

Een eenvoudige singuliere voorwaardelijke verwachting

Citation for published version (APA):

Simons, F. H. (1974). *Een eenvoudige singuliere voorwaardelijke verwachting*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 7402). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1974

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1974-02

januari 1974

EEN EENVOUDIGE ~~WISKUNDE~~ SINGULIERE VOORWAARDELIJKE VERWACHTING

door

F.H. Simons

Technische Hogeschool
Onderafdeling der Wiskunde
PO Box 513, Eindhoven
Nederland

Stel (X, \mathcal{R}, μ) is een waarschijnlijkheidsruimte, \mathcal{R}_0 een deel σ -algebra van \mathcal{R} en $E_{\mathcal{R}_0}$ de voorwaardelijke verwachtingsoperator met betrekking tot \mathcal{R}_0 . Als we voor iedere $A \in \mathcal{R}$ een representant $P(\cdot, A) \in E_{\mathcal{R}_0} 1_A$ kunnen kiezen zo dat voor bijna alle x $P(x, \cdot)$ een kans is op \mathcal{R} , dan heet $E_{\mathcal{R}_0}$ regulier. Een voorbeeld van een niet-reguliere voorwaardelijke verwachting is al gegeven door Doob (Stochastic Processes, p. 624), gebruik makend van de existentie van een niet Lebesgue meetbare verzameling in $[0,1]$ met inwendige maat 0 en uitwendige maat 1.

We zullen hier aantonen dat ook de voorwaardelijke verwachting van de Lebesgue verzamelingen met betrekking tot de Borel verzamelingen niet regulier is, ondanks het feit dat deze voorwaardelijke verwachting vrijwel de identieke afbeelding is.

Laat (X, \mathcal{R}, μ) de maatruimte zijn bestaande uit het interval $[0,1]$, de Lebesgueverzamelingen en de Lebesguemaat, en \mathcal{R}_0 de deel σ -algebra der Borel verzamelingen.

Neem aan dat $E_{\mathcal{R}_0}$ regulier is. We kiezen dan voor iedere $A \in \mathcal{R}$ een representant $Q(\cdot, A) \in E_{\mathcal{R}_0} 1_A$ zo dat voor bijna alle x $Q(x, \cdot)$ een kans is op \mathcal{R} . Aangezien voor iedere interval (a,b) ook $1_{(a,b)} \in E_{\mathcal{R}_0} 1_{(a,b)}$, geldt voor bijna alle x $1_{(a,b)}(x) = Q(x, (a,b))$. Er bestaat dus een Borel verzameling N zo dat voor alle $x \notin N$ $Q(x, \cdot)$ een kans is op \mathcal{R} , en $Q(x, (a,b)) = 1_{(a,b)}(x)$ voor alle intervallen (a,b) met rationale eindpunten.

Definieer nu

$$P(x, A) = 1_{X \setminus N}(x) \cdot Q(x, A) ,$$

dan geldt

- i) voor iedere $A \in \mathcal{R}$ is $P(\cdot, A)$ \mathcal{R}_0 -meetbaar.
- ii) voor iedere $x \notin N$ is $P(x, \cdot)$ een kans op \mathcal{R} ,
voor iedere $x \in N$ is $P(x, \cdot) = 0$ op \mathcal{R} .
- iii) voor ieder interval (a,b) met rationale eindpunten en iedere $x \notin N$ is $P(x, (a,b)) = 1_{(a,b)}(x)$.

Voor iedere x is er een dalende rij intervallen (a_n, b_n) met rationale eindpunten zo dat $\bigcap (a_n, b_n) = \{x\}$. Dan volgt uit ii) en iii) voor iedere $x \notin N$

$$P(x, \{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x, (a_n, b_n)) = 1 .$$

Kies nu $B \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$ zo dat $B \subset X \setminus N$.

Dan is $P(x, B) \neq 1_B(x)$, want anders zou wegens i) $B \in \mathcal{R}_0$.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

a) er is een $x \in B$ met $P(x, B) < 1$. Dan zou gelden

$$1 = P(x, \{x\}) \leq P(x, B) < 1$$

daar $\{x\} \subset B$, tegenspraak.

b) er is een $x \notin B$ met $P(x, B) > 0$. Wegens ii) is dan $x \notin N$, zo dat

$$1 = P(x, X) \geq P(x, B) + P(x, \{x\}) > 1 ,$$

tegenspraak.

De veronderstelling dat $E_{\mathcal{R}_0}$ regulier is, is dus onjuist.