Verslag van elementen-methode in potentiaalstroming

WE 71-45

verslag van
Elementenmethode in potentiaalstroming

Ton Hulsebos.
26/3/71

Inhoudsopgave

Litteratuurlijst.

Fysische transportverschijnselen I	G. Vossers.
Wiskunde IV A	S.T.M. Ackermans.
Höhere Technische Mechanik	Szabó

Symbolenlijst

ρ	$[ML^{-3}]$	soortelijke massa
t	$[T]$	tijd
v	$[LT^{-1}]$	snelheid
u, v, w	..	.. componenten
φ, ϕ	$[L^2T^{-1}]$	snelheidspotentiaal
s	$[L]$	coördinaat langs de rand
t	$[L]$	raaklijn
n	$[L]$	normaal
$d\tau$	$[L^3]$	volume elementje
S		rand
G		gebied
F		rand oppervlak
B		gebied lichaam

H 1

Potentiaal stroming.

Potentiaal theorie.

Algemeen geldt: K een gladde kromme, $\varphi(\underline{x})$ gedefinieerd op K dan

$$\int_K (\text{grad}\,\varphi, \underline{t})\, ds = \varphi(\text{eindpunt}) - \varphi(\text{beginpunt}).$$

Is K een gesloten kromme dan geldt $\oint_K (\text{grad}\,\varphi, \underline{t})\, ds = 0$.

Als in een gebied in R_2 geldt $\oint_K (\underline{u}, \underline{t})\, ds = 0$ dan is dat veld $\underline{u}(\underline{x})$ conservatief.

Voor een conservatief veld geldt $\underline{u} = \text{grad}\,\varphi$.

Een stroming is conservatief als er geen wand is, of als er geen viscositeit is.

(bijv de stroming door een pijp, met viscositeit een parabolisch snelheidsverloop niet conservatief).

Stel er is een snelheidsveld waarvoor geldt $\underline{v} = \text{grad}\,\varphi$.

Wat gebeurt er dan in de continuiteits vergelijking en in de impuls vergelijking.

1. continuiteits vergelijking $\text{div}\,\underline{v} = 0$ wordt $\text{div grad}\,\varphi = 0$ of $\nabla^2\varphi = 0$, de potentiaal-vergelijking.

2. Navier Stokes: $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v}.\text{grad}\,\underline{v} = \rho \underline{g} - \text{grad}\,p + \eta \nabla^2 \underline{v}$.

$\underline{g} = -\text{grad}\,U$.

$\underline{v}.\text{grad}\,\underline{v} = \frac{1}{2}\,\text{grad}\,\underline{v}^2 - \underline{v} * \text{rot}\,\underline{v}$.

waarin $\underline{v}^2 = v_x^2 + v_y^2$

x-component van $\underline{v}.\text{grad}\,\underline{v} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$.

Nu N.S: $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho\, \text{grad}\,\underline{v}^2 - \rho \underline{v} * \text{rot}\,\underline{v} + \text{grad}\,p + \rho\, \text{grad}\,U = \eta \nabla^2 \underline{v}$

met $\underline{v} = \text{grad}\,\varphi$ wordt $\text{rot grad}\,\varphi = 0$ (Wsk IV).

NS: $\rho \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}\,\varphi) + \frac{1}{2}\rho\, \text{grad}(\text{grad}\,\varphi)^2 + \text{grad}\,p + \rho\, \text{grad}\,U = \eta\, \text{div grad}(\text{grad}\,\varphi) = \underline{0}$

[x-comp. van $\eta\, \text{div grad}\,\underline{v} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = \eta \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) = \eta \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) = 0$]

NS: $\text{grad} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\text{grad}\,\varphi)^2 + p + \rho U \right] = \underline{0}$

stel ϕ instationair dan wordt NS. $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho U$ = constant. Een soort Bernoulli vergelijking, maar de constante geldt voor het hele gebied.

H2

Variatie rekening.

Veronderstel de volgende functionaal

$$J = -\frac{1}{2}\iint_G \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy + \oint_S \phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 ds$$

Varieren hiervan geeft:

$$\delta J = -\frac{1}{2}\iint_G 2\left\{ \frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} \right\} dx\,dy + \oint_S \delta\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 ds =$$

$$= -\iint_G \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dy\,dx + \iint_G \delta\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} dx\,dy - \iint_G \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dx\,dy +$$

$$+ \iint_G \delta\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} dx\,dy + \oint_S \delta\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 ds =$$

$$= \iint_G \delta\phi \left\{ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right\} dx\,dy + \oint_S \delta\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 ds - \iint_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \right\} dx\,dy$$

$$\rightarrow \delta J = \iint_G \delta(\phi) \left\{ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right\} dx\,dy + \oint_S \delta\phi \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 - \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\} ds = 0.$$

Om op deze laatste formule te komen is gebruik gemaakt van Stokes

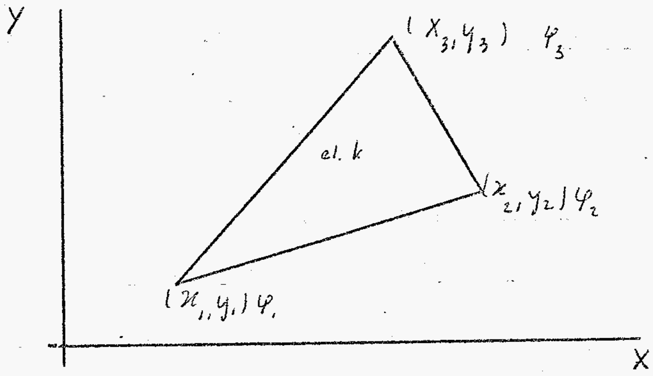
$$\iint_G \left\{ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right\} dx\,dy = \oint_S \{a_1 t_1 + a_2 t_2\} ds = \oint_S (-a_1 n_y + a_2 n_x) ds$$

Door δJ nul te stellen en $\delta\phi$ goed te kiezen komt er:

1. $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2\phi$ de potentiaal vergelijking.
2. $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial n}\right) = 0$ de randvoorwaarden.

H/3

Opzetten van de elementen methode



element k. tekenafspraak.

Veronderstel dat voor een element geldt $\varphi = ax + by + c$

$$\text{of} \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + c$$

Dan is $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = a$ en $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = b$

$$\underline{\varphi} = A\, \underline{a} \qquad \text{waarin} \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{of } a = A^{-1} \varphi = B \varphi .$$

Functionaal : $J = -\frac{1}{2} \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy + \oint_S \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_0 ds$

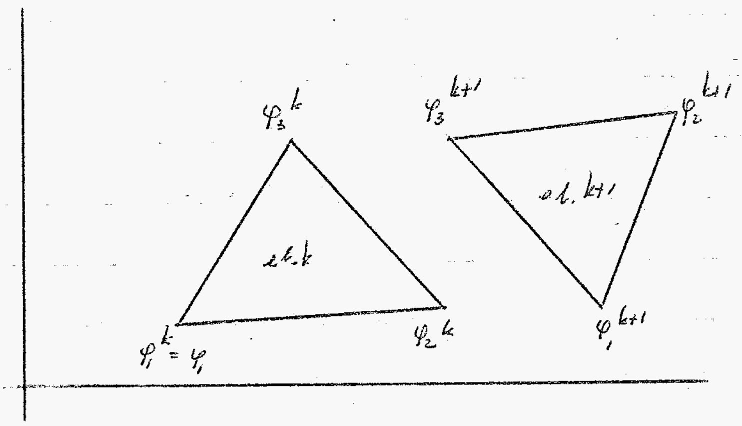
Het eerste stuk ervan is voor een element $\frac{1}{2}$ (opp Δk) $(a^2 + b^2)$.

$$a^2 + b^2 = \underline{a}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{a} = \underline{a}^T S\, \underline{a} = \underline{\varphi}^T B^T S B \underline{\varphi} = \underline{\varphi}^T \frac{Q_e}{\text{opp}\Delta k} \underline{\varphi} .$$

$$J = -\tfrac{1}{2} \underline{\varphi}^T Q_e \underline{\varphi} + \oint_S \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 ds .$$

Voor $\oint \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 ds$ kan worden geschreven $\underline{\varphi}^T . \underline{f}$. Wat die $\underline{f}$ is wordt later uiteen gezet.

Het samenvoegen van de matrices Q_e.



Het samenvoegen

Óm een oplossing te krijgen moet de functionaal naar ϕ gevarieerd worden. De matrices Q_e worden samengevoegd tot Q.

Dan is de functionaal $-\frac{1}{2}\underline{\phi}^T Q \underline{\phi} + \underline{\phi}^T \underline{f}$, dit variëren geeft $\delta J = (-Q\underline{\phi} + \underline{f})\delta\underline{\phi} = 0$

(gebruik gemaakt van de eigenschap dat Q symmetrisch is).

$\delta J = 0 \rightarrow Q\underline{\phi} = \underline{f}$ (geeft de oplossing van φ).

Nu twee punten: 1 hoe voegt men Q samen, 2 wat is f.

1. voor element k:

$$\begin{pmatrix} q_{ek}^{11} & q_{ek}^{12} & q_{ek}^{13} \\ q_{ek}^{21} & q_{ek}^{22} & q_{ek}^{23} \\ q_{ek}^{31} & q_{ek}^{32} & q_{ek}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^k \\ \varphi_2^k \\ \varphi_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^k \\ f_2^k \\ f_3^k \end{pmatrix}$$

Dit is ook op te schrijven voor element k+1.

Nu $\varphi_1 = \varphi_1^k$ voor f: $f_1 = f_1^k$

$\varphi_2 = \varphi_2^k + \varphi_1^{k+1}$ $f_2 = f_2^k + f_1^{k+1}$

$\varphi_3 = \varphi_3^k + \varphi_3^{k+1}$ $f_3 = f_3^k + f_3^{k+1}$

$\varphi_4 = \varphi_2^{k+1}$ $f_4 = f_2^{k+1}$

Nu wordt Q:

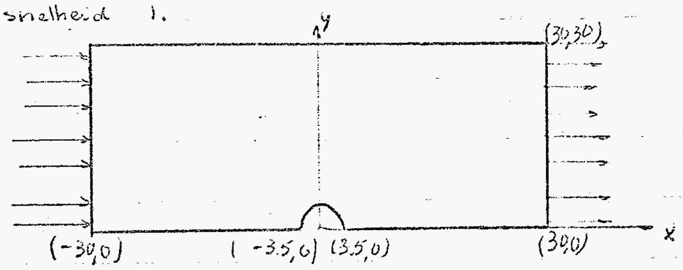
$$
Q = \begin{bmatrix}
q_{ek}^{11} & q_{ek}^{12} & q_{ek}^{13} & 0 \\
q_{ek}^{21} & q_{ek}^{22} + q_{e\,k+1}^{11} & q_{ek}^{23} + q_{e\,k+1}^{12} & q_{e\,k+1}^{13} \\
q_{ek}^{31} & q_{ek}^{32} + q_{e\,k+1}^{21} & q_{ek}^{33} + q_{e\,k+1}^{22} & q_{e\,k+1}^{23} \\
0 & q_{e\,k+1}^{31} & q_{e\,k+1}^{32} & q_{e\,k+1}^{33}
\end{bmatrix}
$$

Het tweede punt wordt ook opgelost f_i = de bijdrage van de elementen aan de f in het i^{de} knooppunt. Maar f wordt alleen gevraagd voor de rand ($\oint_\Gamma \varphi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_0 ds$).
In SJ is alleen van belang $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_0$, de voorgeschreven normale snelheid langs de rand.
En deze worden in een vector f gestopt. De f_k voor een binnenpunt k is nul.

Resultaten. H4

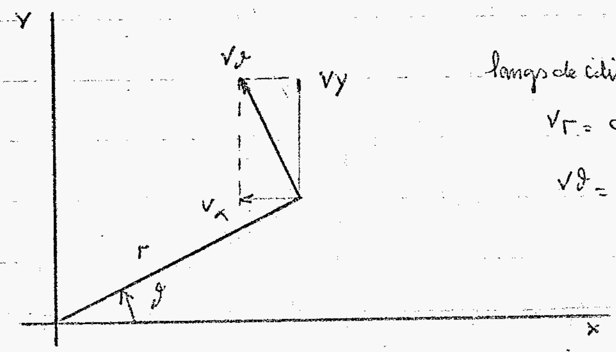
Een gebied van 3000 elementen en 1081 knooppunten.

Inkomende snelheid 1.



het gebied in de mien uitstromende snelheden.

De resultaten zijn het belangrijkst rond de cylinder. Uitgezet de snelheid in x en in y richting als functie van de hoek ϑ

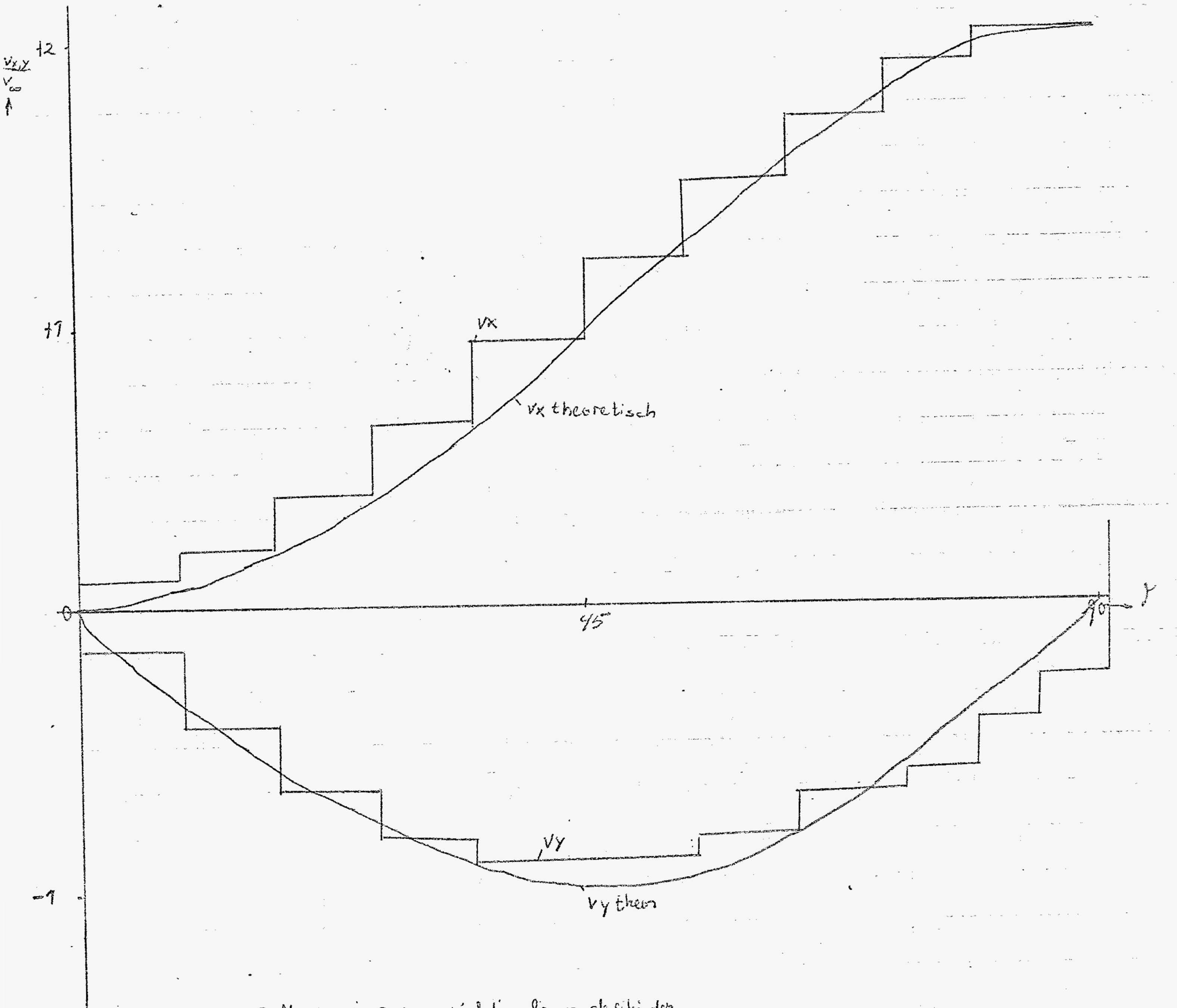


langs de cilinder (straal r).

$v_r = 0$

$v_\vartheta = -2V_\infty \sin\vartheta$.

Op de volgende pagina zijn de snelheden uitgezet, daarin is bijgetekend de theoretische waarden. De theoretische waarden gelden voor een oneindig groot gebied waarin de cilinder staat. Dat is de reden waarom de oplossing niet helemaal klopt.

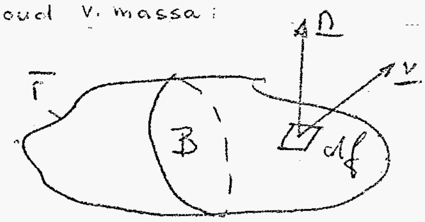


Snelheden in x en y richting langs de cilinder.

B1

Afleiding behoudswetten.

Behoud v. massa:



omschrijving lichaam

Neem een lichaam B, met rand F. Een oppervlakte elementje dF wordt gecarakteriseerd door de buiten normaal $\underline{n}$ op dat elementje.

De massa die door dat elementje naar buitenstroomt is $\rho(\underline{v},\underline{n})\,df$. De massa flux door rand $F = \iint_F \rho(\underline{v},\underline{n})\,df$. Dit is gelijk aan wat de massa in het lichaam verandert.

Dit geeft behoud van massa $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_B \rho\, d\tau + \iint_F \rho(\underline{v},\underline{n})\,df = 0$.

Gauss: $\iint_F \rho(\underline{v},\underline{n})\,df = \iiint_B \operatorname{div}\rho\underline{v}\, d\tau$.

De integraal formulering mag worden omgeschreven tot een differentiaal vorm:

continuïteitsvergelijking $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\underline{v} = 0$.

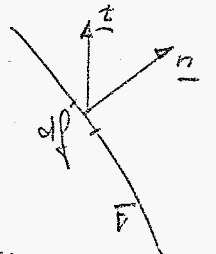
Behoud van impuls:

Gebaseerd op $\underline{K} = \frac{d m\underline{v}}{dt}$; waarin $m\underline{v}$ de impuls is. Weer hetzelfde lichaam B en rand F (vast in de ruimte). Door een oppervlakte element df stroomt een massa $\rho(\underline{v},\underline{n})\,df\,\Delta t$. De doorstromende hoeveelheid impuls is dan $\underline{v}\rho(\underline{v},\underline{n})\,df\,\Delta t$. De verandering van de impuls in het lichaam in die tijd is $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}\,d\tau)\,dt$.

Totale verandering $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_B \rho\underline{v}\,d\tau + \iint_F \rho\underline{v}(\underline{v},\underline{n})\,df$.

Dit is gelijk aan de uitwendige krachten 1) massa kracht $\iiint_B \rho g\, d\tau$

2) oppervlakte kracht $\iint_F \underline{t}\,df$.

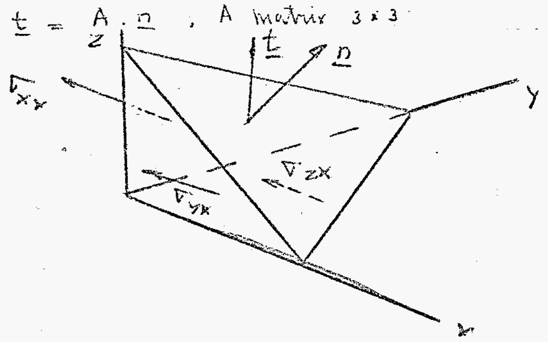


Tekenafspraak belasting

$\underline{t}$ spanning die door een wand op het medium wordt uitgeoefend.

De impulswet $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_B \rho \underline{v}\, d\tau + \iint_F \rho \underline{v}(\underline{v},\underline{n})\, df = \iiint_B \rho g\, d\tau + \iint_F \underline{t}\, df.$

$\underline{t} = A . \underline{n}$, A matrix 3×3



tekenafspraak spanningen.

In het medium heerst alzijdige druk

$t_x\, df = (-p+\sigma_{xx})\cos(n,x)\, df + \sigma_{yx}\cos(n,y)\, df + \sigma_{zx}\cos(n,z)\, df$

$A = S^T$;

$$S = \begin{pmatrix} -p+\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & -p+\sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & -p+\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\underline{t} = S^T . \underline{n} \rightarrow \underline{t} = n . S$

of $\underline{t} = -p\,\underline{n} + n . S'$; $S = -p\,I + S'$

Impulswet : $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_B \underline{v}\rho\, d\tau + \iint_F \underline{v}\,\rho(\underline{v},\underline{n})\, df = \iiint_B \rho g\, d\tau + \iint_F \underline{n}\, S\, df.$

Opperlakte integralen omwerken naar volume integralen.

1. x-comp van $\iint_F \underline{v}\,\rho(\underline{v},\underline{n})\, df$ is $\iint_F u\rho(\underline{v},\underline{n})\, df = \iiint_B \operatorname{div}(u\,\rho\underline{v})\, d\tau$

$\operatorname{div} u\rho\underline{v} = u \operatorname{div} \rho\underline{v} + \rho(\underline{v}, \operatorname{grad} u)$ (Wisk. IV).

analoog voor y en z componenten.

→ gezamenlijk $\operatorname{div} \underline{v}\rho\underline{v} = \underline{v}\operatorname{div}\rho\underline{v} + \rho(\underline{v}, \operatorname{grad})\underline{v}$.

$$(\underline{v}, \operatorname{grad})\,\underline{v} = (u,v,w)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \iint_F \underline{v}\,\rho(\underline{v},\underline{n})\, df = \iiint_B \{\underline{v} \operatorname{div} \rho\underline{v} + \rho(\underline{v}, \operatorname{grad})\underline{v}\}\, d\tau.$

x component van $\iint_F \underline{n}.S\,df$ is $\iint_F [(-p+\sigma_{xx})\cos(n,x) + \sigma_{yx}\cos(n,y) + \sigma_{zx}\cos(n,z)]\,df$

— Dit omwerken met Gauss geeft $\iiint_B [\frac{\partial}{\partial x}(-p+\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx}]\,d\tau$

$$\rightarrow \iint_F \underline{n}.S\,df = \iiint_B \operatorname{div} S\,d\tau.$$

Impulsvergelijking in differentiaal vorm:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}) + \underline{v}\operatorname{div}\rho\underline{v} + \rho\underline{v}.\operatorname{grad}\underline{v} = \rho g + \operatorname{div} S.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}) = \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} \\ \text{continuiteits verg} \quad \underline{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\operatorname{div}\rho\underline{v} = 0 \end{array}\right\} \text{invullen in impulsvergelijking.}$$

Dan ontstaat

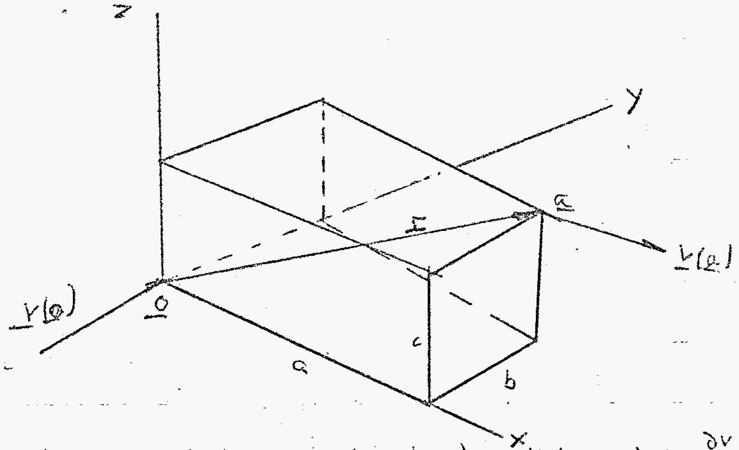
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\underline{v}.\operatorname{grad}\underline{v} = \rho g + \operatorname{div} S.$$

B2

Constitutieve vergelijkingen.

S uitdrukken in grootheden van het snelheidsveld.

Hiertoe worden de bewegingen van een deeltje wiskundig geformuleerd.



Snelheidsverloop

$$\underline{v}_p = \underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(a,b,0) = \underline{v}(0,0,0) + \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial v}{\partial y} b + \frac{\partial v}{\partial z} c + \ldots = \underline{v}(\underline{0}) + \underline{r}\cdot L$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad}\,\underline{v}$$

L is te splitsen in een symetrische en een asymetrische tensor (D resp Ω).

Dan $\underline{v}(a,b,c) = \underline{v}(\underline{0}) + \underbrace{\underline{r}\,D}_{\text{deformatie}} + \underbrace{\underline{r}\,\Omega}_{\text{rotatie}}$

Nu moeten er hypothesen gemaakt worden om een relatie tussen S en D te kunnen bewerkstelligen.

Deze zijn:

1. S is een lineaire functie van de deformatie tensor D
2. wanneer $D = 0$, dan $S = -pI$ (evenwicht)
3. het medium is homogeen, dwz. S hangt niet van de plaats af.
4. het medium is isotroop, dwz. S hangt niet van de richting af.

Experimenten leren dat een grote groep vloeistoffen hieraan voldoet.

Constitutieve vergelijking $S = -pI + 2\eta D$

De impulsvergelijking wordt dan

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = +\rho \underline{g} + \operatorname{div} S = \rho \underline{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} S^{d} = \rho \underline{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} 2\eta D$$

$$\operatorname{div} 2\eta D = \eta \nabla^2 \underline{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v} = \eta \nabla^2 \underline{v}$$

Dit geldt als is aangenomen dat $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ dan cont. vgl $\operatorname{div} \underline{v} = 0$.

Navier Stokes: $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \underline{g} - \operatorname{grad} p + \eta \nabla^2 \underline{v}$

B3

Schematische opbouw van het programma:

invoer (element heeft knooppunten én coörd. knooppunten)

↓

bepalen bandbreedte

↓

opbouw matrices Q_e (procedure Stiom)

↓

maken matrix Q

↓

bepalen vector f

↓

oplossen $Q\phi = f$. procedure CHOLBD

↓

uitvoer ϕ, bepalen snelheden procedure SNELH

↓

uitvoer.

Hulsbos 28-8-71

Uitbreiding verslag potentiaal stroming.

Op een tweedimensionale, stationaire, temperatuursverdeling is ook weer de laplace vergelijking $\Delta\varphi = 0$ van toepassing. Alleen de randvoorwaarde wordt anders dan in het vorige probleem, de temperatuur is nu op de rand gegeven. Bij de potentiaal stroming was dit de normaal afgeleide op de rand.

Moest bij het vorige probleem gezocht worden naar de functie $\varphi(x,y)$ die de volgende functionaal minimaliseert:

$$J = -\frac{1}{2} \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy + \oint_S \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 ds$$

Nu moet er gezocht worden naar een functie $T(x,y)$ die aan twee voorwaarden voldoet:

- minimaliseren van $\iint_G \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$
- voldoen aan de randvoorwaarden. $T|_S = g(s)$

Kwam er in het eerste probleem een stelsel vergelijkingen $Q\varphi = f$, waarbij Q en f bekend en φ onbekend. De vector f komt van de bijdrage van $\oint_S \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 dS$.

In het tweede probleem komt er ook $QT = f$ maar T en f zijn gedeeltelijk onbekend. Van de vector f is alleen bekend dat hij werkt op de rand en in het binnengebied nul is. Dus f bestaat uit twee stukken een bekend en een onbekend stuk.

Ook T bestaat uit twee stukken.

- een onbekend (gevraagd stuk) (φ)
- een bekend stuk, op te splitsen in twee stukken: - gegeven niet nul (T_0)
  - nul (T_n)

Stel f en T zijn zo gerangschikt (dan is Q het ook)

Dan:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ T_0 \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ \; \end{bmatrix}$$

Q_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ zijn deelmatrices.

en hieruit $Q_{11} T + Q_{12} T_0 + Q_{13} T_n = 0$.

Nu blijkt de splitsing van T in 3 stukken zinvol want $Q_{13} T_n = 0$.

Dus op te lossen $Q_{11} \mathbf{T} = - Q_{12} T_0$

Bij het programmeren is gebruik gemaakt van de lokatie vector lok [1:N]. Voor een beschrijving ervan verwijs ik naar het diktaat Numerieke Methoden van Dr ir JD Janssen.

De invoergegevens zijn duidelijk vermeld op het programma.

Maar er is één zeer belangrijk iets. Bij de potentiaal stroming met de knooppunten bij nul beginnen het aantal is het werkelijke verminderd met 1.

Bij de temperatuur verdeling met 1 beginnen en het aantal is het werkelijke aantal.

De test van het temperatuursverdelingsprobleem werd op de volgende wijze uitgevoerd:

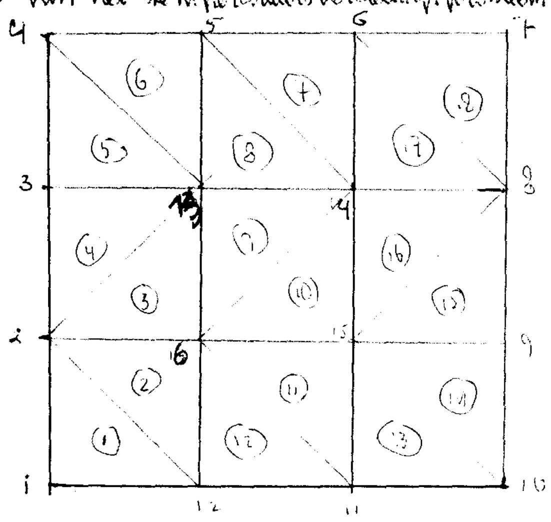


fig 1 verdeling in elementen van het gebied voor de test
16 knooppunten, 18 elementen.

De knooppunten 1, 2, 3, 4 hadden een voorgeschreven temperatuur gelijk aan nul.

" " 5 en 12 " " " één

" " 6 en 11 " " " twee

" " 7, 8, 9 en 10 " " " drie

Als resultaat kwamen de temperaturen voor de knooppunten 13, 14, 15 en 16

die waren respectievelijk 1, 2, 2 en 1.

Dit klopte. De temperatuur verloopt lineair met de x en onafhankelijk van de y.