periode van $F_N(f)$. Dan wordt met $\nu_s = \frac{B}{N}$

$$F_\ell = F_N\left(\ell \frac{B}{N}\right) = F_N(\ell \nu_s) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{1}{B}\right) e^{-j2\pi k \ell / N} \quad (21)$$

voor $\ell=0, 1, \dots, N-1$

We gaan nu het spektrum $F(f)$ bemonsteren in N equidistante punten met sampleafstand ν_s over een interval $0 \leq f < B$. Analoog aan vergelijking (19) volgt dan :

$$\sum_{m=0}^{N-1} F(f) \delta(f - m\nu_s) \leftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} F(m\nu_s) e^{j2\pi m \nu_s t} = f_N(t) \quad (22)$$

Hieruit volgt dat $f_N(t)$ een periodieke functie is met periode $\frac{1}{\nu_s}$.

Stellen we $\frac{1}{v_s} = T$ dan wordt :

$$f_N(t) = \sum_{m=0}^{N-1} F\left(m \frac{1}{T}\right) e^{j2\pi mt/T}$$

Deze functie zal door een computer ook weer slechts in een eindig aantal punten weergegeven kunnen worden. Hiervoor kiezen we nu N equidistante punten in het interval $0 \leq t < T$. Met $\tau_s = \frac{T}{N}$ krijgen we :

$$\tilde{f}_n = f_N\left(n \frac{T}{N}\right) = f_N(n\tau_s) = \sum_{m=0}^{N-1} F\left(m \frac{1}{T}\right) e^{j2\pi mn/N} \quad (24)$$

voor $n=0, 1, \dots, N-1$

Voeren we nu een faktor $\frac{1}{N}$ in bij vergelijking (24) dan vormen de uitdrukkingen :

$$F_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{1}{B}\right) e^{-j2\pi k\ell/N} \quad (25)$$

voor $\ell=0, 1, 2, \dots, N-1$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F\left(m \frac{1}{T}\right) e^{j2\pi mn/N} \quad (26)$$

voor $n=0, 1, 2, \dots, N-1$

een compatibel stelsel, d.w.z.

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(k \frac{1}{B}\right) e^{j2\pi m(n-k)/N} \quad (27)$$

Door middel van (25) en (26) worden de N samples over één periode van $f_N(t)$ éénduidig afgebeeld op N samples over één periode van $F_N(f)$ en omgekeerd. De gelijkheid (27) volgt uit de orthogonaliteits relatie

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi m(n-k)/N} = \begin{cases} N & \text{voor } n-k=i.N \\ 0 & \text{voor } n-k \neq i.N \end{cases} \quad \text{i een geheel getal} \quad (28)$$

De periodiciteit van de reeksen (25) en (26) komt tot uiting in de volgende relaties :

$$\dots = F_{\ell-2N} = F_{\ell-N} = F_\ell = F_{\ell+N} = F_{\ell+2N} = \dots \quad (29)$$

$$\dots = f_{n-2N} = f_{n-N} = f_n = f_{n+N} = f_{n+2N} = \dots \quad (30)$$

Uitdrukking (25) wordt Discrete Fouriertransform genoemd, terwijl (26) bekend staat als Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT).

Om de DFT en IDFT snel en effectief te berekenen zijn in de meeste rekencentra speciale procedures aanwezig die bekend staan onder de naam Fast Fourier Transform [2].

In het volgende zal worden getoond hoe de DFT en IDFT kunnen worden gebruikt als benadering voor resp. de integralen (3) en (4).

IV. Benadering van Fourierintegralen d.m.v. de Discrete Fourier Transform.

Stel dat we een bandbegrensde functie $f(t)$ hebben, waarvan de Nyquist samples nul worden buiten het interval $0 \leq t < \frac{N}{B}$. Denken we de Fouriergetransformeerde van $f(t)$ periodiek voortgezet met periode B , dan volgt uit vergelijking (10) dat voor $F(f)$ geschreven kan worden :

$$F(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{B} f\left(n \frac{1}{B}\right) e^{-j2\pi n f / B} \quad \text{voor } 0 \leq f < B \quad (31)$$

Vergelijken we dit met (25) dan zien we dat de DFT in N punten op het interval $0 \leq f < B$ op een faktor $\frac{1}{B}$ na gelijk wordt aan de Fouriergetransformeerde van $f(t)$. Een analoge redenering kan gevolgd worden voor een functie $F(f)$, waarvan de getransformeerde $f(t)$ beperkt is in de tijd en waarvan de Nyquist samples in het frekwentiedomein nul worden buiten het interval $0 \leq f < \frac{N}{T}$. Dan volgt uit vergelijking (16) :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{T} F\left(n \frac{1}{T}\right) e^{j2\pi n t / T} \quad \text{voor } 0 \leq t < T \quad (32)$$

Uit (26) volgt nu dat de IDFT in N punten op het interval $0 \leq t < T$ op een faktor $\frac{N}{T}$ na gelijk wordt aan de getransformeerde $f(t)$ van $F(f)$.

In het algemeen zullen echter de te transformeren functies de genoemde eigenschap niet bezitten. Toch kan in die gevallen de Fourierintegraal benaderd worden m.b.v. de DFT. Er moet dan een grens vastgesteld worden waarboven de samples zo klein worden, dat ze een te verwaarlozen bijdrage leveren tot het transformatieresultaat. De range van de functie wordt tot deze grens beperkt. Deze begrensde functie wordt gesampled, te beginnen in het nulpunt van het argument. Is een functie zodanig dat ook voor negatieve waarden van het argument de samples een niet te verwaarlozen bijdrage leveren, dan kan men dit ondervangen door de functie te verschuiven en op het transformatieresultaat de bekende verschuivingsregels uit de Fouriertheorie toe te passen. Voor het veel voorkomende geval van reële tijdsfuncties hoeft in het frekwentiedomein deze verschuiving niet te worden toegepast, omdat er procedures bestaan die voor negatieve argumentwaarden automatisch de toegevoegd complexe waarden nemen van de samples die behoren bij de even grote positieve argumentwaarden.

Bij de DFT bepalen in elk domein een drietal parameters het transformatie- resultaat. Deze parameters zijn in onderstaand schema weergegeven.

Tijddomein	Frekwentiedomein
N	N
T	B
τ_s	ν_s

N = het aantal samples; dit aantal moet voor de meeste FFT procedures een macht van twee zijn. Er zijn in het tijd- en frekwentiedomein evenveel samples.

T = het interval in het tijddomein wat door de transformatie wordt bestreken; de periode van de periodiek voortgezette tijdsfunctie.

τ_s = de onderlinge afstand van de samples in het tijddomein.

B = het interval in het frekwentiedomein wat door de transformatie wordt bestreken; de periode van de periodiek voortgezette frekwentiefunctie. In het geval van een laagdoorlaatkarakter is $B=2f_g$, waarbij f_g die frekwentie is waarboven men de bijdrage van de doorlaatkarakteristiek tot het transformatie- resultaat verwaarloost.

ν_s = de onderlinge afstand van de samples in het frekwentiedomein.

Tussen de parameters bestaat een aantal relaties, zodanig dat men twee grootheden kan kiezen, waarna de andere vastliggen. De belangrijkste betrekkingen zijn :

$$T = N\tau_s \quad (33)$$

$$B = N\nu_s \quad (34)$$

$$\tau_s = \frac{1}{B} \quad (35)$$

$$\nu_s = \frac{1}{T} \quad (36)$$

Hiervan zijn er drie ~~alle~~ onafhankelijk.

In het transformatieresultaat kunnen een drietal soorten vervormingen optreden :

- 1) Het verschijnsel van Gibbs.
- 2) Overlapping.
- 3) Het oplossend vermogen is onvoldoende (d.w.z. τ_s c.q. ν_s te groot).

Aan de hand van een paar voorbeelden zullen we deze effecten nader bekijken en nagaan wat er gedaan kan worden om dit soort vervormingen te verkleinen tot aanvaardbare proporties.

Het verschijnsel van Gibbs is bekend uit de theorie over Fouriertransformatie [1].

Het treedt op wanneer men een functie met een discontinuïteit wil verkrijgen uit zijn getransformeerde. In fig. 4 is de getransformeerde van $\frac{1}{1+j\omega}$ m.b.v. de IDFT bepaald. De Fouriergetransformeerde van deze frekwentiefunctie bevat een discontinuïteit in $t=0$. We zien in deze figuur dan ook duidelijk het verschijnsel van Gibbs optreden. (N.B. de grafieken zijn verkregen door de samplepunten van de FFT d.m.v. rechte lijnen met elkaar te verbinden. Men kan aantonen dat deze samplepunten juist samenvallen met de maxima en minima van

$$\int_{-\infty}^{\omega_g t} \frac{\sin \tau}{\pi \tau} d\tau, \text{ waarin } \omega_g = 2\pi f_g.$$

Opvoeren van de grensfrekwentie f_g heeft tot gevolg dat de maxima en minima dichter bij elkaar komen te liggen, maar het is niet mogelijk om ze te laten verdwijnen (fig. 5 en fig. 6). Om te laten zien, dat het verschijnsel van Gibbs ook optreedt vóór de discontinuïteit is in fig. 7 een hele periode van de d.m.v. de IDFT ontstane tijdsfunctie afgebeeld.

Gaat het om een functie zonder discontinuïteit, doch waarvan de afgeleide groot wordt dan kan dit verschijnsel eveneens optreden. In dit geval is het echter mogelijk om door opvoeren van de grensfrekwentie het fenomeen geheel te verwijderen. De figuren 8, 9 en 10 geven hiervan een voorbeeld. Hier is de respons op een delta-puls afgebeeld van een met weerstanden afgesloten kabel.

Is de periode van het transformatieresultaat te klein gekozen, dan kan dit resultaat niet volledig afgebeeld worden binnen deze toegemeten periode. Dan ontstaat een vervorming die in de sampling theorie overlapping of aliasing genoemd wordt. Men kan hiermee te maken krijgen zowel in het frekwentie- als in het tijddomein. Een voorbeeld is gegeven in fig. 11, waar een poging is gedaan om de impulsrespons van een 10e orde Butterworth laagdoorlaatsysteem weer te geven. In deze figuur is $T=16$ sec. Op dit tijdstip is $h(t)$ echter nog lang niet nul geworden. Het ligt dus in de lijn der verwachting dat er verbetering zal optreden indien T wordt opgevoerd. In fig. 12 is deze periodeduur verdubbeld, wat al een aanzienlijke verbetering geeft. Toch lijkt het erop dat op $t=32$ de slingering in het signaal nog niet geheel is uitgedempt, wat aanleiding is om T nog wat op te voeren, zoals in fig. 13 is gedaan. Dit beeld ziet er nu volkomen betrouwbaar uit; op $t=64$ is $h(t)$ al lang tot nul genaderd. De theoretische respons stemt dan ook overeen met deze laatste figuur.

In fig. 14 is ditzelfde voorbeeld nog een keer uitgevoerd doch nu met andere parameters. Alhoewel T zodanig is dat er geen overlapping optreedt en f_g zodanig dat we geen last hebben van het fenomeen van Gibbs, kan dit toch geen goed beeld genoemd worden. Het oplossend vermogen is in deze figuur n.l. slecht, ofwel τ_s is te groot gekozen.

De verschillende soorten vervormingen zijn hier omwille van de duidelijkheid apart behandeld. Vaak zullen echter deze verschijnselen in combinaties optreden. Zo hoeft het ook geen betoog dat in de figuren 4, 5, 7, 8 en 9 het oplossend vermogen zonder meer slecht is. In deze figuren treden de vervormingen 1) en 3) gecombineerd op.

Bij de aanpak van een probleem zal het moeilijk zijn om meteen een optimaal resultaat te krijgen. Het streven moet gericht zijn op een zo klein mogelijk aantal samples, omdat dit de uiteindelijke rekentijd gaat bepalen. Gaat men bijv. uit van het frekwentiedomein dan zal men de benodigde bandbreedte B eenvoudig kunnen bepalen, omdat men immers de frekwentiefunctie kent. Vervolgens zal een schatting gemaakt moeten worden van de periodeduur T . Hierna ligt N vast, zodat alle parameters benodigd voor de FFT dan bekend zijn. Komt men bij de eerste poging niet tot een bevredigend beeld, dan is het vaak mogelijk om uitgaande van dit slechte resultaat meteen bij een tweede poging tot een goed resultaat te komen. Zouden we n.l. bij het voorbeeld van de 10e orde Butterworth impulsrespons fig. 14 als eerste resultaat krijgen dan is aan deze figuur te zien dat het oplossend vermogen circa een faktor 10 beter moet worden en de periodetijd gerust 10 keer zo klein kan worden gekozen. Nemen we nu de bandbreedte 10 keer zo groot, dan zal bij een zelfde aantal samples de periode 10 keer zo klein worden en het oplossend vermogen een zelfde faktor beter. Op deze manier komen we van fig. 14 op een beeld dat er zal uitzien als fig. 13 en dit kan inderdaad een goed resultaat genoemd worden. Zou fig. 11 de eerste poging zijn geweest, dan volgt hieruit dat het oplossend vermogen goed is maar de periode T te klein. Nu zal dus met dezelfde bandbreedte aantal samples moeten worden opgevoerd, wat uiteindelijk zal uitmonden in een plaatje met globaal dezelfde parameters als bij fig. 13.

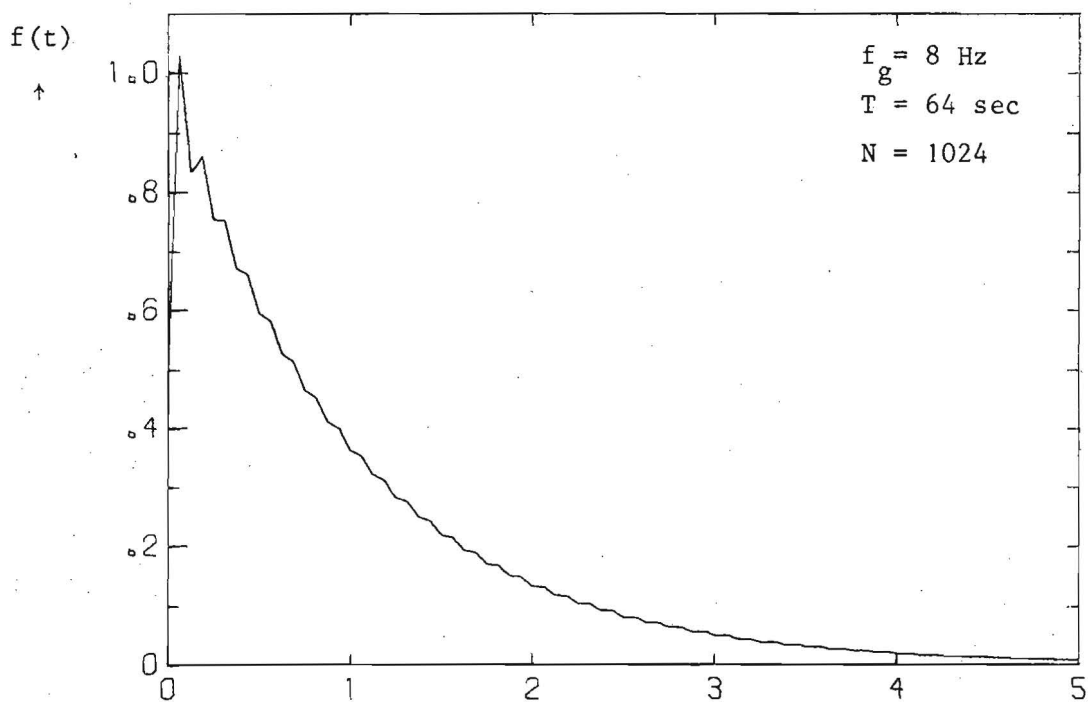


fig. 4. Getransformeerde van $\frac{1}{1+j\omega}$ exact: $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

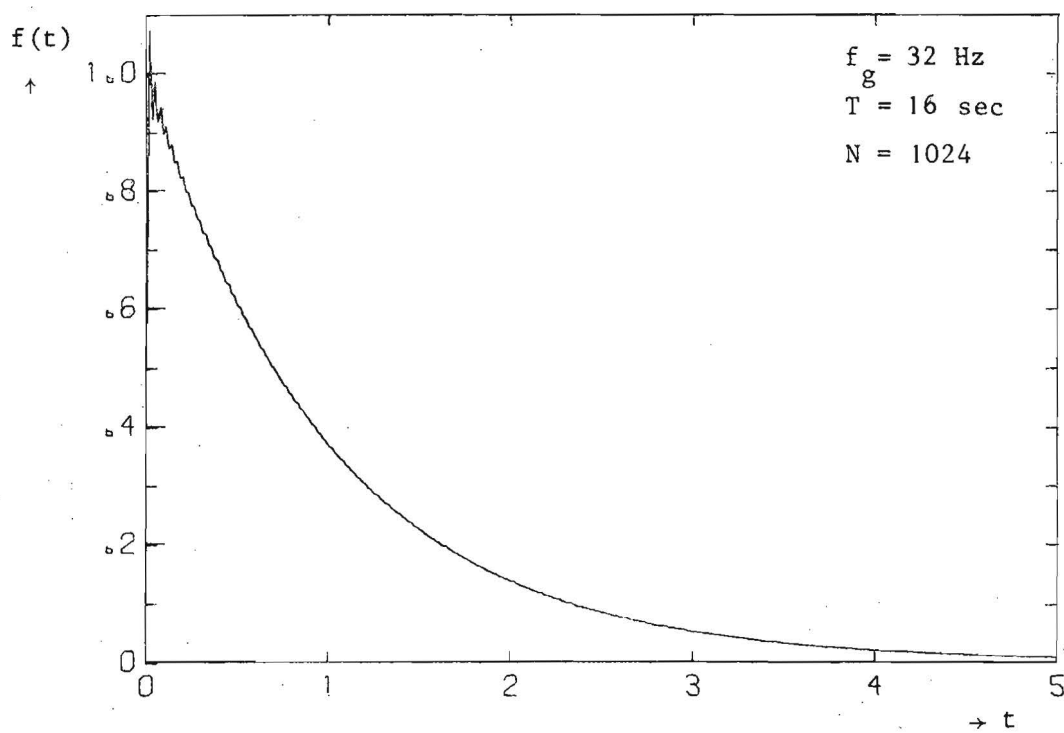


fig. 5. Getransformeerde van $\frac{1}{1+j\omega}$

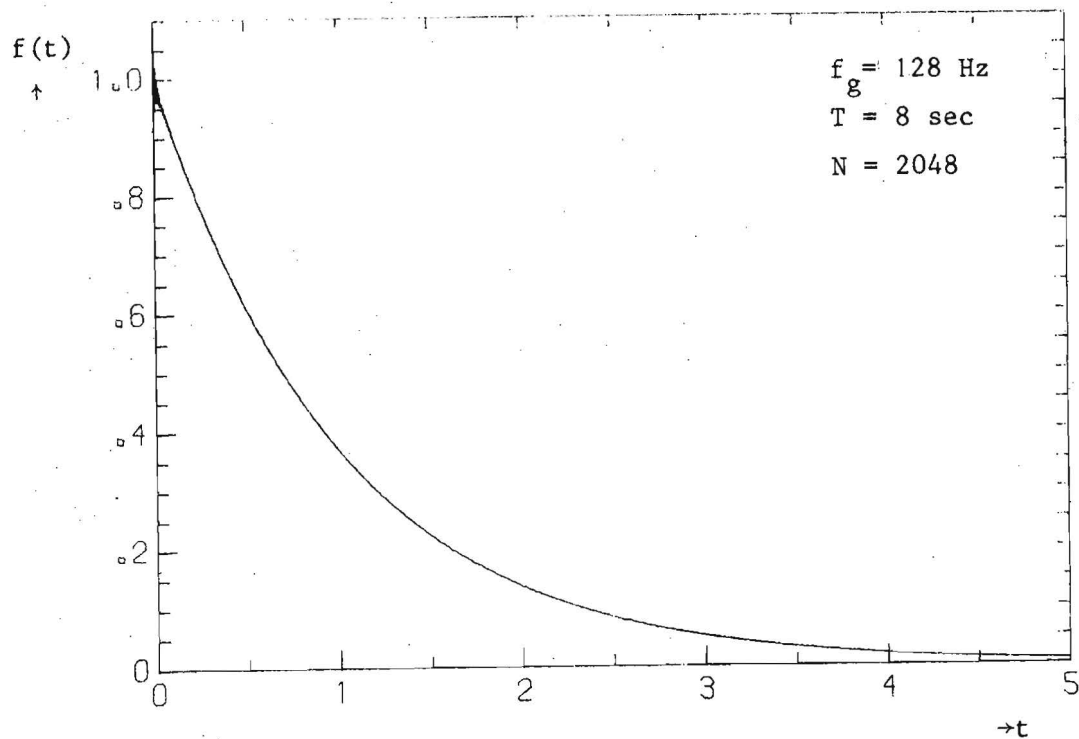


fig. 6. Getransformeerde van $\frac{1}{1+j\omega}$

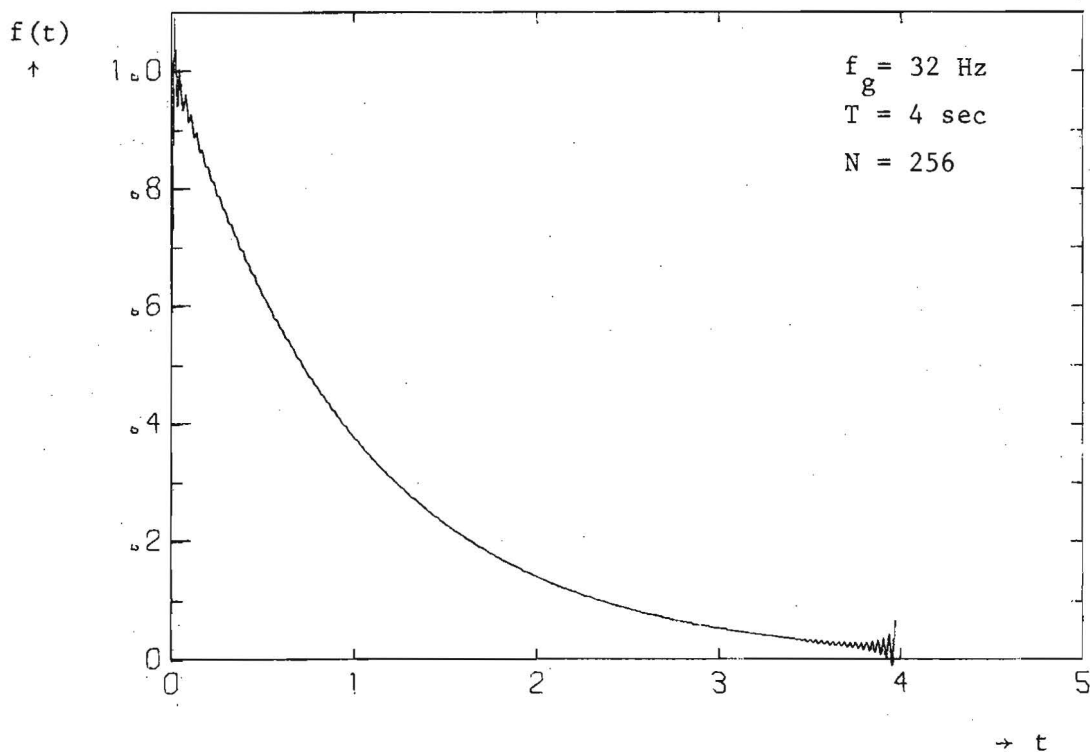


fig. 7. Getransformeerde van $\frac{1}{1+j\omega}$

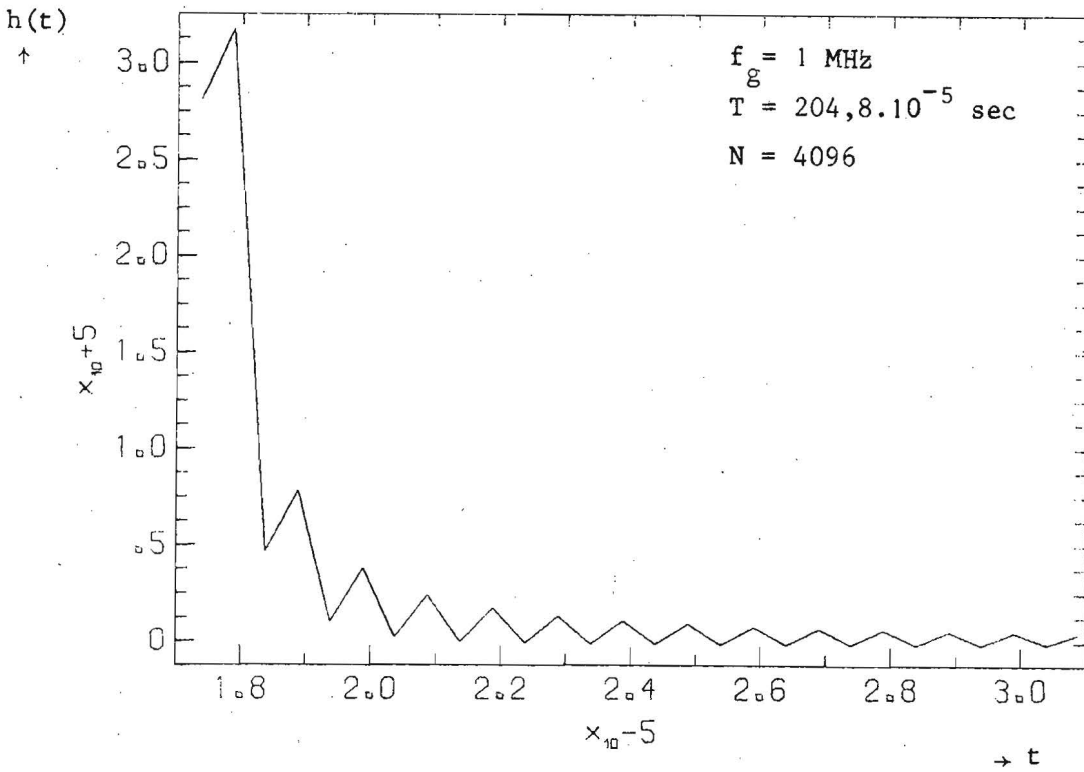


fig. 8. Impulsrespons van een met 75Ω weerstanden afgesloten coaxiale kabel van het type 2,6/9,5 en lengte 5000 m

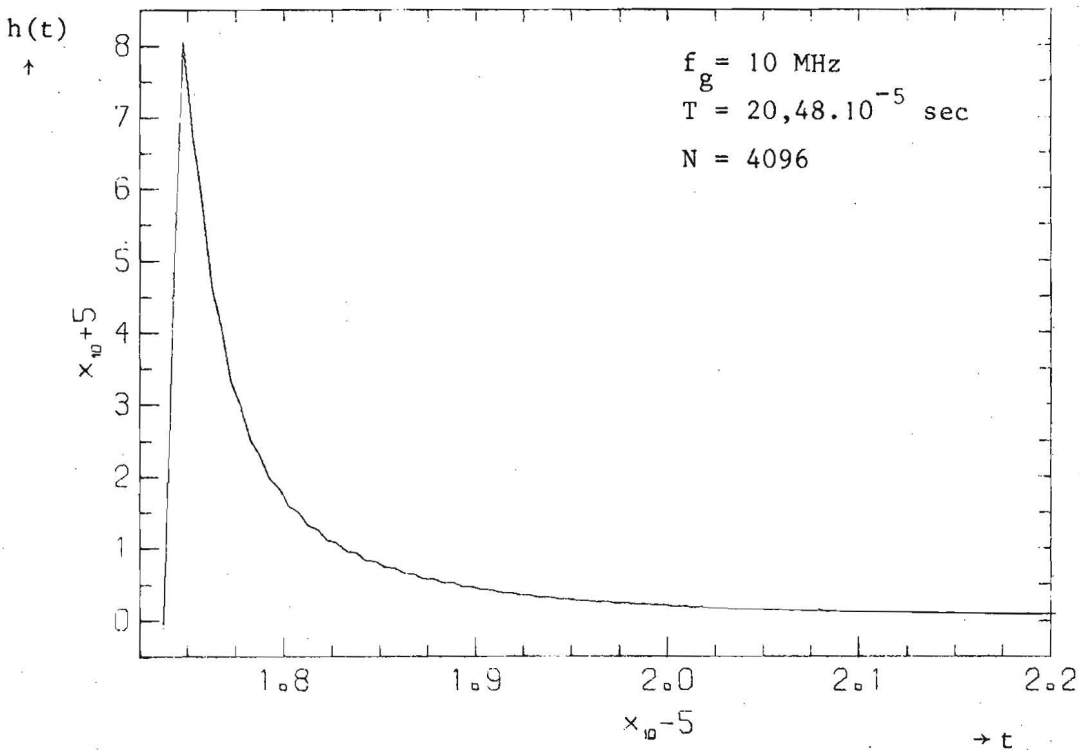


fig. 9. Impulsrespons van een met 75Ω weerstanden afgesloten coaxiale kabel van het type 2,6/9,5 en lengte 5000 m

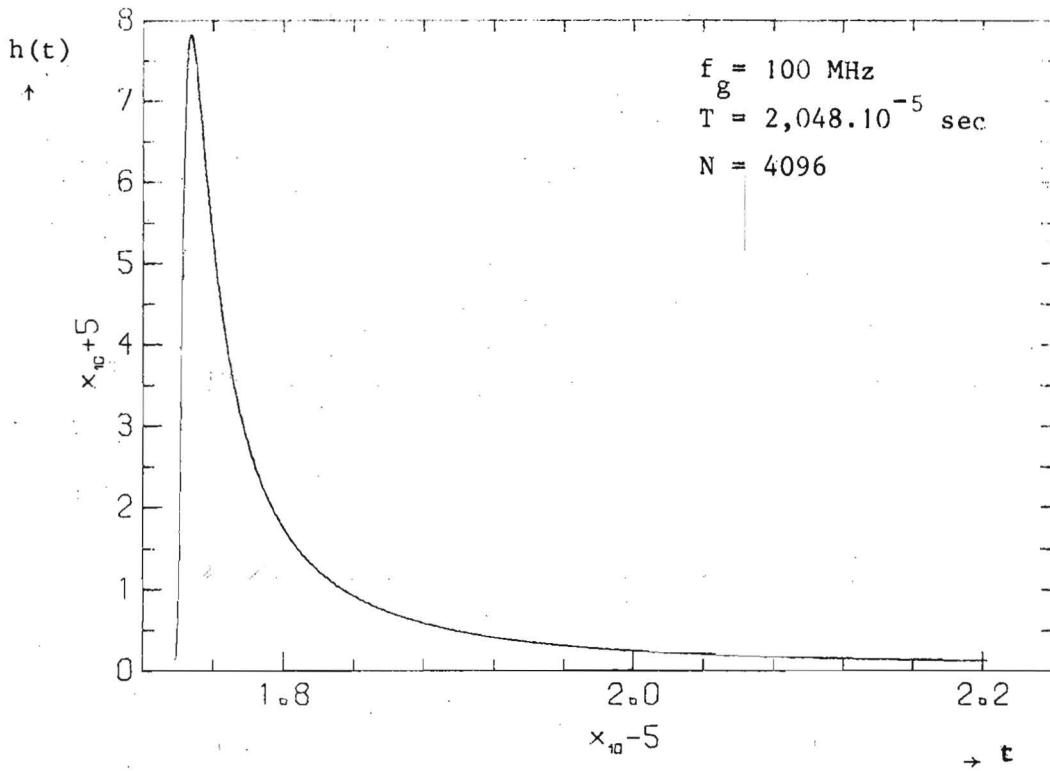


fig. 10. Impulsrespons van een met 75Ω weerstanden afgesloten coaxiale kabel van het type 2,6/9,5 en lengte 5000 m

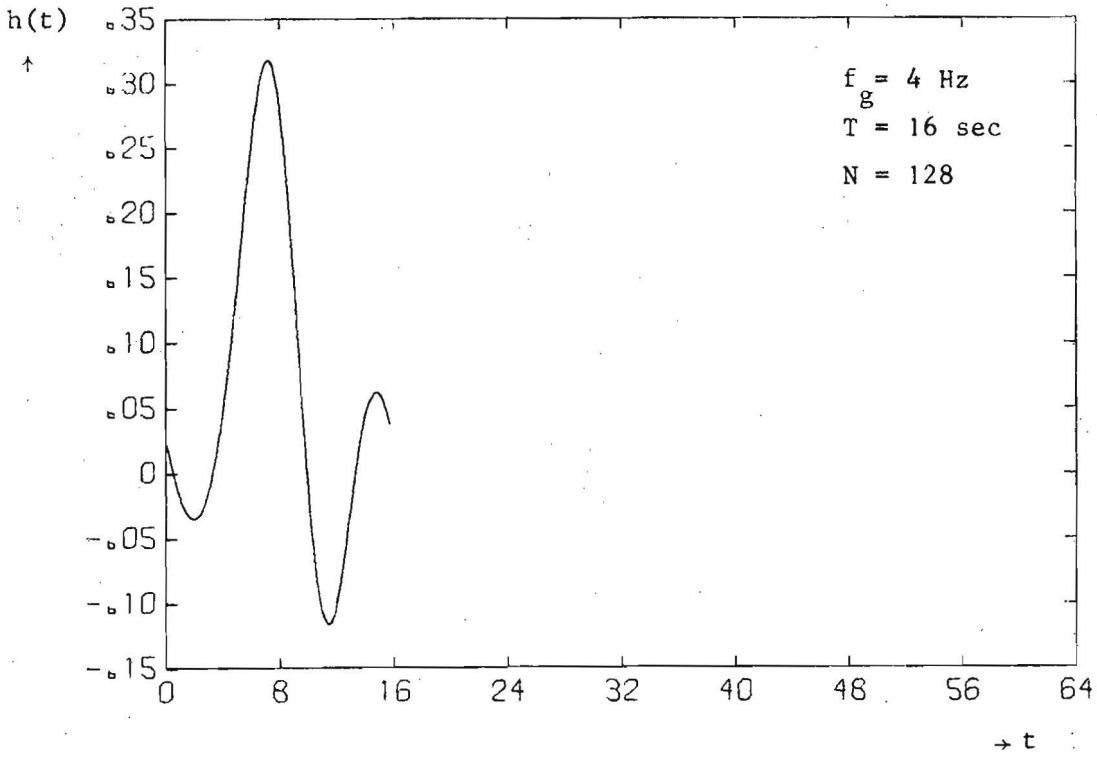


fig. 11. Impulsrespons van een genormeerd 10e orde Butterworth laagdoorlaatfilter

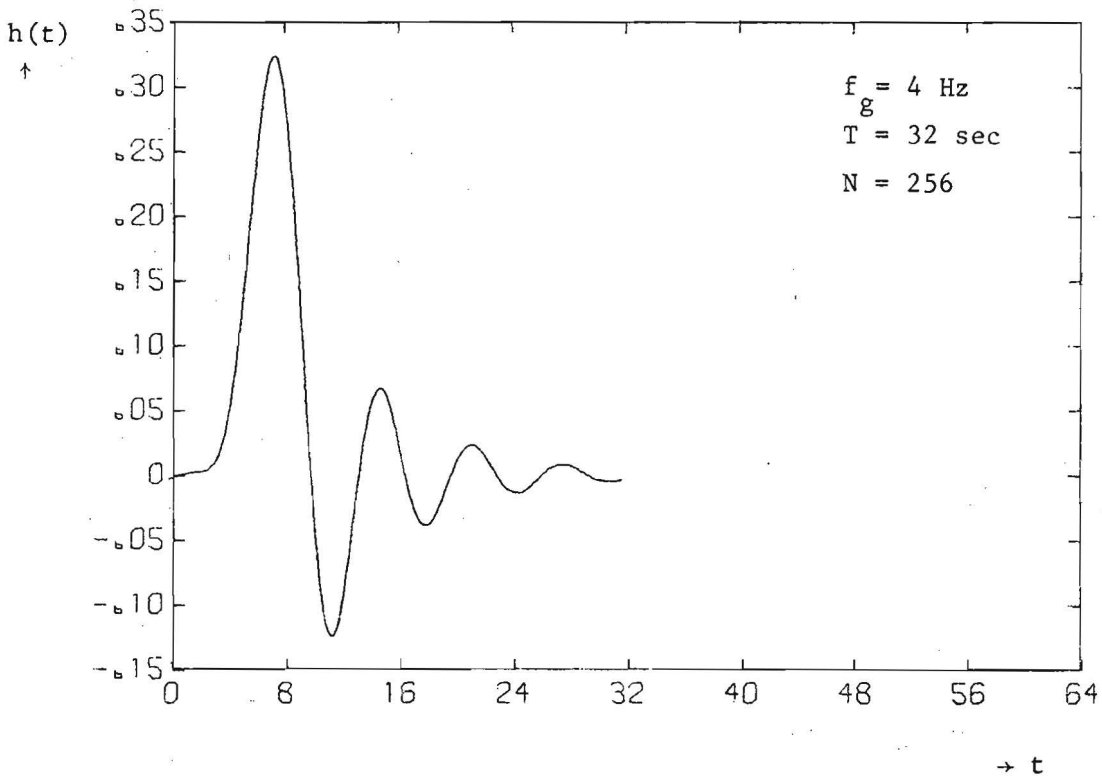


fig. 12. Impulsrespons van een genormeerd 10e orde Butterworth laagdoorlaatfilter

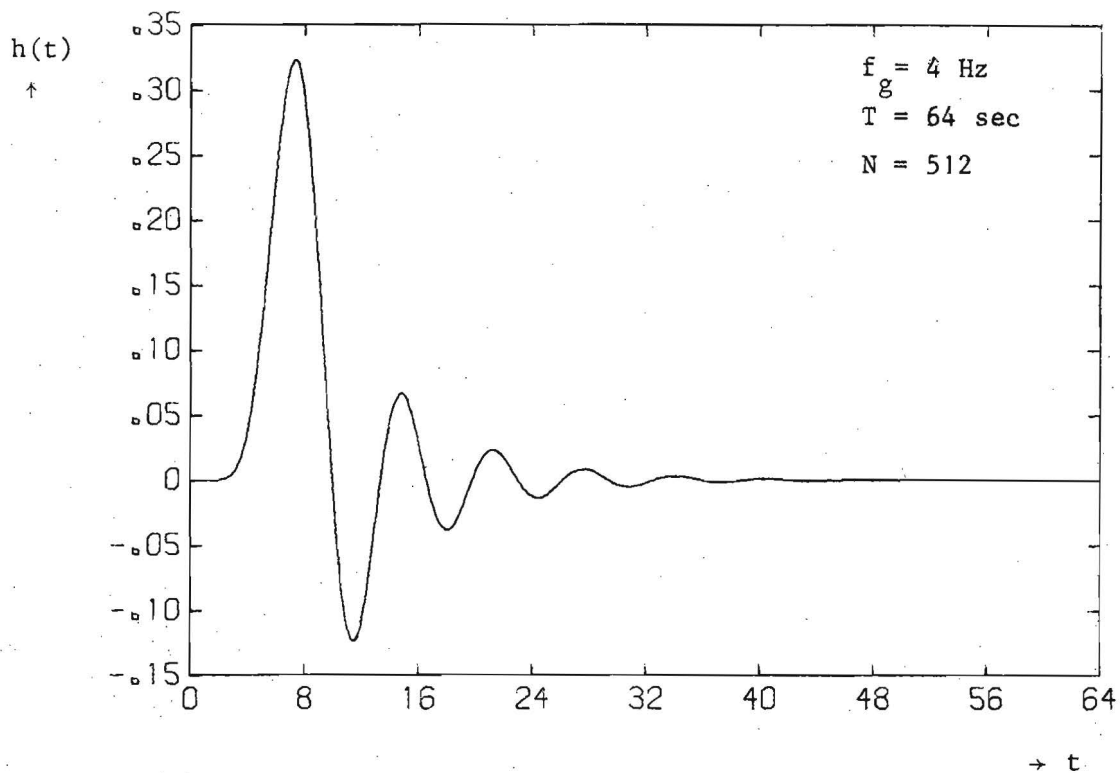


fig. 13. Impulsrespons van een genormeerd 10e orde Butterworth laagdoorlaatfilter

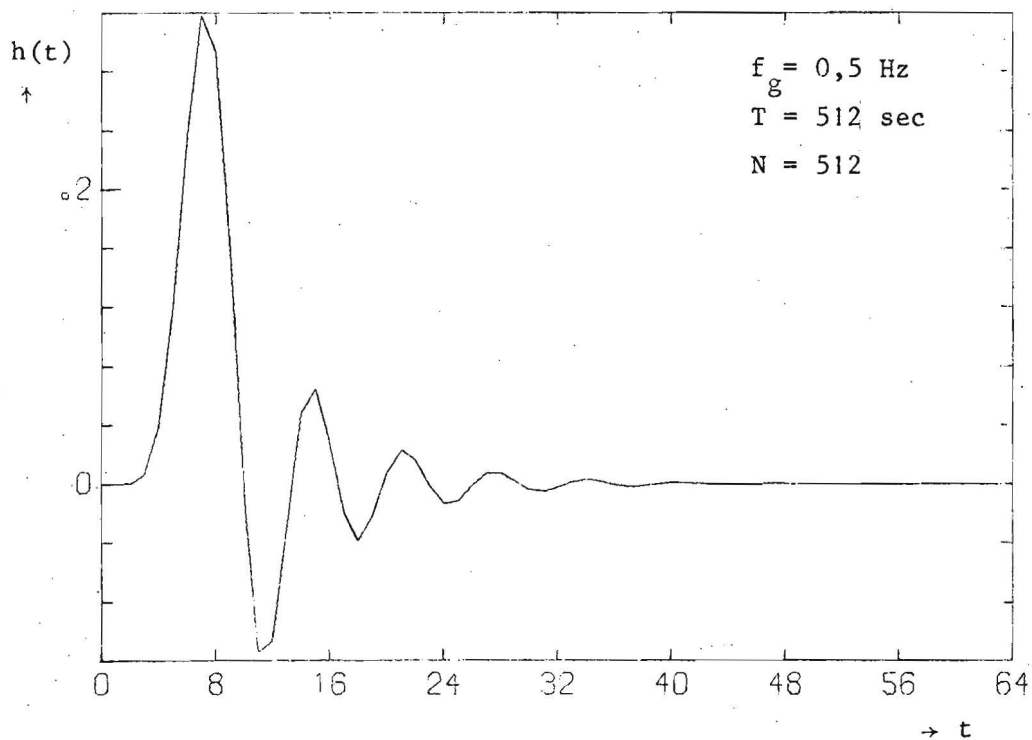


fig. 14. Impulsrespons van een genormeerd 10e orde Butterworth laagdoorlaatfilter

V. Het berekenen van Fourierreeksen met behulp van de DFT.

Een periodieke tijdsfunctie $f(t)$ kan, mits ze aan bepaalde eisen voldoet, ontbonden worden in een reeks van Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n2\pi f_0 t + b_n \sin n2\pi f_0 t) \quad (37)$$

met $f_0 = \frac{1}{T}$, waarin T de periodetijd is van $f(t)$.

Volgens (13) en (14) kan deze reeks ook als volgt geschreven worden :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{j2\pi n t/T} \quad (38)$$

met

$$B_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j2\pi n t/T} dt \quad (39)$$

De volgende relatie blijkt nu te bestaan :

$$B_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \quad (40)$$

Willen we van $f(t)$ de Fouriercoëfficiënten weten dan kunnen deze gevonden worden uit B_n .

Omdat (39) de vorm heeft van een Fourierintegraal, kunnen we verwijzen naar paragraaf IV voor de berekening van B_n met behulp van de DFT. Het vaststellen van de grenzen in het tijddomein levert nu geen moeilijkheden, omdat de integratie zich nu uitstrekt over een eindig interval. Als enige variabele resteert nog het aantal samples N . Het zal duidelijk zijn, dat de resultaten nauwkeuriger worden naarmate N toeneemt.

Als voorbeeld is gekozen een enkelzijdig gelijkgericht sinusvormig signaal (fig. 15).

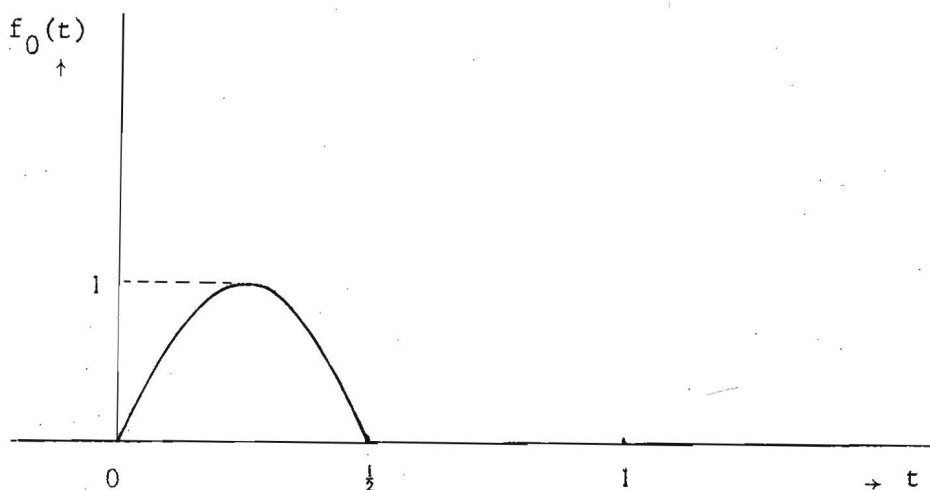


fig. 15

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t-n) \quad (41)$$

met

$$f_0(t) = \begin{cases} \sin 2\pi t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & t > \frac{1}{2} \text{ en } t < 0 \end{cases} \quad (42)$$

Wordt $f(t)$ uitgedrukt in zijn Fouriercomponenten, dan krijgen we :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\pi t - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{1.3} \cos 2.2\pi t + \frac{1}{3.5} \cos 4.2\pi t + \frac{1}{5.7} \cos 6.2\pi t + \dots \right\} \quad (43)$$

In tabel I zijn naast de theoretisch berekende coëfficiënten (volgens vergelijking (43)), die in de 3e resp. 7e kolom zijn vermeld, ook de coëfficiënten weergegeven zoals ze m.b.v. de FFT zijn berekend in de 2e resp. 6e kolom. In dit geval is $N=512$ genomen. In de 4e, 5e en 8e kolom zijn de relatieve afwijkingen opgegeven van de waarden zoals die berekend zijn m.b.v. de FFT ten opzichte van de theoretische waarden. In tabel II zijn dezelfde resultaten nogmaals gegeven voor $N=2048$. Vergelijking van tabel I met tabel II leidt tot de conclusie, dat de berekeningen m.b.v. de FFT inderdaad nauwkeuriger worden bij toename van N .

n	$\frac{a_n^{FFT}}{a_n}$	$\frac{a_n^{theor}}{a_n}$	$\frac{a_n^{FFT} - a_n^{theor}}{a_n^{theor}}$	$\frac{a_n^{FFT}}{a_{n-1}^{theor}}$	$\frac{b_n^{FFT}}{b_n}$	$\frac{b_n^{theor}}{b_n}$	$\frac{b_n^{FFT} - b_n^{theor}}{b_n^{theor}}$
0	+ .635374 ₁₀ +0	+ .636620 ₁₀ +0	- .0020		+ .120078 ₁₀ -4		+ .0000
1	+ .152647 ₁₀ -2			+ .0048	+ .499508 ₁₀ +0	+ .500000 ₁₀ +0	= .0010
2	- .212894 ₁₀ +0	- .212207 ₁₀ +0	+ .0032		+ .130628 ₁₀ -2		+ .0026
3	- .127615 ₁₀ -4			+ .0001	- .734136 ₁₀ -3		- .0015
4	- .425311 ₁₀ -1	- .424413 ₁₀ -1	+ .0021		+ .521887 ₁₀ -3		+ .0010
5	- .122589 ₁₀ -4			+ .0003	- .407639 ₁₀ -3		= .0008
6	- .182226 ₁₀ -1	- .181691 ₁₀ -1	+ .0018		+ .335365 ₁₀ -3		+ .0007
7	- .121333 ₁₀ -4			+ .0007	- .285238 ₁₀ -3		- .0006
8	- .101214 ₁₀ -1	- .101051 ₁₀ -1	+ .0016		+ .248319 ₁₀ -3		+ .0005
9	- .120830 ₁₀ -4			+ .0012	- .219945 ₁₀ -3		- .0004
0	- .643928 ₁₀ -2	- .643050 ₁₀ -2	+ .0014		+ .197432 ₁₀ -3		+ .0004
1	- .120579 ₁₀ -4			+ .0019	- .179121 ₁₀ -3		= .0004
2	- .445668 ₁₀ -2	- .445189 ₁₀ -2	+ .0011		+ .163928 ₁₀ -3		+ .0003
3	- .120436 ₁₀ -4			+ .0027	- .151114 ₁₀ -3		= .0003
4	- .326715 ₁₀ -2	- .326472 ₁₀ -2	+ .0007		+ .140157 ₁₀ -3		+ .0003
5	- .120346 ₁₀ -4			+ .0037	- .130678 ₁₀ -3		= .0003
6	- .249746 ₁₀ -2	- .249655 ₁₀ -2	+ .0004		+ .122397 ₁₀ -3		+ .0002
7	- .120286 ₁₀ -4			+ .0048	- .115097 ₁₀ -3		= .0002
8	- .197684 ₁₀ -2	- .197096 ₁₀ -2	- .0001		+ .108614 ₁₀ -3		+ .0002
9	- .120244 ₁₀ -4			+ .0061	- .102817 ₁₀ -3		- .0002
0	- .159468 ₁₀ -2	- .159554 ₁₀ -2	- .0005		+ .976013 ₁₀ -4		+ .0002
1	- .120214 ₁₀ -4			+ .0075	- .928837 ₁₀ -4		= .0002
2	- .131666 ₁₀ -2	- .131805 ₁₀ -2	- .0011		+ .885955 ₁₀ -4		+ .0002
3	- .120191 ₁₀ -4			+ .0091	- .846803 ₁₀ -4		= .0002
4	- .110536 ₁₀ -2	- .110716 ₁₀ -2	- .0016		+ .810910 ₁₀ -4		+ .0002
5	- .120173 ₁₀ -4			+ .0109	- .777884 ₁₀ -4		= .0002

n	$\frac{\text{FFT } a_n}{a_n}$	$\frac{\text{theor } a_n}{a_n}$	$\frac{\text{FFT } a_n - \text{theor } a_n}{\text{theor } a_n}$	$\frac{\text{FFT } a_n}{\text{theor } a_{n-1}}$	$\frac{\text{FFT } b_n}{b_n}$	$\frac{\text{theor } b_n}{b_n}$	$\frac{\text{FFT } b_n - \text{theor } b_n}{\text{theor } b_n}$
0	+ .636308 ₁₀ +0	+ .636620 ₁₀ +0	- .0005		+ .749380 ₁₀ -6		+ .0000
1	+ .383027 ₁₀ -3			+ .0012	+ .499878 ₁₀ +0	+ .500000 ₁₀ +0	- .0002
2	- .212370 ₁₀ +0	- .212207 ₁₀ +0	+ .0008		+ .325785 ₁₀ -3		+ .0007
3	- .796267 ₁₀ -6			+ .0000	- .183216 ₁₀ -3		- .0004
4	- .424645 ₁₀ -1	- .424413 ₁₀ -1	+ .0005		+ .130279 ₁₀ -3		+ .0003
5	- .765008 ₁₀ -6			+ .0000	- .101777 ₁₀ -3		- .0002
6	- .181983 ₁₀ -1	- .181891 ₁₀ -1	+ .0005		+ .837463 ₁₀ -4		+ .0002
7	- .757193 ₁₀ -6			+ .0000	- .712412 ₁₀ -4		- .0001
8	- .101099 ₁₀ -1	- .101051 ₁₀ -1	+ .0005		+ .620321 ₁₀ -4		+ .0001
9	- .754068 ₁₀ -6			+ .0001	- .549557 ₁₀ -4		- .0001
10	- .643345 ₁₀ -2	- .643050 ₁₀ -2	+ .0005		+ .493421 ₁₀ -4		+ .0001
11	- .752505 ₁₀ -6			+ .0001	- .447771 ₁₀ -4		- .0001
12	- .445384 ₁₀ -2	- .445189 ₁₀ -2	+ .0004		+ .409903 ₁₀ -4		+ .0001
13	- .751612 ₁₀ -6			+ .0002	- .377973 ₁₀ -4		- .0001
14	- .326608 ₁₀ -2	- .326472 ₁₀ -2	+ .0004		+ .350680 ₁₀ -4		+ .0001
15	- .751054 ₁₀ -6			+ .0002	- .327078 ₁₀ -4		- .0001
16	- .249753 ₁₀ -2	- .249655 ₁₀ -2	+ .0004		+ .306462 ₁₀ -4		+ .0001
17	- .750682 ₁₀ -6			+ .0003	- .288298 ₁₀ -4		- .0001
18	- .197168 ₁₀ -2	- .197096 ₁₀ -2	+ .0004		+ .272172 ₁₀ -4		+ .0001
19	- .750422 ₁₀ -6			+ .0004	- .257758 ₁₀ -4		- .0001
20	- .159607 ₁₀ -2	- .159554 ₁₀ -2	+ .0003		+ .244796 ₁₀ -4		+ .0000
21	- .750232 ₁₀ -6			+ .0005	- .233077 ₁₀ -4		- .0000
22	- .131845 ₁₀ -2	- .131805 ₁₀ -2	+ .0003		+ .222430 ₁₀ -4		+ .0000
23	- .750090 ₁₀ -6			+ .0006	- .212714 ₁₀ -4		- .0000
24	- .110746 ₁₀ -2	- .110716 ₁₀ -2	+ .0003		+ .203812 ₁₀ -4		+ .0000
25	- .749981 ₁₀ -6			+ .0007	- .195625 ₁₀ -4		- .0000

Tabel II
N=2048

VI. Het berekenen van convolutie integralen met behulp van de DFT.

Moeten twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ met Fouriergetransformeerden $F_1(f)$ resp. $F_2(f)$, met elkaar geconvolveerd worden, dan is dit vaak eenvoudig te bewerkstelligen door het produkt van de twee getransformeerden terug te transformeren. Wanneer men dit m.b.v. de DFT wil bereiken, dan zullen de parameters bij de diverse transformaties steeds hetzelfde moeten zijn. Bovendien zullen $f_1(t)$ en $f_2(t)$ over een zodanig interval gesampled moeten worden, dat ook het resultaat van de convolutie binnen dit interval ligt.

De procedure om met behulp van de DFT te convolueren kan als volgt worden samengevat :

- 1) Bepaal het interval T_1 waarbinnen $f_1(t)$ ongelijk nul is of een niet te verwaarlozen bijdrage levert tot zijn getransformeerde.
- 2) Doe hetzelfde met $f_2(t)$ en noem dit interval T_2 .
- 3) Bepaal uit T_1 en T_2 het interval T_3 waarbinnen de convolutie van $f_1(t)$ en $f_2(t)$ van nul verschilt.
- 4) Neem het grootste van de intervallen T_1 , T_2 en T_3 en neem dit als sample-interval voor $f_1(t)$ en $f_2(t)$. (Al deze intervallen moeten beginnen bij $t=0$).
- 5) Bepaal de sample-afstanden τ_{s_1} en τ_{s_2} van resp. $f_1(t)$ en $f_2(t)$.
- 6) Neem de kleinste van τ_{s_1} en τ_{s_2} en sample hiermee $f_1(t)$ en $f_2(t)$.
- 7) Transformeer $f_1(t)$ en $f_2(t)$.
- 8) Vermenigvuldig deze getransformeerden.
- 9) Transformeer dit produkt terug.

Wanneer men geen of slechts weinig inzicht heeft in de eigenschappen van $F_1(f)$ en $F_2(f)$, dan is het raadzaam om deze volgens de in paragraaf IV omschreven wijze te onderzoeken, zodat men de parameters voor de FFT kan vaststellen die benodigd zijn om tot een voldoende nauwkeurige weergave van deze functies te komen.

In fig. 16 is voor $f_1(t)$ een driehoek genomen met tophoogte 1 en waarvan de basis ligt tussen $t=2$ en $t=4$. In fig. 17 is voor $f_2(t)$ zo'n zelfde driehoek gekozen doch zodanig verschoven dat zijn basis ligt tussen $t=5$ en $t=7$. De convolutie $f_3(t)=f_1(t)*f_2(t)$, die berekend is m.b.v. de FFT is getekend in fig. 18. Bij alle drie de figuren is $N=1024$ en $T=12$ sec gekozen.

Vaak kan men met minder samples volstaan dan zou volgen uit de hierboven omschreven methode, door de samenstellende functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ zodanig te verschuiven over de tijd, dat de gedeelten waar de funktiewaarden van nul verschillen bij $t=0$ beginnen. Het convolutieresultaat moet dan teruggeschoven worden over een afstand die gelijk is aan de algebraïsche som van de verschuivingen van $f_1(t)$ en $f_2(t)$.

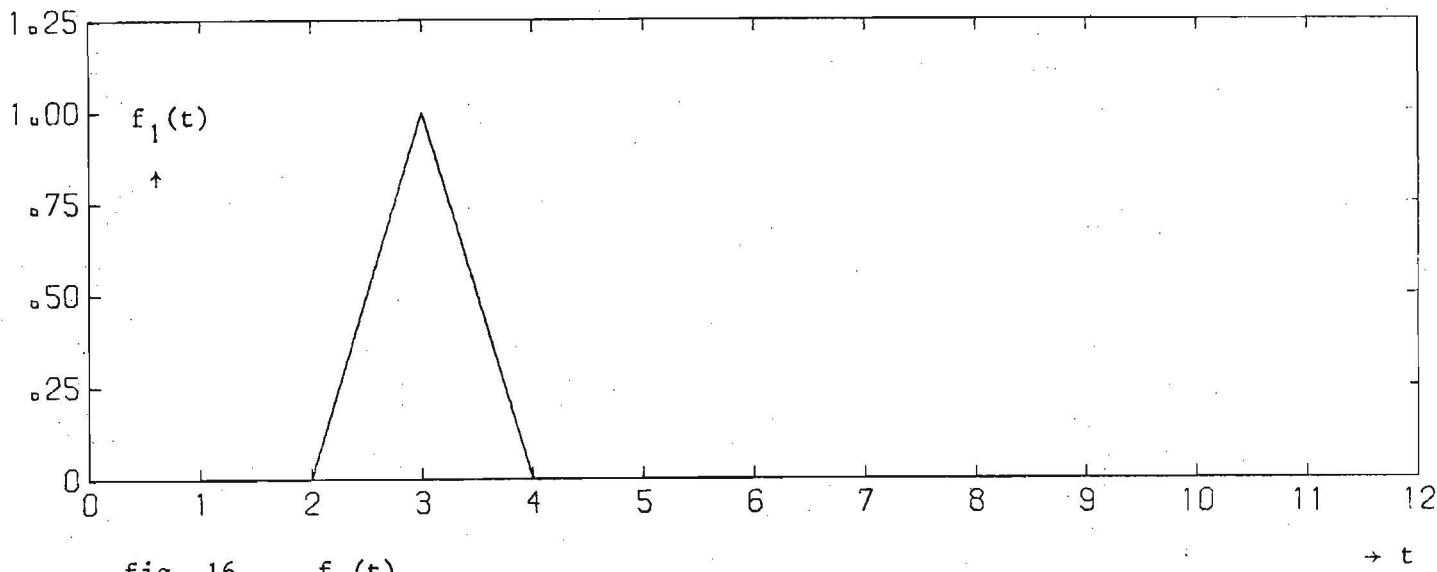


fig. 16 $f_1(t)$

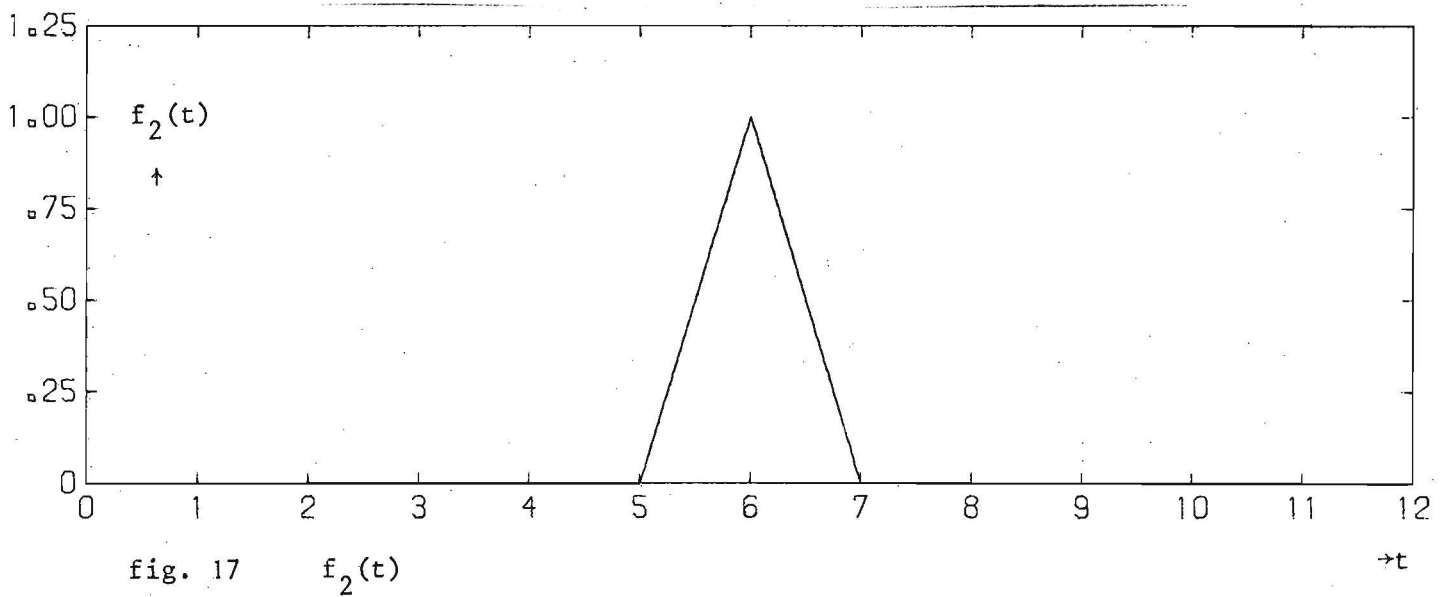


fig. 17 $f_2(t)$

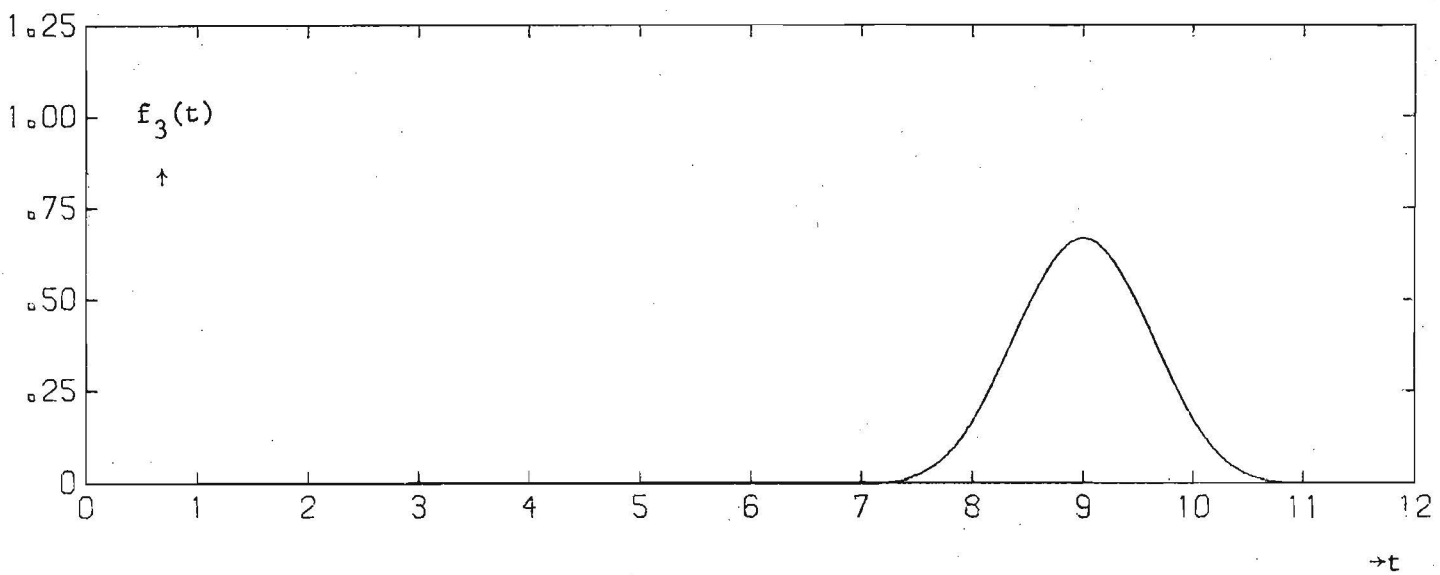


fig. 18 $f_3(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$T=12$

$N=1024$

Referenties :

[1] A. Papoulis

"The Fourier Integral and its Applications"
Mc Graw-Hill, 1962.

[2] W.T. Cochran et al.

"What is the Fast Fourier Transform"
Proceedings of the IEEE, vol. 55, no. 10, oktober 1967.

[3] J.W. Cooley, P.A.W. Lewis, P.D. Welch

"Application of the Fast Fourier Transform to computation of Fourier
Integrals, Fourier Series and Convolution Integrals"
IEEE trans. on audio and electroacoustics, vol. AU-15, no. 2, juni 1967