Een eenvoudige singuliere voorwaardelijke verwachting

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1974-02

januari 1974

EEN EENVOUDIGE [illegible]SINGULIERE VOORWAARDELIJKE VERWACHTING

door

F.H. Simons

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Stel $(X,\mathcal{R},\mu)$ is een waarschijnlijkheidsruimte, $\mathcal{R}_0$ een deel σ-algebra van $\mathcal{R}$ en $E_{\mathcal{R}_0}$ de voorwaardelijke verwachtingsoperator met betrekking tot $\mathcal{R}_0$. Als we voor iedere $A \in \mathcal{R}$ een representant $P(\cdot,A) \in E_{\mathcal{R}_0} 1_A$ kunnen kiezen zo dat voor bijna alle x $P(x,\cdot)$ een kans is op $\mathcal{R}$, dan heet $E_{\mathcal{R}_0}$ regulier. Een voorbeeld van een niet-reguliere voorwaardelijke verwachting is al gegeven door Doob (Stochastic Processes, p. 624), gebruik makend van de existentie van een niet Lebesgue meetbare verzameling in $[0,1]$ met inwendige maat 0 en uitwendige maat 1.

We zullen hier aantonen dat ook de voorwaardelijke verwachting van de Lebesgue verzamelingen met betrekking tot de Borel verzamelingen niet regulier is, ondanks het feit dat deze voorwaardelijke verwachting vrijwel de identieke afbeelding is.

Laat $(X,\mathcal{R},\mu)$ de maatruimte zijn bestaande uit het interval $[0,1]$, de Lebesgueverzamelingen en de Lebesguemaat, en $\mathcal{R}_0$ de deel σ-algebra der Borel verzamelingen.

Neem aan dat $E_{\mathcal{R}_0}$ regulier is. We kiezen dan voor iedere $A \in \mathcal{R}$ een representant $Q(\cdot,A) \in E_{\mathcal{R}_0} 1_A$ zo dat voor bijna alle x $Q(x,\cdot)$ een kans is op $\mathcal{R}$. Aangezien voor iedere interval (a,b) ook $1_{(a,b)} \in E_{\mathcal{R}_0} 1_{(a,b)}$, geldt voor bijna alle x $1_{(a,b)}(x) = Q(x,(a,b))$.

Er bestaat dus een Borel verzameling N zo dat voor alle $x \notin N$ $Q(x,\cdot)$ een kans is op $\mathcal{R}$, en $Q(x,(a,b)) = 1_{(a,b)}(x)$ voor alle intervallen (a,b) met rationale eindpunten.

Definieer nu

$$P(x,A) = 1_{X\setminus N}(x).Q(x,A) ,$$

dan geldt

i) voor iedere $A \in \mathcal{R}$ is $P(\cdot,A)$ $\mathcal{R}_0$-meetbaar.

ii) voor iedere $x \notin N$ is $P(x,\cdot)$ een kans op $\mathcal{R}$,
voor iedere $x \in N$ is $P(x,\cdot) = 0$ op $\mathcal{R}$.

iii) voor ieder interval (a,b) met rationale eindpunten en iedere $x \notin N$ is $P(x,(a,b)) = 1_{(a,b)}(x)$.

Voor iedere x is er een dalende rij intervallen (a_n,b_n) met rationale eindpunten zo dat $\cap\ (a_n,b_n) = \{x\}$. Dan volgt uit ii) en iii) voor iedere $x \notin N$

$$P(x,\{x\} = \lim_{n\to\infty} P(x,(a_n,b_n)) = 1 .$$

Kies nu $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$ zo dat $B \subset X \setminus N$.
Dan is $P(x,B) \not\equiv 1_B(x)$, want anders zou wegens i) $B \in \mathcal{B}_0$.
Er zijn nu twee mogelijkheden:

a) er is een $x \in B$ met $P(x,B) < 1$. Dan zou gelden

$$1 = P(x,\{x\}) \leq P(x,B) < 1$$

daar $\{x\} \subset B$, tegenspraak.

b) er is een $x \notin B$ met $P(x,B) > 0$. Wegens ii) is dan $x \notin N$, zo dat

$$1 = P(x,X) \geq P(x,B) + P(x,\{x\}) > 1 ,$$

tegenspraak.

De veronderstelling dat $E_{\mathcal{B}_0}$ regulier is, is dus onjuist.