

Een universele twee-dimensionale meshgenerator voor driehoekige en vierhoekige elementen

Citation for published version (APA):

Schoofs, A. J. G., Beukering, van, L. H. T. M., & Sluiter, M. L. C. (1978). *Een universele twee-dimensionale meshgenerator voor driehoekige en vierhoekige elementen*. (DCT rapporten; Vol. 1978.015). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1978

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

EEN UNIVERSELE TWEE-DIMENSIONALE MESHGENERATOR
VOOR DRIEHOEKIGE EN VIERHOEKIGE ELEMENTEN.

A.J.G.Schoofs, L.H.Th.M.van Beukering, M.L.C.Sluiteer, Afd. Werktuigbouwkunde,
Vakgroep Technische Mechanica, Technische Hogeschool Eindhoven.

SAMENVATTING

Dit artikel behandelt de werkwijze, de mogelijkheden en enige toepassingen van de meshgenerator "TRIQUAMESH": een komputer programma voor het verdelen van willekeurige twee-dimensionale gebieden in driehoekige en/of vierhoekige elementen.

INLEIDING

Het samenstellen en controleren van de invoer voor programma-systemen op basis van de methode der eindige elementen (E.M.-programma's) is zeer arbeidsintensief; in het bijzonder geldt dit voor de verdeling in elementen. In het verleden zijn reeds veel programma's, meshgeneratoren genaamd, ontwikkeld om dit werk (gedeeltelijk) te automatiseren. Buell en Bush (1) geven hiervan een overzicht.

In dit artikel wordt een meshgenerator voor twee-dimensionale gebieden besproken. Deze meshgenerator, TRIQUAMESH genaamd, verschilt in een aantal opzichten essentieel van de bestaande generatoren.

Als karakteristieken kunnen genoemd worden:

- de invoer voor TRIQUAMESH wordt opgegeven in een speciaal daarvoor ontwikkelde, gebruikersgerichte invoertaal. De gebruiker heeft daarom slechts relatief weinig, eenvoudig samen te stellen invoergegevens te verschaffen. Een ingebouwd foutendetectiesysteem zorgt voor het opsporen en melden van eventuele fouten in de invoergegevens.
- zowel enkelvoudig als meervoudig samenhangende twee-dimensionale gebieden kunnen verdeeld worden in drie- en/of vierhoekige elementen met rechte elementzijden; gebieden met een complexe geometrie vormen geen probleem.

- de gebruiker kan de gewenste grootte van de elementen zeer eenvoudig specificeren en de verdeling in elementen lokaal verfijnen.
- omdat vele E.M.-programma's de mogelijkheid tot substructurering bieden kan het te verdelen gebied worden opgesplitst in meerdere substructuren.
- de vorm van de gegenereerde elementen wordt geoptimaliseerd. Het -niet te realiseren- ideaal is een verdeling in uitsluitend gelijkzijdige driehoeken en vierkanten.
- een belangrijke maat voor de benodigde rekentijd en de vereiste hoeveelheid geheugen van E.M.-programma's is de bandbreedte van de optredende matrices. Deze bandbreedte wordt bepaald door de nummering der knooppunten. In TRIQUAMESH zijn enige mogelijkheden ingebouwd om de bandbreedte per substructuur te reduceren door henummering der knooppunten.
- de uitvoer van TRIQUAMESH is zonder meer bruikbaar als gedeelte van de invoer voor een drietal E.M.-programma's waaronder ASKA en MARC. Uitbreiding naar andere programmasystemen levert geen problemen.

Na de introductie van enige basisbegrippen zal eerst de in TRIQUAMESH gevolgde werkwijze in detail besproken worden. Daarna zullen het gebruik en de mogelijkheden van TRIQUAMESH worden toegelicht aan de hand van enige voorbeelden.

ENIGE BEGRIPPEN

Het te verdelen gebied G kan in n_s subgebieden G_1, G_2, \dots, G_{n_s} worden verdeeld, waardoor:

1. Het afzonderen van gebieden met bepaalde elementtypen, elementen materiaaleigenschappen mogelijk wordt.
2. In het gebied G meer dan één substructuur gedefinieerd kan worden.

Er wordt geëist dat de subgebieden enkelvoudig samenhangend zijn; n -voudig samenhangende gebieden kunnen door het aanbrengen van tenminste $n-1$ sneden enkelvoudig samenhangend worden gemaakt.

De contour van gebied G heet C , subgebied G_s heeft C_s als contour en de totale contour van alle subgebieden heet C^* (fig. 1).

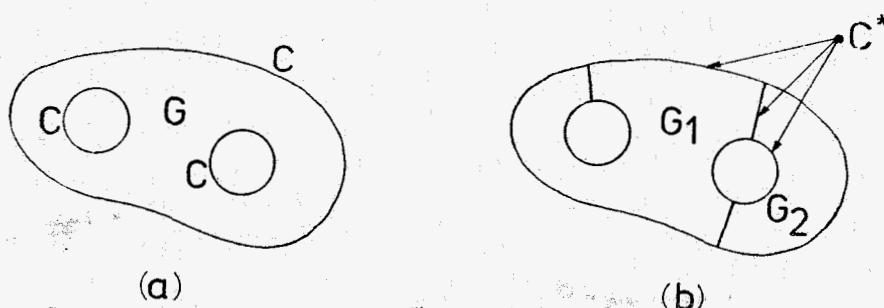


Fig. 1. Een willekeurig twee-dimensionaal gebied (a) en een verdeling daarvan in enkelvoudig samenhangende subgebieden (b).

In G (en in hoofdzaak op de contour C^*) wordt via nummers en coördinaten een aantal z.g. basispunten vastgelegd. Deze punten zullen dienen als basis voor de geometrische beschrijving van de contour C^* en voor het aangeven van overige gebruikerswensen zoals bijvoorbeeld de beoogde grootte der elementen. Met behulp van twee of meer basispunten worden (georiënteerde) elementaire krommen beschreven zoals rechte lijnstukken, cirkelbogen etc. Fig. 2 toont enige voorbeelden van beschrijvingen zoals die door de gebruiker opgegeven kunnen worden; de opgegeven lettercode en basispunten bepalen het type en de geometrie van de elementaire krommen.

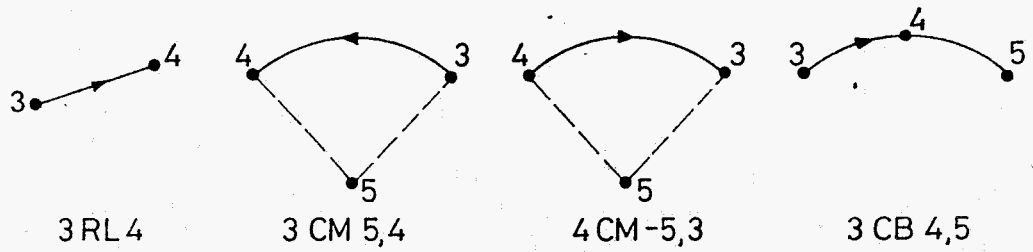


Fig. 2. Geometrische beschrijving van elementaire krommen.

Een kontourdeel (geïdentificeerd door een nummer) is een niet-vertakte aaneenschakeling van elementaire krommen en heeft een oriëntatie. De geometrische beschrijving van het kontourdeel bestaat uit de aaneenschakeling van de beschrijvingen der samenstellende elementaire krommen (fig. 3).

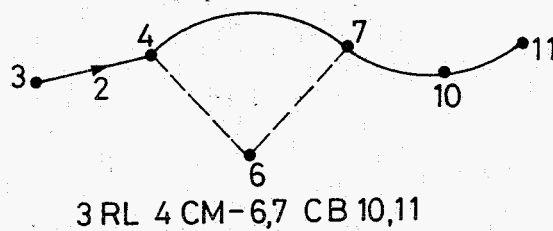


Fig. 3. Geometrische beschrijving van het kontourdeel met nr. 2.

De subkontour C_s bestaat uit de aaneenschakeling tot één gesloten kromme van één of meer kontourdelen. Ten behoeve van de eenduidigheid wordt C_s beschreven door linksomgaand de nummers van de achtereenvolgens doorlopen kontourdelen te noteren. Indien een kontourdeel tegengesteld aan zijn oriëntatie wordt doorlopen, wordt het nummer van dat kontourdeel voorzien van een min-teken (fig. 4).

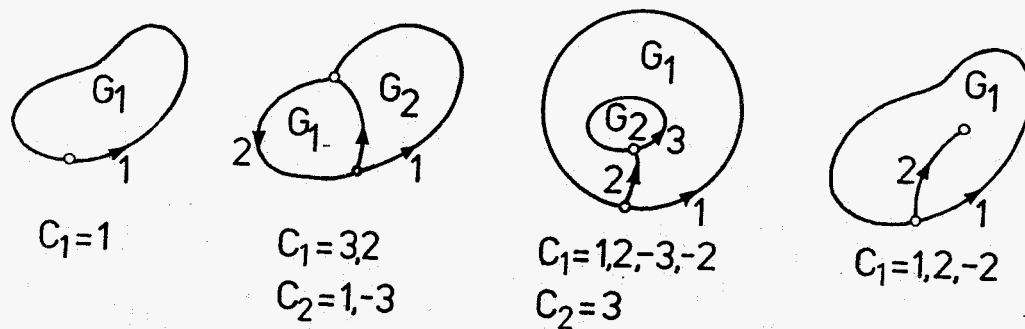


Fig. 4. Beschrijving van subkontouren d.m.v. kontourdelen.

Een substructuur wordt gedefinieerd door één of meer subgebieden. Alle substructuren tesamen vormen één structuur: het in elementen verdeelde gebied G .

De genoemde begrippen zijn hiërarchisch gerangschikt. De basispunten bepalen elementaire krommen; deze bepalen de kontourdelen etc.

Schematisch:

basispunten → elementaire krommen → kontourdelen →
 subgebieden → substructuren → structuur.

Bij de controle van de invoergegevens wordt van deze hiërarchie gebruik gemaakt.

Ten behoeve van het in elementen verdelen van het gebied G wordt gebruik gemaakt van de (reële en dimensieloze) grofheidsfunctie $g_2(x,y)$. Gesteld wordt dat in het gebied G de functie g_2 overal lineair evenredig is met de gewenste grootte der elementribben; de lengte l van een willekeurige elementribbe tussen de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) zal derhalve "zo goed mogelijk" moeten voldoen aan:

$$l = \frac{1}{2} \{g_2(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2)\} \cdot RI \quad (1)$$

De evenredigheidskonstante RI heeft de dimensie van een lengte en wordt de standaard elementribbe genoemd.

BESCHRIJVING VAN DE WERKING

TRIQUAMESH is globaal als volgt opgebouwd:

1. Testen en verwerken van de invoergegevens.
2. Genereren van kontourpunten (dit zijn knooppunten op de totale kontour C^*).
3. Verdelen van de subgebieden in elementen.
4. Nabewerkingen zoals:
 - verbeteren van de vorm der elementen.
 - reductie van de bandbreedte.
 - transformatie naar elementen met méér knooppunten.
5. Uitvoer.

De bovenstaande aspecten worden achtereenvolgens behandeld.

TESTEN EN VERWERKEN VAN DE INVOERGEGEVENS

Er is een gebruikers-gerichte invoertaal ontwikkeld zodat:

1. de invoer (voor de gebruiker met enige routine) eenvoudig te interpreteren is.
2. er uitgebreide tests mogelijk zijn op eventuele fouten in de invoergegevens.

Het programma verwacht de invoer via ponskaarten of als een op disk aanwezige "file". Hieruit worden de array's bepaald die als ingangsparemeters voor de volgende stappen dienst doen.

Bij de verwerking wordt de invoer tevens gecontroleerd op syntax- en op inhoudelijke fouten. Stel dat een bepaald stukje invoer zou moeten luiden:

```
1 TRIAX3(2,3)
```

dan zijn bijvoorbeeld de volgende foutmeldingen mogelijk:

a. een syntaxfout:

```
1 TRIAX3 2,3)
```

```
* >>>> LEFT PARENTHESIS EXPECTED
```

b. een fout in de inhoud:

1 TRIAX3(2,5)

*>>>> UNKNOWN SUBDOMAIN

De invoergegevens zijn zodanig gestructureerd dat zij, ook nadat één of meer fouten gedetecteerd zijn, zolang mogelijk interpreteerbaar blijven en de tests kunnen worden voortgezet.

GENEREREN VAN KONTOURPUNTEN

De gebruiker geeft waarden op voor de grofheidsfunctie $g_2(x,y)$ in de in het gebied G aangegeven basispunten. Daarmee wordt, bij een bepaalde keuze van het grofheidsverloop langs de contour, de grofheid op de gehele contour C^* vastgelegd. Hieruit, samen met de eveneens door de gebruiker op te geven standaard element-ribbe RI , worden de op C^* te genereren knooppunten bepaald. Door de opbouw van een subkontour uit kontourdelen welke op hun beurt bestaan uit elementaire krommen, kan volstaan worden met de bespreking van het genereren van knooppunten op een willekeurige kromme.

Beschouwd wordt een elementaire kromme k met lengte l en boog-koördinaat s , $0 \leq s \leq l$; voor de eenvoud wordt hier de niet essentiële beperking tot een recht lijnstuk gemaakt. Op k worden, lokaal met j aangeduide, basispunten $j = 0, 1, \dots, m$ aangegeven, welke de kromme in m stukken verdelen (fig. 5.).

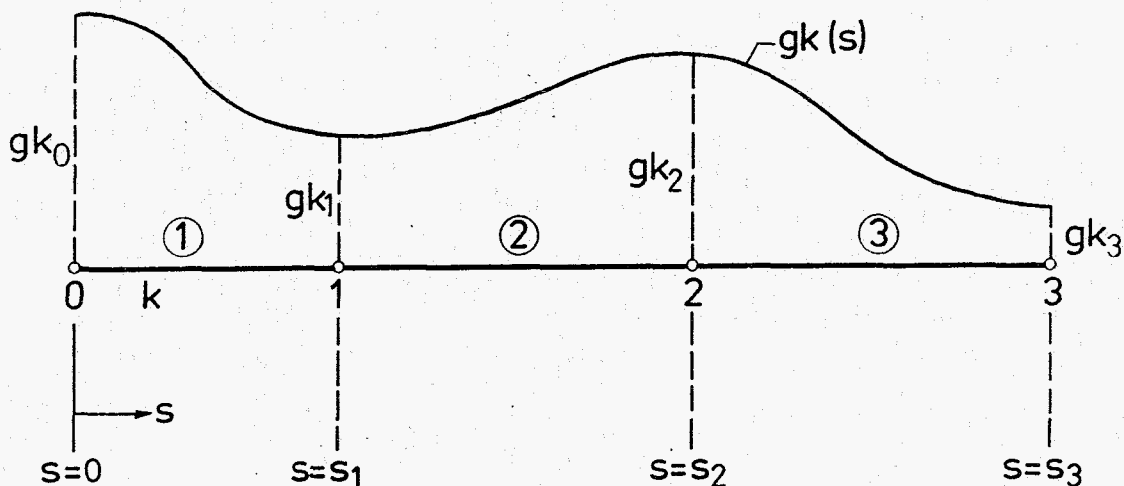


Fig. 5. Stuksgewijze cosinusfunctie voor het grofheidsverloop op de elementaire kromme k .

Uit de, door de gebruiker opgegeven, grofheidswaarden gk_j , $j = 0, 1, \dots, m$ wordt op de kromme k als volgt een stuksgewijze harmonische functie als grofheidsfunctie gedefinieerd (fig. 5.):

$$gk(s) = \frac{gk_j + gk_{j+1}}{2} + \frac{gk_j - gk_{j+1}}{2} \cdot \cos \frac{s - s_j}{s_{j+1} - s_j} \cdot \pi \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

Door deze keuze is de grofheid vrijwel konstant in de omgeving van het punt waar deze opgegeven wordt; bovendien is een dergelijke grofheidsfunctie differentieerbaar in elk punt, hetgeen de eenvoud van gebruikte algorithmen ten goede komt.

Uitgaande van de grofheidsfunctie $gk(s)$ worden op de kromme knooppunten gegenereerd, waarbij twee stappen onderscheiden worden: eerst wordt het aantal bepaald en vervolgens worden de knooppunten op hun juiste plaats gelegd.

Veronderstel dat op de elementaire kromme tussen het beginpunt P en het eindpunt Q n elementtribben zullen worden gelegd. (fig. 6).

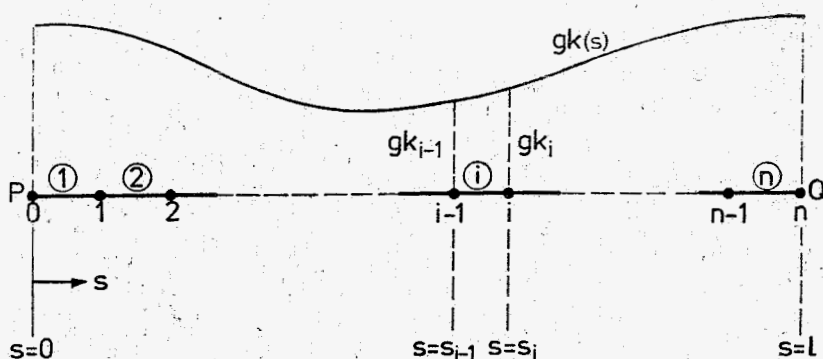


Fig. 6. Knooppunten en elementtribben op de elementaire kromme PQ.

Volgens de grofheidsdefinitie (1) zou voor elementtribbe i moeten gelden:

$$s_i - s_{i-1} = \frac{1}{2} (gk_{i-1} + gk_i) \cdot RI \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Hieraan kan voor alle elementtribben "zo goed mogelijk" worden voldaan door n te berekenen volgens:

$$n = \frac{1}{RI} \cdot \int_0^{\ell} \frac{\ell}{gk(s)} ds \quad (4)$$

waarna n op een geschikte wijze op een geheel getal afgerond wordt; bij het afronden dient rekening te worden gehouden met de eis dat het aantal kontourpunten van in vierhoeken te verdelen subgebieden even moet zijn.

Aangezien er slechts $n-1$ onbekenden zijn (de coördinaten s_1 t/m s_{n-1}) en n elementribben, is het stelsel (3) overbepaald. Door nu in (3) RI als onbekende in te voeren (immers: als n bekend is, kan RI niet meer vrij gekozen worden) en vervolgens te elimineren, krijgen wij de volgende $n-1$ relaties:

$$\frac{s_i - s_{i-1}}{gk_i + gk_{i-1}} = \frac{s_{i+1} - s_i}{gk_{i+1} + gk_i} \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

Zodra de boogcoördinaten s_1 t/m s_{n-1} bekend zijn kunnen de coördinaten in het globale twee-dimensionale assenstelsel op eenvoudige wijze bepaald worden.

GENEREREN VAN ELEMENTEN IN EEN SUBGEBIED

Door de knooppunten op de kontour, onderling door rechte lijnstukken (de elementribben) verbonden, ligt deze kontour vast. Elk subgebied dient nu, afhankelijk van het door de gebruiker opgegeven elementtype, óf in driehoeken óf in vierhoeken te worden verdeeld.

De knooppunten op de kontour C_s van het subgebied G_s worden lokaal genummerd van 1 tot en met n_{cp} , waarbij n_{cp} het aantal knooppunten op C_s is (fig. 7.)

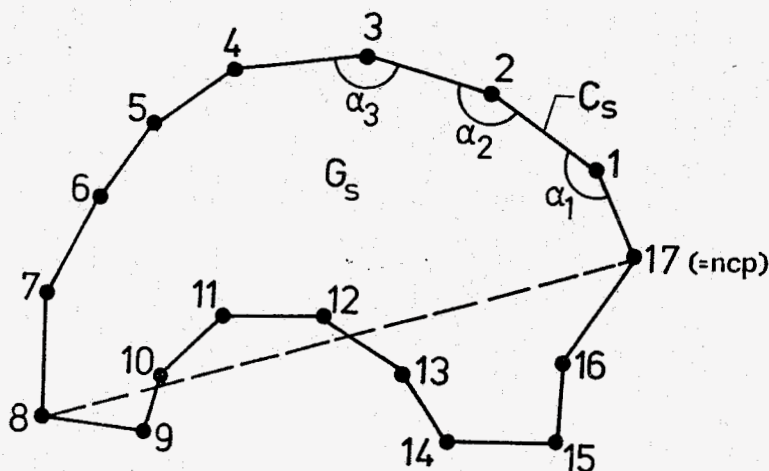


Fig. 7. Lokale nummering van de knooppunten op C_s .

Het subgebied G_s is konkkaaf als één of meer door de kontour ingesloten hoeken $\alpha_i > \pi$ zijn. Laat i en j , $i \neq j$, zodanige knooppunten op C_s zijn dat de verbindingsrechte van i en j geheel binnen G_s ligt. Bij het in elementen verdelen van G_s wordt veelvuldig van zo'n lijnstuk gebruik gemaakt en er moet steeds gecontroleerd worden of het inderdaad binnen G_s ligt. Niet acceptabel is bijvoorbeeld de verbinding van de punten 8 en 17 in fig. 7. Daar deze controles voor konkave gebieden gekompliceerd zijn, wordt een konkkaaf subgebied eerst gesplitst in twee of meer konvexe deelgebieden (met uiteraard de nodige controles), en vervolgens worden deze deelgebieden in driehoeken of vierhoeken verdeeld.

SPLITSSEN VAN EEN KONKAAF SUBGEBIED IN KONVEXE DEELGEBIEDEN

Per definitie is knooppunt i konkkaaf als $\alpha_i > \pi$, (fig. 7). Het knooppunt j is zichtbaar vanuit het knooppunt i op de kontour, als de verbindingsrechte van i en j geheel binnen het beschouwde gebied ligt. Het splitsen van een konkkaaf subgebied in konvexe deelgebieden verloopt dan in de volgende stappen:

1. Neem een konkkaaf knooppunt op de kontour; noem dat punt P .
Als een dergelijk punt niet bestaat, dan is het gebied konvex.
2. Bepaal de verzameling V_1 van die knooppunten op de kontour welke vanuit P zichtbaar zijn.
3. Bepaal uit V_1 het knooppunt Q zodanig dat de rechte PQ , op basis van enige criteria, de beste splitslijn is.
4. Bepaal de verzameling V_2 van die knooppunten op de kontour die vanuit Q zichtbaar zijn.
5. Definieer op PQ een grofheids functie op basis van de grofheidswaarden ter plaatse van knooppunten in V_1 en V_2 .
6. Genereer, op basis van die grofheids functie, knooppunten op de rechte PQ .
7. Definieer twee nieuwe gebieden; de rechte PQ vormt de grenslijn tussen deze gebieden.
8. Vervolg voor beide gebieden met stap 1.

Toelichting

Ad. 1. Voor P wordt in eerste instantie het meest konkave punt van de kontour gekozen; indien echter P deel uitmaakt van een reeks opeenvolgende, ongeveer even konkave hoeken, dan wordt voor P het middelste punt van die reeks genomen. Op deze manier wordt het aantal stappen in bovenstaande (recursieve) werkwijze beperkt.

Ad. 2. en 4. Het bepalen der zichtbare punten wordt met een voorbeeld toegelicht (fig. 8a). De vanuit het punt P zichtbare punten worden gezocht en β_k wordt gedefinieerd als de hoek van de rechte P-K met de raaklijn aan de kontour in P; fig. 8b toont β_k als functie van de boogkoordinaat s.

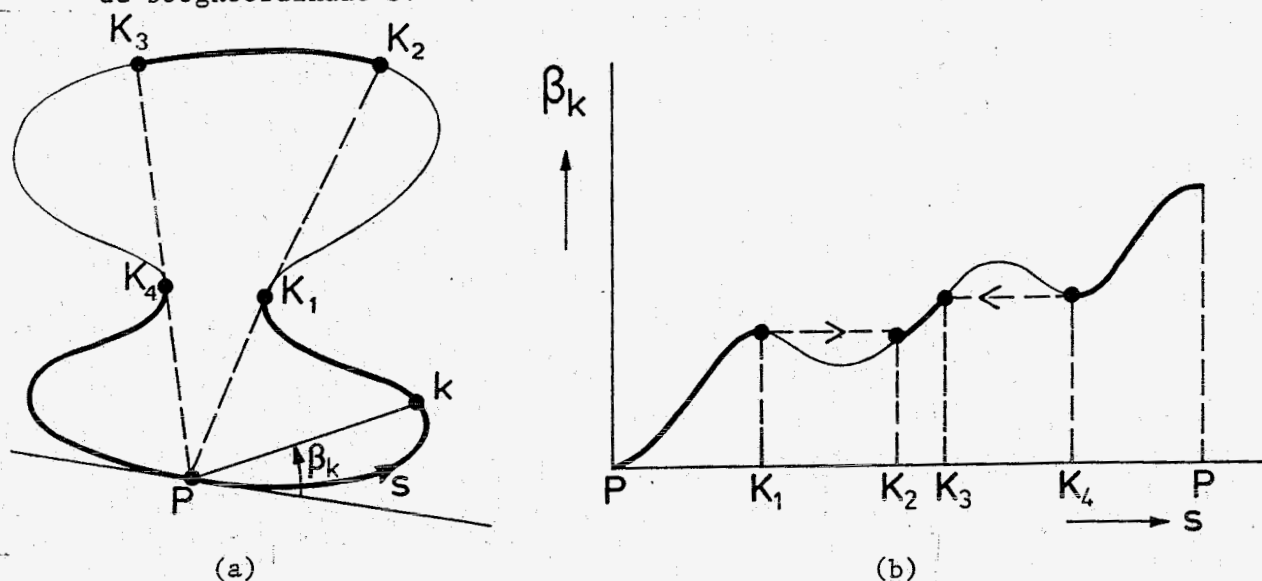


Fig. 8. Het bepalen der vanuit P zichtbare punten.

Van belang voor het bepalen van de zichtbare punten zijn die konkave punten k van de kontour waar β_k een lokaal extremum is. Niet zichtbaar zijn de punten die liggen:

1. in het dal na een lokaal maximum van β_k , bijvoorbeeld tussen K_1 en K_2 .
2. op de top voorafgaand aan een lokaal minimum van β_k , bijvoorbeeld tussen K_3 en K_4 .

Voor een eindig aantal te controleren punten blijkt het bovenstaande in een efficiënt algoritme te kunnen worden vervat.

Ad. 3. Beschouw fig. 9: de punten P^{-1} en P^{+1} zijn de buurpunten van P ; de rechten PP^{-1} en PP^{+1} verdelen het zichtbare gebied in de sectoren I, II en III. In eerste instantie wordt het meest geschikte punt Q gezocht in sector I; dan immers wordt de konkave hoek in P geëlimineerd. Indien de rechte PQ niet aan bepaalde minimum eisen voldoet, wordt het zoekgebied met de sectoren II en III uitgebreid.

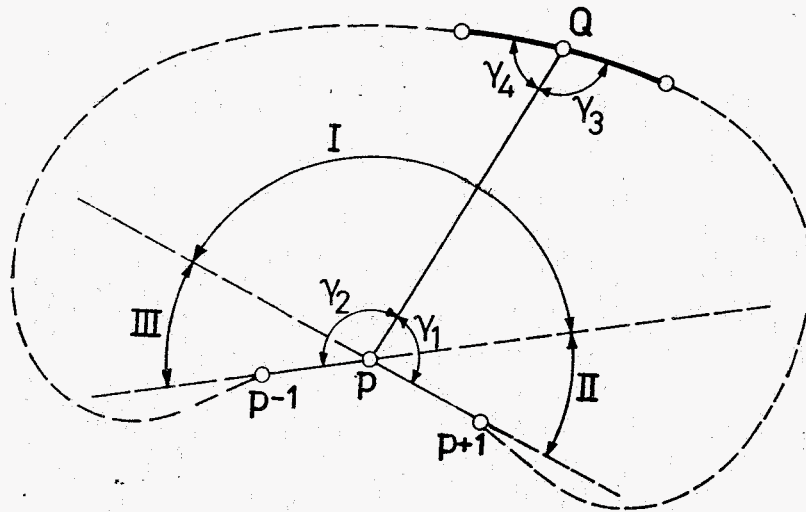


Fig. 9. Het zoeken van een geschikte splitslijn vanuit het punt P .

De kandidaat-splitslijnen worden beoordeeld ten aanzien van drie aspecten, te weten:

1. De hoeken γ_1 , γ_2 , γ_3 en γ_4 moeten zo goed mogelijk veelvouden zijn van γ ; voor in driehoeken te verdelen gebieden wordt om begrijpelijke redenen $\gamma = 60^\circ$ genomen, voor vierhoeken $\gamma = 90^\circ$. Het voorgaande resulteert in de afwijking $\Delta\gamma$.
2. Er wordt gestreefd naar een zo klein mogelijke lengte l van de splitslijn; hieruit wordt de afwijking Δl afgeleid.

Motivering: een kleine lengte beperkt het aantal recursie-stappen en ook het ontstaan van smalle (moeilijker in elementen te verdelen) deelgebieden.

3. Het op een geheel getal afronden van het aantal knooppunten op de splitslijn leidt tot de afwijking Δ_n . Het afrondingsinterval is bij driehoeken 1 en bij vierhoeken 2; bij vierhoeken is immers een even aantal kontourpunten vereist.

Van de mogelijke splitslijnen wordt diegene gekozen waarvoor:

$$\Delta = C_1 \cdot \Delta_\gamma + C_2 \cdot \Delta_\rho + C_3 \cdot \Delta_n \quad (6)$$

minimaal is; voor de weegfactoren C_1 , C_2 en C_3 zijn langs empirische weg geschikte waarden bepaald.

Ad. 5. Er wordt, door middel van gewogen kleinste kwadraten, een twee-dimensionaal grofheidspolynoom bepaald; indien g_{K_K} de grofheid in het kontourpunt K is, krijgt het punt $1/g_{K_K}$ als weegfactor mee. Het resultaat:

$$g_2(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{i-j,j} \cdot x^{i-j} \cdot y^j \quad (7)$$

kan worden gereduceerd tot een één-dimensionaal grofheidspolynoom op de splitslijn van de vorm:

$$g_1(v) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot v^i \quad (8)$$

Ad. 6. Voor het genereren van knooppunten op een rechte met gegeven grofheidsfunctie wordt verwezen naar het genereren der kontourpunten. Het enige verschil wordt gevormd door de grofheids functie; dat is hier een één-dimensionaal polynoom in plaats van een stuksgewijze harmonische functie.

Ad. 7. en 8. Deze twee stappen illustreren de recursiviteit van het gebruikte algoritme, hetgeen inhoudt dat het algoritme voor het splitsen van een konkaaf gebied, zichzelf aanroept.

VERDELEN VAN EEN KONVEX DEELGEBIED IN DRIEHOEKEN

De kontour van het konvexe deelgebied wordt beschreven met n knooppunten. Van elk, lokaal met $i, (i=1,2,\dots,n)$, genummerd kontourpunt zijn de coördinaten, de door de kontour ingesloten hoek α_i en de grofheden gk_i bekend. Een hoek α_i wordt "scherp" genoemd als geldt:

$$\alpha_i < \beta \quad \text{met} \quad \beta = 80^\circ \quad (9)$$

Motivering: het afsnijden en het in tweeën splitsen van β leidt tot even grote afwijkingen ten opzichte van 60° ; dus β volgt uit:

$$\beta - 60^\circ = 60^\circ - \frac{\beta}{2} \quad (10)$$

Het verdelen van een konvex gebied in driehoeken verloopt dan globaal in de volgende stappen:

1. Als $n = 3$ wordt één driehoek gevormd en is het deelgebied klaar.
2. Zoek een scherpe hoek en snijd, zolang dat binnen bepaalde criteria mogelijk is, opeenvolgende stroken van het gebied af en verdeel die in driehoeken.
3. Als het niet (meer) mogelijk is om stroken af te snijden, splits dan het gebied door middel van de meest geschikte lijn in twee deelgebieden.
4. Definieer voor beide deelgebieden de kontour en vervolg voor beide met stap 1.

Toelichting.

Ad. 2. Een bepaalde snijlijn $i+j \rightarrow i-j$ wordt beoordeeld op twee criteria (fig. 10):

1. De hoeken met de kontour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en γ_4 moeten allen groter dan $\beta/2$ zijn, zie (9).
2. Als g_{i+j} en g_{i-j} de grofheidswaarden zijn in de eindpunten van de snijlijn, dan moet voor de grofheid g_l op de snijlijn gelden:

$$\frac{2}{3} \cdot \min \{gk_{i+j}, gk_{i-j}\} < gl < \frac{3}{2} \cdot \max \{gk_{i+j}, gk_{i-j}\} \quad (11)$$

Dit criterium beperkt de kans op configuraties zoals aangegeven in fig. 10b, welke aanleiding geven tot slechte elementvormen.

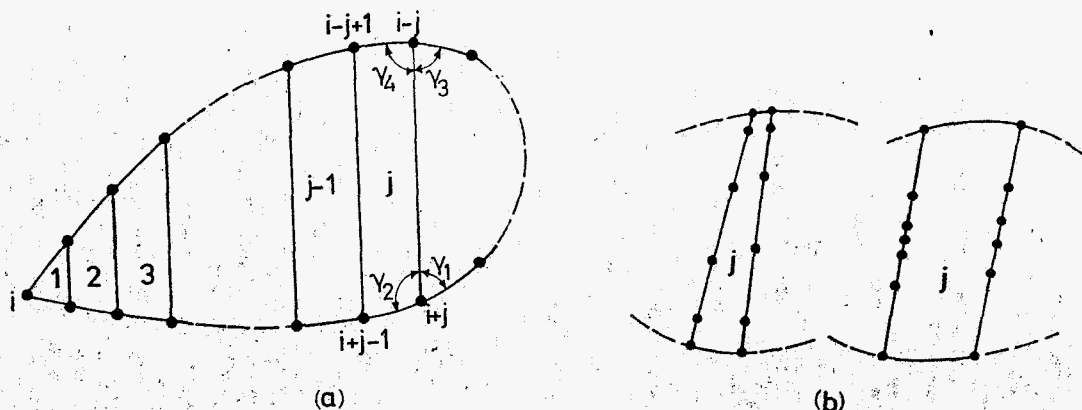


Fig. 10. Vanuit scherpe hoek i afgesneden stroken.

Op een geaccepteerde snijlijn worden knooppunten gelegd uitgaande van de grofheid in alle contourpunten van het oorspronkelijke konvexe deelgebied. Zodra bij het splitsen van een konkave subgebied een konvex deelgebied is ontstaan, kan in dat deelgebied via gewogen kleinste kwadraten een twee-dimensionaal grofheidspolynoom bepaald worden. Als basis voor zo'n polynoom dienen de grofheidswaarden in de contourpunten van het deelgebied. Ten behoeve van een meer stabiele basis voor het polynoom worden echter ook grofheidswaarden berekend in een aantal willekeurige punten in het inwendige van het deelgebied. Daartoe wordt gebruik gemaakt van de integraalstelling van Cauchy voor complexe functies, waarmee functiewaarden in inwendige punten kunnen worden bepaald als de functie op de rand van het gebied gegeven is.

Bij splitsing van een konvex deelgebied worden niet telkens nieuwe polynomen voor de afzonderlijke delen bepaald. Het éénmaal berekende polynoom wordt steeds gebruikt voor het bepalen van één-dimensionale grofheidspolynomen op snij- en splitslijnen; ter toelichting van het laatste zie de relaties (7) en (8). Het genereren van knooppunten op snij- en splitslijnen geschiedt overigens op dezelfde wijze als die bij het splitsen van konkave gebieden reeds is aangegeven.

Fig. 11 illustreert het in driehoeken verdelen van de strook waarbij uitgegaan wordt van de op de snijlijnen gegenereerde knooppunten; binnen de strook worden géén knooppunten meer gelegd.

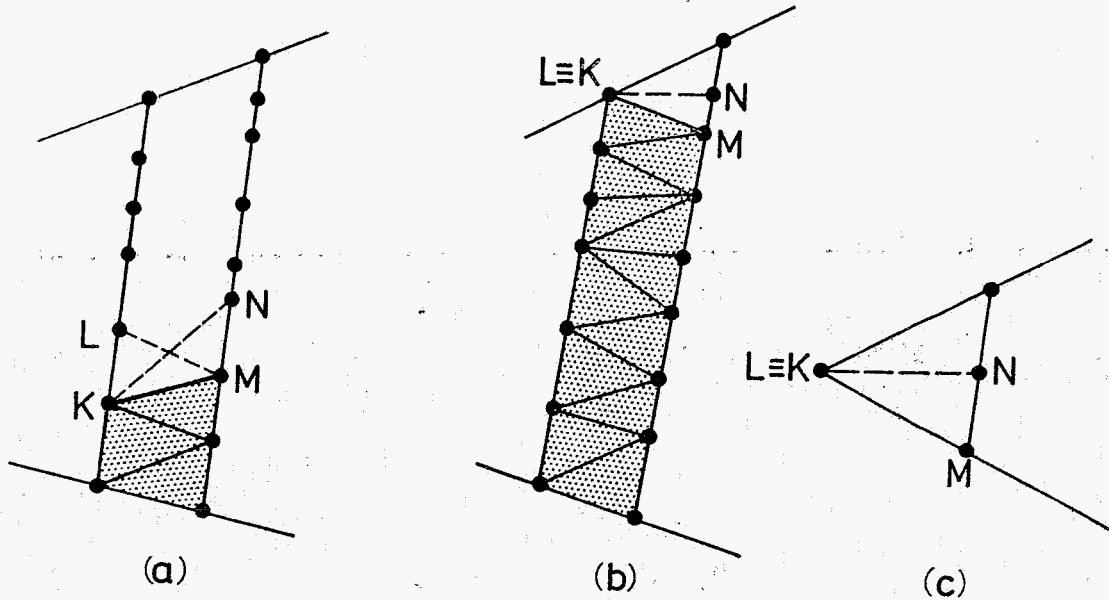


Fig. 11. Verdelen van een strook in driehoeken.

Als $LM < KN$, (fig. 12a) dan is LKM de volgende driehoek die gevormd wordt; in het andere geval wordt driehoek KMN gevormd. Fig. 12b geeft een mogelijke eindsituatie aan en fig. 12c een soortgelijke situatie bij de eerste strook; het in driehoeken verdelen van zo'n restgebied is voor de hand liggend.

Ad. 3. De aspecten waarop splitslijnen beoordeeld worden: hoeken, lengte en aantal knooppunten, zijn gelijk aan die bij het splitsen van konkave gebieden. Het bepalen van de grofheids functie op de splitslijn in een konvex gebied geschiedt echter zoals onder ad. 2 voor snijlijnen is vermeld. Teneinde het aantal recursie-stappen te beperken wordt de meest geschikte splitslijn in eerste instantie gezocht in de verzameling lijnen die het gebied topologisch, d.w.z. gelet op het aantal kontourpunten, middendoor delen. Indien daarbij geen lijn is die aan bepaalde minimum eisen voldoet, wordt het zoekgebied uitgebreid met topologisch minder symmetrische splitslijnen.

Ad. 4. Deze stap illustreert weer het recursieve van de gevolgde werkwijze.

VERDELEN VAN EEN KONVEX DEELGEBIED IN VIERHOEKEN

De werkwijze is voor een groot deel analoog aan die bij driehoeken. Een hoek α_i wordt nu "scherp" genoemd als $\alpha_i < \beta$ met $\beta = 120^\circ$ waarbij β volgt uit:

$$\beta - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad (12)$$

Het in vierhoeken verdelen van een konvex gebied verloopt globaal in de volgende stappen:

1. Als $n = 4$ wordt één vierhoek gevormd en is het deelgebied klaar.
2. Als $n = 6$ wordt het gebied in 2, 3, 4 of 5 vierhoeken verdeeld en is het deelgebied klaar.
3. Zoek een combinatie van twee contourpunten i en j waarvoor zowel α_i als α_j "scherp" is, en de tussen i en j gelegen hoeken 180° zijn (i en j zijn door een recht lijnstuk verbonden). Snijd, zolang dat binnen bepaalde criteria mogelijk is, stroken van het gebied af en verdeel die in vierhoeken.
4. Splits, indien geen stroken (meer) afgesneden kunnen worden, het gebied in twee deelgebieden.
5. Vervolg voor beide deelgebieden met stap 1.

Toelichting

Ad. 2. Deze, ten opzichte van de werkwijze bij driehoeken, extra stap is nodig wegens de geometrisch en topologisch meer gekompliceerde elementvorm. Er wordt volstaan met het weergeven van typerende geometrieën die tot 2, 3, 4 of 5 vierhoeken aanleiding geven. (fig. 12).



Fig. 12. Verdeling van een zeshoek in 2, 3, 4 of 5 vierhoeken.

Ad. 3. Behalve eisen aan de hoeken met de contour en het minimum en maximum van de grofheid op de splitslijn zoals bij driehoeken het geval is, wordt voor het accepteren van een snijlijn bij vierhoeken bovendien geëist dat het aantal knooppunten op de snijlijn gelijk is aan dat op de voorafgaande snijlijn (of startlijn tussen de punten i en j).

Het in vierhoeken verdelen van de afgesneden strook is dan triviaal. (fig. 13).

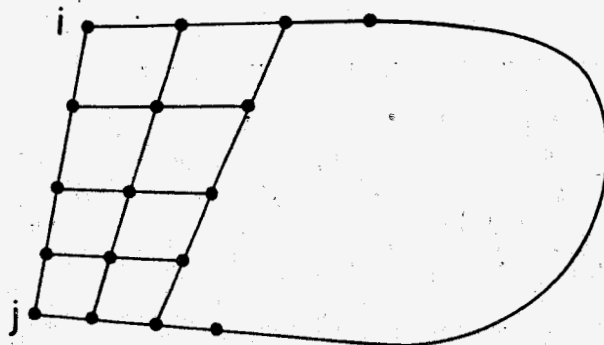


Fig. 13. Het afsnijden en in vierhoeken verdelen van stroken.

De stappen 4 en 5 behoeven geen nadere toelichting meer.

Ten aanzien van het verdelen van een konvex gebied in driehoeken of vierhoeken wordt, generaliserend, nog het volgende opgemerkt. Beide werkwijzen bestaan in wezen uit drie mechanismen, te weten:

1. een afsluiting: het vormen van één driehoek, één vierhoek of het in vierhoeken verdelen van een zeshoek.
2. het afsnijden van stroken waardoor het gebied verkleind wordt zonder dat de recursie voortschrijdt.
3. het in twee deelgebieden splitsen zodat het afsnijden van stroken in principe weer mogelijk wordt.

HET VERBETEREN VAN DE VORM DER ELEMENTEN

Nadat een subgebied verdeeld is in elementen wordt de vorm van de elementen geoptimaliseerd. Daarbij worden de volgende uitgangspunten gehanteerd:

- het aanpassen van de vorm der elementen zal per subgebied geschieden; de posities van de knooppunten op de subkontouren blijven ongewijzigd.
- de elementvormen worden verbeterd door het verplaatsen (repositio-neren) van de inwendige knooppunten van het subgebied, terwijl de topologie van het in elementen verdeelde subgebied ongewijzigd blijft.

Buurpunt van een inwendig punt k zijn die knooppunten die via één element ribbe met het punt k verbonden zijn (fig. 14).

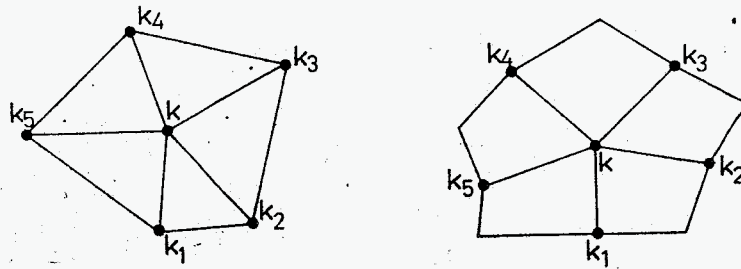


Fig. 14. De buurpunten $k_1 \dots k_{nk}$ van het knooppunt k .

Het blijkt dat de vorm der in k samenkomende elementen efficiënt verbeterd kan worden door aan k coördinaten toe te kennen die het gemiddelde zijn van de coördinaten van zijn buurpunten. In formule vorm:

$$x_k := \frac{1}{nk} \sum_{i=k}^{nk} x_{ki} \quad \text{en} \quad y_k := \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^{nk} y_{ki} \quad (13)$$

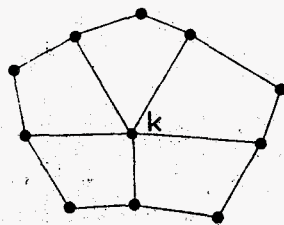
Het (iteratieve) proces wordt gestopt als géén der inwendige knooppunten nog significant van plaats verandert.

BANDBREEDTE REDUKTIE

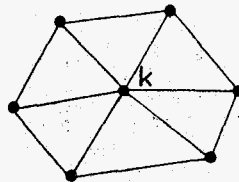
De wijze waarop in TRIQUAMESH het gebied G in elementen wordt verdeeld heeft tot gevolg dat de coëfficiënten-matrices van de in G aangegeven substructuren zeker geen bandstructuur bezitten. Daar veel E.M.-programma's alleen bij behoorlijke bandstructuur efficiënt zijn, zijn in TRIQUAMESH mogelijkheden aangebracht voor het reduceren van de bandbreedte door de knooppunten op een geschikte wijze te hernoemen. Beschikbaar zijn de, hierna te behandelen, zogenaamde CMK-, LINE-, DISTANCE- en ANGLE-hernummering. De gebruiker kan per substructuur meer dan één hernummering opgeven; uiteindelijk wordt degene gebruikt die de beste bandstructuur opleverde.

CMK-hernummering.

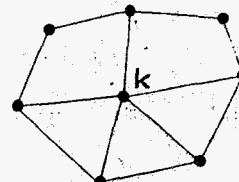
Deze hernummeringsmethode is ontwikkeld door Cuthill en Mckee [9] en gaat uit van de topologie van de verdeling in elementen van de substructuur. Laat e_1, e_2, \dots, e_n ($n \geq 1$) de elementen zijn die het knooppunt k bevatten. Als de elementen e_1 t/m e_n beschreven worden door de $m+1$ knooppunten k, k_1, k_2, \dots, k_m , dan heeft het knooppunt k de graad m en zijn k_1, k_2, \dots, k_m de buurpunten van k . (fig. 15).



Vierhoeken;
graad = 10



Driehoeken
graad = 6



Drie- en vierhoeken;
graad = 7

Fig. 15. De graad van knooppunt k .

De CMK-hernummering geschiedt dan als volgt:

1. Kies een startpunt k_1 en ken hieraan het nummer 1 toe.
De verzameling V der hernummerde knooppunten bestaat dan alleen uit het knooppunt k_1 : $V = \{k_1\}$.
2. Nummer van elk knooppunt in V (in volgorde van hun nieuwe nummers), de nog niet hernummerde buurpunten volgens toenemende graad.
3. Maak $V = \{\text{knooppunten waaraan in de laatst uitgevoerde stap 2 nieuwe nummers zijn toegekend}\}$.
4. Als V leeg is zijn wij klaar; anders wordt met stap 2 vervolgd.

Voor de bepaling van het startpunt k_1 dient de gebruiker bij de invoer een basispunt P aan te geven. Als startpunt wordt dan dat (uiteeraard tot de te hernummeren substructuur behorend) knooppunt genomen dat de kleinste afstand tot P heeft. Daar bij de CMK-hernummering geen gebruik gemaakt wordt van de geometrie der substructuren (m.u.v. de bepaling van het startpunt) is deze hernummeringsmethode bij uitstek geschikt voor substructuren met een

grillige geometrie. Fig. 16 geeft een typisch voorbeeld: een dunwandige vertakte konstruktie van grillige vorm. Met één van de punten P_1 , P_2 of P_3 als startpunt, levert de CMK-methode een voor deze konstruktie vrijwel ideale knooppuntnummering af.

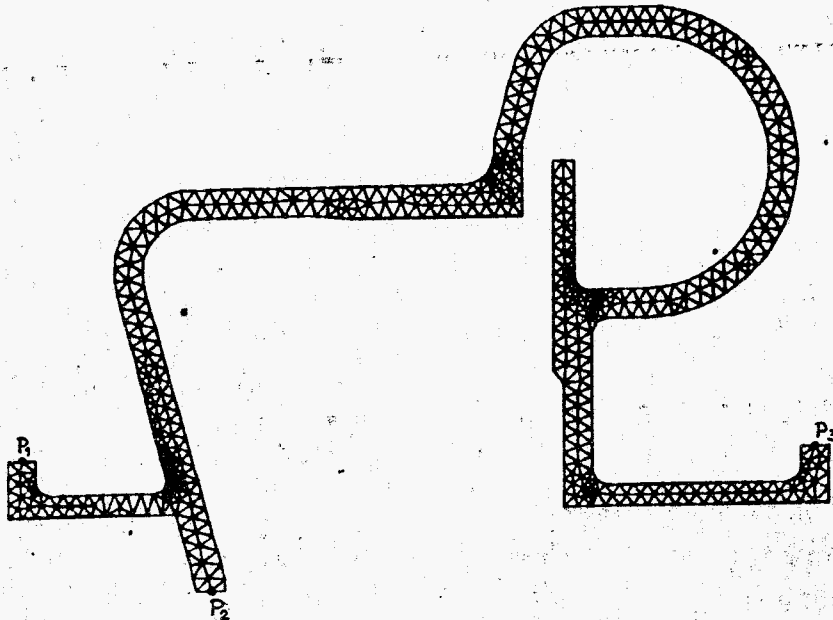


Fig. 16. Verdeling in elementen voor een centrifugaalpomp.

LINE-, DISTANCE-, en ANGLE-hernummering.

Deze hernummeringsmethoden zijn gebaseerd op de geometrie (knooppuntkoördinaten) van de substruktuur. Zij worden gerealiseerd m.b.v. een, door de gebruiker op te geven, nieuw Carthesisch koördinatenstelsel \bar{x} , \bar{y} dat gezien kan worden als een combinatie van een translatie en een rotatie van het oude koördinatenstelsel. Daartoe worden twee basispunten P en Q opgegeven. In het nieuwe stelsel is P de oorsprong, \bar{y} wordt gemeten langs de lijn PQ en \bar{x} loodrecht daarop. In dit stelsel kan een knooppunt op k twee manieren worden gekarakteriseerd, nl. door het paar (\bar{x}_k, \bar{y}_k) en door het paar $(\bar{r}_k, \bar{\phi}_k)$, (fig. 17).

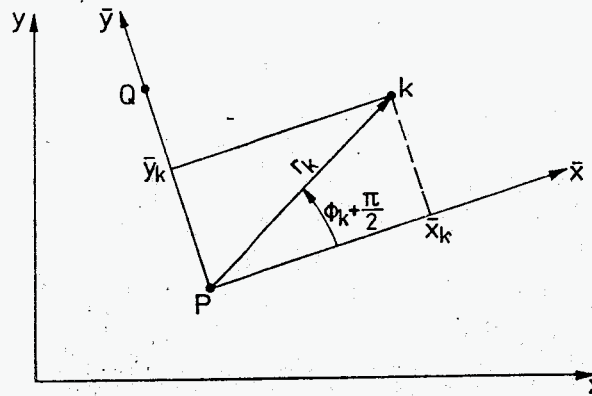


Fig. 17. Karakterisering van een knooppunt in het (\bar{x}, \bar{y}) -assenstelsel.

Aan de hand van de knooppunten k_1 met de coördinaten (\bar{x}_1, \bar{y}_1) of $(\bar{r}_1, \bar{\phi}_1)$ en k_2 met coördinaten (\bar{x}_2, \bar{y}_2) of $(\bar{r}_2, \bar{\phi}_2)$ kunnen als volgt drie hernummeringsmethoden gekarakteriseerd worden:

k_1 komt na k_2 als:

- | | | |
|----|---|-------------------------|
| 1) | $(\bar{x}_1 > \bar{x}_2) \vee ((\bar{x}_1 = \bar{x}_2) \wedge (\bar{y}_1 > \bar{y}_2))$ | "LINE"-hernummering |
| 2) | $(\bar{r}_1 > \bar{r}_2) \vee ((\bar{r}_1 = \bar{r}_2) \wedge (\bar{\phi}_1 > \bar{\phi}_2))$ | "DISTANCE"-hernummering |
| 3) | $(\bar{\phi}_1 > \bar{\phi}_2) \vee ((\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2) \wedge (\bar{r}_1 > \bar{r}_2))$ | "ANGLE"-hernummering |

Ter toelichting van het bovenstaande en van de naamgeving van de hernummeringsmethoden, zie fig. 18.

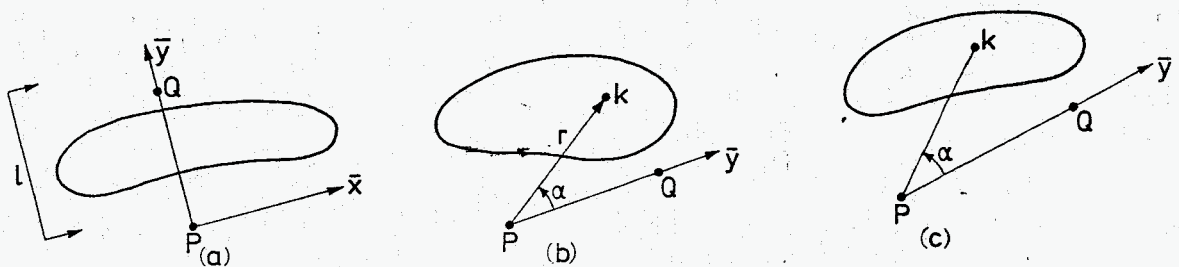


Fig. 18. (a) LINE-, (b) DISTANCE- en (c) ANGLE-hernummering.

Bij de LINE-hernummering doorloopt de rechte l evenwijdig aan PQ de substructuur in de richting van de positieve \bar{x} -as (fig. 18a). De knooppunten worden genummerd in de volgorde waarin zij door l gepasseerd worden. Knooppunten die gelijktijdig door l gepasseerd worden krijgen nummers volgens toenemende \bar{y} -koördinaat.

Bij de DISTANCE-hernummering worden de knooppunten genummerd volgens toenemende afstand r tot het punt P; punten op gelijke afstand van P worden genummerd volgens toenemende hoek α (fig. 18b).

Bij de ANGLE-hernummering worden de knooppunten genummerd volgens toenemende hoek α (fig. 18c); punten met gelijke hoek α worden genummerd volgens toenemende afstand r tot P.

Fig. 19 geeft een drietal eenvoudige voorbeelden van elementverdelingen die zich typisch lenen om met de onderscheiden hernummeringsmethoden hernummerd te worden.

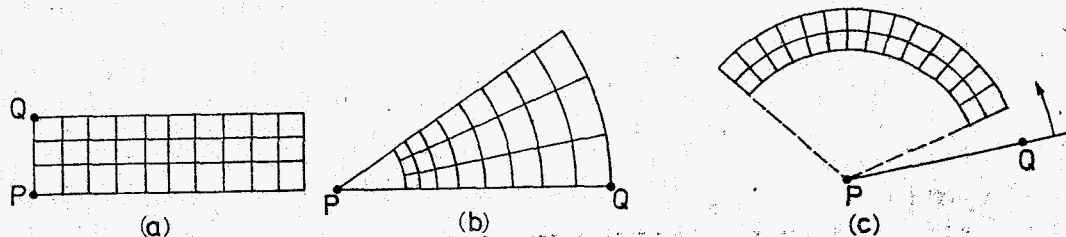


Fig. 19. Typische elementverdelingen voor (a) LINE-, (b) DISTANCE- en (c) ANGLE-hernummering.

GENEREREN VAN MIDDENPUNTEN

De driehoeken en/of vierhoeken waarin het gebied G verdeeld is, kunnen worden opgevat als elementen met drie of vier knooppunten. In veel gevallen zal men echter elementen wensen te gebruiken met, bijvoorbeeld, ook knooppunten op iedere elementribbe (zogenaamde middenpunten). Teneinde de bij het hernummeren van de knooppunten bereikte bandstructuur te behouden, moeten in elk element middenpunten gekozen worden die begrensd worden door het laagste en het hoogste hoekpuntnummer van dat element. Hieraan wordt voldaan door een tussen de hoekpunten k_1 en k_2 gelegen middenpunt de exacte of meest nabij liggende nog vrije waarde van $(k_1 + k_2)/2$ te geven. Het is duidelijk dat daartoe in het oorspronkelijke hoekpuntenbestand "ruimte" moet worden gemaakt; dat geschiedt door de nummers der hoekpunten met 4 te vermenigvuldigen. Dit idee is als volgt uitgewerkt:

Van een substructuur worden alle door twee hoekpunten begrensde lijnen verzameld en er wordt per lijn op de bovengenoemde wijze een middenpunt gekreëerd. Daarna wordt m.b.v. de oude topologie, de verzamelde lijnen en de gevonden middenpunten de nieuwe topologie samengesteld. Tenslotte worden eventuele gaten in de knooppuntnummering geëlimineerd en het laagste knooppuntnummer wordt op 1 gebracht.

DE UITVOER VAN TRIQUAMESH

De gebruiker kan d.m.v. stuurgegevens uitvoer van de resultaten van TRIQUAMESH verkrijgen op de regeldrukker, via de kaartponser, op magneetschijf en via de plotter. De karakterisering van de gegenereerde verdeling in elementen wordt in zodanige vorm op ponskaarten en/of magneetschijf uitgevoerd dat deze aansluit bij de eisen die daaraan gesteld worden door enige programmasystemen op basis van de elementenmethode. Momenteel is uitvoer mogelijk die kan dienen als invoer voor de systemen ASKA, FEMSYS [3] en MARC; uitbreiding naar andere systemen is eenvoudig mogelijk indien men zich beperkt tot (twee-dimensionale):

- driehoekige elementen met drie of zes knooppunten,
- vierhoekige elementen met vier, acht of negen knooppunten,
- elementen met rechte elementzijden.

HET GEBRUIK VAN TRIQUAMESH

TRIQUAMESH is geprogrammeerd in BEA (Burroughs Extended Algol [5]) en is geïmplementeerd op de Burroughs B7700 rekenmachine van de Technische Hogeschool Eindhoven. Het programma kan zowel "batch" als in het B7700 "time-sharing"-systeem verwerkt worden. Bij dat laatste kan erg nuttig gebruik worden gemaakt van een beeldscherm-terminal (TEKTRONIX 4014) voor het verkrijgen van grafische (tussen-) uitvoer.

Het gebruik van de meshgenerator wordt toegelicht aan de hand van enige voorbeelden; voor meer details wordt verwezen naar [4]. Als leidraad bij het samenstellen van de invoergegevens maakt de gebruiker een schets van het in elementen te verdelen gebied en geeft daarin de basispunten, kontourdelen, subgebieden etc. aan (fig. 20a).

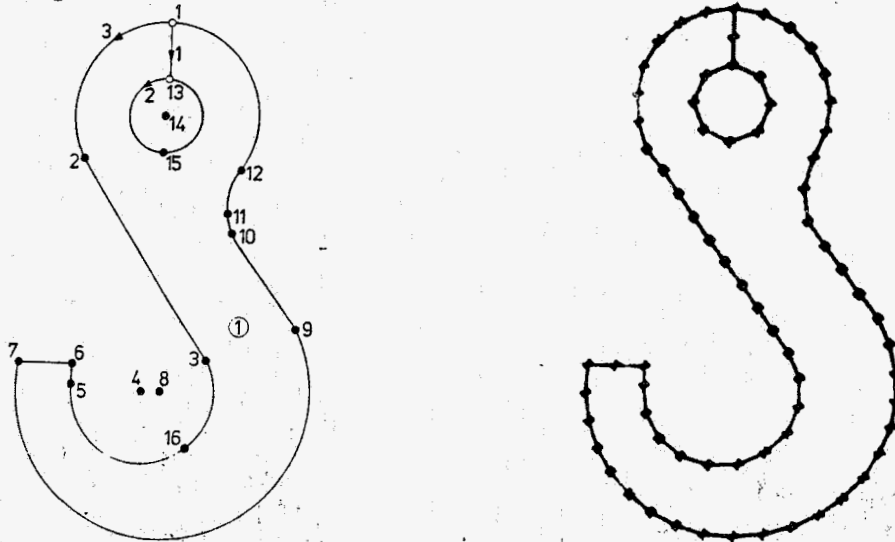


Fig. 20. Invoerschets (a) en gegenereerde contourpunten (b) voor een kraanhaak.

De invoer voor dit probleem luidt:

```

100 $INPUT "HOOKE"
110 $BASISPOINTS
120 1:0,200;      2:-43,125;      3:34.6,20;      4:0,0;      5:-40,0;
130 6:-40,10;    7:-70,10;      8:10,0;      9:79,40;    10:41,90;
140 11:39,100;   12:43,123;      13:0,170;    14:0,150;   15:0,130;
150 16:30,-30;
160 $CONTOURPIECES
170 1(1 RL 13) 2(13 CM 14,15 CM 14,13)
180 3(1 CM 14,2 RL 3 CB 16,5 RL 6 RL 7 CM 8,9 RL 10 CB 11,12 CM 14,1)
190 $SUBCONTOUR
200 1(3,1,-2,-1)
210 $GRADING
220 G 1 RI 15
230 $SUBSTRUCTURE
240 ASKA
250 1 TRIM3 (1)
260 $RENUMBER
270 PROFILE
280 (1 CMK 1)(1 CMK 7)(1 LINE 7,6)
290 $OUTPUT
300 1 COPRINT, TOPRINT, COCARD, TOCARD, PLOT(A2)+PONO+ELNO;
310 $STOP
    
```

Toelichting

\$ BASISPOINTS: bevat de basispunten met hun koördinaten.

\$ CONTOURPIECES: geeft aan hoe elk der kontourdelen is samengesteld.

\$ SUBCONTOUR: beschrijft de subkontouren d.m.v. de samenstellende kontourdelen.

\$ SUBSTRUCTURE: geeft aan het later te gebruiken E.M.-programma alsmede uit welke subgebieden elk der substructuren bestaat, en het elementtype in elk der subgebieden.

\$ GRADING: bevat de informatie over de gewenste elementgrootte.

\$ RENUMBER: bevat stuurgegevens voor de bandbreedte-redukctie.

\$ OUTPUT: legt de gewenste uitvoer vast.

Fig. 20b toont de gegenereerde kontourpunten en fig. 21a de verdeling in elementen.

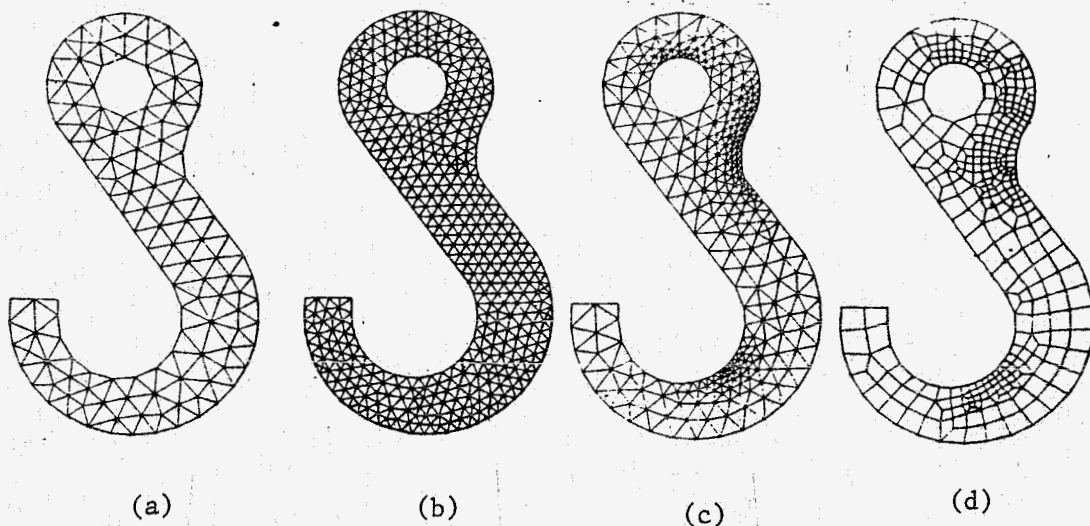


Fig. 21. Elementenverdelingen voor een kraanhaak.

De verdelingen volgens fig. 21b tot en met fig. 21d zijn ontstaan na kleine wijzigingen van bovenstaande invoer:

Fig. 21b: de gehele verdeling een factor 2 verfijnd (m.b.v. RI = 7.5 op regel 220).

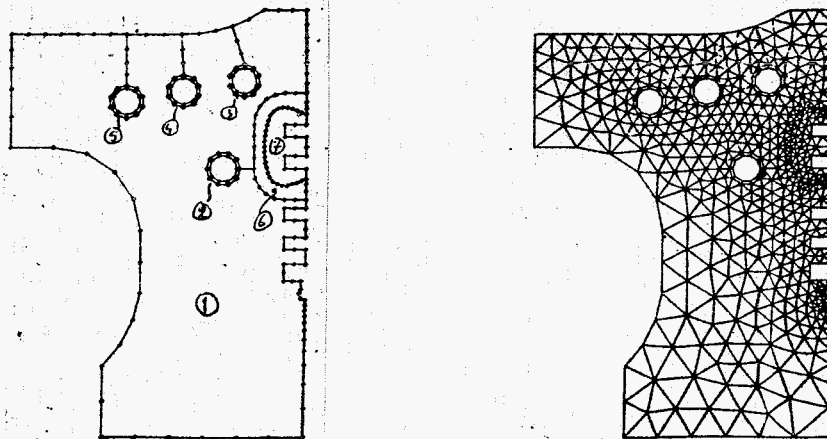
Fig. 21c: verdeling lokaal in de basispunten 10, 11, 12, 13 en 16 een factor 4 verkleind (d.m.v. toevoegen van GV 0.25 (10, 11, 12, 13, 16) ná regel 220).

Fig. 21d: als fig. 21c, nu echter vierhoeken (QUAM4 i.p.v. TRIM3 op regel 250).

De meshgenerator levert, behalve (uiteraard) de koördinaten der knooppunten en de topologie van de verdeling in elementen, nog enige karakteristieken; voor de verdeling van fig. 21a luiden die:

```
CHARACTERISTICS OF MESH :  
TRIQUAMESH113078/HOOKE/SESSION 006667/TASK 006857/STATION 000063/U216S241..  
  
OUTPUT ADAPTED FOR THE ASKA SYSTEM  
NUMBER OF SUBSTRUCTURES : 1  
  
SUBSTRUCTURE NO 1  
  NUMBER OF NODAL POINTS : 132 ( 132 CORNER POINTS : 0 MIDPOINTS )  
  BRUTO MATRIX CHARACTERISTICS BASED ON ONE DEGREE OF FREEDOM PER POINT  
  NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM IN THE SUBSTRUCTURE, NDF : 132  
  BANDWIDTH BW : 10  
  CRITERION C1 (CHOLESKI-BAND DECOMPOSITION) : 8.404E+03  
  CRITERION C2 (CHOLESKI-BAND-PROFILE DECOMPOSITION) : 3.229E+03  
  
  NUMBER OF ELEMENTS : 194  
  NUMBER OF SUBDOMAINS : 1  
  
  SUBDOMAIN NO 1  
    ELEMENT TYPE : TRIM3  
    NUMBER OF ELEMENTS : 194  
    NUMBER OF CORNER POINTS : 132 ( 74 CORNER POINTS ON THE SUBCONTOUR )  
#ET=5:28.3 PT=14.6 IO=4.3
```

Het volgende voorbeeld betreft een vrij complexe elementenverdeling. Fig. 22a toont de doorsnede van een tot een rotatisch symmetrische konstruktie geschematiseerde zuiger van een dieselmotor. De gegoten aluminium zuiger wordt door middel van olie gekoeld via een ingegoten stalen buis als koelspiraal; in een radiaal vlak zien wij 4 doorsneden van de buis namelijk de subgebieden 2, 3, 4 en 5. Ter plaatse van de twee bovenste zuigerveren wordt, met het oog op een hogere slijtvastheid, een andere materiaal soort toegepast: een ingegoten gietijzeren ring waarvan de doorsnede wordt weergegeven door subgebied 7.



(a)

(b)

Fig. 22. Gegenerateerde contourpunten (a) en elementverdeling (b).

Ten behoeve van het optimaliseren van de vorm van de gietijzeren ring wordt deze, samen met zijn omgeving (subgebied 6) in een afzonderlijke substructuur ondergebracht. Fig. 22b toont de voor de zuiger gegenereerde verdeling in elementen. Merk op dat in de subgebieden 2 tot en met 5 (de doorsneden van de koelspiraal) vierhoekige elementen zijn toegepast. Bij toepassing van driehoekige elementen zouden, als gevolg van de geringe wanddikte van de buis, wel erg scherphoekige driehoekige zijn ontstaan.

De benodigde computertijd was: 68 sec. CPU.

In de fig. 23 tot en met 25 zijn nog enige voorbeelden gegeven.

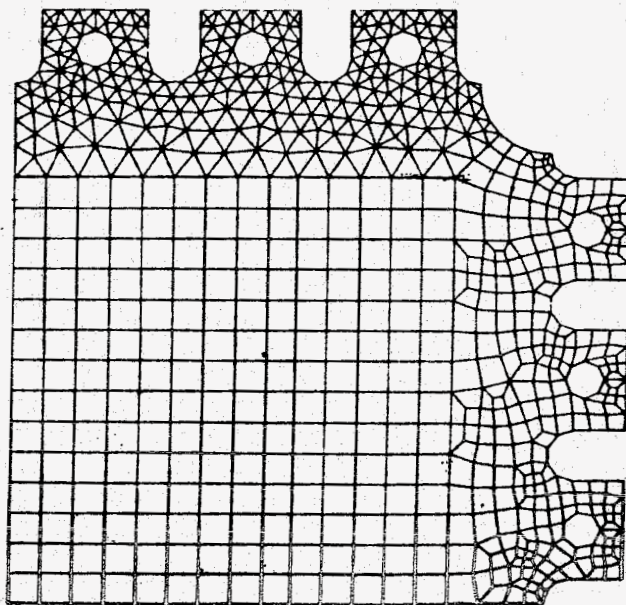


Fig. 23. Eén kwart van een testplaat.

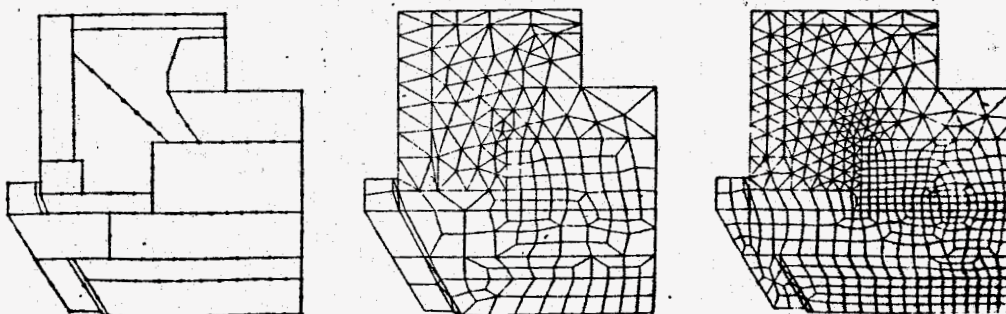


Fig. 24. Halve doorsnede van een smeltoven.

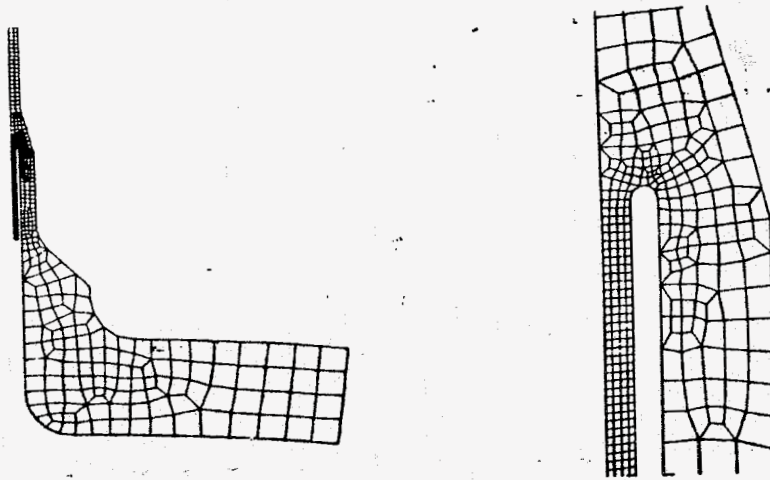


Fig. 25. Pijpaansluiting met "thermal sleeve".

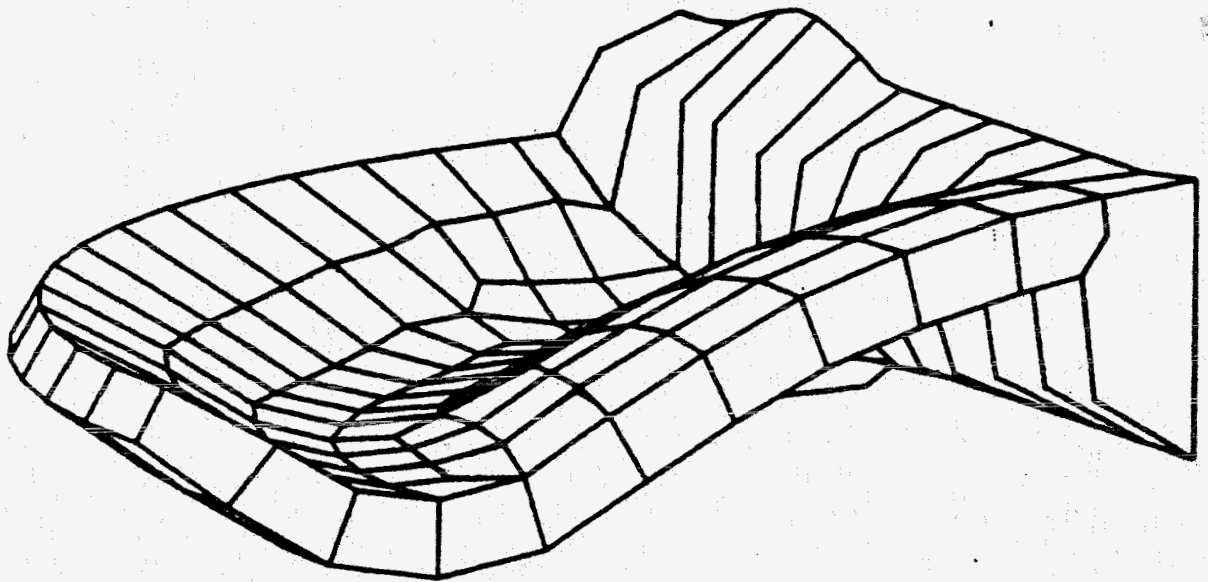


Fig. 26. Een kwart van een vlinderklep.

DISCUSSIE EN TOEKOMSTIGE ONTWIKKELINGEN

De meshgenerator TRIQUAMESH is reeds goed bruikbaar gebleken; opvallende voordelen zijn:

- de gebruikers georiënteerdheid; men is erg snel ingewerkt.
- de vrijheid in keuze van aantal en vorm der subgebieden.
- de eenvoudige sturing van de elementgrootte.
- de mogelijkheid van vierhoekige elementen.

Bij het gebruik zijn ook een aantal zinvolle uitbreidingen duidelijk geworden, zoals bijvoorbeeld meshgeneratie voor semi-drie-dimensionale konstrukties (schalen e.d., als voorbeeld zie fig. 26); dit laatste lijkt perspectieven te bieden voor de ontwikkeling van een meshgenerator voor vrij willekeurige drie-dimensionale gebieden. Een aantal minder vergaande uitbreidingen willen wij in elk geval in de naaste toekomst realiseren; dat zal dan geschieden in het kader van de ontwikkeling van een "pre-processing program" waarmee de komplette invoer voor E.M.-analyses (elementverdeling, kinematische en dynamische randvoorwaarden etc.) kan worden gegenereerd.

Literatuur

- [1] Buell, W.R. en Bush, B.A.: Mesh Generation - A survey, Transactions of the ASME; Journal of Engineering for Industry, februari 1973, pp. 332-338.
- [2] Cuthill, E. and McKee, J., Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices; proc. 24th National Conf., Assoc. Comput. Mach., ACM Publication P-69, 1122 Ave. of the Americas, New-York, N.Y., 1969.
- [3] Peters, F.J.: FEMSYS, een systeem voor op de eindige elementmethode gebaseerde berekeningen. Deel I, Inleiding terminologie en gebruikershandleiding. Technische Hogeschool Eindhoven, onderafdeling der Wiskunde, maart 1976.
- [4] Schoofs, A.J.G., van Beukering, L.H.Th.M., Sluiter, M.L.C., TRIQUAMESH Gebruikershandleiding; THE-rapport WE 78-01, Technische Hogeschool Eindhoven, Afdeling der Werktuigbouwkunde, jan. 1978.
- [5] Burroughs B7000/B6000 ALGOL REFERENCE MANUAL; Publ. no. 500/639; may 1977; Burroughs Corporation.