

Theorie en toepassing van het Kalman-filter als parameterschattingstechniek

Citation for published version (APA):

van Ratingen, M. R. (1988). *Theorie en toepassing van het Kalman-filter als parameterschattingstechniek*. (DCT rapporten; Vol. 1988.062). Technische Universiteit Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1988

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

THEORIE & TOEPASSING VAN HET

KALMAN-FILTER

ALS

PARAMETERSCHATTINGSTECHNIEK

Een stageverslag door
Michiel van Ratingen

Begeleiders : Max Hendriks
Cees Oomens

Vakgroep : WFW

Rapport : WFW 88.062

november 1988

0. INLEIDING DEEL1

0.1 Probleemomschrijving

Bij de bepaling van het constitutief gedrag van een materiaal is het gebruikelijk, experimentele gegevens afkomstig van een materiaalproef in verband te brengen met mathematische gegevens, voortkomend uit een (gekozen) materiaalmodel.

In de praktijk kiest men hierbij een materiaalproef waarbij het ontwerp van het proefstukje en de keuze van de opgelegde belasting resulteren in een homogene deformatie in een deel van het proefstukje. Men hoeft dan slechts een beperkt aantal rek-grootheden te meten en men kan dit doen over een eindige lengte van het proefstuk. De daarvoor gemeten verplaatsingen zijn dan relatief groot en dit bevordert de nauwkeurigheid.

Het materiaalmodel wordt vastgesteld op basis van het te verwachten materiaalgedrag en vastgelegd in constitutieve vergelijkingen. Voor eenvoudige materiaalproeven resulteert dit in een model van een aantal onbekende functies of een model met enkele onbekende parameters, welke bepaald kunnen worden uit een confrontatie met gemeten waarden van spanningen en rekken.

Deze voor vele materialen succesvolle wijze van materiaalgedrag bepalen is echter voor biologische materialen en een groot aantal kunststoffen minder geschikt. Een homogene deformatietoestand is hier moeilijk te verwezelijken en het materiaalmodel is veel minder makkelijk te hanteren (zie [1]). Zoals in [1] beschreven, kunnen wellicht parameterschattingstechnieken [2], afkomstig uit de systeemleer een goed alternatief vormen.

Dit verslag is gericht op het gebruik van het zogenaamd Kalman-filter als parameterschattingstechniek. De theorie en achterliggende gedachten aangaande het (extended) Kalman-filter zijn in het kort uiteengezet in [2].

Practisch gebruik van het Kalman-filter voor parameteridentificatie vergt de ontwikkeling van een bruikbaar rekenprogramma, gebaseerd op bovengenoemde theorie. Dit verslag beschrijft een dergelijk programma en geeft enkele testresultaten.

0.2 Doelstelling

Om o.a tijdsafhankelijk gedrag van materialen te kunnen onderzoeken en beschrijven is men op zoek gegaan naar een - ten opzichte van de klassieke - verbeterde methode van parameterschatten.

Het afstudeerwerk van Hendriks [1] heeft een eerste aanzet gegeven. Het rapport " Het Kalman-filter als parameterschatter " [2] dient als uitgangspunt voor een alternatieve (betere?) methode van parameteridentificatie.

Dit stageverslag levert aanvullend op dit rapport een parameterschattingsprogramma, gebaseerd op de Kalmanfiltertheorie, dat geschikt is voor één-dimensionale proeven aan visco-elastisch materiaal. Het programma kan zowel worden gebruikt voor het uitvoeren van numerieke simulaties als daadwerkelijke parameterschatten met experimentele resultaten.

<u>INHOUD</u> :	paginanr.
Samenvatting	-
Literatuurverwijzingen	-
Lijst van gebruikte symbolen	-
<u>DEEL 1</u>	
0. <u>Inleiding deel 1</u>	1
0.1 Probleemomschrijving	1
0.2 Doelstelling	1
1. <u>Het kalman-filter</u>	
1.1 Inleiding Kalman-filter	3
1.2 Het Kalman-filter voor een lineair model	3
1.3 Het extended Kalman-filter voor niet-lineaire modellen	8
2. <u>Parameterschatten met een rekenprogramma</u>	10
2.1 Inleiding parameterschatten met een rekenprogramma	10
2.2 Het materiaalmodel	10
2.3 Het experiment	12
2.4 De Kalman-filter formulering	13
3. <u>Het programma</u>	15
3.1 Inleiding programma	15
3.2 De structuur van het rekenprogramma	15
3.3 Het programma PROEF	16
3.4 Het programma MEETDAT	17
3.5 Het programma KALMAN	18

4. <u>Numerieke aspecten</u>	19
4.1 Inleiding numerieke aspecten	19
4.2 Numerieke integratie	19
4.2 Numerieke differentiatie	20
5. <u>Resultaten en conclusies deel 1</u>	22
5.1 Resultaat van een voorbeeld	22
5.2 Conclusies deel 1	24
 <u>DEEL 2</u>	
6. <u>Inleiding deel 2</u>	25
6.1 Probleemomschrijving	25
6.2 Doelstelling	25
7. <u>Metingen</u>	26
7.1 Inleiding metingen	26
7.2 Meting 1	26
2.1 Het experiment	26
2.2 Schatten van modelparameters	27
7.3 Meting 2	31
3.1 Het experiment	31
3.2 Schatten van modelparameters	31
8. <u>Conclusies deel 2 en nawoord</u>	42
8.1 Conclusies deel 2	42
8.2 Nawoord	42

Bijlagen : output van berekeningen met KALMAN (11 stuks)

SAMENVATTING

Het Kalman-filter, afkomstig uit de systeemleer, blijkt gebruikt te kunnen worden als parameterschattingstechniek bij de bepaling van het constitutief gedrag van materialen.

Voor lineair viscoelastische materialen kan gebruik worden gemaakt van het extended Kalman-filter voor niet-lineaire modellen om modelparameters en schattingsfout te bepalen. Dit filter is niet optimaal, maar blijkt goed te werken.

In deel 1 van dit verslag wordt de Kalman-filter theorie kort behandeld en in praktijk gebracht, resulterend in een parameterschattingsprogramma. Deel 2 toont enkele berekeningen met dit programma.

LITERATUURVERWIJZINGEN

- [1] Hendriks, Max (1986) " Bepaling van materiaaleigenschappen van biologische materialen m.b.v systeemidentificatietechnieken " Afstudeerverslag WFW - 86.044.

- [2] Hendriks, Max (1987) " Het Kalman-filter als parameterschat-ter " Rapport WFW.

- [3] Norton, J.P. (1986) " An introduction to Identification " Academic Press, London.

- [4] Kok, J.J. (1985) " Werktuigbouwkundige regeltechniek 2 " collegedictaat TUE - 4594.

- [5] Boltzmann, L. (1876) " Pogg. Ann. Physik 7 ".

- [6] Struik, L.C.E. (1988) " Het tijdsafhankelijk gedrag van kunststoffen " TNO publicatie nr. P1/'88.

- [7] Duntemann, J. (1985) " Turbopascal compleet " Academic Service, Den Haag.

- [8] Oomens, C. (1988) Programma voor parameterschatten m.b.v. Kalmantheorie.

LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN

A	: matrix
\underline{a}	: kolom
\hat{a}	: schatting van kolom
\underline{a}^T	: getransponeerde vector
$(\underline{a+b}) (\dots)$: produkt $(\underline{a+b}) (\underline{a+b})$
A	: amplitude van sinusvormig reksignaal
C	: uitgangsmatrix (lineair)
E[...]	: de verwachting van ...
F	: kracht
exp(...)	: natuurlijke exponent e ^{“...”}
G	: spanningsrelaxatiemodulus
H	: gelineariseerde uitgangsmatrix
\underline{h}	: uitgangsmatrix (niet-lineair)
I	: eenheidsmatrix
J	: kruipcompliantie ; correctiematrix
K	: Kalman-Gain matrix ; constante reksnelheid
k	: teller
L	: lengte van proefstuk
l_0	: inkleem lengte
P	: schattingsfouten covariantiematrix
Q	: intensiteitsmatrix (systeemruis)
R	: " (meetruis)
s	: standaard afwijking
t	: tijd
T	: tijdconstante
v	: treksnelheid
\underline{v}	: meetruissignaal
\underline{w}	: modelruissignaal
\underline{x}	: materiaalparameters
$\hat{\underline{x}}$: schatting van materiaalparameters
Y	: waarnemingen
δ	: Kronecker delta ; schattingsfout
ϵ	: rek
Ω	: tijdconstante van model
θ	: tijdvariabele
σ	: spanning

DEEL 1

In het volgend hoofdstuk zal het kalman-filter worden afgeleid. In de hoofdstukken daarna zal het in praktijk worden gebracht.

1. HET KALMAN-FILTER

1.1 Inleiding Kalman-filter

Zoals in de inleiding vermeld, is de Kalman-filter theorie kort beschreven in [2]. Voor een meer gedetailleerde afleiding wordt verwezen naar de literatuurverwijzingen van dit rapport [2] en naar [3].

De oplettende lezer zal bij studie van genoemde titels het aanzienlijk deel van de werken, afkomstig uit de regeltechniek, zeker opvallen. Het feit dat het Kalman-filter (oorspronkelijk Kalman-Bucy filter) binnen de regeltechniek ontwikkeld is, geeft hiervoor de verklaring.

In dit hoofdstuk wordt - nu vanuit het probleemgebied van het parameterschatten - het Kalman-filter opnieuw afgeleid, zij het zonder al te diepgaande bewijzen. Dit Kalman-filter zal als algoritme de basis vormen voor het rekenprogramma, beschreven in de hoofdstukken hierna.

1.2 Het Kalman-filter voor een lineair model

Beschouwd wordt, zoals beschreven in de inleiding, de situatie dat met behulp van metingen uit een één-dimensionale proef en met een - in dit geval lineair in de materiaalparameters - gekozen model, het constitutief gedrag van een materiaal bepaald moet worden [3].

De probleefdefinitie luidt dan als volgt :

$$\underline{y}(k) = C(k) \cdot \underline{x} + \underline{v}(k) \quad (1.2.1)$$

De kolom \underline{y} stelt de set van waarnemingen voor, afkomstig van een willekeurige 1D-test aan het materiaal. Het argument k is een teller die overeenkomt met het aantal sets van waarnemingen, dus een teller van de tijdstap, het belastingsincrement of iets dergelijks.

De matrix C , vermenigvuldigd met een kolom \underline{x} waarin konstante parameters zijn opgeslagen, wordt bepaald door het gebruikte model. Waarden van de elementen van \underline{x} kwantificeren het theoretisch materiaalgedrag, wanneer het model is aangenomen. De kolom \underline{v} tenslotte is de meetfout in de waarnemingen, hier gemodelleerd als een wit ruissignaal (zie [4]).

Samengevat geldt dat de gemeten set waarnemingen een lineaire combinatie van de modelparametervector en de meetfout is. Doel is het bepalen van de kolom \underline{x} met parameterwaarden. Hierbij wordt verondersteld dat zowel de meetfout als de modelstructuur bekend zijn, m.a.w. men wil de parameterwaarden bepalen in een model waarin de parameters vooraf al op een eenduidige manier voorkomen. Vanwege het feit dat steeds sprake is van verstoorde gegevens kan in het vervolg slechts gesproken worden over parameters schatten en over de schatting $\hat{\underline{x}}$ van \underline{x} wanneer parameters bepaald willen worden.

Veronderstel nu dat men op basis van k waarnemingen in bezit is van een zuivere schatting $\hat{x}(k)$ voor x . Gezocht wordt dan een lineaire schatter die uitgaande van deze schatting $\hat{x}(k)$ en een nieuwe set waarnemingen $y(k+1)$ een nieuwe schatting $\hat{x}(k+1)$ construeert (één iteratie per waarneming, dus de teller van de schatter overeenkomt met de teller van de waarnemingen, k). Dit resulteert dan in :

$$\hat{x}(k+1) = J(k+1) \cdot \hat{x}(k) + K(k+1) \cdot y(k+1) \quad (1.2.2)$$

De matrices J en K worden zodanig gekozen dat $\hat{x}(k+1)$ een goede schatting voor x is. Om dit te realiseren worden twee eisen aan de nieuwe schatting gesteld :

1. Uitgaande van een zuivere "oude" schatting $\hat{x}(k)$ zal de "nieuwe" schatting $\hat{x}(k+1)$ eveneens zuiver zijn, ofwel :

$$E[\hat{x}(k+1)] := x \quad (1.2.3)$$

2. De covariantie van de schattingsfout in de parameters $\delta\hat{x} = \hat{x}(k+1) - x$ is minimaal, ofwel :

$$E[(\hat{x}(k+1) - E[\hat{x}(k+1)]) \cdot (\dots)^T] \rightarrow \text{minimaal} \quad (1.2.4)$$

Met introductie van P als de semi-positiefdefinite covariantiematrix van de schattingsfout :

$$P(k+1) \rightarrow \text{minimaal.} \quad (1.2.5)$$

Beide eisen worden achtereenvolgens uitgewerkt :

Ad 1. Eis : $E[\hat{x}(k+1)] := x$

Uit (1.2.1) en (1.2.2) volgt met $E[y(k+1)] = 0$:
($\hat{x}(k)$ is een zuivere schatting)

$$\begin{aligned} E[\hat{x}(k+1)] &= J(k+1) \cdot E[\hat{x}(k+1)] + K(k+1) \cdot C(k+1) \cdot x \\ &= J(k+1) \cdot x + K(k+1) \cdot C(k+1) \cdot x := x \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Hieruit volgt met weglating van de argumenten :

$$(J + K \cdot C) \cdot x = x \quad J = I - K \cdot C \quad (1.2.7)$$

Substitutie van bovenstaand resultaat in (1.2.2) levert dan :

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + K(k+1) \cdot [y(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k)] \quad (1.2.8)$$

Opgemerkt kan worden dat de matrix J niet langer een rol speelt in het schattingsproces, doordat deze uit (1.2.2) geelimineerd is. Het resultaat in de vorm van (1.2.8) kan als volgt geïnterpreteerd worden : de nieuwe schatting $\hat{x}(k+1)$ voor x wordt uit de oude gevonden door berekening van een set "waarnemingen" $C(k+1) \cdot \hat{x}(k)$ en deze te vergelijken met de echte set waarnemingen $y(k+1)$. Op grond van het verschil tussen beiden wordt dan de oude schatting aangepast.

Uiteraard geldt dat hoe beter deze aanpassing gebeurt, des te beter ook de nieuwe schatting voor x zal zijn. Uit vergelijking (1.2.8) blijkt dat hiervoor de matrix K, die de Kalman-Gain matrix genoemd wordt, verantwoordelijk is.

De Kalman-Gain matrix kan bepaald worden uit de tweede eis, die aan het filter gesteld is.

Ad 2.

$$\text{Eis : } P(k+1) = E[(\hat{x}(k+1) - E[\hat{x}(k+1)]) \cdot (\dots)^T]$$

→ minimaal

Met behulp van (1.2.8) kan voor de covariantiematrix $P(k+1)$ worden afgeleid :

$$P(k+1) = (I - K(k+1) \cdot C(k+1)) \cdot P(k) \cdot (I - K(k+1) \cdot C(k+1))^T + K(k+1) \cdot R(k+1) \cdot K(k+1)^T \quad (1.2.9)$$

[3] waarbij voor de intensiteitsmatrix van de meetfout, R, geldt :

$$E[y(k) \cdot y(l)^T] = R(k) \cdot \delta(k, l) \quad (1.2.10)$$

(k, l = 1, 2, ...; Kronecker δ)

Daar C en R bekend verondersteld zijn, moet K(k+1) nu zodanig gekozen worden, dat matrix P(k+1) naar een minimum gaat. Daarvoor wordt eerst een stationair punt gezocht :

$$\Delta P + P = [I - (K + \Delta K) \cdot C] \cdot P(k) \cdot [\dots]^T + (K + \Delta K) \cdot R \cdot (\dots)^T \quad (1.2.11)$$

Uitwerken van vergelijking (1.2.11), daarbij gebruikmakend van symmetrie, levert de volgende uitdrukking voor ΔP :

$$\Delta P = 2.\Delta K.R.K^T - 2.\Delta K.C.P.(I - K.C)^T \quad (1.2.12)$$

We zoeken de uitdrukking voor K , die P optimaliseert :

$$\Delta P / \Delta K = 0 \rightarrow R.K^T = C.P.(I - K.C)^T \quad (1.2.13)$$

Vergelijking (1.2.13) levert dan de gezochte uitdrukking voor K :

$$K(k+1) = P(k).C(k+1)^T.[R(k+1) + C(k+1).P(k).C(k+1)^T]^{-1} \quad (1.2.14)$$

Bij bovengenoemde uitdrukking voor K heeft P in ieder geval een stationair punt. Dat dit stationair punt een minimum is, nemen we hier zonder bewijzen aan. Gebruikmakend van (1.2.14) en (1.2.8) kan men nu een nieuwe schatting voor \underline{x} bepalen op zodanige wijze dat de schattingsfout P minimaliseert.

Met de nieuwe schatting voor de modelparameters zal ook een nieuwe schatting van de bijbehorende covariantiematrix gevonden moeten worden. Uit substitutie van (1.2.14) in (1.2.9) volgt :

$$P(k+1) = [I - K(k+1).C(k+1)].P(k).[I - K(k+1).C(k+1)]^T + K(k+1).R(k+1).K(k+1)^T \quad (1.2.15)$$

Hiermee zijn in principe alle relaties die nodig zijn bekend

Door de twee bovengenoemde eisen zijn uitdrukkingen gevonden voor de Kalman-Gain matrix (1.2.14), de covariantiematrix van de schattingsfout (1.2.15) en voor de nieuwe schatting voor de modelparameters (1.2.8). Hiermee kunnen, uitgaande van beginschattingen voor \underline{x} en P , stapsgewijs met behulp van steeds nieuwe waarnemingen nieuwe schattingen voor de materiaalparameters gegenereerd worden met bijbehorende covariantie van de fout.

In paragraaf 2.4 van [2] wordt een theorema aangehaald,

waaruit blijkt dat de nieuw verkregen schattingen naar verloop van tijd (= aantal stappen) naar constante waarden voor \underline{x} en P convergeren. De verwachting is, dat omdat P per stap geminimaliseerd wordt, de fout in de geschatte parameters steeds verder zal afnemen en de parameters steeds beter de verwachte waarden benaderen. Op deze wijze kunnen de parameters uit het materiaalmodel uiteindelijk bepaald worden.

Tot dusver is in de analyse uitgegaan van een gebruikt model, dat geen fouten bevat. Reeler is te veronderstellen dat in de probleemdefinitie niet alleen een meetfout $\underline{y}(k)$, maar ook een modelfout $\underline{w}(k)$ een rol speelt. Deze invloed kan worden meegenomen door de modelparameters niet langer konstant te beschouwen :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (1.2.16)$$

De kolom $\underline{w}(k)$ is de modelfout, welke net als de meetfout $\underline{y}(k)$ verondersteld wordt wit te zijn. Beide stoorsignalen zijn onderling ongecorrleerd [4]. Als in (1.2.10) geldt :

$$E[\underline{w}(k) \cdot \underline{w}(l)^T] = Q(k) \cdot \delta(k, l) \quad (1.2.18)$$

(k, l = 1, 2, ...)

met intensiteitsmatrix Q en δ de Kroneckerdelta.

In het Kalman-filter wordt de invloed van de modelruis $\underline{w}(k)$ op de nieuwe schatting ondergebracht in de invloed van de Kalman-Gain matrix.

Alvorens nu het totale Kalman-filter voor lineaire modellen samengevat wordt, wordt eerst als in [2] overgegaan op een duidelijkere schrijfwijze : de hiergebruikte uitdrukking $\hat{\underline{x}}(k|j)$ betekent : de schatting $\hat{\underline{x}}$ voor \underline{x} verkregen op tijdstip k en gebaseerd op metingen $\underline{y}(1), \underline{y}(2), \dots, \underline{y}(j)$. De verzameling vergelijkingen, die tezamen het (discrete) Kalman-filter uitmaken, bestaat dan uit :

De voorspellingsvergelijking :

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k) = \hat{\underline{x}}(k|k) \quad (1.2.19)$$

De correctievergelijking :

$$\hat{\underline{x}}(k+1|k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1|k) + K(k+1) \cdot [\underline{y}(k+1) - C(k+1) \cdot \hat{\underline{x}}(k+1|k)] \quad (1.2.20)$$

De vergelijking voor de Kalman-Gain matrix :

$$K(k+1) = P(k+1|k) \cdot C(k+1)^T \cdot [R(k+1) + C(k+1) \cdot P(k+1|k) \cdot C(k+1)^T]^{-1} \quad (1.2.21)$$

En de vergelijkingen voor de covariantiematrix :

$$P(k+1|k) = P(k|k) + Q(k) \quad (1.2.22)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot C(k+1)] P(k+1|k) \cdot [I - K(k+1) \cdot C(k+1)]^T + K(k+1) \cdot R(k+1) \cdot K(k+1)^T \quad (1.2.23)$$

De matrices $P(k+1|k)$ en $P(k+1|k+1)$ kunnen worden geïnterpreteerd als voorwaardelijke schattingsfout covariantiematrices (met $\delta \underline{x}$ de schattingsfout als bij (1.2.4)) :

$$P(k+1|k) = E[\delta \underline{x}(k+1|k) \cdot \delta \underline{x}(k+1|k)^T] \quad (1.2.24)$$

$$P(k+1|k+1) = E[\delta \underline{x}(k+1|k+1) \cdot \delta \underline{x}(k+1|k+1)^T] \quad (1.2.25)$$

1.3 Het extended Kalman-filter voor niet-lineaire modellen

In de vorige paragraaf is het Kalman-filter afgeleid, welke minimumvariantie schattingen geeft voor lineaire modellen. De afgeleide theorie wordt nu uitgebreid door in deze paragraaf niet-lineaire modellen in beschouwing te nemen. De reden hiervoor is te vinden in het visco-elastisch materiaalgedrag van kunststoffen, beschreven met niet-lineaire modellen.

Uitgegaan wordt van de probleemdefinitie (vgl. (1.2.1)) :

$$\underline{y}(k) = \underline{h}(\underline{x}, k) + \underline{v}(k) \quad (1.3.1)$$

De kolom \underline{h} stelt het niet-lineaire model voor met daarin de konstante parameters \underline{x} . Teller k en meetfout \underline{v} zijn identiek aan de in paragraaf 1.2 beschreven grootheden.

Wanneer $\underline{h}(\underline{x}, k)$ een voldoende "gladde" functie is, kan deze ontwikkeld worden in een Taylorreeks rond de voorwaardelijke verwachting $\hat{\underline{x}}(k|k-1)$ (referentie trajectorie). Dit levert de vergelijking :

$$\underline{h}(\underline{x}, k) = \underline{h}(\hat{\underline{x}}(k|k-1), k) + H(\hat{\underline{x}}(k|k-1), k) \cdot [\underline{x} - \hat{\underline{x}}(k|k-1)] \dots \quad (1.3.2)$$

waarin H de gelineariseerde matrix voorstelt, waarvoor geldt :

$$[H(\underline{x}(k+1|k))]_{i,j} = \delta h_i / \delta x_{j,k} |_{\underline{x}(k+1|k)} \quad (1.3.3)$$

Gebruikmakend van bovenstaande Taylorreeks ontwikkeling kan het zogenaamde extended Kalman-filter worden afgeleid, eveneens bestaande uit een voorspellings- en een correctievergelijking met vergelijkingen voor het aanpassen van de Kalman-Gain matrix en de covariantie matrix. Hierbij wordt aangenomen dat dit filter van gelijke vorm is als het filter voor lineaire modellen.

Zonder deze afleiding in zijn geheel te doorlopen wordt hier het eindresultaat, het stelsel vergelijkingen dat het discrete extended Kalman-filter voor het schatten van materiaalparameters uitmaakt, samengevat :

$$\underline{x}(k+1|k) = \underline{x}(k|k) \quad (1.3.4)$$

$$\underline{x}(k+1|k+1) = \underline{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot [\underline{y}(k+1) - \underline{h}(\underline{x}(k+1|k), k+1)] \quad (1.3.5)$$

$$K(k+1) = P(k+1|k) \cdot H(k+1)^T \cdot [R(k+1) + H(k+1) \cdot P(k+1|k) \cdot H(k+1)^T]^{-1} \quad (1.3.6)$$

$$P(k+1|k) = P(k|k) + Q(k) \quad (1.3.7)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot P(k+1|k) \cdot [I - K(k+1) \cdot H(k+1)]^T + K(k+1) \cdot R(k+1) \cdot K(k+1)^T \quad (1.3.8)$$

Met dit algoritme kunnen schattingen voor parameters in niet-lineaire modellen verkregen worden. De schatter is echter niet meer optimaal (in de zin dat minimumvariantieschattingen worden geleverd), zoals het Kalman-filter voor lineaire modellen. De matrices $P(k+1|k)$ en $P(k+1|k+1)$ kunnen derhalve ook niet meer geïnterpreteerd worden als in vergelijking (1.2.24) en (1.2.25).

De relaties (1.3.4) tot en met (1.3.8) maken het Kalman-filter als parameterschatter uit. In de volgende hoofdstukken wordt toegelicht hoe uitgaande van deze relaties een parameterschattingsprogramma kan worden geschreven. Dit programma is gebaseerd op één-dimensionale (trek)proeven aan tijdsafhankelijk materiaal.

(1 Voor Q wordt vaak de nulmatrix gekozen (geen modelfout). Dit kan gevaren met zich mee brengen [2], die echter eenvoudig verholpen kunnen worden door Q klein te kiezen.

2. PARAMETERSCHATTEN MET EEN REKENPROGRAMMA

2.1 Inleiding parameterschatten met een rekenprogramma

In het vorige hoofdstuk is het discrete Kalman-filter afgeleid als een optimale schatter voor lineaire modellen. Voor niet-lineaire modellen is door linearisering eveneens een toepasselijke formulering gevonden in de vorm van het extended Kalman-filter. Helaas kan deze schatter in het algemeen niet meer optimaal genoemd worden.

In het volgende staat parameteridentificatie met het extended Kalman-filter centraal. De afgeleide theorie is de basis voor een rekenprogramma, bestaande uit drie subprogramma's, die in hoofdstuk 3 in detail zullen worden beschreven.

Dit hoofdstuk is gericht op specifieke onderwerpen, die bij het parameterschatten aan de orde komen. Zoals in de algemene inleiding beschreven is, blijft het onderwerp in dit verslag beperkt tot het schatten van parameters uit visco-elastische modellen van materiaal, onderhevig aan 1-dimensionale proeven. Het is daarom verstandig, alvorens het schattingsprogramma daadwerkelijk te bespreken, zaken als de benodigde materiaalwet (2.2), het te houden experiment (2.3) en de exacte Kalman-formulering (2.4) eerst kort te behandelen.

Vanwege de kleine plaats die dit onderwerp uiteindelijk in het onderzoek inneemt, is de behandeling van de lineair visco-elastische theorie relatief kort gehouden. Voor meer details wordt verwezen naar [6].

2.2. Het materiaalmodel

Het mechanisch gedrag van polymere en biologische materialen is uitgesproken tijdsafhankelijk of viscoelastisch. Indien de deformaties niet al te groot worden kan men van lineair visco-elastische theorie gebruik maken om deze tijdsafhankelijkheid te kunnen beschrijven (1876 Boltzmann [5]).

De fysische principes van de lineair viscoelastische theorie zijn als volgt [6] : beschouw het materiaal als een black-box (zie figuur 2.2.1). Bij voorgeschreven rek is $\epsilon(t)$ de input en de resulterende spanning $\sigma(t)$ de output (het omgekeerde is ook mogelijk). De materiaaleigenschappen zijn de relaties tussen in- en output, dus tussen $\epsilon(t)$ en $\sigma(t)$.



figuur 2.2.1 black-box

De lineaire theorie gaat uit van 3 veronderstellingen :

1. Tijdsinvariantie,
2. lineariteit en
3. omkeerbaarheid,

welke staan beschreven in [6] pagina 6. Uitwerking van de lineair viscoelastische theorie op basis van deze veronderstellingen levert de zogenaamde constitutieve vergelijking in de vorm van :

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\theta) \cdot (d\sigma/d\theta) d\theta \quad (2.2.1)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\theta) \cdot (d\epsilon/d\theta) d\theta \quad (2.2.2)$$

De relatie (2.2.1) geldt voor een voorgeschreven spanning $\sigma(t)$; hierbij is de kruipcompliantie J gedefinieerd als de door de eenheidsspanning geproduceerde rek. Relatie (2.2.2) geldt in het geval dat de rek $\epsilon(t)$ is voorgeschreven ; $G(t)$ is de spanningsrelaxatiemodulus, gedefinieerd als door de eenheidsstap in de rek geproduceerde spanning. Op grond van het hier uit te voeren experiment (zie paragraaf 2.3) wordt gekozen voor de formulering volgens (2.2.2).

Voor $G(t)$ is gekozen :

$$G(t) = G_\infty + \sum_{j=1}^M g_j \cdot \exp(-t/\Omega_j) \quad (2.2.3)$$

Voor de waarde van M kan de keuze gemaakt worden tussen 1,2 of 3. (Dit impliceert een spanningsrelaxatiemodulus met 1,2 of 3 tijdsconstanten Ω).

Resultaat van bovenstaand verhaal is een groep van 3 viscoelastische modellen met respectievelijk 3,5 of 7 parameters. Hierbij wordt uitgegaan van een voorgeschreven rekverloop.

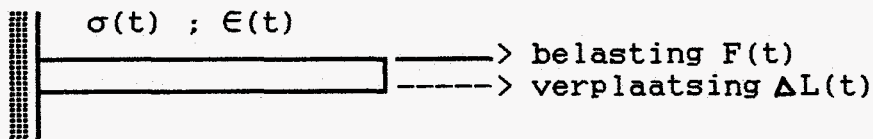
2.3 Het experiment

Parameteridentificatie op de klassieke wijze vereist een experiment, dat eenvoudig van opzet is, zodat het probleem nog oplosbaar blijft. Op deze manier immers wordt het materiaalgedrag vaak maar door enkele parameters bepaald, die dan te berekenen zijn (zie 0.1 probleemomschrijving).

Het Kalman-filter echter hoeft om nieuwe schattingen van parameters $\hat{x}(k+1|k+1)$ te genereren slechts bekend te zijn met de waarnemingen $y(k+1)$ (vergelijking (1.3.5)). Dit laat ook experimenten toe, die complexer van opzet zijn.

In dit stadium zijn echter nog geen waarnemingen voorhanden, zodat gebruik gemaakt zal worden van een gesimuleerd experiment. Dit experiment, dat nu eenvoudig van opzet wordt gehouden in verband met het nodige programmeerwerk, berekent "waarnemingen", uitgaande van een voorgeschreven rek en het model met gekozen waarden voor de parameters daarin. Dit gebeurt in subprogramma MEETDAT.

Het experiment dat in tweede instantie (deel 2) ook "in 't echt" moet gebeuren, wordt schematisch getoond in onderstaande figuur 2.3.1 :



figuur 2.3.1 1-D trekproef

Het materiaal, een trekstaaf van een tijdsafhankelijk materiaal, zal belast worden met een voorgeschreven rek $\epsilon(t)$ als functie van de tijd. De uitgangsgrootheid is de spanning $\sigma(t)$.

Wanneer het experiment gesimuleerd wordt kan voor $\epsilon(t)$ gekozen worden uit 3 vormen :

$$\underline{1.} \quad \epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot W(t) \quad \text{met} \quad \begin{aligned} W(t) &= 0 \quad \text{voor } t < 0 \\ W(t) &= 1 \quad \text{voor } t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$\epsilon(t)$ is een stapfunctie met stapgrootte ϵ_0 .

$$\underline{2.} \quad \epsilon(t) = A \cdot T \cdot (1 - \sin(\pi t / 2T)) \quad (2.3.2)$$

$\epsilon(t)$ is een sinusvormig signaal met in de tijd toenemende amplitude.

$$\begin{aligned} 3. \quad E(t) &= K \cdot t & 0 < t \leq T \\ E(t) &= K \cdot (2T-t) & T < t \leq 2T \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$E(t)$ wordt gekarakteriseerd door een constante reksnelheid, die halverwege de meettijd $2T$ van teken verandert.

Keuze van de rekvorm en berekening van gesimuleerde waarnemingen vindt, zoals gezegd plaats in programma MEETDAT.

2.4 Kalman-filter formulering

De onbekend veronderstelde materiaalparameters - afhankelijk van M (paragraaf 2.2) 3,5 of 7 in getal - worden samengevat in een vector \underline{x} :

$$\underline{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_{2M+1}) \quad M = 1, 2, 3 \quad (2.4.1)$$

Séquentieel schatten van de parameters x_1 tot en met x_{2M+1} met bijbehorende covariantie van de schattingsfout gebeurt met het Kalman-filter volgens :

$$\underline{\hat{x}}(k+1|k) = \underline{\hat{x}}(k|k) \quad (\text{voorspelling}) \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(k+1|k+1) &= \underline{\hat{x}}(k+1|k) + K(k+1) \cdot [\underline{y}(k+1) + \\ &\quad - \underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1|k), k+1)] \quad (\text{correctie}) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

De uitgangsfunctie \underline{h} in de correctievergelijking (2.4.3) is de gediscretiseerde versie van het functionele (niet-lineaire!) verband :

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\theta) \cdot (dE/d\theta) d\theta \quad (2.2.2)$$

met $G(t)$ volgens (2.2.3)

Dit levert voor het standaard lineair viscoelastisch materiaalmodel ($M = 1$) de gediscretiseerde versie van het verband :

$$\sigma(t) = \int_0^t \{x_1 + x_2 \cdot \exp(-x_3 \cdot (t-\theta))\} \cdot (dE/d\theta) d\theta \quad (2.4.4)$$

met $x_1 := G_\infty$; $x_2 := g_1$; $x_3 = 1/\Omega_1$

De Kalman-Gain matrix en de covariantiematrices worden bepaald door :

$$K(k+1) = P(k+1|k) \cdot H(k+1)^T \cdot [R + H(k+1) \cdot P(k+1|k) \cdot H(k+1)^T]^{-1} \quad (2.4.5)$$

$$P(k+1|k) = P(k|k) + Q \quad (2.4.6)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot P(k+1|k) \cdot [I - K(k+1) \cdot H(k+1)^T] + K(k+1) \cdot R \cdot K(k+1)^T \quad (2.4.7)$$

De intensiteitsmatrices R en Q uit de vergelijkingen (2.4.5) tot en met (2.4.7) worden hier dus als bekend en constant in de tijd verondersteld. Matrix $H(k)$ is de gelineariseerde uitgangsmatrix, afkomstig van de Taylorreeks ontwikkeling volgens (1.3.3). In ons geval is H een rijmatix.

Nemen we beginschattingen $\hat{x}(0|0)$ en $P(0|0)$ aan, dan is de formulering daarmee klaar. In het volgende hoofdstuk is het parameterschattingsprogramma beschreven, dat gebruikmakend van de in dit hoofdstuk beschreven onderwerpen, is ontstaan.

3. HET PROGRAMMA

3.1 Inleiding programma

In paragraaf 2.2 en 2.3 zijn al de programma namen KALMAN en MEETDAT genoemd als onderdelen van het Kalman parameterschattingsprogramma. Het totale programma is in te delen in 3 subprogramma's, die in principe na elkaar gedraaid moeten worden. Deze programma's zijn :

1. PROEF
2. MEETDAT en
3. KALMAN

Het opslaan van de gegevens uit de eerste twee programma's PROEF en MEETDAT is zo geregeld dat tevens de mogelijkheid bestaat om alleen het programma KALMAN te runnen. Bij berekening wordt dan uitgegaan van de laatst ingevoerde gegevens uit PROEF en MEETDAT.

Figuur 3.1.1 verduidelijkt hoe de drie subprogramma's onderling samenhangen. In de volgende paragrafen zal zowel deze structuur als de werking van ieder subprogramma afzonderlijk worden toegelicht.

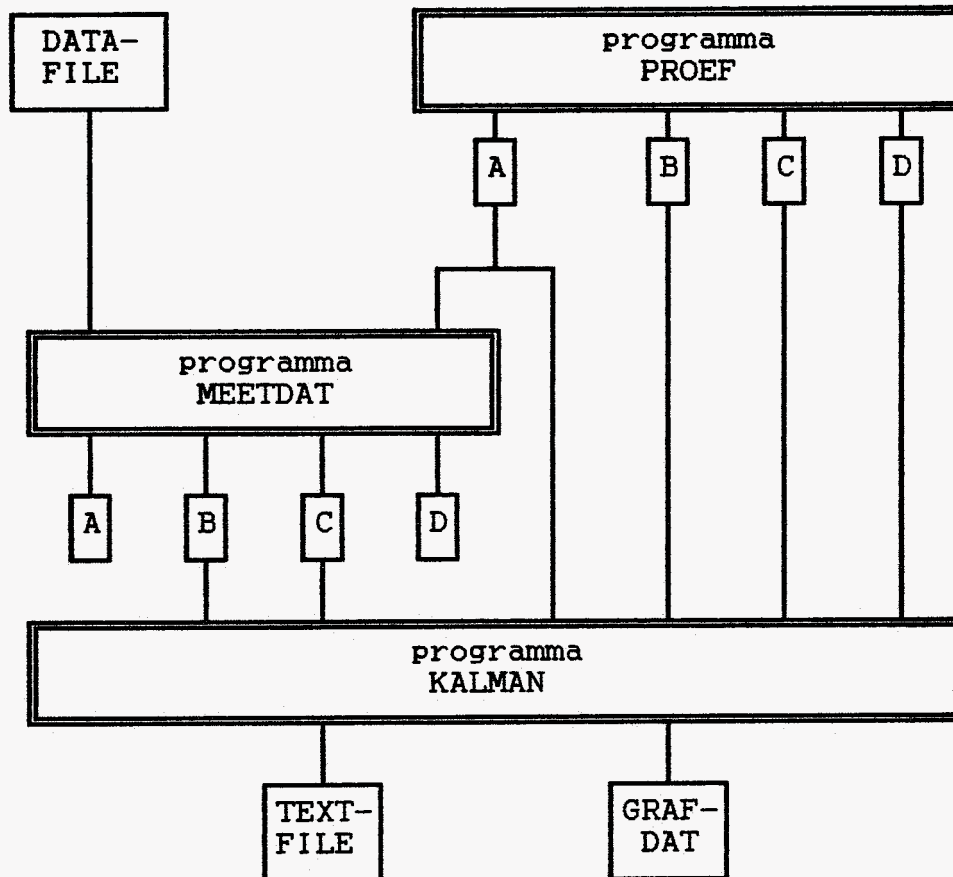
Het rekenprogramma is geschreven in turbopascal [7] voor gebruik op personal computers.

3.2 De structuur van het rekenprogramma

In eerste instantie is voortbordurend op het (programeer)werk van Oomens [8] gekozen voor 3 onafhankelijke programma's, die samen het totale schattingsprogramma uitmaken. Anders als in [8] wordt hier gekozen voor de volgende structuur :

- * Programma PROEF is een invoerprogramma, waar gegevens omtrent het schattingsproces kunnen worden ingevoerd. Deze gegevens worden opgeslagen in vier files.
- * Programma MEETDAT leest gegevens uit 1 van de vier files uit PROEF en vraagt op grond hiervan gegevens omtrent het experiment. Indien nodig worden waarnemingen van een gesimuleerd experiment berekend. Alle ingevoerde/berekende data worden opgeslagen in vier files.
- * Programma KALMAN leest zes van de acht aangemaakte files en schat daarmee de modelparameters met bijbehorende foutenschattingsmatrix. De uitvoer geschiedt naar het scherm, naar een textfile en naar een file ten behoeve van grafische representatie.

De verschillende subprogramma's zullen in de volgende paragrafen afzonderlijk worden toegelicht.



figuur 3.3.1 structuur van parameterschattingsprogramma

3.3 Het programma PROEF

Het programma PROEF² is een invoerprogramma voor het schattingsprogramma KALMAN. Als in MEETDAT en KALMAN is in PROEF gekozen voor een pagina's gewijze invoer van gegevens. Ofschoon dit het programmeerwerk niet vergemakkelijkt, heeft deze methode van invoeren voor de gebruiker grote voordelen.

Wanneer men parameters wil schatten met de methode die in dit verslag centraal staat, zullen van te voren een aantal zaken bekend moeten zijn (of op zijn minst worden aangenomen). In dit programma zal naar deze zaken gevraagd worden en zullen de ingegeven waarden worden opgeslagen in 4 binaire files.

In PROEF worden opgeslagen :

- FILE A * Het gebruikte materiaalmodel met 3,5 of 7 parameters,
 * het aantal parameters (3,5 of 7),
 * het aantal tijdstappen dat doorlopen wordt,
 * het tijdsincrement,
 * het aantal schattingsstappen k,
 * de waarde van de intensiteitsmatrix van de meetfout R.
- FILE B * De beginschattingen $\hat{x}(0|0)$ voor de modelparameters.

- FILE C * De waarde van de intensiteitsmatrix van modelfout Q.
FILE D * De beginschatting $P(0|0)$ voor foutencovariantiematrix.

3.4 Het programma MEETDAT

Het doel van het programma MEETDAT² is tweeledig. Afhanke-lijk van het al of niet voorhanden zijn van van werkelijke meetdata, kan gekozen worden voor een experimentsimulatie. Uitgaande van een 1-dimensionale (trek)proef kan dan de vorm en grootte van de voorgeschreven rek worden ingevoerd, waarmee de rekken op gediscrètiseerde tijdstippen worden berekend. Daarnaast vindt, gebruikmakend van ingegeven model met parameterwaarden berekening plaats van de (theoretisch) resulterende spanning op de genoemde tijdstippen. Uiteraard zullen hier de geschatte waarden van de parameters uit het programma KALMAN moeten convergeren naar de gekozen waarden in het model.

Wordt niet voor simulatie gekozen, dan worden de meetgegevens kracht en verplaatsing uit een meetfile ingelezen en omgerekend in spanningen en rekken.

Berekende of ingelezen spanningen en rekken worden opgeslagen in 2 binaire files.

In MEETDAT worden opgeslagen :

- FILE A * De stapgrootte in de rek ϵ_0 (paragraaf 2.3),
 * de amplitude A,
 * de tijdconstante T,
 * de reksnelheid K,
 * de rekvorm³.
FILE B * UTOT: rek op tijdstip 0...k (berekend/ingelezen).
FILE C * FTOT: spanning op tijdstip 1...k (berekend/ingelezen).
FILE D * De gekozen parameterwaarden ten behoeve van simulatie.

Alleen file B en C bevatten voor het schattingsprogramma KALMAN relevante informatie.

Voor de numerieke aspecten, die bij de berekening van de uitgangsgrootheid (spanning) bij experimentsimulatie optreden wordt hier alvast verwezen naar hoofdstuk 4, waarin deze behandeld worden.

- (2) In de directory staat het programma NAAM aangeduid met programmanaam NAAM.PAS (of NAAM.COM). De toevoeging ".PAS" duidt op de gebruikte taal turbopascal, ".COM" op de gecompileerde versie.
 (3) Er bestaan 3 rekvormen volgens paragraaf 2.3 ; wanneer voor 1 vorm gekozen is worden overige getallen nul gemaakt.

3.5 Het programma KALMAN

Het programma KALMAN is het daadwerkelijke schattingsprogramma. Met behulp van de gegevens uit 6 van de 8 invoerfiles worden de parameters in het model geschat. De matrix P, die steeds "updated" wordt, geeft een indicatie van de schattingsfout en de correlatie tussen de parameters onderling.

Uitvoer van dit parameteridentificatie programma bestaat uit een pagina met de grootheden \underline{x} en P, aangevuld met afwijking in de uitgang van het filter (= verschil tussen berekende en gemeten spanning op tijdstip k). Per iteratiestap worden de grootheden van de laatst verkregen waarden voorzien. Daarnaast worden deze waarden (voor de afwijking in de uitgang wordt de relatieve fout berekend) sequentieel geschreven in een textfile.

Hiermee zijn de afzonderlijke subprogramma's voldoende besproken. Het volgende hoofdstuk behandelt de numerieke aspecten van het programma KALMAN en MEETDAT, voortkomend uit de toepassing van de Kalman-theorie in praktijk.

4. NUMERIEKE ASPECTEN

4.1 Inleiding numerieke aspecten

In paragraaf 4 van hoofdstuk 2 is de Kalman formulering behandeld, die wordt gebruikt in het schattingsprogramma KALMAN. Onderdeel van deze formulering is het bepalen van het functionele verband (uitgangsvergelijking) :

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\theta) \cdot (dE/d\theta) d\theta \quad (2.2.2)$$

met $G(t)$ volgens (2.2.3)

Om deze integraal te kunnen berekenen moet de formulering volgens (2.2.2) omgezet worden in een numeriek bruikbare formulering. Daarnaast zullen van bovenstaand verband partitiele afgeleiden berekend moeten worden voor de bepaling van de gelineariseerde uitgangsmatrix H . Deze beide numerieke aspecten zijn de onderwerpen, die in dit hoofdstuk worden behandeld.

Andere numerieke aspecten zoals o.a. de omzetting van de theoretische vergelijkingen van het Kalman-filter in bruikbare procedures voor het programma, zijn voor de hand liggend en worden niet behandeld (zie listing van programma's).

4.2 Numerieke integratie

In de Kalman formulering wordt uit gegaan van de gediscretiseerde versie van het functionele verband :

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\theta) \cdot (dE/d\theta) d\theta \quad (2.2.2)$$

waarbij :

$$G(t) = G_\infty + \sum g_j \cdot e^{-t/\tau_j} \quad (2.2.3)$$

Het produkt $G(t-\theta) \cdot (dE/d\theta)$ wordt opgevat als een functie $f(\theta)$, zodat gesteld kan worden :

$$\sigma(t) = \int_0^t f(\theta) d\theta := \sum_{k=1}^N c_k \cdot f(k) + R(f) \quad (2.2.4)$$

Hier wordt overgestapt van integratie naar sommatie, een overgang die inherent is aan numerieke integratie. De term $R(f)$

stelt de afbreekfout voor die bij deze overgang gemaakt wordt. De grootte van deze restterm bepaalt grotendeels de nauwkeurigheid van de integratiemethode (hier wordt deze verder niet meegenomen).

Kiest men in (2.2.4) voor $c_k := \Delta t$ met $N \cdot \Delta t = t$ (m.a.w. het interval wordt van $\theta = 0$ tot t opgedeeld in N gelijke delen Δt), dan volgt :

$$\sigma(t) \approx \sum_{k=1}^N \Delta t \cdot f(k \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \sum_{k=1}^N f(k \cdot \Delta t) \quad (4.2.1)$$

Voor $f(k \cdot \Delta t)$ geldt met vergelijking (2.4.4) :
(voor stand.lin.visc.elastisch materiaalgedrag)

$$f(k \cdot \Delta t) = dE/dt|_{k \cdot \Delta t} \cdot \{x_1 + x_2 \cdot \exp(-x_3 \cdot (t - k \cdot \Delta t))\} \quad (4.2.3)$$

Kunnen we nu een uitdrukking voor $dE/dt|_{k \cdot \Delta t}$ vinden dan kan door substitutie van (4.2.3) in (4.2.1) de integraal worden bepaald. Gebruikmakend van vorige waarden van het ingangssignaal $\epsilon(t)$ (achterwaartse differentiatie) volgt :

$$dE/dt|_{k \cdot \Delta t} \approx [\epsilon(k \cdot \Delta t) - \epsilon((k-1) \cdot \Delta t)] / \Delta t \quad (4.2.4)$$

Voor Δt wordt de kleinst mogelijke waarde gekozen, te weten het tijdsincrement van het gediscretiseerde rek/spanningssignaal (= het omgekeerde van de samplefrequentie van de meting).

Hoewel deze wijze van numeriek oplossen van de integraal niet de meest optimale is ($R(f)$ niet minimaal), is de hier verkregen formulering zeker het eenvoudigst te doorzien.

Nadeel echter is dat de rekentijd bij elke iteratiestap langer wordt : doordat de parameterwaarden per stap veranderen, moet integraal (2.2.2) steeds van nul tot t doorlopen worden, zonder dat gebruik gemaakt kan worden van de reeds berekende waarde van nul tot $t - \Delta t$. Dit probleem is - wil men de formulering algemeen blijven houden - moeilijk te omzeilen. Voor onze toepassing is deze methode echter voorlopig geschikt genoeg.

4.3 Numerieke differentiatie

Tweede en laatste aspect dat besproken zal worden is de bepaling van (de elementen van) matrix H , de gelinealiseerde uitgangsmatrix uit (2.4.5) en (2.4.7). Onderzocht moet worden hoe de uitgangsfunctie \underline{h} - in ons geval de spanning σ - afhangt van de daarin voorkomende parameters \underline{x} . De elementen van H zijn gedefinieerd volgens (1.3.3).

Allereerst wordt twee maal per parameter de spanning σ als gevolg van de voorgeschreven rek ϵ berekend. Verschil tussen beide berekeningen is slechts een kleine afwijking in de waarde van de parameter, waarvan de invloed op de uitgangsfunctie moet worden bepaald. Voor een willekeurig element x_1 van \underline{x} ($n \times 1$) resulteert dit in :

$$\underline{h} = \sigma(k) = \int_0^k f(x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_n, \theta) d\theta \quad (4.3.1)$$

$$\underline{h} + \delta \underline{h} = \sigma(k) + \delta \sigma = \int_0^k f(x_1, \dots, x_1 + \delta x_1, \dots, x_n, \theta) d\theta \quad (4.3.2)$$

De variatie δx_1 is afhankelijk van de grootte van de parameter x_1 gekozen door te stellen :

$$\delta x_1 = x_1 / 10 \quad (4.3.3)$$

Het verschil van beide waarden voor de spanning op tijdstip k gedeeld door de variatie in de betreffende parameter levert 1 element van matrix H (op tijdstip k) :

$$H_1 = \frac{\underline{h} + \delta \underline{h} - \underline{h}}{\delta x_1} = \frac{\delta \underline{h}}{\delta x_1} \quad (4.3.3)$$

Opmerking : Matrix H is in ons geval een rijmatrix met n elementen.

Door deze procedure voor alle elementen van \underline{x} te herhalen, kan de gelineariseerde matrix H worden bepaald. Zolang de parameterwaarden niet overdreven klein worden (cijfERVERLIES) is deze methode nauwkeurig genoeg om in het parameterschattingsprogramma gebruikt te worden.

Hiermee zijn de belangrijkste numerieke aspecten besproken en is tevens een eind gekomen aan de behandeling van het schattingsprogramma. Het laatste hoofdstuk van dit deel geeft het resultaat van een voorbeeld (simulatie)berekening en enige conclusies, die nu al getrokken kunnen worden. Het echte parameterschatten met meetwaarden van een trekbank staat centraal in het tweede deel van dit verslag.

5. RESULTATEN & CONCLUSIES DEEL 15.1 Resultaat van een voorbeeld

In bijlage 1.1 en 1.2 wordt het resultaat getoond van een voorbeeld berekening. Bij simulatie van een experiment wordt uitgegaan van een standaard lineair viscoelastisch materiaal, waarvan het gedrag beschreven wordt door de constitutieve vergelijking :

$$\sigma(t) = \int_0^t \{0.5 + 0.5 \cdot \exp(-2 \cdot (t-\theta))\} \cdot (d\epsilon/d\theta) d\theta \quad (5.1.1)$$

Daaruit volgt voor de materiaalparameters :

$$x_1 := 0.5 ; x_2 := 0.5 ; x_3 := 2$$

We gaan uit van de beginwaarden voor :

* parameters : $x_1 := 0.6 ; x_2 := 0.4 ; x_3 := 2.4$

* covariantiematrix : $P_{i,j} := 0.2$ voor $i=j$, anders $P_{i,j} := 0$
($i,j = 1,2,3$)

en nemen verder aan :

* modelfout : $Q_{i,j} = 0$ voor $i,j = 1,2,3$

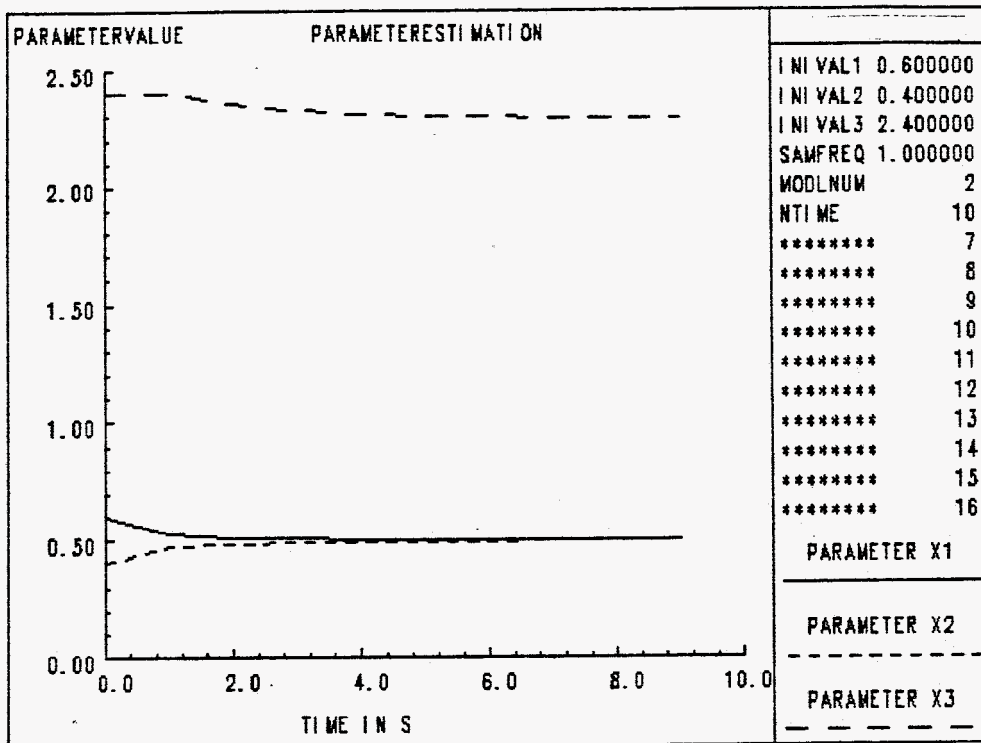
* meetfout : $R = 1 \cdot 10^{-3}$

Het experiment, dat hier gesimuleerd wordt omvat een 1^d-dimensionale trekproef met een voorgeschreven stap in de rek ter grootte $\epsilon_0 = 1$.

Het Kalman-filter schat de parameterwaarden voor x_1 tot en met x_3 in 10 tijd/schattingstappen met een tijdsincrement van 1 seconde.

De grafiek 5.1.1 toont het verloop van de parameters gedurende het schattingsproces. Deze grafieken laten de convergentie zien van de parameterwaarden naar de originele waarden. We zien dus dat m.b.v. een (nu nog) eenvoudig experiment parameters geschat kunnen worden met het programma.

De invloed die de verschillende invoergrootheden hebben op het resultaat van de berekening, wordt behandeld in [2] en zal hier niet verder aan de orde komen.



Grafiek 5.1.1 Parameters tijdens 10 stappen bij gesimuleerd experiment

5.2 Conclusies deel 1

Het gebruik van het Kalman-filter blijkt een bruikbare, alternatieve manier van parameterschatten in het geval dat de probleemformulering eenvoudig gehouden wordt. Ook voor complexere problemen zal in de toekomst de techniek getest moeten worden.

Het tot stand komen van het programma is vanwege gebrek aan PC ruimte moeizaam verlopen. Wel is gepoogd het programma zodanig te schrijven (pascal is een relatief eenvoudige taal) dat de opbouw snel begrepen kan worden en eventuele aanvullingen in de toekomst gemakkelijk te maken zijn.

Aanbevelingen met betrekking tot deze aanvullingen of verbeteringen zijn o.a. :

- Uitbreiding van het aantal mogelijke materiaalmodellen
- Uitbreiding van het aantal ingangssignalen (bv. snelheid meenemen zodat $[\sigma(t), d\sigma/dt(t)]^T = \underline{h}[\epsilon(t), t]^T$)
- Verbeteren van numerieke tijdsintegratie
- Verbeteren van numerieke differentiatie
- Veranderen van programmastructuur etc.

Volgende stap in het onderzoek is gegevens uit een experiment op de trekbank te confronteren met het programma en te onderzoeken of de resultaten overeenkomen met wat mogelijkwijs verwacht kan worden. Hiervoor verwijs ik naar het tweede deel van mijn stage-opdracht en van het verslag.

DEEL 2

6. INLEIDING DEEL 2

6.1 Probleemomschrijving

Voor het bepalen van constitutief gedrag van tijdsafhankelijke materialen is een parameterschattingstechniek ontwikkeld, gebaseerd op het Kalman-filter uit de systeemleer. Uitgaande van deze techniek is een parameterschattingsprogramma geschreven in turbopascal voor gebruik op personal computers, geschikt voor 1-dimensionale proeven aan viscoelastisch materiaal.

Testresultaten uit experimentsimulaties tonen de bruikbaarheid van de ontwikkelde techniek en het programma, in het geval dat de probleemformulering eenvoudig gehouden wordt. De vraag is of ook voor complexere problemen de schattingsmethode werkt.

Het is de bedoeling dat in dit deel wordt afgestapt van de experimentsimulaties en wordt overgegaan op reële experimenten aan tijdsafhankelijk materiaal, uitgevoerd op een één-dimensionale trekbank. Uit de confrontatie van hieruit voortkomende meetdata met het rekenprogramma zal de daadwerkelijke bruikbaarheid van het Kalman-filter als parameterschattingstechniek moeten blijken. Hopelijk levert dit tevens enig inzicht op in de problemen die opteden bij deze wijze van parameterschatten.

6.2 Doelstelling

Het moge duidelijk zijn dat het primair doel van het onderzoek het ontwikkelen van een goed werkende parameterschattingsmethode in de vorm van het Kalman-filter is. De resultaten uit het eerste deel zijn wat dat betreft (voorzichtig) optimistisch.

Vanuit deze achtergrond is daarom gekozen voor een directe confrontatie van de ontwikkelde methode met een materiaal, dat reeds sterk in de belangstelling staat in het onderzoek door de vakgroep WFW van de TUE. Dit materiaal betreft het door D.S.M geproduceerde EPDM-rubber. Binnen het onderzoek naar het gedrag van hartkleppen wordt dit sterk tijdsafhankelijk materiaal - al of niet bestraald of behandeld met peroxide - veelvuldig getest en beproefd. Voor dit onderzoek heeft dit het voordeel dat zowel voldoende voorkennis als proefmateriaal aanwezig is, terwijl de resultaten op hun beurt kunnen bijdragen aan het onderzoek naar het gedrag van hartkleppen.

In dit verslag richt zich op aspecten, welke te maken hebben met de ontwikkelde schattingsmethode en niet zozeer op het gebruikte materiaal. In het volgende hoofdstuk worden twee metingen en hun resultaten besproken, gevolgd door een afsluitende conclusie.

7. DE METINGEN

7.1 Inleiding metingen

In dit hoofdstuk worden 2 metingen besproken. Per meting zijn een aantal malen onder verschillende condities materiaalparameters geschat.

Omdat de lijn in het onderzoek sterk bepaald is geworden door de resultaten die per meting behaald zijn, worden metingen met hun resultaten behandeld in de volgorde waarin ze zijn uitgevoerd. Dat wil zeggen : meting 1 aan EPDM (1 Mrad) in paragraaf 7.2, gevolgd door de parallel uitgevoerde meting 2 aan twee proefstukjes EPDM (peroxide) in paragraaf 7.3.

Centraal bij het schatten staat steeds de convergentie van modelparameters en de voorspelling van het gemeten spanningsverloop hiermee (uitgangsvoorspelling).

7.2 Meting 1

1. Het experiment

Voor de eerste meting is een strookje van EPDM-rubber, bestraald met 1 Mrad, ingespannen in de klemmen van een trekbank en belast met een voorgeschreven (klem)verplaatsing in de tijd. Het materiaal blijkt uit vorige proeven een relatief grote blijvende verlenging en hysteresis te vertonen, zodat gekozen is voor een cyclische belasting als volgt :

- * bovengrens : rek van maximaal 10 %
- * ondergrens : kracht van 0.05 N (dit voorkomt "lus vorming" door blijvende verlenging van proefstukje)
- * treksnelheid : $v = 0.05$ mm/s

Daarnaast is een relaxatieproef gedaan om enig idee te krijgen van de grootte van de waarden van de parameters, die het gedrag moeten beschrijven (beginwaarden voor x).

Meetgegevens experiment 1

- * proefstukje : lengte l_0 : 40 mm
breedte : 10 mm
dikte : 0.26 mm
oppervlak : 2.6 mm²
- * samplefrequentie : 2 Hz (tijdincrement 0.5 s)
- * aantal samples : 420
- * temperatuur : 20/22 °C

2. Schatten van modelparameters

In eerste instantie wordt geprobeerd het materiaalgedrag te beschrijven met een lineair viscoelastisch materiaalmodel met 3 parameters (standaard lineair viscoelastisch). Uit de relaxatieproef volgen de beginwaarden $\underline{x}(0|0)$ voor de eerste berekening :

$$x_1 := 0.12 \quad ; \quad x_2 := 0.3 \quad ; \quad x_3 := 0.1$$

Beginschatting voor de covariantiematrix, $P(0|0)$, wordt groot gekozen (er heerst nog grote onzekerheid over de juistheid van de waarden $\underline{x}(0|0)$:

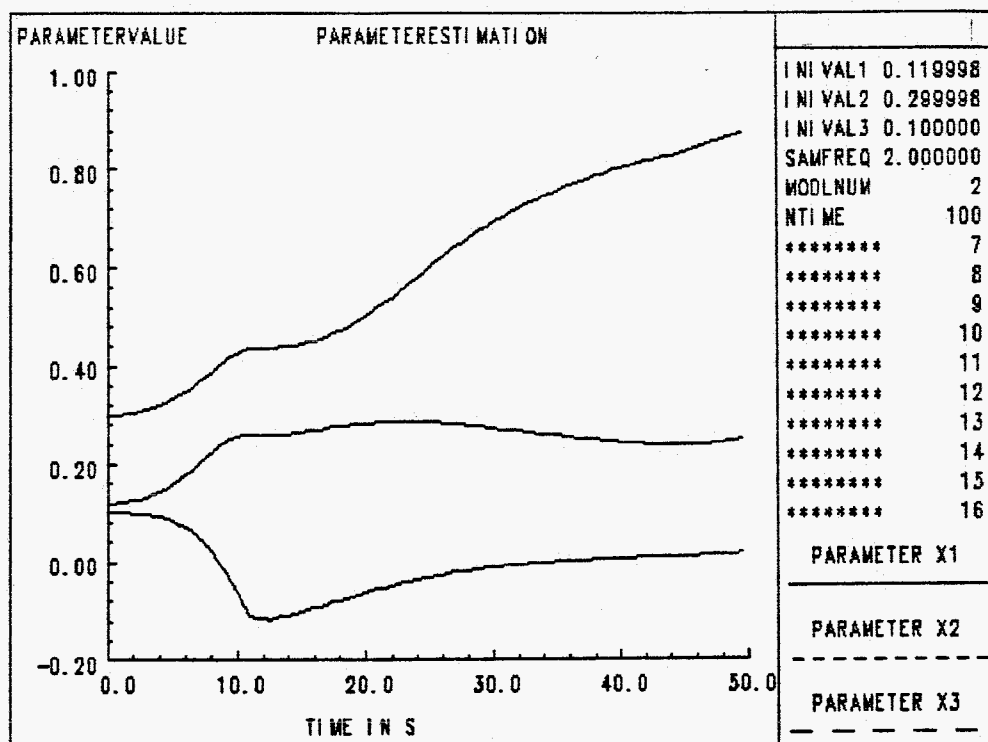
$$P_{i,j} := 0.5 \text{ voor diagonaalelementen, } P_{i,j} := 0 \text{ elders} \\ (i,j = 1,2,3)$$

Verder wordt aangenomen :

$$Q = 0 \quad \text{en} \quad R = 1 \cdot 10^{-2} \text{ (groot!)}$$

De eerste schatting loopt over 100 meetpunten, waarbij elke stap nieuwe schattingen gegenereerd worden voor \underline{x} en voor P. De resultaten van deze berekening zijn te vinden in bijlage 2.1.

De bedoeling van de eerste schatting is het verkrijgen van betere beginschattingen voor \underline{x} en P. Daarnaast wordt gehoopt een betere aanname voor R te vinden. Uit grafiek 7.2.1 blijkt dat geen van de parameters na 100 stappen al echt convergeert. : x_1 en x_3 stijgen licht en x_2 varieert nog sterk.

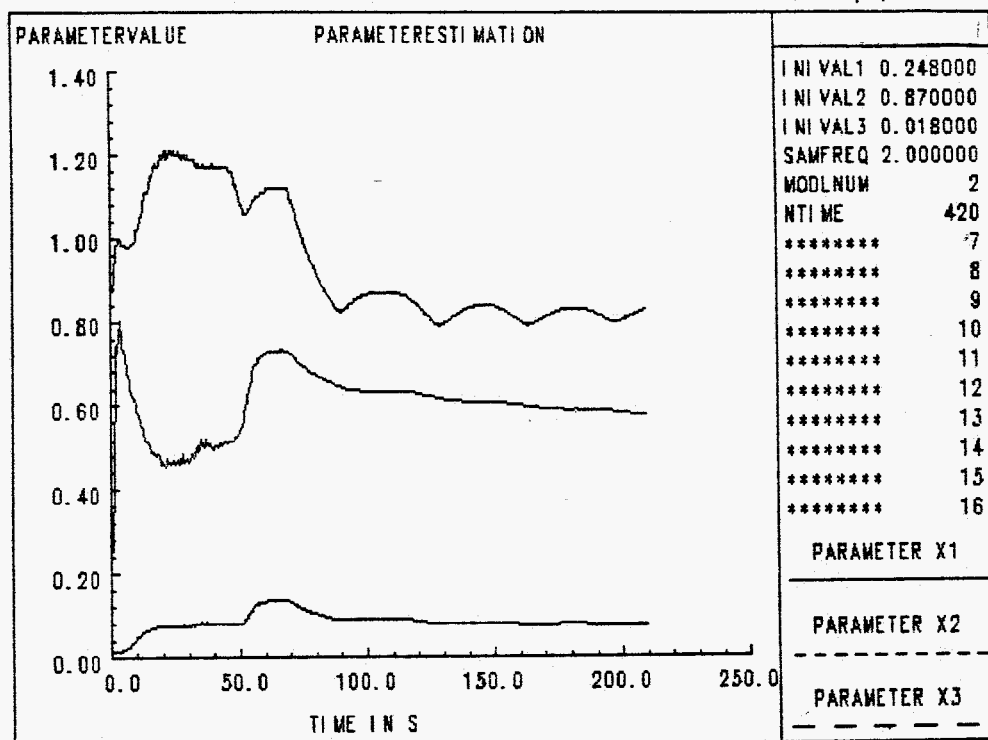


grafiek 7.2.1 Parameters uit stand.visc.elast. materiaalmodel : berekening 1 voor het bepalen van nieuwe beginschattingen.

We trekken hieruit vooral nog geen conclusies en gebruiken de laatst verkregen schattingen van \underline{x} en P voor een berekening over het totale aantal stappen (420). Voor meetfout R nemen een natuurgetrouwere waarde : uitgaande van een fout van ± 0.005 op de spanning (orde grootte 10^{-1}) volgt :

$$s = 0.005 \quad s^2 = R = 25 \cdot 10^{-6} \quad (s = \text{standaard afwijking})$$

De resultaten van de tweede berekening over 420 stappen zijn te vinden in bijlage 2.2.

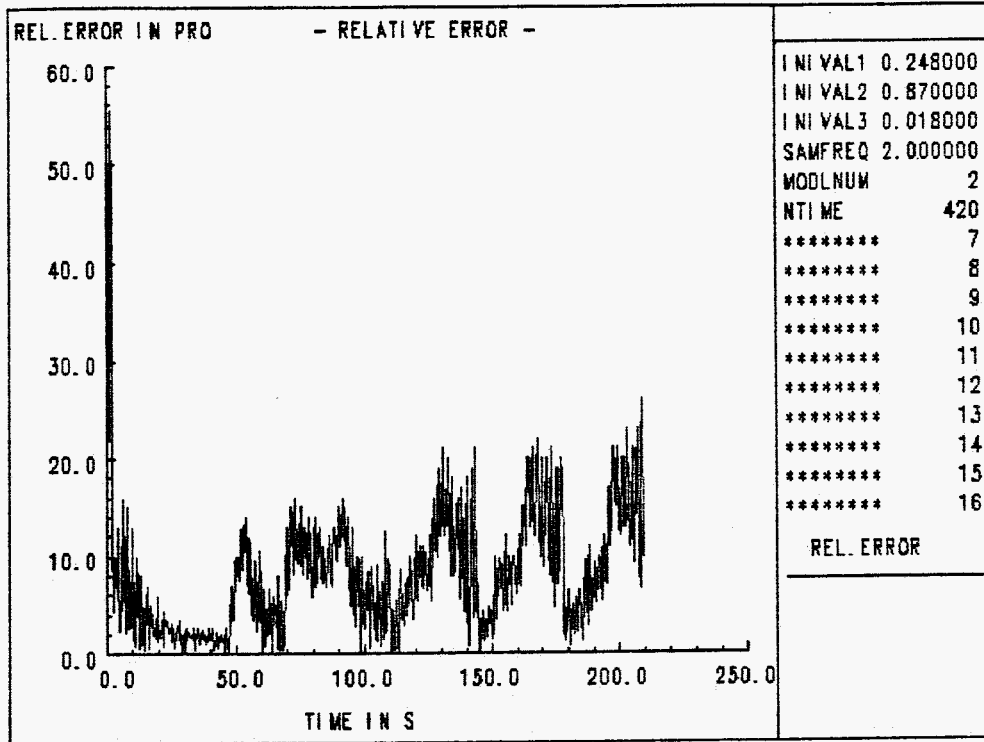


grafiek 7.2.2 Parameterwaarden tijdens de tweede berekening : convergentie na 420 stappen

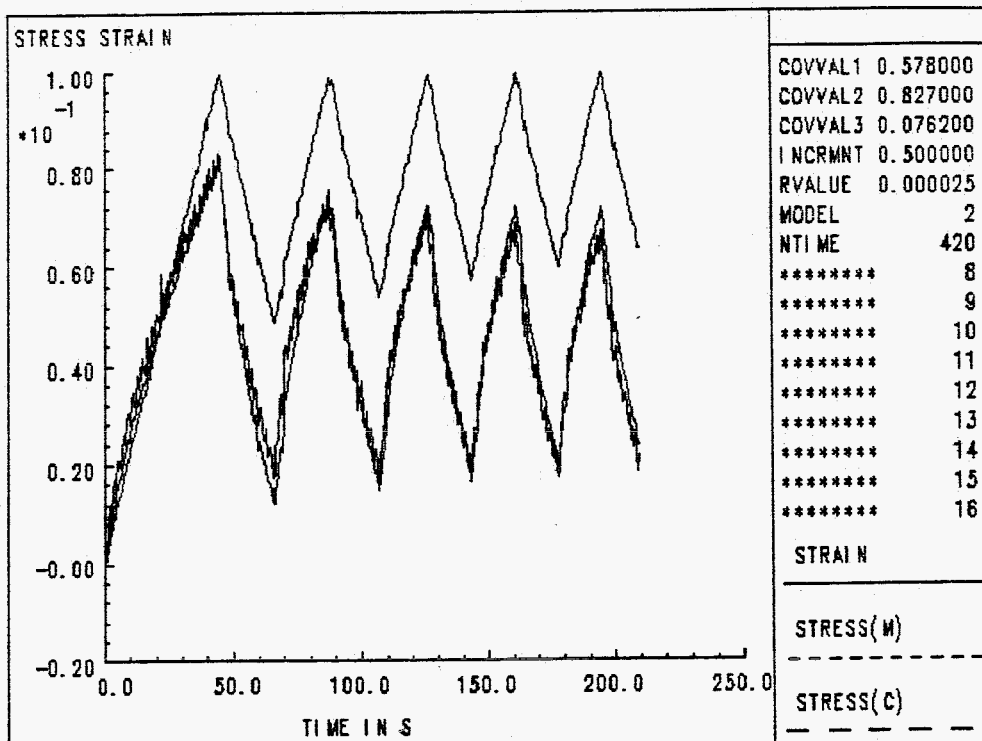
Het verloop van de parameterwaarden tegen de tijd (grafiek 7.2.2) laat convergentie zien van de modelparameters in \underline{x} naar constante waarden. Voor x_1 en x_2 wordt het verloop na opslingering uiteindelijk een niveaulijn, terwijl x_3 slingert rondom een gemiddelde waarde met, zo blijkt, dezelfde periode als het opgelegde reksignaal. Dit laatste doet vermoeden, dat de slingering in x_3 te wijten is aan "slordige" berekening van de spanning uit de kracht. In het programma MEETDAT wordt namelijk uit het gemeten krachtsignaal van de trekbank de spanning berekend door deze te delen door het beginoppervlak. Uiteraard wordt dan geen rekening gehouden met dikteverandering van het proefstukje bij oprekken (incompressibiliteit). Dit uit zich in een veranderende stijfheid, dus in parameter x_3 .

Uit de matrix P volgt dat de verkregen eindschatting $\underline{x}(420|420)$ een goede benadering voor \underline{x} is, daar de diagonaalelementen zeer klein geworden zijn. Deze uitspraak wordt gecontroleerd door berekening van het theoretisch spanningsverloop tegen de tijd met de laatst verkregen parameterschattingen. Bij vergelijking met het gemeten spanningsverloop blijken beide goed

overeen te komen (grafiek 7.2.4). De gevonden parameterwaarden in het gefitte model voorspellen het gedrag van dit materiaal dus goed, althans onder deze condities (experiment,rekverloop,etc.).



grafiek 7.2.3 Relatieve fout in de uitgang tijdens 2^e berekening : slingert mee met x_3



grafiek 7.2.4 Voorspelling van de uitgang(spanning)

Worden de laatste schattingen voor \underline{x} en P gebruikt als beginschattingen voor nog eens een berekening over 100 stappen, dan blijken alle parameters uiteindelijk te stabiliseren. Wordt daarentegen de matrix P als het ware teruggezet op een grotere waarde (beginschatting voor \underline{x} blijft hetzelfde), dan zullen de parameters eerst sterk "opslingeren", alvorens veel later pas te stabiliseren. Een grote waarde voor P geeft het filter kennelijk de ruimte meer te variëren in de parameterwaarden.

De vraag is of matrix P zonder meer veranderd mag worden, wanneer een berekening met nieuwe beginwaarden gestart wordt. Het idee dat voortkomt uit de laatste berekening over 100 stappen, wijst erop dat de waarde van P meer "gerespecteerd" moet worden (zoals dat gebeurt voor de schatting voor \underline{x}). Aan de andere kant is het niet vreemd dat waarden voor de modelparameters convergeren, wanneer de beginwaarde voor matrix P bij voorbaat klein is.

Kijkend naar de fit van berekende en gemeten uitgang op elkaar (grafiek (7.2.4)), die goed is, moet P geïnterpreteerd

worden als een goede weergave van de fout. Het enig juiste criterium is namelijk het vermogen de uitgang te voorspellen (zonder dat geeist wordt dat ook een ander experiment goed voorspeld wordt). Dit betekent dat P een goede indicatie geeft van de fout in de parameters en opgepast moet worden met het overdimensioneren van deze matrix.

Concluderend kunnen we stellen dat het fitten van een lin. visc. elastisch materiaalmodel met 3 parameters in het geval van EPDM (1 Mrad) goed werkt. Bij cyclische belasting kan het spanningsverloop tegen de tijd voorspeld worden met de geschatte waarden van de modelparameters. Niet zeker is echter of ook bij andere belastingen de spanning hiermee voorspeld kan worden (bv. relaxatie).

In het schattingsproces moet worden uitgekeken voor overdimensionering van beginwaarden. Aangeraden wordt de berekening minimaal 1 maal te herstarten met nieuwe (meer betrouwbare) beginschattingen.

Als gevolg op de eerste meting wordt gekozen voor een experiment in tweevoud. We gebruiken metingen aan twee identieke (zelfde materiaal, zelfde geometrie) proefstukjes, elk afzonderlijk belast op twee verschillende manieren. Op deze manier kan bij elk proefstukje op twee verschillende wijzen parameteridentificatie plaatsvinden (totaal 4 metingen). Resultaten van 8 berekeningen maken vergelijking in experiment en proefstuk mogelijk. Deze berekeningen worden besproken in paragraaf 7.3.

7.3 Meting 2

1. Het experiment

Per proefstukje worden twee metingen gedaan met verschillende belastingen (voorgeschreven rek). Deze belastingen zijn als volgt opgelegd :

meting A : cyclisch belast als in 7.2.1 met (trek)snelheid
 $v = 0.1 \text{ mm/s}$

meting B : relaxatieproef na een initiele stap in de rek
(snelheid $v = 12000 \text{ mm/s}$) over 225 seconden.

Meetgegevens meting 2

* Beide proefstukjes zijn identiek en komen uit hetzelfde "vel" :

proefstuk 1 : EPDM peroxide behandeld

proefstuk 2 : EPDM peroxide behandeld

* Voor beide proefstukjes geldt :

lengte l_0 : 40 mm
 breedte : 10 mm
 dikte : 0.26 mm
 oppervlak : 2.6 mm²

* samplefrequentie : 2 Hz

* aantal samples : 450

* temperatuur : 20/22 °C

De vier afzonderlijke metingen worden respectievelijk aangeduid met meting EP1A (meting aan EPDM proefstuk 1 onder cyclische belasting), EP1B (meting aan EPDM proefstuk 1 tijdens relaxatieproef), EP2A en EP2B (metingen aan proefstuk 2).

2. Schatten van modelparameters

Zoals bij de eerste meting (paragraaf 7.2) wordt voor het materiaalgedrag een beschrijving met een model van 3 parameters gekozen. Bij elk berekening is gebruik gemaakt van :

$$Q = 0 \quad \text{en} \quad R = 1.10^{-4}$$

De eerste stap in de parameteridentificatie maakt gebruik van de metingen, waarbij de proefstukjes onderhevig zijn aan een cyclisch voorgeschreven verlenging (EP1A en EP2A). Parallel wordt voor beide proefstukjes een eerste berekening uitgevoerd met beginwaarden :

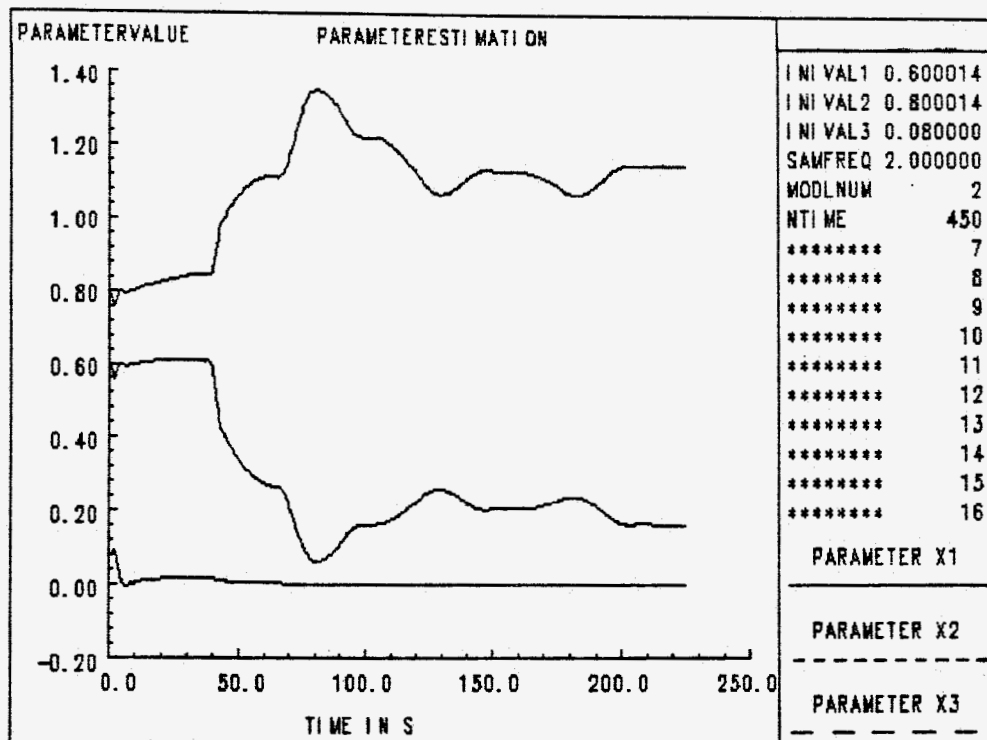
$x_1 = 0.6$; $x_2 = 0.8$; $x_3 = 0.08$ (uit meting 1)

$P_{i,j} = 0.5$ op hoofddiagonaal, $P_{i,j} = 0$ elders
($i,j = 1,2,3$)

Voor meting EP1A zijn de resultaten van deze berekening te vinden in bijlage 2.3. Voor meting EP2A levert de eerste berekening na 450 stappen :

$x_1 = -0.14$; $x_2 = 1.35$; $x_3 = 1.11 \cdot 10^{-3}$

Opmerkelijk bij de bestudering van deze waarden is het negatieve teken van parameter x_1 . Vergelijken van bovenstaande waarden met die uit bijlage 2.3 laat daarnaast grote verschillen in de eindwaarden van x_1 en x_2 tussen de twee proefstukjes zien. Beide parameters blijken ook moeilijk te convergeren (dit is bij de berekening met EP2A duidelijker als bij die met EP1A - zie grafiek 7.3.1).



Grafiek 7.3.1 Parameters tijdens eerste schattingsberekening met EP1A.

Een negatieve waarde voor x_1 is theoretisch onmogelijk : de spanningsrelaxatiemodulus $G(t)$, waarin de parameters x_1, x_2 en x_3 voorkomen is immers gedefinieerd als de door de eenheidsrek geproduceerde spanning (zie deel 1, paragraaf 2.2). Dit wil zeggen dat voor oneindig grote tijden - volledige relaxatie - de spanning convergeert naar de waarde G_∞ ($=x_1$ volgens (2.2.4)). Deze waarde kan onmogelijk negatief zijn.

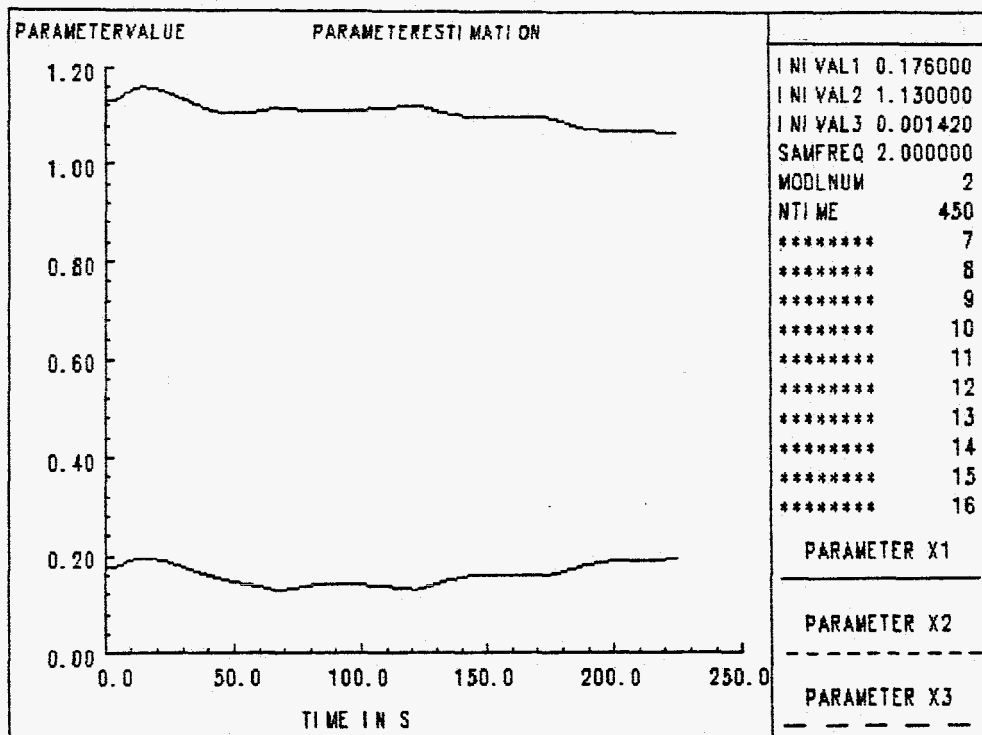
Grafiek 7.3.1 wordt nader bekeken. Uit de figuur blijkt dat

het verloop van parameter x_1 gelijk van vorm is als dat van parameter x_2 , zij het omgekeerd. Dit wijst op een onderlinge relatie. Klaarblijkelijk convergeren niet de beide parameters apart, maar wordt de som van beide parameters naar verloop van tijd constant.

Ook uit bijlage 2.3 is deze conclusie te trekken : na 450 stappen is element P_{12} ($=P_{21}$) negatief en ongeveer even groot als P_{11} . Dit wijst op een sterke correlatie tussen de parameters x_1 en x_2 .

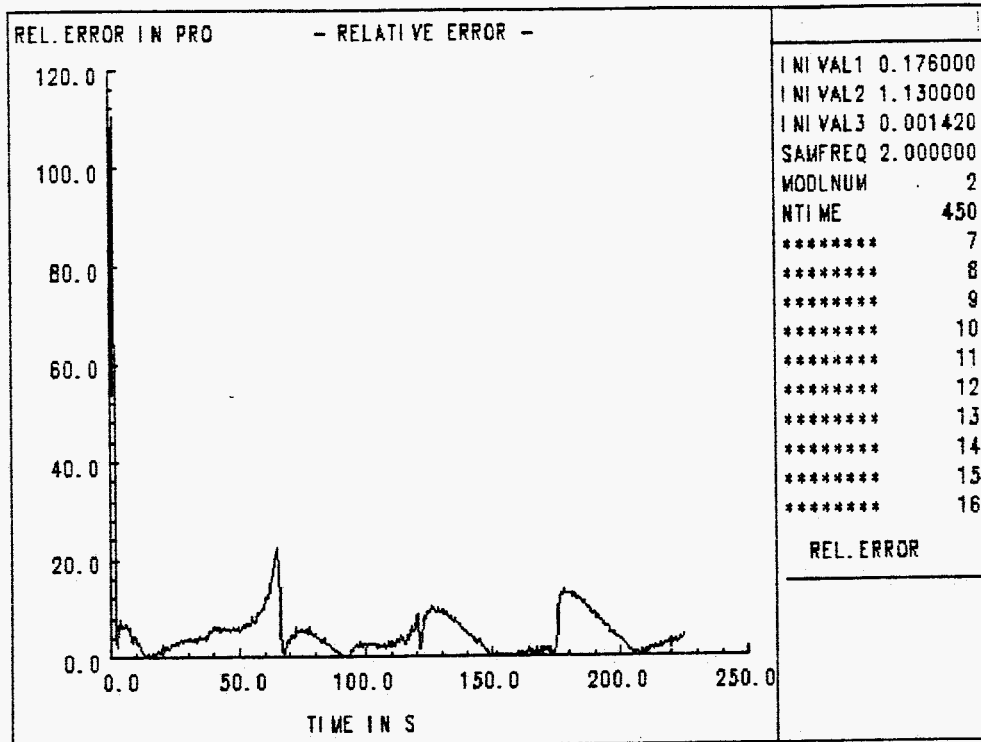
De verklaring van dit alles moet gezocht worden in de grootte van de parameter x_3 (1 gedeeld door de tijdconstante van het model). Als x_3 zeer klein is (10^{-3}) is de e-macht in het model vrijwel gelijk aan 1 en de relaxatiemodulus nagenoeg een constant getal ($x_1 + x_2$). Dit getal wordt door het Kalman-filter goed geschat. De afzonderlijke waarden van x_1 en x_2 zijn dus niet van belang, zolang als de som maar constant is (resp. 1.26 voor berekening met EP1A en 1.21 voor berekening met EP2A). Het materiaalgedrag wordt als tijdsonafhankelijk gezien, waarmee de som geïnterpreteerd kan worden als de elasticiteitsmodulus, die het materiaal karakteriseert (Hooke).

De resultaten uit de eerste berekeningen worden gebruikt voor een herstart met nieuwe beginwaarden (zie bijlage 2.4 en 2.5). Voor de berekening 2 met EP1A levert dit de grafieken 7.3.2 en 7.3.3.



Grafiek 7.3.2 Parameters tijdens tweede schattingsberekening met EP1A.

Parameters x_1 en x_2 in de grafiek 7.3.2 verlopen nog steeds in waarde, de som van beide blijft echter weer constant (1.26 in geval van EP1A, 1.20 voor berekening met EP2A).



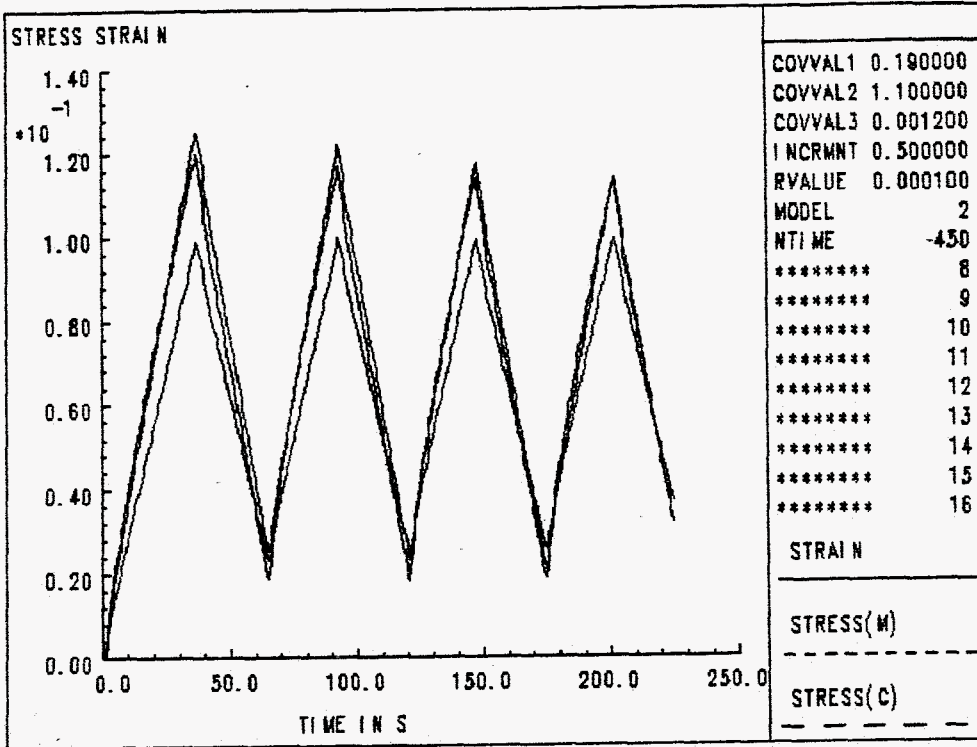
Grafiek 7.3.3 De relatieve fout tijdens de tweede berekening met meting EP1A.

De laatste schattingen van de modelparameters, verzameld in $\hat{x}(450|450)$ zijn gebruikt om het cyclische spanningsverloop volgens meting A te voorspellen. De berekende uitgang en de gemeten uitgang zijn tegen de tijd uitgezet in grafiek 7.3.4. Uit deze figuur, waarin tevens het rekverloop is opgenomen, blijkt dat met de gevonden parameterwaarden het materiaalgedrag bij cyclische belasting redelijk beschreven kan worden.

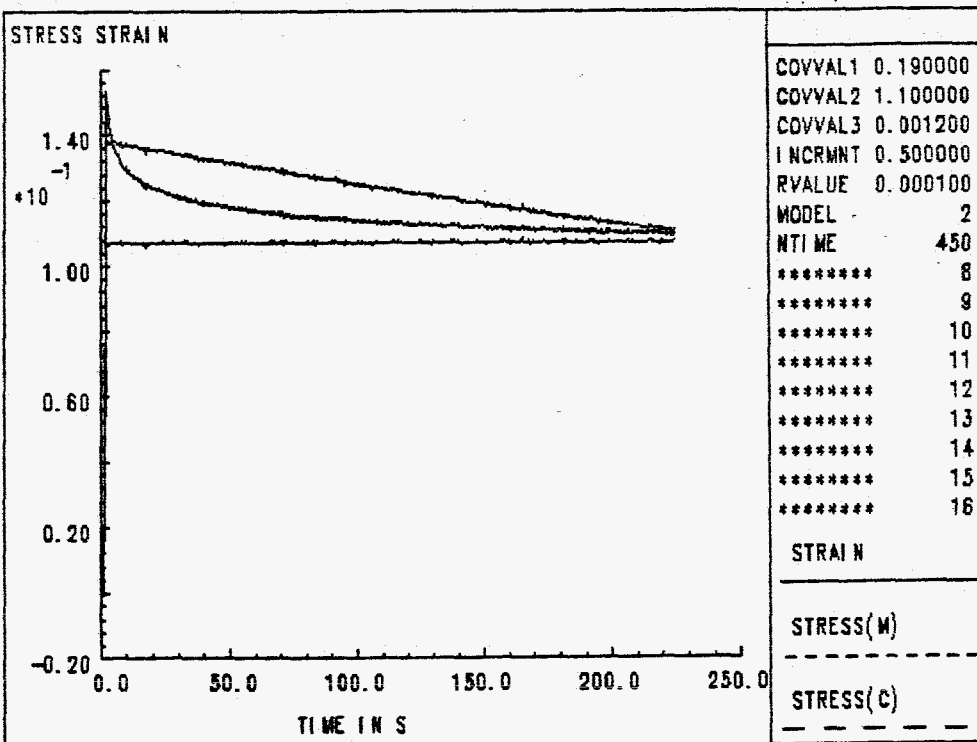
Laatstgenoemde schattingen zijn eveneens gebruikt om het spanningsverloop te voorspellen, wanneer de opgelegde belasting een stap in de rek volgens meting B voorstelt. Grafiek 7.3.5 laat de gemeten en de berekende spanning bij de relaxatieproef zien. Deze voorspelling is slecht.

Uit de berekeningen tot nu toe is gebleken dat tussen de proefstukjes onderling weinig verschil is in parameteridentificatie. Behalve het verschil in schatten van de grootte van de som van de parameters x_1 en x_2 , dat waarschijnlijk te wijten is aan minimale afwijkingen in de geometrie en meetonnauwkeurigheden, verlopen de berekeningen aan proefstuk 1 en 2 vrijwel gelijk. Voorspellen van de uitgang van meting EP2A met schattingen uit berekeningen aan meting EP1A (of andersom) heeft dan ook weinig zin.

Voor de compleetheit van het onderzoek is echter een berekening uitgevoerd, waarin de uitgang van meting EP1A voorspeld wordt met parameterwaarden uit de tweede berekening met EP2A. Deze voorspelling is goed te noemen. We wijzen hier op een verschijnsel dat inherent is aan het fitten met e-machten: zowel met de parameterwaarden uit de berekening met EP1A als met die uit EP2A kan de uitgang goed voorspeld worden. Dit is een nadeel dat helaas ook bij het schatten met het Kalman-filter optreedt.



Grafiek 7.3.4 Gemeten en berekende spanningsverloop van cyclische proef : 2^e berekening met EP1A



Grafiek 7.3.5 Berekende en gemeten spanningsverloop bij relaxatieproef : parameters uit 2^e berekening EP1A, data uit EP1B

Tot nu toe is steeds gebruikgemaakt van metingen EP1A en EP2A om materiaalparameters te schatten. Daarbij is al gebleken dat het materiaal zich onder deze (cyclische) belastingen tamelijk elastisch gedraagt. Het parameterschattingsproces wordt nu herhaald met de metingen EP1B en EP2B uit de relaxatieproeven. De derde berekening, die eveneens uitgaat van een materiaalmodel met 3 parameters, wordt simultaan uitgevoerd met beide metingen EP1B en EP2B.

Uitgegaan wordt van beginwaarden :

$$x_1 = 0.2 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 0.1$$

$$P_{i,j} = 0.5 \text{ op hoofddiagonaal, } P_{i,j} = 0 \text{ elders} \\ (i,j = 1,2,3)$$

De resultaten van deze berekening zijn te vinden in bijlage 2.6 en 2.7. Het parameterverloop kent dezelfde problemen als bij de eerste en tweede berekening. De som van de waarden van parameter x_1 en x_2 voor meting EP1B en EP2B wordt geschat op respectievelijk 1.27 en 1.15 (zie tabel 7.3.6).

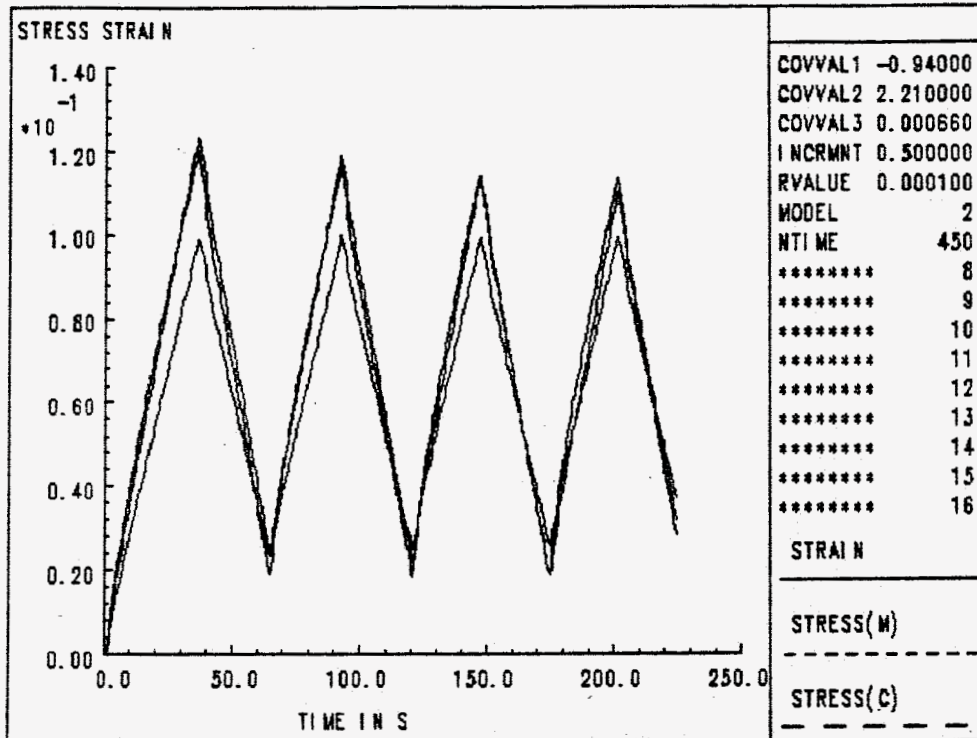
$x_1 + x_2$	Meting A		Meting B
	Berek. 1	Berek. 2	Berek. 3
Proefst.1	1.26	1.26	1.27
Proefst.2	1.21	1.20	1.15

Tabel 7.3.6 Som van parameters x_1 en x_2 in 3 parameter model, geschat door het Kalman-filter

Wanneer de waarden voor x_1 , x_2 en x_3 uit de laatste schatting $\hat{x}(450|450)$ gebruiken om de uitgang te voorspellen (relaxatiecurve) dan blijkt dit een zelfde figuur als grafiek 7.3.5 op te leveren. Voor parameterwaarden die met meting EP1B geschat zijn is dit een zeer slecht resultaat. Anderzijds kan het cyclisch verloop volgens metingen A met deze waarden goed voorspeld worden (grafiek 7.3.7).

Om deze waarnemingen te kunnen verklaren, grijpen we nogmaals terug op de spanningsrelaxatiemodulus uit paragraaf 2.2. De theoretische spanning als gevolg van een stap in de rek ter grootte ϵ_0 wordt in het geval van een 3 parametermodel gegeven door :

$$\sigma(t) = \epsilon_0 * (x_1 + x_2 * \exp(-x_3 * t))$$



Grafiek 7.3.7 Cyclische spanning voorspelt met parameters uit berekening 3 met EP1B

De e-macht in bovenstaande uitdrukking kan geschreven als een machtreeks volgens :

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$$

In dit geval bestaat de exponent x uit het produkt van t en x_3 . Met de geschatte waarde voor x_3 ($= 5 \cdot 10^{-4}$) en de maximale waarde voor t ($= 225$ s) is de exponent maximaal van de orde 10^{-1} . Dit leidt er toe dat alleen de lineaire term meetelt en de resttermen verwaarloosd kunnen worden.

Met $x_1 = -0.9$, $x_2 = 2.2$ en $\epsilon_0 = 0.1$ volgt dan voor de spanning :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 0.1 \cdot (-0.9 + 2.2 \cdot (1 - 5 \cdot 10^{-4} \cdot t + \dots)) \\ &= 0.12 - 1.1 \cdot 10^{-4} \cdot t \end{aligned}$$

Klaarblijkelijk is het spanningsverloop voor $t < 225$ s te zien als een lineaire functie van de tijd. Het verval over 225 s is ongeveer $3 \cdot 10^{-2}$ N/mm². Dit is de rechte lijn uit grafiek 7.3.5.

Men zou dus om het spanningsverloop bij relaxatie in het begin beter te volgen een grotere constante x_3 wensen. Hiermee echter wordt het gedrag later slecht beschreven. Andersom geldt voor waarden van modelparameters die gefit zijn op het eindgedrag,

dat deze de spanning voor kleine tijden slecht voorspellen. Het Kalman-filter schat de gemiddelde waarden tussen beide uitersten.

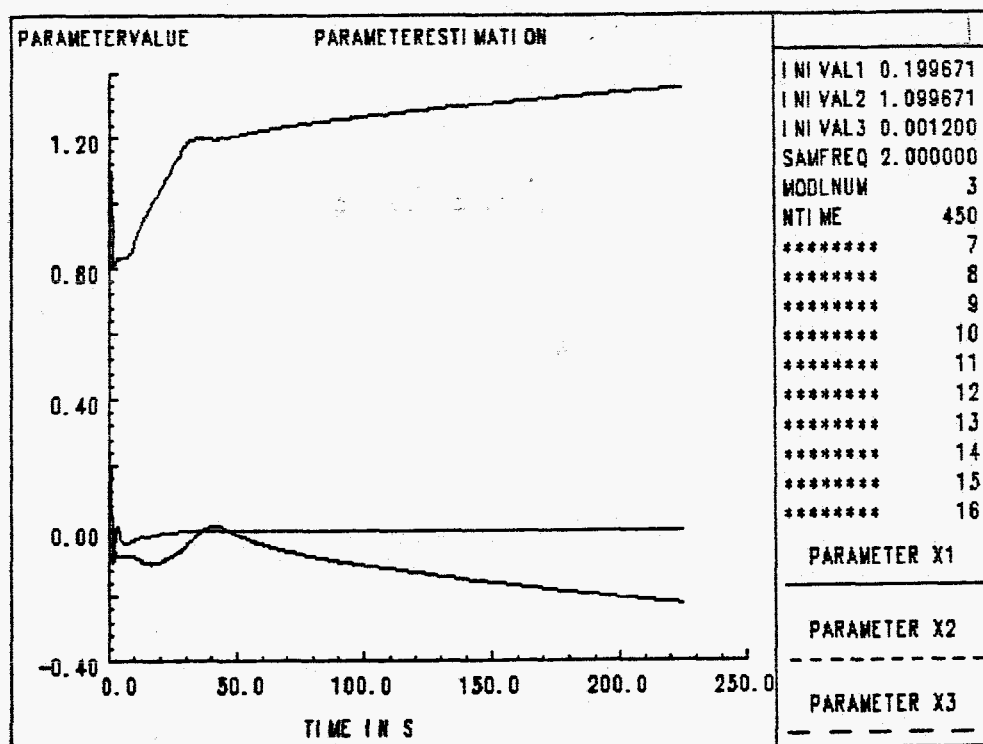
De conclusie die hieruit getrokken moet worden is dat met een model met 3 parameters dit verloop niet goed beschreven kan worden. Kennelijk is het Kalman-filter met het model dat nu gebruik wordt, niet in staat de uitgang goed te voorspellen, eenvoudigweg omdat het model niet voldoet.

Om deze conclusie te testen wordt ons model met 2 parameters uitgebreid, zodat een model ontstaat volgens :

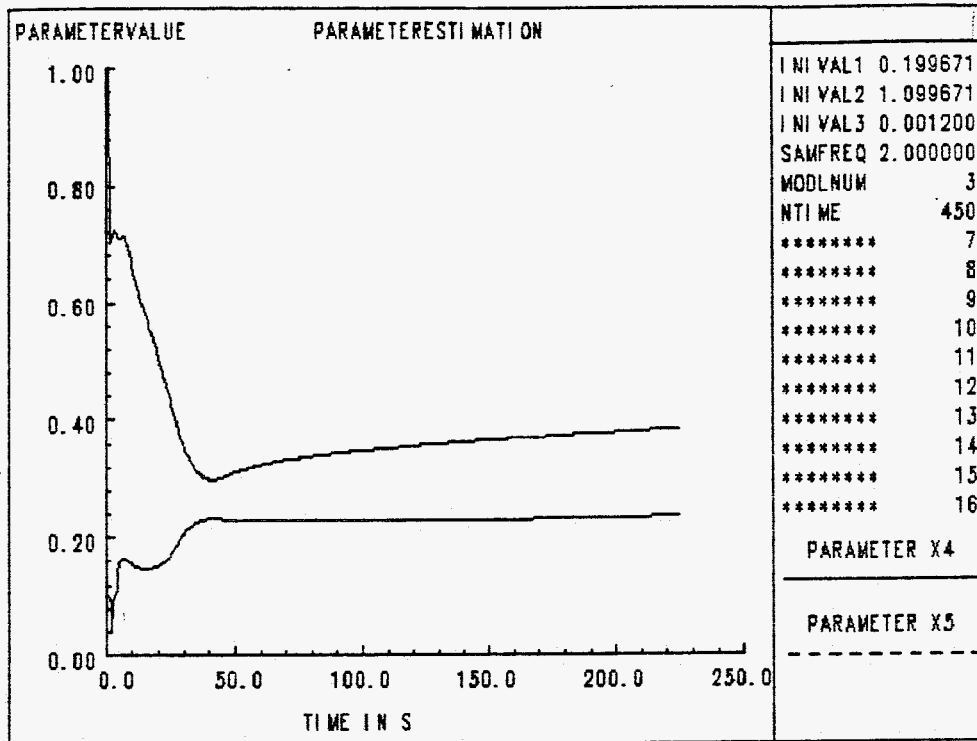
$$\sigma(t) = \int_0^t \{x_1 + x_2 * \exp(-x_3 * (t-\theta)) + x_4 * \exp(-x_5 * (t-\theta))\} * dE/d\theta d\theta$$

Berekening 3 met gegevens van meting EP1B wordt herhaald, nu gebruikmakend van het model met 5 parameters (berekening 4). De resultaten van deze berekening zijn te vinden in bijlage 2.8. De grafieken 7.3.8 en 7.3.9 tonen het verloop van de parameterwaarden in de tijd (let op de verschillende schaling van de verticale assen).

De parameters x_3 en x_5 blijken redelijk snel te convergeren, de andere parameters variëren na 450 stappen nog steeds. De parameters x_1 en x_2 lijken nog steeds gecorreleerd te zijn (zie ook bijlage 2.8 de covariantiematrix P).



Grafiek 7.3.8 Verloop van eerste drie parameters in berekening 4 met 5 parametermodel



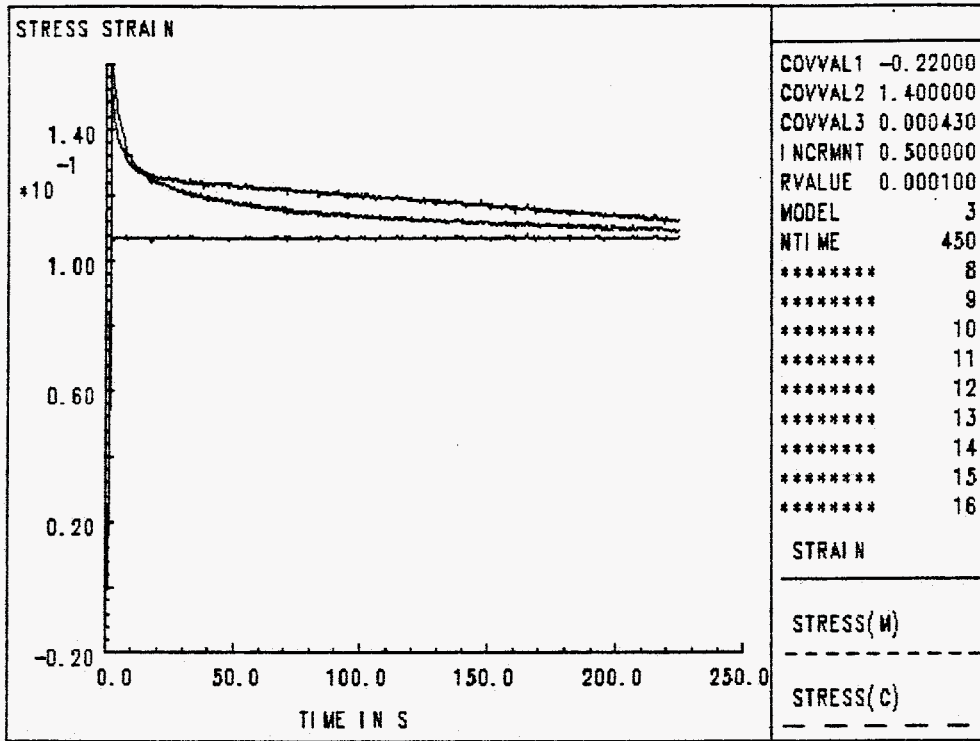
Grafiek 7.3.9 Verloop van laatste twee parameters in 5 parameter model : berekening 4

Ofschoon niet alle parameters geconvergeerd zijn, wordt toch de uitgang op beide voorgeschreven reksignalen berekend. Grafiek 7.3.10 geeft de voorspelling van de relaxatieproef, welke beter maar nog niet goed is. De voorspelling van het cyclisch signaal (grafiek 7.3.11) is daarentegen uitermate goed.

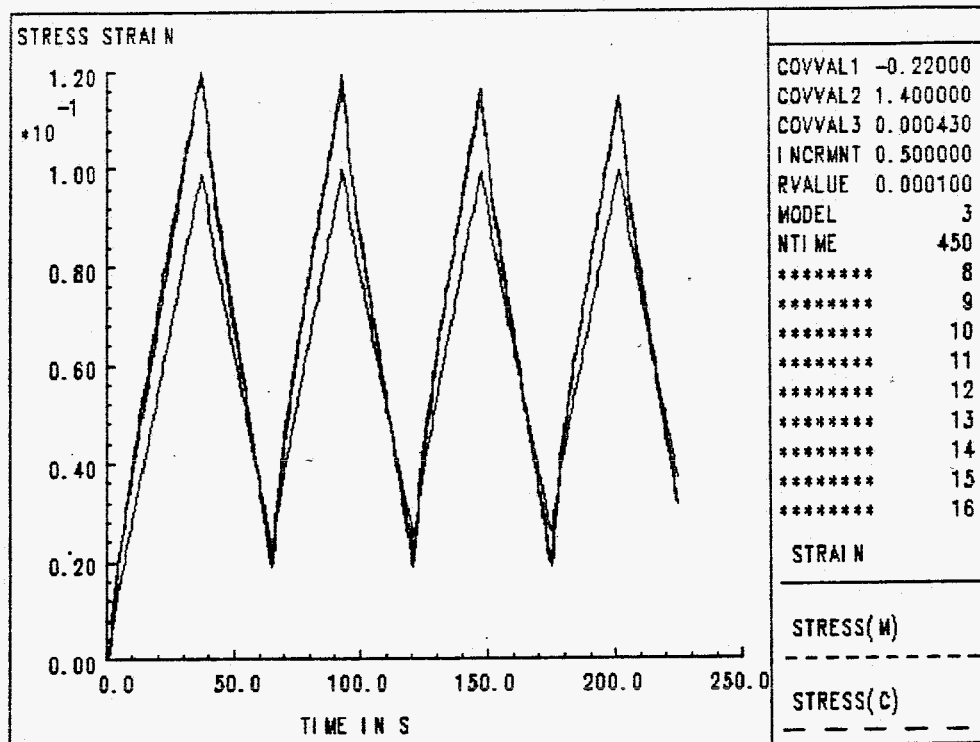
Met de eindwaarden voor modelparameters en covariantie worden nog eens 100 stappen berekend. Deze berekening 5 is de laatste berekening met EP1B, die in dit verslag besproken zal worden.

Berekeningen met het 5 parameter model gecombineerd met metingen uit cyclische proeven (A) blijken slechte schattingen op te leveren. Blijkbaar is deze proef bij dit materiaal niet zo geschikt om parameters in een model te schatten, dat viscoelastisch materiaalgedrag beschrijft (m.a.w. de proef levert te weinig informatie over tijdsafhankelijk gedrag om parameters goed te kunnen schatten).

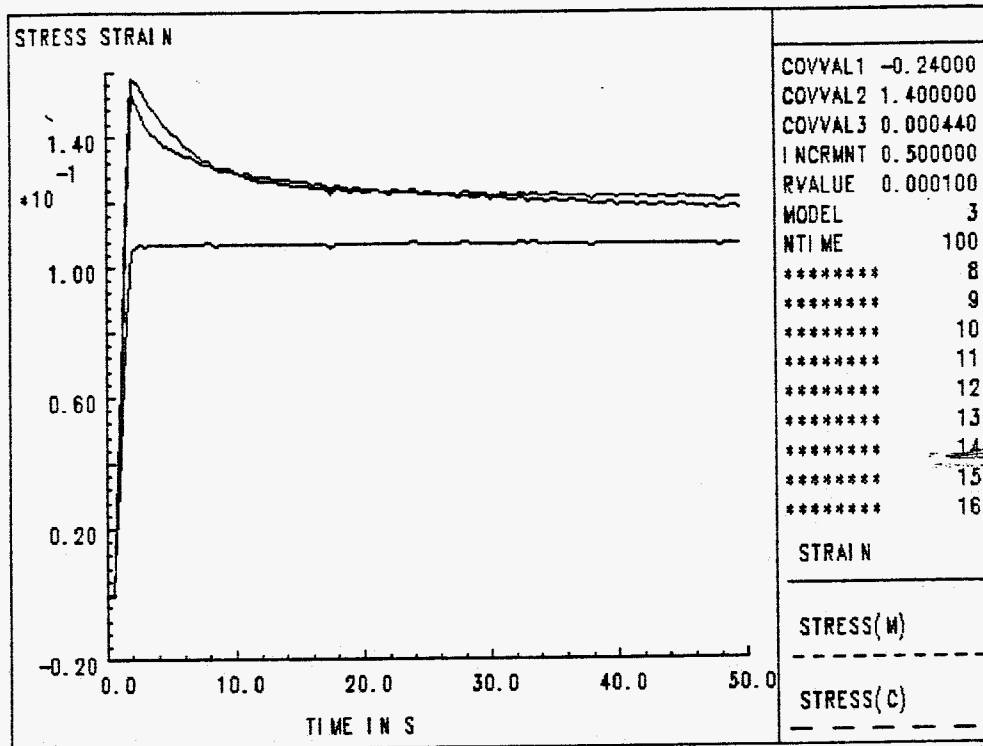
De resultaten van de laatste berekening zijn te vinden in bijlage 2.9. Berekening van de uitgang met de laatste schatting $\hat{x}(100|100)$ levert de voorspelling van de relaxatiecurve. Grafiek 7.3.12 toont een redelijke overeenkomst van de berekende en de gemeten spanning als functie van de tijd. Wenst men een betere benadering dan zal waarschijnlijk het model nogmaals uitgebreid moeten worden (7 parameters, dus 3 tijdconstanten). Deze stap echter is niet relevant in het onderzoek.



Grafiek 7.3.10 Uitgangsvoorspelling van meting EP1B met de 5 parameters uit berekening 4 eveneens geschat met EP1B



Grafiek 7.3.11 Uitgangsvoorspelling van meting EP1A met de 5 parameters uit berekening 4 geschat met EP1B



Grafiek 7.3.12 Uitgangsvoorspelling van meting EP1B met de 5 parameters uit berekening 5 eveneens geschat met EP1B

Hiermee is een einde gekomen aan de bespreking van de metingen en de parameteridentificaties (berekeningen), die daarop gevolgd zijn. Het is duidelijk dat het accent gelegen heeft op de identificatietechniek en de problemen, die hierbij op kunnen treden. De interpretatie van de gevonden parameterwaarden, de eigenlijke materiaalkarakterisering, wordt niet besproken.

In het volgende hoofdstuk worden de conclusies getrokken uit de berekeningen van dit hoofdstuk.

8. CONCLUSIES EN NAWOORD

8.1 Conclusies deel 2

Het Kalman-filter blijkt ook voor complexere problemen in staat parameters te schatten. Voorzichtigheid is bij parameteridentificatie met deze techniek wel gepast. De toegepaste theorie kent immers - naast problemen die ook bij de klassieke identificatiemethoden al voorkomen (bv. verschillende exponentiele functies fitten op dezelfde curve) - een aantal specifieke aspecten, die bijzondere aandacht verdienen.

In de eerste plaats is dat de keuze van de beginschattingen voor modelparameters en bijbehorende fout. Het Kalman-filter blijkt erg gevoelig voor extreme overschattingen. Aangeraden wordt beginschattingen te berekenen uit een gedegen analytisch onderzoek en de berekening op zijn minst éénmaal te herstarten met nieuwe beginwaarden.

Een tweede aspect behandelt de gevoeligheid van de schattingsmethode voor het experiment in relatie tot het gebruikte model. Het is weliswaar een van de grote voordelen van het Kalman-filter als parameterschatter, dat afgestapt kan worden van de verplichte stapfunctie (of andere eenvoudige functie) voor identificatie, maar daarmee is niet bewezen dat ook alle experimenten even geschikt zijn om parameters te schatten. In ons geval van een model met 5 parameters is de relaxatieproef als een goed bruikbare test gebleken: de geschatte parameters voorspellen ook het andere experiment goed. Waarom het ene experiment beter voldoet dan het andere in relatie met het gebruikte model is nog onduidelijk.

De resultaten die voortkomen uit de parameteridentificatie met het Kalman-filter dienen met een kritisch oog bekeken te worden. Een goede steun bij de interpretatie van gevonden waarden van de modelparameters is de covariantiematrix P van de fout. Hoe deze matrix zelf precies begrepen moet worden blijft echter moeilijk: kan deze matrix in het schattingsproces los van de parameterwaarden veranderd worden of wordt hiermee afbreuk gedaan aan de afgeleide theorie. In deze en andere zaken zal vooralsnog door veel experimenteren en variëren inzicht verkregen moeten worden.

Afsluitend kan gesteld worden dat het parameterschatten met het Kalman-filter een goede, alternatieve methode van parameteridentificatie is, die helaas niet alle problemen in de klassieke methoden omzeilt, maar toch zeer goed gebruikt kan worden.

8.2 Nawoord

Met het afsluiten van dit verslag zijn ook mijn beide stages bij de vakgroep WFW aan hun eind gekomen. Op deze plaats wil ik Cees Oomens en Max Hendriks hartelijk bedanken voor hun begeleiding en de prettige samenwerking. Daarnaast dank ik Leo Wouters voor zijn assistentie bij de trekbank.

Bijlage 1.1 parameterschatting met experimentsimulatie.
sinusvormig experiment

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 6.00E-01	2.00E-01	-2.1E-21	0.00E+00
X[2] = 4.00E-01	-2.1E-21	2.00E-01	0.00E+00
X[3] = 2.40E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.00E-01

REL. ERROR = : 1.82E-12

TIME = : 3
NITER = : 3

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.26E-01	1.83E-03	-2.4E-03	6.95E-03
X[2] = 4.73E-01	-2.4E-03	3.19E-03	-6.9E-03
X[3] = 2.41E+00	6.95E-03	-6.9E-03	2.00E-01

REL. ERROR = : -2.7E-02

TIME = : 5
NITER = : 5

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.06E-01	4.80E-05	-2.0E-05	1.18E-03
X[2] = 4.98E-01	-2.0E-05	3.33E-05	-3.6E-04
X[3] = 2.01E+00	1.18E-03	-3.6E-04	5.57E-02

REL. ERROR = : 4.31E-02

TIME = : 8
NITER = : 8

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.02E-01	1.44E-05	-1.4E-05	2.63E-04
X[2] = 4.98E-01	-1.4E-05	1.86E-05	-2.6E-04
X[3] = 2.02E+00	2.63E-04	-2.6E-04	6.76E-03

REL. ERROR = : -2.2E-02

TIME = : 10
NITER = : 10

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.01E-01	3.95E-06	-3.1E-06	2.72E-05
X[2] = 5.00E-01	-3.1E-06	5.74E-06	-3.7E-05
X[3] = 2.00E+00	2.72E-05	-3.7E-05	1.40E-03

REL. ERROR = : - E-04

Bijlage 1.2 parameterschatting met experimentsimulatie.
stapvormig experiment

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 6.00E-01	1.00E-01	-1.0E-01	0.00E+00
X[2] = 4.00E-01	-1.0E-01	1.00E-01	0.00E+00
X[3] = 2.40E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.00E-01

REL. ERROR = : 1.82E-12

TIME = : 3
NITER = : 3

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.14E-01	6.21E-04	-6.6E-04	3.60E-03
X[2] = 4.87E-01	-6.6E-04	1.70E-03	-3.4E-03
X[3] = 2.36E+00	3.60E-03	-3.4E-03	1.86E-01

REL. ERROR = : -4.0E-02

TIME = : 5
NITER = : 5

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.06E-01	2.78E-04	-3.0E-04	1.66E-03
X[2] = 4.94E-01	-3.0E-04	1.31E-03	-1.3E-03
X[3] = 2.31E+00	1.66E-03	-1.3E-03	1.75E-01

REL. ERROR = : -1.7E-02

TIME = : 8
NITER = : 8

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.03E-01	1.52E-04	-1.6E-04	9.04E-04
X[2] = 4.98E-01	-1.6E-04	1.16E-03	-4.8E-04
X[3] = 2.30E+00	9.04E-04	-4.8E-04	1.70E-01

REL. ERROR = : -8.1E-03

TIME = : 10
NITER = : 10

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 5.03E-01	1.16E-04	-1.2E-04	6.93E-04
X[2] = 4.98E-01	-1.2E-04	1.12E-03	-2.6E-04
X[3] = 2.29E+00	6.93E-04	-2.6E-04	1.69E-01

REL. ERROR = : -6 0E-03

Bijlage 2.1 EPDM (1 Mrad) cyclisch belast
berekening 1 : bepalen van goede beginwaarden

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X PMATRIX

X[1] = 1.2E-001 5.0E-001 -1.4E-006 0.0E+000
X[2] = 3.0E-001 -1.4E-006 5.0E-001 0.0E+000
X[3] = 1.0E-001 0.0E+000 0.0E+000 5.0E-001

REL. ERROR = : -9.4E+003

TIME = : 50
NITER = : 50

PARAMETERS X PMATRIX

X[1] = 2.9E-001 4.2E-001 -7.7E-002 2.2E-002
X[2] = 5.9E-001 -7.7E-002 3.0E-001 4.3E-002
X[3] = -3.3E-002 2.2E-002 4.3E-002 9.9E-003

REL. ERROR = : -2.5E-001

TIME = : 75
NITER = : 75

PARAMETERS X PMATRIX

X[1] = 2.5E-001 4.2E-001 -5.0E-002 2.7E-002
X[2] = 7.8E-001 -5.0E-002 1.5E-001 1.2E-002
X[3] = 3.8E-003 2.7E-002 1.2E-002 3.7E-003

REL. ERROR = : -9.0E-002

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X PMATRIX

X[1] = 2.5E-001 4.1E-001 -4.5E-002 2.7E-002
X[2] = 8.7E-001 -4.5E-002 9.5E-002 4.0E-003
X[3] = 1.8E-002 2.7E-002 4.0E-003 2.5E-003

REL. ERROR = : -1.2E-001

Bijlage 2.2 EPDM (1 Mrad) cyclische belasting
berekening 2

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	2.48E-01	3.99E-01	-1.3E-04	0.00E+00
X[2]	=	8.70E-01	-1.3E-04	9.50E-02	0.00E+00
X[3]	=	1.80E-02	0.00E+00	0.00E+00	3.00E-03

REL.ERROR = : -3.1E+04

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	5.33E-01	4.06E-03	1.66E-03	1.26E-03
X[2]	=	1.11E+00	1.66E-03	5.46E-03	9.53E-04
X[3]	=	8.17E-02	1.26E-03	9.53E-04	4.34E-04

REL.ERROR = : 9.46E-02

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	6.34E-01	5.03E-05	6.90E-06	1.49E-05
X[2]	=	8.65E-01	6.90E-06	1.49E-03	1.33E-04
X[3]	=	9.03E-02	1.49E-05	1.33E-04	2.03E-05

REL.ERROR = : -3.3E-02

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	6.07E-01	2.32E-05	5.68E-06	6.86E-06
X[2]	=	8.37E-01	5.68E-06	9.05E-04	8.20E-05
X[3]	=	8.25E-02	6.86E-06	8.20E-05	1.33E-05

REL.ERROR = : -4.4E-02

TIME = : 420
NITER = : 420

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	5.78E-01	1.37E-05	-3.3E-06	3.63E-06
X[2]	=	8.27E-01	-3.3E-06	6.16E-04	5.38E-05
X[3]	=	7.62E-02	3.63E-06	5.38E-05	9.85E-06

REL.ERROR = : -1.0E-01

Bijlage 2.3 EPDM (peroxide) proefstuk 1 ; experiment A
berekening 1 : bepalen van goede beginwaarden

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 6.0E-001	5.0E-001	-4.3E-005	0.0E+000
X[2] = 8.0E-001	-4.3E-005	5.0E-001	0.0E+000
X[3] = 8.0E-002	0.0E+000	0.0E+000	5.0E-001

REL. ERROR = : 1.1E-001

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 3.4E-001	3.5E-002	-4.1E-002	2.6E-004
X[2] = 1.1E+000	-4.1E-002	5.1E-002	-2.5E-004
X[3] = 7.6E-003	2.6E-004	-2.5E-004	5.7E-006

REL. ERROR = : 3.3E-002

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.6E-001	9.7E-003	-1.2E-002	2.9E-006
X[2] = 1.2E+000	-1.2E-002	1.6E-002	4.5E-006
X[3] = 3.2E-003	2.9E-006	4.5E-006	1.7E-007

REL. ERROR = : -2.1E-002

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 2.0E-001	7.3E-003	-8.7E-003	8.6E-006
X[2] = 1.1E+000	-8.7E-003	1.1E-002	-6.5E-006
X[3] = 2.1E-003	8.6E-006	-6.5E-006	6.6E-008

REL. ERROR = : -9.2E-003

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.6E-001	5.5E-003	-6.5E-003	5.2E-006
X[2] = 1.1E+000	-6.5E-003	8.0E-003	-4.5E-006
X[3] = 1.4E-003	5.2E-006	-4.5E-006	2.1E-008

REL. ERROR = : 8.2E ?

Bijlage 2.4 EPDM (peroxide) proefstuk 1 ; experiment A
berekening 2 : nieuwe beginwaarden

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.76E-01	5.00E-04	-2.1E-10	0.00E+00
X[2] = 1.13E+00	-2.1E-10	8.00E-03	0.00E+00
X[3] = 1.42E-03	0.00E+00	0.00E+00	2.00E-08

REL. ERROR = : 5.35E-01

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.72E-01	4.70E-04	-4.7E-04	3.02E-08
X[2] = 1.08E+00	-4.7E-04	7.20E-04	3.88E-07
X[3] = 1.46E-03	3.02E-08	3.88E-07	1.98E-08

REL. ERROR = : -6.3E-02

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.71E-01	4.66E-04	-4.8E-04	1.13E-07
X[2] = 1.08E+00	-4.8E-04	6.62E-04	6.43E-07
X[3] = 1.49E-03	1.13E-07	6.43E-07	1.81E-08

REL. ERROR = : -2.9E-02

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.73E-01	4.60E-04	-4.8E-04	2.62E-07
X[2] = 1.08E+00	-4.8E-04	6.51E-04	6.02E-07
X[3] = 1.42E-03	2.62E-07	6.02E-07	1.42E-08

REL. ERROR = : 1.24E-03

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 1.79E-01	4.55E-04	-4.7E-04	4.25E-07
X[2] = 1.08E+00	-4.7E-04	6.27E-04	3.17E-07
X[3] = 1.22E-03	4.25E-07	3.17E-07	8.62E-09

REL. ERROR = : 4.4E-02 2

Bijlage 2.5 EPDM (peroxide) proefstuk 2 ; experiment A
berekening 2 : nieuwe beginwaarden

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -1.4E-01	3.00E-01	-3.0E-07	0.00E+00
X[2] = 1.35E+00	-3.0E-07	3.00E-01	0.00E+00
X[3] = 1.11E-03	0.00E+00	0.00E+00	3.00E-01

REL. ERROR = : 1.35E+00

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -3.4E-01	6.87E-02	-6.6E-02	3.47E-04
X[2] = 1.59E+00	-6.6E-02	6.57E-02	-2.9E-04
X[3] = 3.89E-03	3.47E-04	-2.9E-04	3.36E-06

REL. ERROR = : 2.19E-02

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -7.1E-01	2.43E-02	-2.6E-02	1.18E-05
X[2] = 1.94E+00	-2.6E-02	2.83E-02	-8.3E-06
X[3] = 1.38E-03	1.18E-05	-8.3E-06	6.69E-08

REL. ERROR = : -1.6E-02

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -8.2E-01	2.10E-02	-2.3E-02	7.33E-06
X[2] = 2.03E+00	-2.3E-02	2.44E-02	-6.2E-06
X[3] = 9.22E-04	7.33E-06	-6.2E-06	1.68E-08

REL. ERROR = : -2.4E-03

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -9.3E-01	1.78E-02	-1.9E-02	3.87E-06
X[2] = 2.13E+00	-1.9E-02	2.08E-02	-3.6E-06
X[3] = 6.45E-04	3.87E-06	-3.6E-06	3.98E-09

REL. ERROR = : 1.13E-01

Bijlage 2.6 EPDM (peroxide) proefstuk 1 ; experiment B
berekening 1

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = 2.00E-01	4.99E-01	-6.4E-04	0.00E+00
X[2] = 1.00E+00	-6.4E-04	4.99E-01	0.00E+00
X[3] = 1.00E-01	0.00E+00	0.00E+00	5.00E-01

REL. ERROR = : 2.27E-01

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -4.8E-01	4.22E-02	-4.9E-02	2.27E-05
X[2] = 1.84E+00	-4.9E-02	5.78E-02	-1.9E-05
X[3] = 3.60E-03	2.27E-05	-1.9E-05	1.98E-07

REL. ERROR = : 4.04E-02

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -7.4E-01	3.95E-02	-4.7E-02	6.22E-07
X[2] = 2.07E+00	-4.7E-02	5.56E-02	8.67E-07
X[3] = 1.67E-03	6.22E-07	8.67E-07	1.73E-08

REL. ERROR = : 4.83E-02

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -8.7E-01	3.90E-02	-4.6E-02	-1.9E-06
X[2] = 2.17E+00	-4.6E-02	5.52E-02	2.93E-06
X[3] = 1.05E-03	-1.9E-06	2.93E-06	4.63E-09

REL. ERROR = : 5.38E-02

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X	PMATRIX		
X[1] = -9.4E-01	3.88E-02	-4.6E-02	-2.5E-06
X[2] = 2.21E+00	-4.6E-02	5.52E-02	3.32E-06
X[3] = 6.56E-04	-2.5E-06	3.32E-06	1.42E-09

REL. ERROR = : 5.30E-02

Bijlage 2.7 EPDM (peroxide) proefstuk 2 ; experiment B
berekening 1

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	2.00E-01	5.00E-01	-2.7E-05	0.00E+00
X[2]	=	1.00E+00	-2.7E-05	5.00E-01	0.00E+00
X[3]	=	1.00E-02	0.00E+00	0.00E+00	5.00E-01

REL. ERROR = : 1.27E+00

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	-4.7E-01	3.53E-02	-4.0E-02	3.09E-05
X[2]	=	1.69E+00	-4.0E-02	4.52E-02	-2.6E-05
X[3]	=	3.20E-03	3.09E-05	-2.6E-05	2.54E-07

REL. ERROR = : 3.42E-02

TIME = : 200
NITER = : 200

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	-6.9E-01	3.20E-02	-3.7E-02	3.61E-06
X[2]	=	1.89E+00	-3.7E-02	4.26E-02	-2.3E-06
X[3]	=	1.49E-03	3.61E-06	-2.3E-06	2.24E-08

REL. ERROR = : 4.04E-02

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	-8.1E-01	3.12E-02	-3.6E-02	4.38E-08
X[2]	=	1.99E+00	-3.6E-02	4.20E-02	7.35E-07
X[3]	=	9.52E-04	4.38E-08	7.35E-07	5.74E-09

REL. ERROR = : 4.58E-02

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X PMATRIX

X[1]	=	-9.0E-01	3.09E-02	-3.6E-02	-1.0E-06
X[2]	=	2.05E+00	-3.6E-02	4.19E-02	1.55E-06
X[3]	=	6.01E-04	-1.0E-06	1.55E-06	1.60E-09

REL. ERROR = : 5.12E-02

Bijlage 2.8 EPDM (peroxide) proefstuk 1 ; experiment 2
berekening 2 : model met 5 parameters

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = 2.0E-001	3.0E-001	-1.8E-004	0.0E+000	-1.8E-004	0.0E+000	
X[2] = 1.1E+000	-1.8E-004	3.0E-001	0.0E+000	-1.8E-004	0.0E+000	
X[3] = 1.2E-003	0.0E+000	0.0E+000	3.0E-001	0.0E+000	0.0E+000	
X[4] = 1.0E+000	-1.8E-004	-1.8E-004	0.0E+000	3.0E-001	0.0E+000	
X[5] = 1.0E-001	0.0E+000	0.0E+000	0.0E+000	0.0E+000	3.0E-001	

REL. ERROR = : -3.1E-001

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -1.1E-002	7.3E-002	-4.8E-002	6.5E-004	-2.9E-002	-1.0E-001	
X[2] = 1.2E+000	-4.8E-002	3.3E-002	-3.7E-004	1.8E-002	2.2E-003	
X[3] = 1.7E-003	6.5E-004	-3.7E-004	7.1E-006	-2.7E-004	2.6E-005	
X[4] = 3.1E-001	-2.9E-002	1.8E-002	-2.7E-004	1.4E-002	6.3E-004	
X[5] = 2.3E-001	-1.0E-003	2.2E-003	2.6E-005	6.3E-004	1.5E-003	

REL. ERROR = : 2.7E-003

TIME = : 300
NITER = : 300

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -1.6E-001	1.3E-002	-1.2E-002	9.2E-006	-3.3E-003	-3.2E-001	
X[2] = 1.3E+000	-1.2E-002	1.2E-002	-7.6E-006	3.3E-003	3.3E-003	
X[3] = 6.2E-004	9.2E-006	-7.6E-006	2.2E-008	-2.6E-006	-8.8E-007	
X[4] = 3.7E-001	-3.3E-003	3.3E-003	-2.6E-006	3.6E-003	1.6E-003	
X[5] = 2.3E-001	-3.2E-003	3.3E-003	-8.8E-007	1.6E-003	1.4E-003	

REL. ERROR = : 1.1E-002

TIME = : 450
NITER = : 450

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -2.2E-001	1.1E-002	-1.1E-002	3.6E-006	-2.8E-003	-3.0E-001	
X[2] = 1.4E+000	-1.1E-002	1.1E-002	-3.1E-006	2.9E-003	3.2E-003	
X[3] = 4.3E-004	3.6E-006	-3.1E-006	4.9E-009	-9.7E-007	-4.6E-007	
X[4] = 3.8E-001	-2.8E-003	2.9E-003	-9.7E-007	3.4E-003	1.5E-003	
X[5] = 2.4E-001	-3.0E-003	3.2E-003	-4.6E-007	1.5E-003	1.3E-003	

REL. ERROR = : 1.0E-002

Bijlage 2.9 EPDM (peroxide) proefstuk 1 ; experiment B
berekening 3 : 5 parameters met nieuwe beginwaarden

OUTPUT PROGRAM KALMAN.PAS

TIME = : 1
NITER = : 1

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -2.2E-001	1.1E-002	-2.4E-007	0.0E+000	-6.6E-008	0.0E+000	
X[2] = 1.4E+000	-2.4E-007	1.1E-002	0.0E+000	-6.6E-008	0.0E+000	
X[3] = 4.3E-004	0.0E+000	0.0E+000	5.0E-009	0.0E+000	0.0E+000	
X[4] = 3.8E-001	-6.6E-008	-6.6E-008	0.0E+000	3.0E-003	0.0E+000	
X[5] = 2.4E-001	0.0E+000	0.0E+000	0.0E+000	0.0E+000	1.0E-003	

REL. ERROR = : 1.1E-001

TIME = : 25
NITER = : 25

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -2.4E-001	5.7E-003	-5.3E-003	2.3E-008	-3.5E-004	1.9E-004	
X[2] = 1.4E+000	-5.3E-003	5.7E-003	2.2E-008	-3.7E-004	1.9E-004	
X[3] = 4.3E-004	2.3E-008	2.2E-008	5.0E-009	-2.4E-008	6.8E-012	
X[4] = 3.4E-001	-3.5E-004	-3.7E-004	-2.4E-008	2.0E-003	-2.4E-005	
X[5] = 2.4E-001	1.9E-004	1.9E-004	6.8E-012	-2.4E-005	9.6E-004	

REL. ERROR = : 2.6E-002

TIME = : 50
NITER = : 50

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -2.3E-001	5.5E-003	-5.4E-003	5.1E-008	-9.8E-005	7.8E-005	
X[2] = 1.4E+000	-5.4E-003	5.6E-003	4.6E-008	-1.5E-004	9.4E-005	
X[3] = 4.3E-004	5.1E-008	4.6E-008	5.0E-009	-7.2E-008	2.4E-008	
X[4] = 3.3E-001	-9.8E-005	-1.5E-004	-7.2E-008	1.6E-003	1.7E-004	
X[5] = 2.5E-001	7.8E-005	9.4E-005	2.4E-008	1.7E-004	8.7E-004	

REL. ERROR = : -4.9E-003

TIME = : 100
NITER = : 100

PARAMETERS X	PMATRIX					
X[1] = -2.4E-001	5.5E-003	-5.5E-003	1.2E-007	3.6E-007	9.2E-006	
X[2] = 1.4E+000	-5.5E-003	5.6E-003	6.8E-008	-1.0E-004	6.4E-005	
X[3] = 4.4E-004	1.2E-007	6.8E-008	4.9E-009	-1.5E-007	7.9E-008	
X[4] = 3.4E-001	3.6E-007	-1.0E-004	-1.5E-007	1.4E-003	2.6E-004	
X[5] = 2.4E-001	9.2E-006	6.4E-005	7.9E-008	2.6E-004	8.1E-004	

REL. ERROR = : -1.7E-002