

Theoretische achtergrond van methoden voor het bepalen van Modale Parameters uit experimenten

Citation for published version (APA):

Kraker, de, A. (1985). *Theoretische achtergrond van methoden voor het bepalen van Modale Parameters uit experimenten*. (DCT rapporten; Vol. 1985.026). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1985

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

Theoretische achtergrond
van methoden voor het
bepalen van Modale Para-
meters uit experimenten.

Eindhoven, april 1985
Vakgroep WFW
Dr. ir. A. de Kraker
WFW rapport 85.026

Samenvatting

In dit rapport worden een aantal methoden gepresenteerd voor het bepalen van modale parameters (komplexe eigenwaarden en -trilvormen, ook wel polen en residuen genaamd). De methoden variëren van relatief eenvoudige numerieke procedures, gepaard gaande met relatief veel handmatig ingrijpen door de gebruiker tot complexe numerieke schema's (dus meer reken-capaciteit vergend) waarbij het produceren van schaklers voor de gezochte grootheden echter nogeneig automatisch verloopt.

De algemene basis waarop al deze methoden zijn gebaseerd wordt gepresenteerd en de verschillen, voor- en nadelen van de verschillende mogelijkheden aangestipt.

In een volgend rapport zullen numerieke resultaten worden gepresenteerd en ervaringen welke in de praktijk met een aantal van de methoden zijn opgedaan.

Inhoud

1. Inleiding
2. Interpolatie en de kleinste kwadratenmethode.
3. Benaderende curve-fit methoden
 - 3.1 Vereenvoudiging van de algemene relatie voor de frequentieresponsfunctie
 - 3.2 Quadrature-fit
 - 3.3 Circle fit
4. Benaderingen op basis van het complete model.
 - 4.1 Curve fit in het frequentiedomein via een kleinste-kwadraten algoritme.
 - 4.1.1 Lineair kleinste kwadratenalgoritme.
 - 4.1.2 Niet-lineair kleinste kwadratenalgoritme
 - 4.2 Curve-fit in het tijddomein.
 - 4.2.1 Tijddomein-fit via interpolatie technieken
 - 4.2.2 Tijddomein-fit via de kleinste kwadraten methode.
5. Globale systeemparameters.
6. Multi-input Fit procedure.

Literatuur.

- [1] A. de Kraker; Enige algemene beschouwingen over de Frequentie respons van viskeus gedempte lineair dynamische systemen, WFW rapport WE 83.20
- [2] DH v Campen, A. de Kraker; Het dynamisch gedrag van constructies, 4.552, 1984
- [3] v Brussel, H. Modal Analysis theory, Seminar on Modal Analysis, Leuven, 1980
- [4] Klosterman, A.L.; On the experimental determination and the use of modal representations of dynamic characteristics, Dissertatie Univ. of Cincinnati, 1971.
- [5] v Loon, P.; Modal parameters of mechanical structures, Dissertatie Kath Univ. Leuven, 1974
- [6] Mergeay, M; Theoretical background of curve fitting methods used by modal Analysis; Seminar on Modal Analysis, Leuven, 1980.
- [7] v d Staay, Th.; Een nieuwe dimensie in de mechanica; Inleiding tot de modale analyse, HP rapport, 1979
- [8] Allemang, R; Frequency response concepts; Seminar on Modale Analyse, Leuven, 1980
- [9] Vanhonacker, P; The use of modal parameters of mechanical structures in sensitivity analysis -, system synthesis- and system identification methods, Dissertatie Kath. Univ. Leuven, 1980
- [10] Vold, H; Kundrat, J., Rocklin, G; Russell, R; A multi-input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers, SAE technical paper 820194, 1982.

1. Inleiding

We gaan uit van een systeem met n graden van vrijheid, beschreven door het stelsel gekoppelde differentiaalvergelijkingen:

$$M \ddot{\underline{q}}(t) + B \dot{\underline{q}}(t) + K \underline{q}(t) = \underline{f}(t) \quad (1.1)$$

Voor dit systeem kunnen $2n$ complexe eigenwaarden λ_i ($i=1,2,\dots,2n$) en corresponderende eigenvectoren \underline{u}_i ($i=1,2,\dots,2n$) bepaald worden welke allemaal voldoen aan:

$$[\lambda_i^2 M + \lambda_i B + K] \underline{u}_i = \underline{0} \quad (2)$$

Voor de transferfunctie matrix $H(\omega)$ (van orde $n \times n$), van dit systeem kan afgeleid worden dat: (zie o.a. [1])

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\underline{u}_k \cdot \underline{u}_k^T}{c_k (j\omega - \lambda_k)} \quad (3)$$

Hierbij is c_k een normeringsfactor waarvoor geldt:

$$c_k = \underline{u}_k^T B \underline{u}_k + 2 \lambda_k \underline{u}_k^T M \underline{u}_k \quad (4)$$

Vaak wordt gebruik gemaakt van de definities:

$$\lambda_k := \mu_k + j \nu_k \quad (5)$$

$$\frac{\underline{u}_k \cdot \underline{u}_k^T}{c_k} := V_k + j W_k \quad (1.6)$$

waarbij: ν_k = gedempte eigenhoekfrequentie van de k^e mode.

μ_k = exponentiële dempingsfactor van de k^e mode.

$V_k + j W_k$ = residumatrix van de k^e mode.

We kunnen voor (3) nu ook schrijven:

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{V_k + j W_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} \quad (7)$$

In de praktijk hebben wij bij de Modale Analyse techniek vaak te maken met relatief zwak gedempte systemen. Indien alle modes van het systeem onderkritisch gedempt zijn komen de genoemde eigenwaarden en eigenvectoren voor in toegevoegd complexe paren, n.l. λ_i en $\bar{\lambda}_i$ respectievelijk \underline{u}_i en $\bar{\underline{u}}_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$). Wij mogen voor (7) dan ook schrijven:

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{V_k + j W_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - j W_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (8)$$

Bij een dynamische analyse van een constructie is men over het algemeen alleen geïnteresseerd in een beschrijving in een bepaalde frequentieband $[\omega_A, \omega_B]$. Wij kunnen de frequentie responsfunctie dan splitsen in drie bijdragen, waarbij de afzonderlijke bijdragen opgebouwd worden

uit de eigenhoekfrequenties die liggen in de respectievelijke frequentiegebieden $[0, \omega_A)$, $[\omega_A, \omega_B]$, (ω_B, ∞)

Nemen wij aan dat de eigenwaarden zodanig genummerd zijn dat:

$$\nu_{j+1} \geq \nu_j \quad (1.9)$$

dan kan (1.8) geschreven worden als:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) = & \sum_{k=1}^{k_A-1} \left\{ \frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \\
 & + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \\
 & + \sum_{k_B+1}^n \left\{ \frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Uit ervaring blijkt dat voor de meeste praktische toepassingen het effect van de laagste modes in het gebied $(0, \omega_A)$ veelal voldoende nauwkeurig gerepresenteerd kunnen worden door een zogenaamde traagheidsterm:

$$\sum_{k=1}^{k_A-1} \left\{ \frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \approx \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{M} \right] \quad (1.11)$$

waarbij:

$[M^{-1}] = (n \times n)$ matrix met als element c_{ij} :

$\frac{1}{m_{ij}^*}$
 m_{ij}^* heet de effectieve of residuele massa voor de lagere modes.

De invloed van de hogere modes in het gebied (ω_B, ∞) kan om dezelfde reden gerepresenteerd worden door een constante flexibiliteitsterm $S^* = [s_{ij}^*]$:

We krijgen dan:

$$H(\omega) = -\frac{1}{\omega^3} [m_{ij}^*] + [s_{ij}^*] + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (12)$$

waarbij geldt:

$$k_A \leq k \leq k_B \longrightarrow \omega_A \leq \nu_k \leq \omega_B \quad (13)$$

Voor element i, j van de transferfunctiematrix H volgt dus tenslotte:

$$H_{ij}(\omega) = s_{ij}^* - \frac{1}{\omega^3} m_{ij}^* + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{V_{ijk} + jW_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_{ijk} - jW_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (14)$$

We definiëren verder:

$$\omega_{dk} := \sqrt{\mu_k^2 + \nu_k^2} = \text{"de ongedempte, } k^{\text{e}} \text{ eigenfrequentie"} \quad (15)$$

$$\xi_k := \frac{-\mu_k}{\omega_{dk}} = \text{de dimensieloze dempingsfactor van mode } k \quad (16)$$

Een alternatieve formulering voor de basisuitdrukking (9) voor de transferfunctiematrix luidt dan:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{S_{ijk} + j \left(\frac{\omega}{\omega_{ok}} \right) S'_{ijk}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ok}} \right)^2 + 2j \zeta_k \left(\frac{\omega}{\omega_{ok}} \right)} \right\} \quad (1.17)$$

In deze relatie kan de konventionele versterkingsfactor worden herkend in de noemer. S_{ijk} en S'_{ijk} hebben de dimensie van flexibiliteit :

$$S_{ijk} = \frac{-2 (\mu_k V_{ijk} + \nu_k W_{ijk})}{\omega_{ok}^2} \quad (1.18)$$

$$S'_{ijk} = \frac{2 V_{ijk}}{\omega_{ok}} \quad (1.19)$$

In het voorgaande hebben wij een systeembeschrijving in het frequentiedomein beschouwd. In de volgende paragrafen zullen wij echter ook willen beschikken over de systeembeschrijving in het tijddomein, te weten de impuls respons matrix $h(t)$. Deze volgt uit $H(\omega)$ via inverse Fourier-transformatie. Voor de transferfunctiematrix $H(\omega)$ volgens (1.8) volgt dan:

$$h(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[(V_k + jW_k) e^{(\mu_k + j\nu_k)t} + (V_k - jW_k) e^{(\mu_k - j\nu_k)t} \right] U_s(t) \right\} \quad (1.20)$$

Om dit bij verdere analyses iets anders te kunnen schrijven introduceren wij nieuwe variabelen A_k en ψ_k welke gedefinieerd zijn via :

$$A_{ijk} := \sqrt{V_{ijk}^2 + W_{ijk}^2} \quad (1.21)$$

$$\varphi_{ijk} := \arctan\left[\frac{W_{ijk}}{V_{ijk}}\right] \quad (1.22)$$

ofwel: $V_{ijk} + j W_{ijk} = A_{ijk} e^{j\varphi_{ijk}}$ (1.23)

$$V_{ijk} - j W_{ijk} = A_{ijk} e^{-j\varphi_{ijk}} \quad (1.24)$$

Vergelijking (1.20) leidt dan tot:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n A_{ijk} e^{\mu_k t} \left\{ e^{j(\nu_k t + \varphi_{ijk})} + e^{-j(\nu_k t + \varphi_{ijk})} \right\}$$

of

$$h_{ij}(t) = 2 \sum_{k=1}^n A_{ijk} e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t + \varphi_{ijk}) \quad (1.25)$$

We verkrijgen dus een bekend resultaat, namelijk een responsfunctie opgebouwd uit de basisfrequenties van het systeem ($\mu_k \pm j\nu_k$) met daarbij de "integratieconstanten" de amplitude A_{ijk} en de fasehoek φ_{ijk} . Een iets andere, ook regelmatig gehanteerde uitdrukking luidt:

$$h_{ij}(t) = 2 \sum_{k=1}^n \left\{ V_{ijk} e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t) + W_{ijk} e^{\mu_k t} \sin(\nu_k t) \right\} \quad (1.26)$$

De impulsresponsfuncties (1.20), (1.25) en (1.26) bestaan uit een sommatie van een zeer groot aantal (in theorie

eigenlijk een oneindig aantal) complexe exponentiële functies met een gedempte eigenhoekfrequentie ν_k en dempingswaarde μ_k .

Ook nu zijn wij echter veelal enkel geïnteresseerd in een beperkt frequentiegebied $[\omega_A, \omega_B]$. De alternatieve uitdrukkingen voor de residuele massaterm en de flexibiliteitsterm zoals gegeven in (1.14) leidt dan tot bijdragen aan de impulsresponsfunctie:

$$-\frac{1}{\omega^2 m_{ij}^*} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -\frac{t}{m_{ij}^*} U_S(t) \quad (1.27)$$

$$S_{ij}^* \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} S_{ij}^* \delta(t) \quad (1.28)$$

De introductie van deze twee niet exponentiële termen in de uitdrukkingen voor de impulsresponsie (1.20), (1.25) en (1.26) leidt tot aanzienlijke mathematische problemen omdat zoals verderop zal blijken de algoritmes voor het oplossen van deze relaties gebaseerd zijn op rekenschema's voor het oplossen van een stelsel homogene vergelijkingen, elk bestaande uit een sommatie van complexe exponentiële functies. Voor het vermijden van deze moeilijkheden kan de invloed van de niet meegenomen hogere en lagere modes beter in rekening gebracht worden via complexe exponentiële functies met een gedempte eigenhoekfrequentie gelijk aan de hoogste grensfrequentie ω_B respectievelijk de laagste grensfrequentie ω_A van het te beschouwen interval.

De algemene uitdrukking voor de impulsrespons van een viskeus gedempt systeem kan dan voor een beschouwde frequentieband $[\omega_A, \omega_B]$ genoteerd worden als:

$$\begin{aligned} h_{ij}(t) = & 2 A_{ijA} e^{\mu_A t} \cos(\omega_A t + \varphi_{ijA}) \\ & + 2 \sum_{k=k_A}^{k_B} \{ A_{ijk} e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t + \varphi_{ijk}) \} \\ & + 2 A_{ijB} e^{\mu_B t} \cos(\omega_B t + \varphi_{ijB}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Deze relatie bestaat uit louter complexe exponentiële functies en voldoet daarmee aan het gestelde doel.

De uitdrukkingen voor de frequentieresponsfunctie en de impulsresponsfunctie (1.14) respectievelijk (1.29) zullen dienen als uitgangspunt voor de meer algemene curve-fit procedures die verderop aan de orde komen.

2. Interpolatie en de kleinste kwadraten methode

Voor het bepalen van een continue functie die voldoet aan een diskreet aantal (bijvoorbeeld gemeten) functiewaarden kan men uitgaan van interpolatie technieken of de methode der kleinste kwadraten. Omdat deze technieken een essentieel bestanddeel vormen van curve-fit procedures zoals die later nog aan de orde zullen komen zal hier kort bij deze methoden worden stilgestaan.

Bij de interpolatie methoden nemen wij een analytische uitdrukking aan voor de te beschrijven functie van de vorm:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \quad (2.1)$$

Op basis van $(n+1)$ paren getallen (x_i, y_i) $i=1, 2, \dots, n+1$ kunnen de $(n+1)$ onbekende parameters a_0, a_1, \dots, a_n exact en relatief eenvoudig worden bepaald. De bepaalde functie $y(x)$ voldoet exact aan de uitgangsparen (x_i, y_i) en vereist een minimale rekentijd. Aan het gebruik van de methode kleven echter een tweetal belangrijke bezwaren.

- Keuze van de uitgangspunten (of "meetpunten").

Bij modale analyse technieken beschikt men vaak over een groot aantal meetpunten (x_i, y_i) (bijvoorbeeld een impulsresponsfunctie in 512 of 1024 punten tgv de FFT techniek) en afhankelijk van het aantal onbekenden in de "te fitten" functie (bijv $n=20$)

zal slechts een heel klein gedeelte van de aanwezige informatie in de berekening kunnen worden gebruikt. Men zal dus op de één of andere wijze een keuze moeten maken.

- Effect van aanwezige ruis.

De gekozen data punten zullen exact voldoen aan de interpolatiefunctie terwijl alle andere punten geen invloed hebben. De immer in metingen aanwezige ruis zal dus door meer metingen of meer datapunten niet gereduceerd kunnen worden.

Voor speciale doeleinden kunnen interpolatiemethoden, los van de bovenstaande nadelen, toch wel de voorkeur verdienen.

In het algemeen kan men echter beter een op de kleinste kwadratenmethode gebaseerde strategie kiezen. Hierbij worden de onbekende parameters niet zodanig bepaald dat exact aan de datapunten wordt voldaan maar zodanig dat een bepaalde fout wordt geminimaliseerd.

Ter illustratie beschouwen wij een kleinste kwadraten aanpassing van een cirkel aan n meetparen $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. De relatie voor een cirkel luidt:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (2.2)$$

(3 onbekenden!)

We minimaliseren de kleinste kwadraten som:

$$\min E^2 = \min \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + ax_k + by_k + c)^2 \quad (2.3)$$

Voor een minimum van E^2 moet gelden:

$$\frac{\partial E^2}{\partial a} = \frac{\partial E^2}{\partial b} = \frac{\partial E^2}{\partial c} = 0 \quad (2.4)$$

Dit leidt tot:

$$\begin{bmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k y_k & \sum x_k \\ \sum x_k y_k & \sum y_k^2 & \sum y_k \\ \sum x_k & \sum y_k & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum (x_k^2 + y_k^2) x_k \\ -\sum (x_k^2 + y_k^2) y_k \\ -\sum (x_k^2 + y_k^2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Na het bepalen van de parameters a , b en c volgt het middelpunt (x_m, y_m) en de straal R van de cirkel uit:

$$x_m = -\frac{a}{2} ; y_m = -\frac{b}{2} , R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \quad (2.6)$$

Op dezelfde wijze kan de methode gebruikt worden voor het benaderen van experimentele data door willekeurige polynomen of andere functies.

Doordat in de praktijk bij deze methode veel meer data gebruikt wordt dan minimaal nodig is voor het aantal te bepalen onbekenden zal door de metingen geïntroduceerde (random) ruis veelal aanzienlijk "uitgemiddeld" kunnen worden. Een ernstig nadeel is dat bij aanwezigheid van extreme waarden of grote fouten deze een dominante rol zullen spelen in de kleinste kwadraten som.

3. Benaderende curve fit methoden.

In deze paragraaf zullen enkele, relatief eenvoudige curve-fit methoden worden behandeld. We gaan daarbij uit van vereenvoudigingen van de algemene relatie voor de frequentierespons van een viskeus gedempt systeem (14) door het poneren van bepaalde, beperkende aannames. Over het algemeen geldt echter dat met deze eenvoudige methoden toch in de praktijk voor een redelijk aantal toepassingen bevredigende tot goede resultaten kunnen worden verkregen. Allereerst zullen drie methoden ter vereenvoudiging van de algemene relatie worden besproken. Daarna zal aandacht geschonken worden aan twee curve-fit procedures, namelijk de zogeheten quadrature fit en cirde fit.

3.1 Vereenvoudiging van de algemene relatie voor de frequentieresponsfunctie.

In het nu volgende zal de invloed van bepaalde basisaannames op de algemene relatie voor de frequentieresponsfunctie worden beschouwd, namelijk:

- 1) niet-gekoppelde modes
- 2) proportionele demping
- 3) licht gedempte constructies.

* Aanname van niet gekoppelde modes.

Met niet gekoppelde modes wordt in het algemeen

bedoeld een situatie waarbij er in een frequentieband een enkelvoudige resonantie frequentie domineert terwijl de invloed van alle hogere en/of lagere modes kan worden verwaarloosd of gerepresenteerd kan worden door een complexe konstante ($RP + jIP$). Onder deze aanname kan de algemene relatie (1.8) aanzienlijk worden vereenvoudigd, namelijk in het geval dat de k^e mode dominant is tot:

$$H(\omega) = \underbrace{\frac{V_k + jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_k - jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)}}_{\text{bijdrage van } k^e \text{ mode}} + \underbrace{RP + jIP}_{\text{bijdrage van alle andere modes}} \quad (3.1)$$

* Aanname van proportionele demping

Bij aanwezigheid van proportionele demping (zie [1]) hebben wij te maken met zuiver reële eigenvektoren. Alle verplaatsingskomponenten van de kolom met gemeten verplaatsingen bij een bepaalde eigenfrequentie zijn dan precies in fase of in tegenfase met betrekking tot een referentiepunt. Zoals in [1] is aangegeven is de residumatrix dan zuiver imaginair (jW_k) zodat (1.12) vereenvoudigd kan worden tot:

$$H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} [m_{ij}^*]^{-1} + [s_{ij}^*] + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{jW_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{-jW_k}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (3.2)$$

In een behoorlijk aantal gevallen, met name indien de demping min of meer uniform over de constructie is

verdeeld, is een aanname van proportionele demping gerechtvaardigd. Typische voorbeelden zijn krukassen, motorblokken, draaibanken, etc.

Bij sterke lokale demping (bijvoorbeeld in het geval van lagers, verbindingen als bijv. geleidingen, dempers in voertuigen) zal deze aanname echter tot slechte resultaten kunnen leiden en dient men dus uit te gaan van de originele, algemene relatie.

* Aanname van zeer licht gedempte systemen.

Bij de aanname van lichte demping (bijv. $\zeta < 0.04$) kan de invloed van elke afzonderlijke term in vergelijking (1.8) eenvoudig worden geëvalueerd. Verwaarlozing van het tweede deel van de bijdrage van een mode aan de totale bijdrage zal dan een fout in de bepaling van de amplitude van de gedempte eigenhoekfrequentie met zich mee brengen van de orde van 1.5% maar zal tegelijkertijd het curve-fit algoritme drastisch vereenvoudigen. Wij beschouwen een enkelvoudige mode:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{W_{ijk} + j W_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{W_{ijk} - j W_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \quad (3.3)$$

De bijdrage van de bovengegeven beide termen aan de resulterende amplitude van H_{ij} is evenredig met

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_k^2 + (\omega - \nu_k)^2}} \quad \text{respectievelijk} \quad \sqrt{\frac{1}{\mu_k^2 + (\omega + \nu_k)^2}} \quad (3.4)$$

Voor $\omega = \nu_k$ wordt deze bijdrage dan:

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_k^2}} \quad \text{respectievelijk} \quad \sqrt{\frac{1}{\mu_k^2 + (2\nu_k)^2}} \quad (3.5)$$

De relatieve verhouding van deze twee termen wordt daarmee:

$$\sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 + 4\nu_k^2}} \quad (3.6)$$

of in termen van de dimensieloze dempingsconstante ζ :

$$\sqrt{\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 4(1-\zeta^2)}} \approx \frac{\zeta}{2} \quad \text{voor hele} \\ \text{kleine } \zeta \quad (3.7)$$

De fout die geïntroduceerd wordt door het verwaarlozen van de tweede term (voor $\omega = \nu_k$) en als functie van ζ kan dus globaal bepaald worden uit:

$$\text{fout} [\%] \approx 50 \times \zeta \quad (3.8)$$

Accepteert men een fout van de grootte-orde van 2% dan moet dus $\zeta \leq 0.04$.

Metingen aan een luidklak tonen aan dat de eerste 0 modes een dempingsconstante bezitten waarvoor geldt:

$\zeta \leq 0.04$ en ook voor gereedschaps werktuigen etc.

worden vaak dit soort lage dempingsniveaus gemeten.

In het geval van zwakke demping kan de algemene relatie (1.14) dus vereenvoudigd worden tot:

$$H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} [m_{ij}^{*-1}] + [s_{ij}^*] + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{V_k + j W_k}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} \right\} \quad (3.9)$$

3.2 Quadrature Fit.

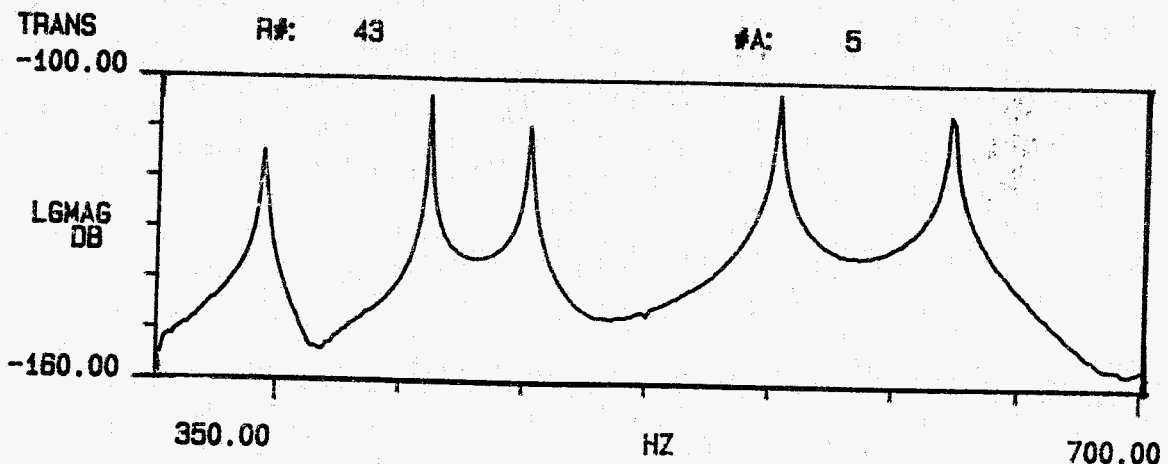
Deze fit procedure is gebaseerd op de volgende twee aannames:

- * Proportionele demping
- * Niet-gekoppelde modes.

Verder wordt aangenomen dat de bijdrage van alle lagere en/of hogere modes aan de totale respons mag worden verwaarloosd in een frequentie band waar slechts een mode dominant is. Dan volgt voor de frequentie respons functie:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{j W_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{-j W_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \quad (3.10)$$

Een typische respons van een vlakke plaat trilling waarbij bovengenoemde aannames gerechtvaardigd lijken is hieronder gegeven.



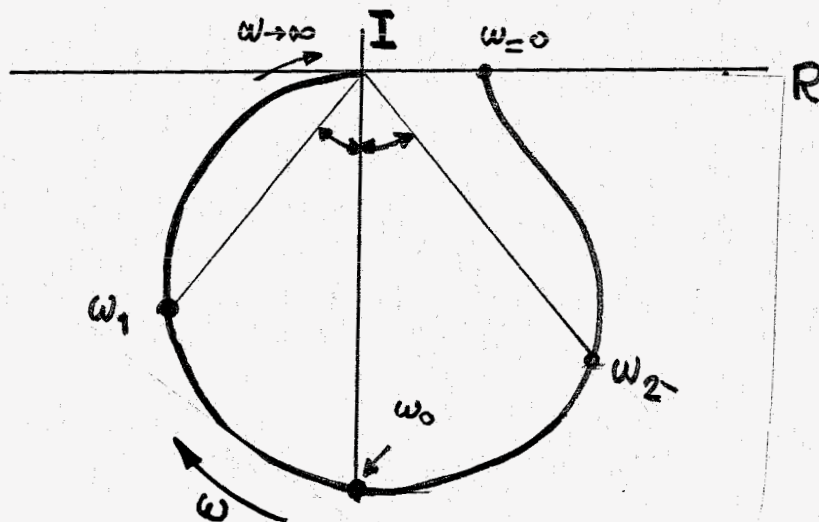
Relatie (3.10) kunnen wij ook schrijven als (zie ook (1.17)):

$$H_{ij}(\omega) = \frac{-2 \gamma_k W_{ijk}}{\omega_{ok}^2 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ok}} \right)^2 \right\} + 2j \zeta_k \left(\frac{\omega}{\omega_{ok}} \right) \right]} \quad (3.11)$$

Dit is nu precies de overdrachtsfunctie voor een enkelvoudig, gedempt massa-veer systeem welke n.l. geschreven kan worden als:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2j \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)} \quad (3.12)$$

We zien dat met $W_{ijk} = \frac{-1}{2m\omega_d}$ en $\omega_{ok} = \omega_0, \zeta_k = \zeta$ exakt dezelfde relaties ontstaan. De overdrachtsfunctie (3.12) is hieronder grafisch weergegeven.



Mede aan de hand van deze figuur zal de curve-fit methode worden toegelicht.

- De ongedempte eigenhoekfrequentie ω_{ok} volgt uit de Nyquist figuur van de overdrachtsfunctie, namelijk uit het snijpunt van deze figuur met de imaginaire as, dus:

$$\operatorname{Re}[H_{ijk}] = 0 \longrightarrow \omega = \omega_{ok} \quad (3.13)$$

- Vervolgens beschouwen wij die hoekfrequenties ω_1 en ω_2 waarvoor:

$$\omega_1: \operatorname{Re}[H_{ijk}] = \operatorname{Im}[H_{ijk}] \quad (3.14)$$

$$\omega_2: \operatorname{Re}[H_{ijk}] = -\operatorname{Im}[H_{ijk}] \quad (3.15)$$

Voor (3.10) kunnen wij ook schrijven:

$$H_{ijk} = \frac{-2 W_{ijk} \gamma_k \{ (\mu_k^2 + \gamma_k^2 - \omega^2) + 2j \mu_k \omega \}}{(\mu_k^2 + \gamma_k^2 - \omega^2)^2 + 4 \mu_k^2 \omega^2} \quad (3.16)$$

Eisen wij nu (3.14) en (3.15) dan is hieraan voldaan indien:

$$\mu_k^2 + \gamma_k^2 - \omega_1^2 - 2 \mu_k \omega_1 = 0 \quad (3.17)$$

$$\mu_k^2 + \gamma_k^2 - \omega_2^2 + 2 \mu_k \omega_2 = 0 \quad (3.18)$$

Aftrekken van deze relaties levert nu

$$\mu_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = -\zeta_k \omega_{ok} \quad (3.19)$$

Hiermee is de demping van de betreffende mode bepaald.

- Voor $\omega = \omega_{ok}$ volgt uit (3.11):

$$H_{ij}(\omega_{ok}) = \frac{-2 \gamma_k W_{ijk}}{\omega_{ok}^2 [2j \zeta_k]} = -\frac{j \gamma_k W_{ijk}}{\omega_{ok} \mu_k} \quad (3.20)$$

Hieruit volgt dus:

$$W_{ijk} = - \frac{\mu_k \omega_{ok} \operatorname{Im}[H_{ij}(\omega_{ok})]}{\nu_k} \quad (3.21)$$

Een complete analyse via deze methode houdt dus in:

- Het aantal modes wordt geschat door visuele inspectie van de verschillende frequentieresponsfuncties, bijvoorbeeld door het tellen van het aantal maxima in het imaginaire deel of het aantal nuldoorgangen in het reële deel.
- De ongedempte eigen hoekfrequentie volgen uit de doorsnijdingen met de imaginaire as in het complexe vlak
- Dampingswaarden volgen uit relatie (3.19)
- De residu componenten (modale verplaatsingen) volgen uit (3.21)

De quadrature fit is een zeer eenvoudige methode voor het bepalen van de modale parameters uit een serie frequentieresponsfuncties. Hier staat tegenover dat al met ernstige fouten kunnen optreden, bijvoorbeeld in het geval van niet proportionele demping of bij dicht bij elkaar liggende modes. Zie hiervoor o.a. [3], [4], [5] en [6]

3.3 Circle fit

Bij de circle fit methode gaan wij uit van de algemene relatie (1.8) onder aanname van de volgende veronderstellingen:

- De modes beïnvloeden elkaar nauwelijks, dat wil zeggen dat rond een bepaalde mode k de totale bijdrage van alle andere modes gerepresenteerd kan worden door een complexe konstante $R_k + jI_k$
- Het systeem is voor de betreffende mode zwak gedempt

We krijgen dan als benadering voor de frequentieresponsfunctie in een frequentiegebied waar de k e mode domineert:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{V_{ijk} + jW_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + R_k + jI_k \quad (3.22)$$

We beschouwen in eerste instantie de functie:

$$A(\omega) = \frac{1}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} \quad (3.23)$$

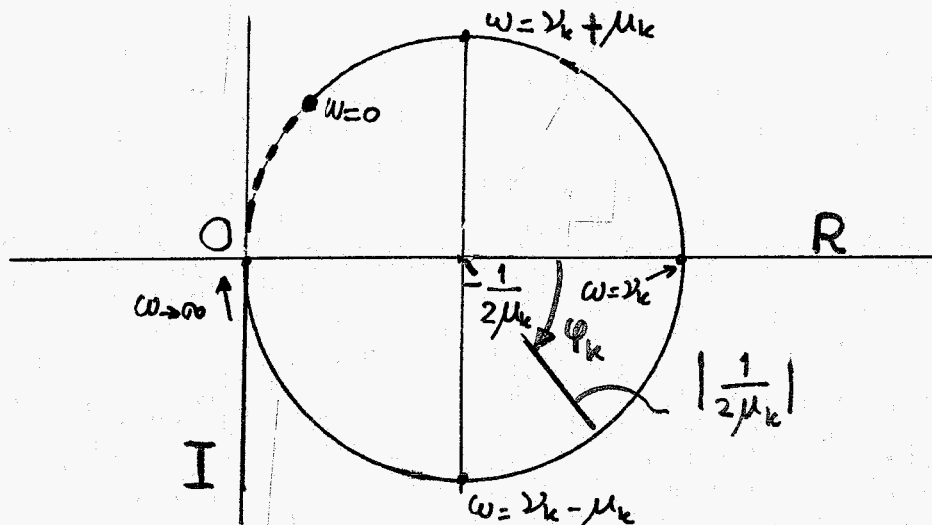
waarvoor wij ook kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -\frac{1}{2\mu_k} \left[1 + \frac{[\mu_k + j(\omega - \nu_k)]^2}{[\mu_k^2 + (\omega - \nu_k)^2]} \right] \\ &= -\frac{1}{2\mu_k} [1 + e^{j\phi_k}]; \end{aligned} \quad (3.24)$$

waarbij:

$$\phi_k = 2 \arctan\left(\frac{\omega - \nu_k}{\mu_k}\right) \quad (3.25)$$

Dit is dus een cirkel in het complexe vlak met middelpunt $[-\frac{1}{2\mu_k}, 0]$ en straal $|\frac{1}{2}\mu_k|$



Voor de frequentie responsfunctie volgens (3.22) volgt nu:

$$H_{ij} = [V_{ijk} + jW_{ijk}] \left[-\frac{1}{2\mu_k} (1 + e^{j\varphi_k}) \right] + R_k + jI_k \quad (3.26)$$

Definiëren wij: $V_{ijk} + jW_{ijk} := A_k e^{j\psi_k}$

zodat:

$$A_k = |V_{ijk} + jW_{ijk}| = \sqrt{V_{ijk}^2 + W_{ijk}^2}$$

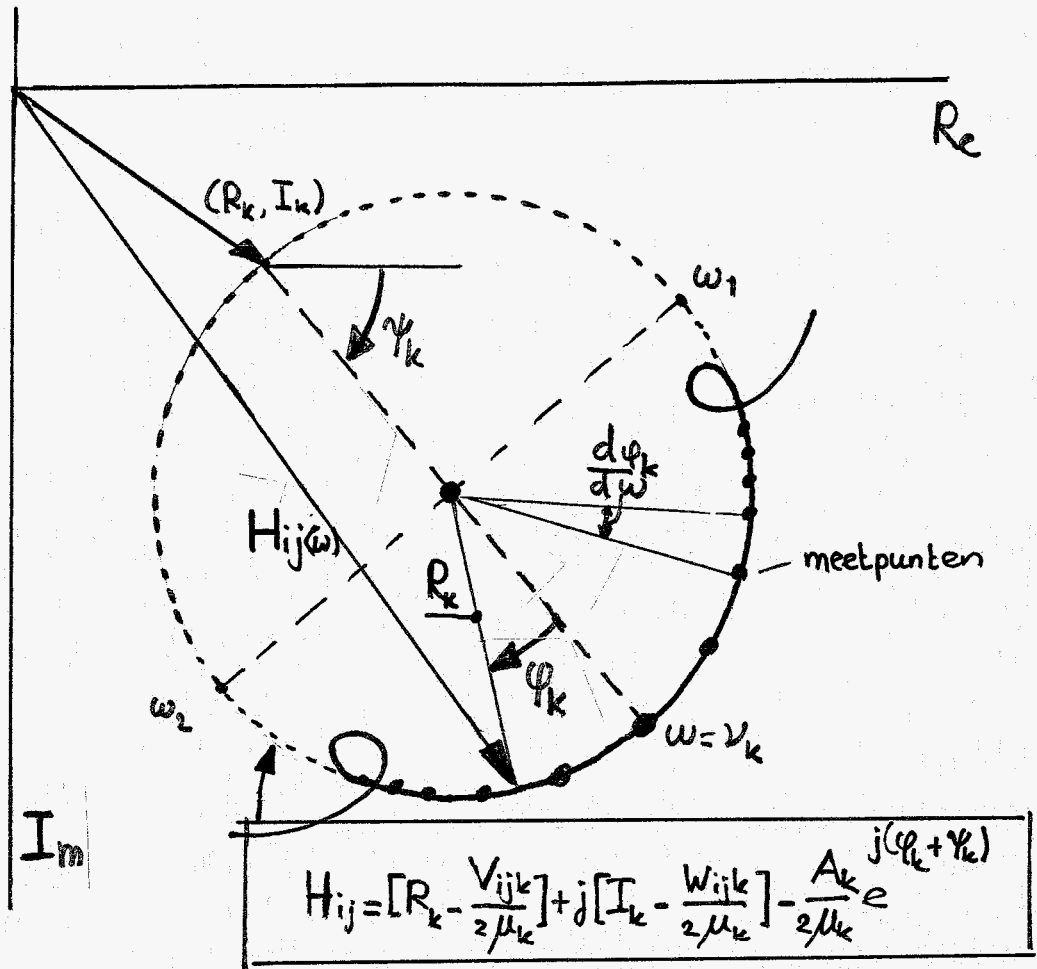
dan kan (3.26) ook geschreven worden als:

$$H_{ij}(w) = \left[R_k - \frac{V_{ijk}}{2\mu_k} \right] + j \left[I_k - \frac{W_{ijk}}{2\mu_k} \right] - \frac{A_k}{2\mu_k} e^{j(\varphi_k + \psi_k)} \quad (3.27)$$

Dit is nu een cirkel in het complexe vlak met:

* middelpunt op: $(R_k - V_{ijk}/2\mu_k), (I_k - W_{ijk}/2\mu_k)$ (3.28)

* straal van: $\frac{A_k}{2|\mu_k|} = \frac{\sqrt{V_{ijk}^2 + W_{ijk}^2}}{2|\mu_k|}$ (3.29)



We beschouwen de fasehoek φ_k , gedefinieerd door (3.25):

$$\varphi_k = 2 \arctan \left(\frac{\omega - \nu_k}{\mu_k} \right).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\varphi_k}{d\omega} = \frac{2}{1 + \left(\frac{\omega - \nu_k}{\mu_k} \right)^2} \cdot \frac{1}{\mu_k} \quad (3.30)$$

en

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\omega^2} = \frac{-\frac{4}{\mu_k^2} \cdot \left(\frac{\omega - \nu_k}{\mu_k} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\omega - \nu_k}{\mu_k} \right)^2 \right]^2} \quad (3.31)$$

Voor $\omega = \nu_k$ volgt dus $d^2\varphi_k/d\omega^2 = 0$ en dit impliceert dat de gedempte eigenhoekfrequentie daar geronden kan worden waar de hoekvariatie $d\varphi/d\omega$ een lokaal

maximum vertoont als functie van de frequentie. De demping volgt daarna uit de via de methode der kleinste kwadraten gefitte cirkel. Uit de twee frequenties ω_1 en ω_2 , $\pm \frac{\pi}{2}$ rad verschoven t.o.v. ν_k kan namelijk meteen μ_k worden bepaald uit:

$$\mu_k = - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (3.32)$$

Uit de straal van de gefitte cirkel kan de amplitude van de modale verplaatsing worden bepaald. Uit (3.29) volgt namelijk:

$$\sqrt{V_{ijk}^2 + W_{ijk}^2} = 2 |\mu_k| * \text{straal } R_k \quad (3.33)$$

Verder geldt:

$$\gamma_k = \arctan \left(\frac{W_{ijk}}{V_{ijk}} \right) \quad (3.34)$$

Bij berekende R_k en γ_k volgen dus eenvoudig V_{ijk} en W_{ijk} .

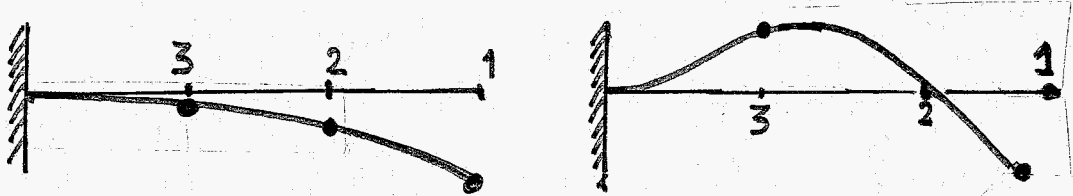
In de praktijk verloopt de methode als volgt:

- Het aantal modes wordt bepaald via een visuele inspectie van de frequentieresponsfuncties.
- De gedempte eigenhoekfrequenties worden bepaald als die ω 's waarvoor lokale maxima optreden voor $d\mu_k/d\omega$.
- Via een kleinste kwadratenmethode wordt een cirkel bepaald door een zeker aantal punten in de buurt van de gedempte eigenhoek frequentie (ν_k)
- De dempingsfactor μ_k als ook de residu componenten

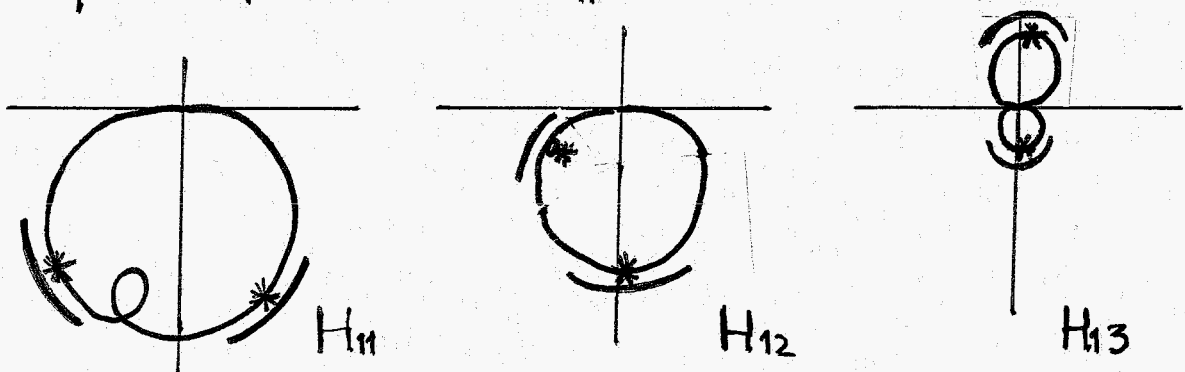
Vijk en Wijk worden bepaald uit de plaats en grootte van de cirkel.

De methode is snel en ook complexe modes kunnen worden bepaald. Moeilijkheden ontstaan bij experimentele data voorzien van nogal wat ruis in de buurt van een plaats waar de modale verplaatsingen relatief klein zijn. Dit laatste zal aan de hand van een eenvoudig voorbeeld toegelicht worden.

We beschouwen daartoe de 1^e en 2^e eigen trillingsvorm van een homogene, aan één zijde ingeklemde balk.



De excitatie vindt plaats in punt 1 en we beschouwen de frequentieresponsfuncties $H_{11}(\omega)$, $H_{12}(\omega)$ en $H_{13}(\omega)$.



De resonantiefrequenties zijn aangegeven met * terwijl de bij de circle fit gebruikte meetpunten zijn aangegeven door de dubbele lijn. Omdat meetpunt 2 vlak bij een knoop

van de tweede eigentrillingsvorm ligt is de bijdrage van deze mode daar aan de totale frequentieresponsfunctie vrijwel nihil. Om dan toch een cirkel aan deze data proberen aan te passen leidt tot grote onnauwkeurigheden en kan bijvoorbeeld leiden tot een behoorlijk grote modale verplaatsingskomponent daar ter plaatse hetgeen niet in overeenstemming is met de werkelijkheid. Ingrijpen van de gebruiker is in zo'n situatie aan te bevelen. (zie ook [3], [6], [7]).

4 Benaderingen op basis van het complete model.

In de nu volgende paragrafen zullen een aantal geavanceerdere curve-fit methoden behandeld worden waarbij steeds uitgegaan wordt van het complete theoretische model (1.14) voor de beschrijving in het frequentiedomein en (1.25) voor de daarmee equivalente beschrijving in het tijddomein. Hiermee hangt ook de basisonderverdeling samen n.l. curve-fit methoden in het frequentiedomein en curve-fit methoden in het tijddomein.

4.1 Curve fit in het frequentie domein via een kleinste kwadrate algoritme.

We gaan uit van de analytische uitdrukking voor de frequentierespons van een theoretisch model dat equivalent is met de gemeten constructie, n.l.

$$H_{ij}(\omega) = s_{ij}^* - \frac{1}{\omega^2 m_{ij}^*} + \sum_{k_A}^{k_B} \left\{ \frac{V_{ijk} + jW_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega - \nu_k)} + \frac{V_{ijk} - jW_{ijk}}{-\mu_k + j(\omega + \nu_k)} \right\} \quad (4.1)$$

Indien het in de beschouwde frequentie band aanwezige aantal modes wordt aangegeven met $n_e = k_B - k_A + 1$ bevat relatie (4.1) $(4n_e + 2)$ onbekende parameters, namelijk V_{ijk} , W_{ijk} , μ_k en ν_k voor $k = k_A, \dots, k_B$ en tenslotte nog s_{ij}^* en m_{ij}^* .

Deze $(4n_e + 2)$ parameters kunnen bepaald worden via een kleinste kwadraten algoritme.

We definiëren daartoe een restfout:

$$E_t = \sum_{r=1}^m E_r^2 = \sum_{r=1}^m \left\{ \left[\operatorname{Re}(H_{ij})_E - \operatorname{Re}(H_{ij})_A \right]^2 + \left[\operatorname{Im}(H_{ij})_E - \operatorname{Im}(H_{ij})_A \right]^2 \right\} \quad (4.2)$$

waarbij E = experimentele data
 A = analytische data
 m = aantal data punten

Eisen dat deze restfout minimaal wordt leidt tot een stelsel niet-lineaire vergelijkingen voor de onbekende parameters. Immers voor een minimale waarde moet de afgeleide van (4.2) naar elk der onbekende parameters (bijvoorbeeld $p = \nu_k$) nul zijn, dus:

$$\frac{\partial E_t}{\partial p} = -2 \sum_{r=1}^m \left\{ \left[\operatorname{Re}(H_{ij})_E - \operatorname{Re}(H_{ij})_A \right] \frac{\partial \operatorname{Re}(H_{ij})_A}{\partial p} + \left[\operatorname{Im}(H_{ij})_E - \operatorname{Im}(H_{ij})_A \right] \frac{\partial \operatorname{Im}(H_{ij})_A}{\partial p} \right\} = 0 \quad (4.3)$$

De relatie (4.3) is niet-lineair in ν_k en μ_k . Voor de oplossing kan men deelproblemen oplossen, namelijk:

- Via een lineair kleinste kwadraten algoritme worden de $(2n_e + 2)$ parameters V_{ijk} , W_{ijk} , S_{ij}^* en m_{ij}^* bepaald, uitgaande van vooraf geschatte waarden voor μ_k en ν_k .
- Via een niet-lineair algoritme worden de $(4n + 2)$ parameters nauwkeuriger bepaald

4.1.1. Lineair kleinste kwadraten algoritme.

Bij deze stap moeten wij kunnen beschikken over schatters voor μ_k en ν_k voor $k = [k_A, k_B]$. Deze waarden worden vervolgens konstant gehouden tijdens de fit procedure. De optimale waarden voor V_{ijk} , W_{ijk} , m_{ij}^* en s_{ij}^* volgen dan uit relatie (4.3)

De procedure loopt als volgt:

- * Het aantal modes (n_e) is de te beschouwen range wordt geschat door het bekijken van één of meerdere frequentieresponsfuncties.
- * De gedempte eigenhoekfrequentie ν_k en de geassocieerde demping μ_k worden bepaald door één van de eenvoudige methoden uit hoofdstuk 3 of via een geavanceerde numerieke methode zoals zal worden gepresenteerd in hoofdstuk .
- * De complexe modale verplaatsingen volgen uit de fit-procedure. Deze levert meteen alle modes in de beschouwde frequentieband.

Deze methode is langzamer en vergt meer interactie van de gebruiker dan de circle fit methode. Bovendien moet men kunnen beschikken over een redelijk goede schatter voor μ_k en ν_k omdat deze fungeren als globale karakteristieken voor de hele set metingen. De resultaten worden echter in een klap bepaald waardoor de methode relatief snel is. Ook bij sterk gekoppelde modes worden echter acceptabele resultaten verkregen.

4.1.2. Niet lineair kleinste kwadratenalgoritme.

Bij deze aanpak worden alle $(4n_e + 2)$ parameters van het theoretische model geoptimaliseerd. Door het niet-lineair zijn van de vergelijkingen in μ_k en ν_k geschiedt dit in een iteratief proces.

Allereerst ontwikkelen wij vergelijking (4.1) in een Taylorreeks waarbij enkel de lineaire term wordt meegenomen:

$$\operatorname{Re}(H_{ij})_A = \operatorname{Re}(H_{ij})_{A_0} + \sum_{s=1}^{4n_e+2} \frac{\partial \operatorname{Re}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} \Delta p_s \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Im}(H_{ij})_A = \operatorname{Im}(H_{ij})_{A_0} + \sum_{s=1}^{4n_e+2} \frac{\partial \operatorname{Im}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} \Delta p_s \quad (4.5)$$

De hiermee verkregen vergelijkingen zijn lineair in Δp_s . We definiëren ook nu weer een restfout:

$$E_k = \sum_{r=1}^m \left\{ \left[\operatorname{Re}(H_{ij})_E - \operatorname{Re}(H_{ij})_A \right]^2 + \left[\operatorname{Im}(H_{ij})_E - \operatorname{Im}(H_{ij})_A \right]^2 \right\} \quad (4.6)$$

welke wij nu wensen te optimaliseren met betrekking tot Δp . Dan moet dus gelden:

$$\frac{\partial E_k}{\partial p_s} = 0 = -2 \sum_{r=1}^m \left[\left\{ \operatorname{Re}(H_{ij})_E - \operatorname{Re}(H_{ij})_{A_0} - \sum_{s=1}^{4n_e+2} \frac{\partial \operatorname{Re}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} \Delta p_s \right\} \frac{\partial \operatorname{Re}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} + \left\{ \operatorname{Im}(H_{ij})_E - \operatorname{Im}(H_{ij})_{A_0} - \sum_{s=1}^{4n_e+2} \frac{\partial \operatorname{Im}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} \Delta p_s \right\} \frac{\partial \operatorname{Im}(H_{ij})_{A_0}}{\partial p_s} \right] \quad (4.7)$$

Vergelijking (4.7) beschrijft een stelsel van $4n_e+2$, gekoppelde, gewone algebraïsche vergelijkingen in de onbekende parametervariabel Δp_s .

Uitgaande van startwaarden voor deze modale parameters kunnen nu nieuwe schattingen bepaald worden via:

$$P_{\text{nieuw}} = P_{\text{oud}} + \Delta p. \quad (4.8)$$

Het proces kan gestopt worden indien de kleinste kwadratenfout σ niet significant meer verbetert, dus bijvoorbeeld indien:

$$0.99 \sigma_{\text{oud}} \leq \sigma_{\text{nieuw}} \leq 1.01 \sigma_{\text{oud}} \quad (4.9)$$

De procedure gaat dus als volgt:

- * Het aantal relevante modes (n_e) wordt bepaald door visuele inspectie van een aantal frequentieresponsfuncties.
- * Startwaarden voor gedempte eigenhoekfrequentie (γ_k) en dempingsconstante μ_k worden bepaald, bijvoorbeeld via de methoden uit hoofdstuk 3 of hoofdstuk 4.
- * In een iteratief proces worden alle $4n_e+2$ parameters geoptimaliseerd.
- * Voor alle gemeten frequentieresponsfuncties wordt vervolgens het gemiddelde bepaald van μ_k en γ_k .
- * Voor de set van $2n_e$ parameters $\bar{\mu}_k$ en $\bar{\gamma}_k$ worden nu de modale verplaatsingscomponenten V_{ijk} en W_{ijk} en de resttermen s_{ij}^* en m_{ij}^* nogmaals bepaald via een lineair kleinste kwadraten algoritme.

4.2 Curve fit in het tijddomein.

Zoals reeds eerder is aangegeven kan het dynamisch gedrag van een dynamisch systeem ook beschreven worden door de impulsrespon $h_{ij}(t)$ zoals weergegeven in (1.29). Deze bestaat dan uit een sommatie van exponentiële functies, elk met een gedempte eigenhoekfrequentie ν_k en een dempings waarde μ_k . Ook deze impulsresponsfunctie kan dienen als uitgangspunt voor het bepalen van schatten voor de modale parameters. Een van de hierna volgende methoden is daarbij gebaseerd op een interpolatie techniek waarbij geen startwaarden voor de te bepalen schatters nodig zijn. In een tweede stap worden daarbij ook de complexe modale verplaatsingen bepaald. De methode kan worden uitgebreid tot een kleinste kwadraten aanpassings methode met een daaraan verbonden aantal voordelen en nadelen.

4.2.1 Tijddomein-Fit via interpolatie technieken.

Wegaan hierbij uit van de uitdrukking voor de impulsrespon van het systeem n.l. (1.26) waarvoor wij ook mogen schrijven:

$$h_{ij}(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n B_{ijk} e^{\lambda_k t} \right] \quad (4.10)$$

waarbij: $B_{ijk} = V_{ijk} + j W_{ijk}$, de complexe modale verplaatsing voor mode k ,
 $\lambda_k = \mu_k + j \nu_k$ = eigenwaarde voor mode k

Relatie (4.10) bezit $4n$ onbekende parameters. Wij kunnen dus een exakte aanpassing aan experimentele data krijgen indien we een interpolatie schema toepassen op $4n$ experimentele data punten.

We gebruiken de volgende afkortingen:

$$t_e = l \Delta t$$

Δt = discrete tijdstapgrootte

Vergelijking (4.10) leidt dan tot:

$$h_{ij}(t_e) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n B_{ijk} e^{\lambda_k t_e} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n B_{ijk} e^{\lambda_k l \Delta t} \right] \quad (4.11)$$

Wij introduceren een set nieuwe variabelen:

$$X_k := e^{\lambda_k \Delta t} = e^{(\mu_k + j \nu_k) \Delta t} \quad (4.12)$$

zodat:

$$h_{ij}(t_e) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n \{ B_{ijk} \cdot X_k^l \} \right] \quad (4.13)$$

We definiëren een set variabelen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ als de verzameling van de coëfficiënten van een polynoom in X , n.l.

$$\sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X^l = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 0}}^{k=n} (X - X_k) = 0 \quad (4.14)$$

(α 's reëel)

waarbij o.a. geldt: $X_{-k} = \overline{X_k}$ (toegevoegd
komplexe) (4.15)

De $2n$ complexe wortels van vergelijking (4.14), nl X_k
worden gelijk gesteld aan de onbekende complexe
exponentiële functies $e^{\lambda_k \Delta t}$.

We schrijven vervolgens relatie (4.13) voor waarden voor
 $t = l \Delta t$, en wel voor $l = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Elke dan ontstane
relatie vermenigvuldigen wij met een (onbekende) coëfficiënt
 α_l . Wij krijgen dan het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} \alpha_0 h_{ij}(0) &= 2 \operatorname{Re} \left[\alpha_0 B_{ij1} X_1^0 + \alpha_0 B_{ij2} X_2^0 + \alpha_0 B_{ij3} X_3^0 + \dots \right] \\ \alpha_1 h_{ij}(\Delta t) &= 2 \operatorname{Re} \left[\alpha_1 B_{ij1} X_1^1 + \alpha_1 B_{ij2} X_2^1 + \alpha_1 B_{ij3} X_3^1 + \dots \right] \\ &\vdots \\ \alpha_{2n} h_{ij}(2n \Delta t) &= 2 \operatorname{Re} \left[\alpha_{2n} B_{ij1} X_1^{2n} + \alpha_{2n} B_{ij2} X_2^{2n} + \alpha_{2n} B_{ij3} X_3^{2n} + \dots \right] \end{aligned} +$$

$$\sum_{l=0}^{2n} \alpha_l h_{ij}(l \Delta t) = 2 \operatorname{Re} \left[\underbrace{B_{ij1} \sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X_1^l}_0 + \underbrace{B_{ij2} \sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X_2^l}_0 + \dots \right] \quad (4.16)$$

Dus:

$$\sum_{l=0}^{2n} \alpha_l h_{ij}(l \Delta t) = 0 \quad (4.17)$$

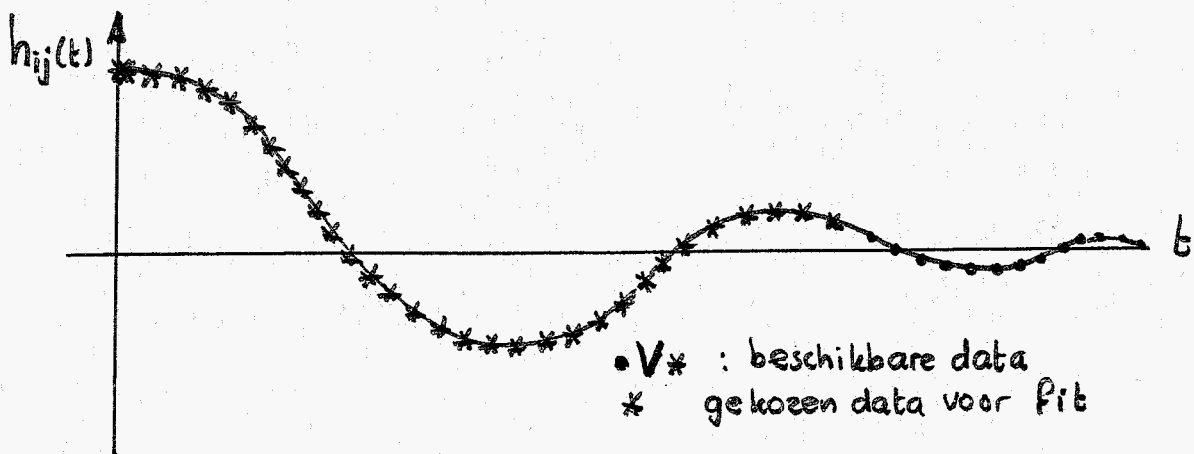
Stellen wij $\alpha_{2n} = 1$ (wij mogen immers (4.14) met
elke willekeurige factor vermenigvuldigen) dan volgt:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h_{ij}(l \Delta t) = -h_{ij}(2n \Delta t) \quad (4.18)$$

We hebben vergelijking (4.16) verkregen door het opschrijven van vergelijking (4.13) voor $l=0, 1, 2, \dots, 2n$. Wij kunnen deze relatie ook opschrijven voor $l=1, 2, \dots, 2n+1$. Dan krijgen wij op dezelfde manier:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h_{ij}((p+l)\Delta t) = -h_{ij}((p+2n)\Delta t) \quad (4.19)$$

Over het algemeen is het aantal beschikbare datapunten aanzienlijk groter dan het aantal nodige punten. Op welke wijze dan de in de beschouwing te betrekken punten dienen te worden gekozen is niet triviaal. Veelal is echter het begin van de impulsrespons het meest betrouwbaar zodat het verstandig is om ook daar de data uit te betrekken. Dit is in onderstaande figuur schematisch aangegeven.



Een exacte oplossing voor de $2n$ onbekende modale verplaatsingen (V_{ijk} en W_{ijk} voor $k=1,2,\dots,n$) kan bepaald worden uit $2n$ data punten $h_{ij}(\Delta t)$ voor $i=0,1,2,\dots,(2n-1)$.

In matrixvorm volgt dan het volgende stelsel vergelijkingen:

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \operatorname{Re}[X_1] & \operatorname{Re}[X_2] & \dots & -\operatorname{Im}[X_1] & -\operatorname{Im}[X_2] & \dots \\ \operatorname{Re}[X_1^2] & \operatorname{Re}[X_2^2] & \dots & -\operatorname{Im}[X_1^2] & -\operatorname{Im}[X_2^2] & \dots \\ \operatorname{Re}[X_1^3] & \operatorname{Re}[X_2^3] & \dots & -\operatorname{Im}[X_1^3] & -\operatorname{Im}[X_2^3] & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ij1} \\ U_{ij2} \\ U_{ij3} \\ \vdots \\ V_{ij1} \\ V_{ij2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(b) \\ h(\Delta t) \\ h(2\Delta t) \\ \vdots \\ h((2n-1)\Delta t) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Bij het hanteren van de lineaire stelsels vergelijkingen (4.20) en (4.25) hebben wij te maken met een aantal bijzondere aspecten:

- De matrix-opbouw van vgl (4.20) is bekend als een **TOEPLITZ** matrix met identieke elementen op alle willekeurige links onder-rechtsboven diagonalen. Door deze bijzondere structuur is een aanzienlijke kleinere rekentijd nodig dan voor een algemene matrix-oplossingsstrategie.

Globaal:

	Algemene matrix	Toeplitz matrix
geheugengebruik :	$(2n)^2$	$2n$
computer tijd :	$(2n)^3$	$(2n)^2$

- De tweede matrix vergelijking (4.25) waarmee de

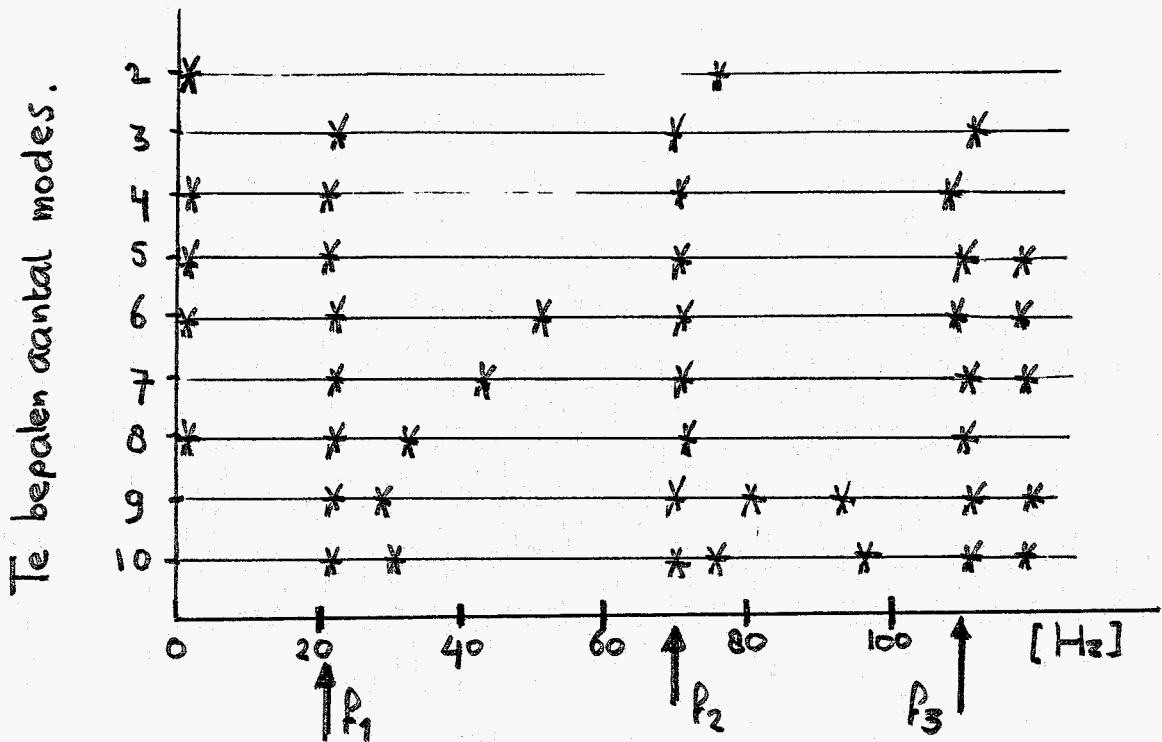
komplexe modale verplaatsingen kunnen worden bepaald bezit ook een speciale structuur. Deze matrix is bekend als de **VANDERMONDE** matrix en bezit ook weer een aantal voordelen.

In de praktijk komt de curve fit methode op het volgende neer:

- * Het aantal modes wordt gedefinieerd op basis van de frequentieresponsfuncties door visuele inspectie.
- * De gedempte eigenhoekfrequenties en demping worden bepaald uit de impulsresponsies.
- * De modale verplaatsingen worden eveneens bepaald uit de impulsresponsies, maar dan in een tweede stap.

Aan de methode kleven enkele noemenswaardige nadelen. De bepaling "met de hand" van het aantal modes is daarbij van fundamenteel belang. Variatie van dit gekozen aantal modes blijkt te resulteren in frequentie- en dempings-schattingen. Indien men het aantal modes relatief groot kiest zullen meestal goede schattingen worden verkregen waarbij echter vaak ook zuiver mathematische modes gegenereerd zullen worden. Deze hebben geen enkele fysische betekenis.

In de volgende figuur is schematisch aangegeven hoe de verkregen oplossing (in dit geval de gedempte eigenhoekfrequenties) varieert indien het aantal vooraf gedefinieerde, en dus ook te bepalen modes wordt gevarieerd. Het theoretisch (uitgang) systeem was een diskreet systeem met 3 vrijheidsgraden.



Het met het oog schatten van het aantal relevante modes uit een aantal frequentieresponsfuncties vereist veel ervaring en levert vaak geen één-eenduidige oplossing. Een ieder denkt er weer anders over.

Een tweede nadeel is het gevolg van het fitten van verschillende impulsresponsies van hetzelfde systeem waardoor (hopelijk weinig) variërende uitkomsten voor μ_k en τ_k kunnen worden verkregen. Hiervan moet dan een gemiddelde worden bepaald welke dan als basis kunnen dienen voor de uiteindelijke modale verplaatsingen.

Verder worden slechts relatief weinig data-paren gebruikt die dan wel exact beschreven worden door de interpolatie functie. Aanwezige ruis wordt echter niet uitgemiddeld. Het belangrijkste voordeel van de methode is de volledig

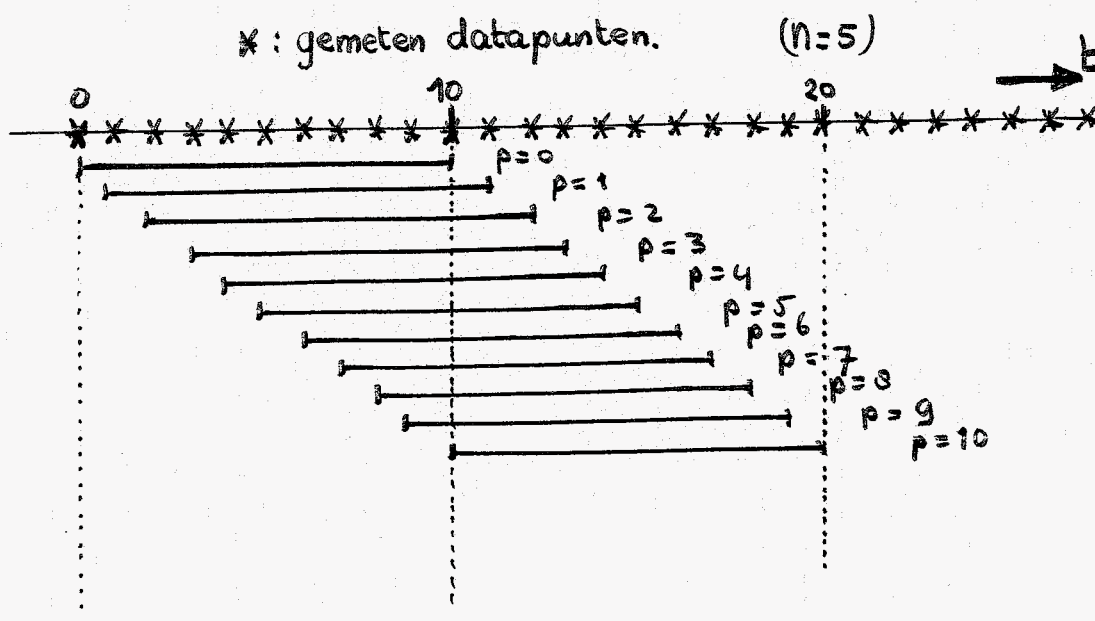
automatische bepaling van de gedempte eigenhoekfrequenties en de dempingswaarden; er zijn geen startwaarden noodzakelijk. Enige van de genoemde bezwaren kunnen worden ondervangen door gebruik te maken van de kleinste kwadratenmethode.

4.2.2. Tijd domein-fit via de kleinste kwadratenmethode

De in de vorige paragraaf geïntroduceerde polynoomcoëfficiënten α werden bepaald op basis van de volgende vergelijking:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h((p+l)\Delta t) = -h((p+2n)\Delta t) \quad (4.26)$$

De exacte oplossing vergt $4n$ datapunten, namelijk $2n$ elkaar gedeeltelijk overlappende sets van elk n datapunten zoals hieronder is aangegeven voor $n=5$.



Indien wij gebruik wensen te maken van meer dan $2n$ datapunten moeten wij onze toevlucht nemen tot een kleinste kwadraten aanpassing. De coëfficiënten α worden dan bepaald door het minimaliseren van een restfout op basis van veel (m) datapunten waarbij de restfout gedefinieerd wordt als:

$$E_t = \sum_{p=0}^m E_p^2 = \sum_{p=0}^m \left[h_E(t_{2n+p}) - h_A(t_{2n+p}) \right]^2$$

$$= \sum_{p=0}^m \left[h_E(t_{2n+p}) + \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h_E(t_{l+p}) \right]^2 \quad (4.27)$$

waarbij E : Experimenteel
 A : Analytisch
 $t_{2n+p} = (2n+p)\Delta t$

Voor een minimum moet dan gelden:

$$\frac{\partial E_t}{\partial \alpha_k} = 0 = \sum_{p=0}^m \left[h(t_{2n+p}) + \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) \right] h(t_{k+p}) \quad (4.28)$$

ofwel:

$$\sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) h(t_{k+p}) = - \sum_{p=0}^m h(t_{2n+p}) h(t_{k+p}) \quad (4.29)$$

We beschouwen een van de produkttermen van de diskrete impulresponsies; n.l. de term

$$\sum_{p=0}^m h(t_{l+p}) h(t_{k+p})$$

Voor de autocorrelatiefunctie van het niet-stationaire signaal $h(t)$ kan geschreven worden:

$$R(t, \tau) = E[h(t) h(t+\tau)] \quad (4.30)$$

Er blijkt dus te gelden:

$$\sum_{p=0}^m h(t_{l+p}) h(t_{k+p}) \approx (m+1) R(l, k) \quad (4.31)$$

Hierbij is $R(l, k)$ de autocorrelatiefunctie bij begintijdstip voor de berekening $t = l \Delta t$ en voor tijdsverschuiving $\tau = (k - l) \Delta t$

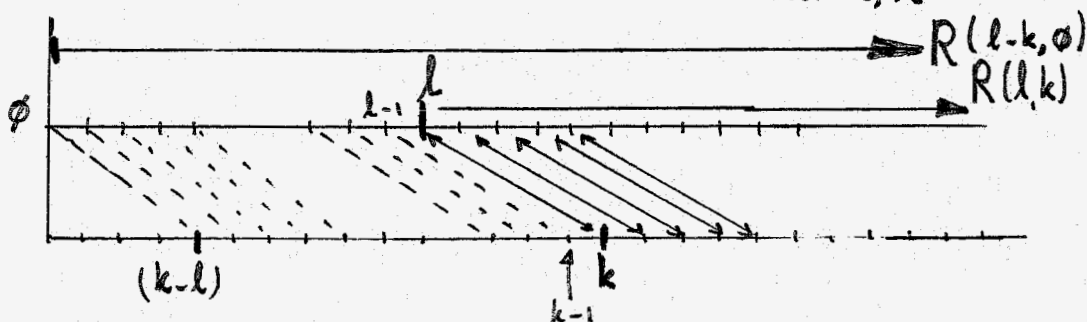
Er geldt o.a:

$$R(l, k) = R(k, l)$$

en

$$R(l, k) = R(l-k, \emptyset) - \sum_{p=1}^l h(t_{l-p}) h(t_{k-p}) \quad (4.32)$$

voor $k > l$



De autocorrelaties $R(p, \emptyset)$ voor $p=0, 1, 2, \dots, m$ kan gemakkelijk bepaald worden via inverse FFT vanuit het frequentiedomein, uitgaande van de frequentierespons-functie

Gebruikmakend van (4.31) kunnen wij voor (4.29) nu ook schrijven:

$$\sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l R(l, k) = -R(2n, k) \quad (4.33)$$

en dit geldt voor: $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$.

In matrixvorm volgt dan het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} R(0,0) & R(1,0) & R(2,0) & \dots & \dots \\ R(0,1) & R(1,1) & R(2,1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(0,2n-1) & R(1,2n-1) & \dots & R(2n-1,2n-1) & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(2n,0) \\ R(2n,1) \\ \vdots \\ R(2n,2n-1) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Na het uit dit stelsel vergelijkingen bepalen van de coëfficiënten α_k ($k=0, 1, \dots, 2n-1$) kunnen weer de complexe polynoom wortels X_k berekend worden en daaruit weer frequentie en demping zoals in de vorige paragraaf is aangegeven.

5. Globale systeemparemeters.

Bij de behandeling van de in het voorgaande gepresenteerde curve-fit methoden hebben wij te maken gehad met de volgende karakteristieken:

- De frequentiedomein methoden hebben als bijzonder voordeel het elimineren van de in de metingen aanwezige ruis. Zij zijn echter niet geschikt voor een volledig automatische schatting voor gedempte eigenhoekfrequenties en dempingen.
- De tijd - interpolatie methode bezit dit automatisch bepalen van schatters wel maar is minder geschikt door de ongewenste effecten t.g.v. meetruis.

Het aantal te schatten modes wordt bepaald via visuele inspectie van meerdere Frequentieresponsfuncties. In het algemeen geldt echter dat: systeemparemeters als frequenties en dempingen (zijnde karakteristieken voor de gehele constructie) bepaald worden uit een deelverzameling van de gehele set gemeten Frequentieresponsfuncties. In dit hoofdstuk zal een methode centraal staan voor het bepalen van gedempte eigenhoekfrequenties en dempingen, direct uitgaande van alle beschikbare data. Uit de variatie van een kleinste kwadraten restfout zal een eerste schatting volgen voor het aantal relevante modes.

Zoals uit de beschouwingen in paragraaf 4.2.2 blijkt is relatie (4.29) volledig onafhankelijk van de modale verplaatsingen.

Dit is dus blijkbaar een relatie die geldt voor het systeem en onafhankelijk is van de gemeten punten van dat systeem. In feite kunnen wij voor het creëren van zulk een relatie dus zonder meer alle gemeten data betrekken om een zo goed mogelijk resultaat te verkrijgen.

De matrix voor het berekenen van gemiddelde waarden voor μ_k 's en ν_k 's zal dan ook het resultaat zijn van een sommatie van matrices zoals in (4.34) maar dan voor alle gemeten impulsresponsies.

In de praktijk gaat de procedure dan als volgt:

- * Roep alle gemeten frequentieresponsfunctie op uit het geheugen.
- * Bepaal impulsresponsfuncties via inverse FFT.
- * Bepaal de relevante matrix elementen uit de verkregen impulsrespons data.

Via dit algoritme kunnen optimale waarden voor de gedempte eigenhoek frequenties en voor de dempingswaarden worden bepaald op basis van alle beschikbare meetgegevens. Het aantal relevante modes wordt daarbij automatisch bepaald. Hiervoor kunnen twee wegen bewandeld worden welke hierna zullen worden toegelicht.

□ Berekening van de kleinste kwadratenfout.

De gehanteerde kleinste kwadraten fout was gedefinieerd als (zie (9.4)):

$$E_c = \sum_{p=0}^m E_p^2 = \sum_{p=0}^m \left\{ h(t_{2n+p}) + \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) \right\}^2 \quad (5.1)$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 E_t &= \sum_{p=0}^m \left[h^2(t_{2n+p}) + 2 h(t_{2n+p}) \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) + \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k h(t_{k+p}) \right] \\
 &= \sum_{p=0}^m \left[h^2(t_{2n+p}) + \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k \sum_{l=0}^{2n-1} \alpha_l h(t_{l+p}) h(t_{k+p}) \right] \\
 &= \sum_{p=0}^m \left[h^2(t_{2n+p}) + \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k h(t_{2n+p}) h(t_{k+p}) \right] \quad (\text{via (93)}) \\
 &= \sum_{p=0}^m \left[h^2(t_{2n+p}) + \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k h(t_{2n+p}) h(t_{k+p}) \right] \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Met de vooraf aangenomen waarde voor $\alpha_{2n} = 1$ kunnen wij dan schrijven:

$$E_t = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \sum_{p=0}^m h(t_{2n+p}) h(t_{k+p}) \quad (5.3)$$

of met de definitie:

$$RS_k = \sum_{p=0}^m h(t_{2n+p}) h(t_{k+p}) \quad (5.4)$$

krijgen wij:

$$E_t = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k RS_k \quad (5.5)$$

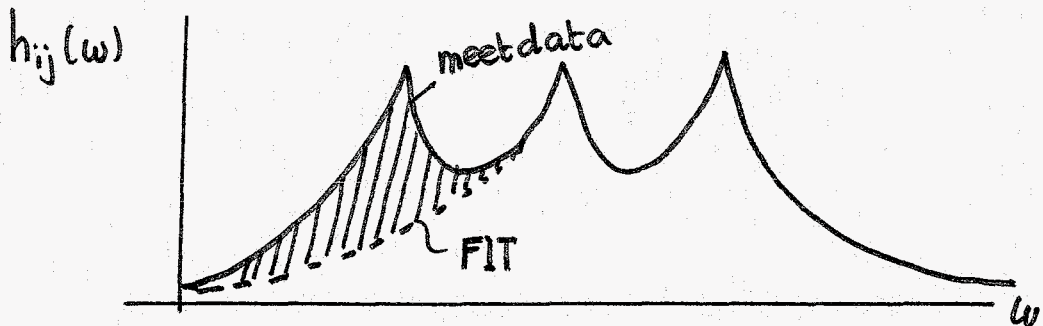
We gaan terug naar vergelijking (3.29) waaruit gekoncludeerd kan worden dat de grootheden RS_k gelijk zijn aan de

rechterlid componenten van vergelijking (4.34)

De totale kleinste kwadraten fout is dus gelijk aan de som van deze rechterlid termen RS_k en de berekende coëfficiënten α_k .

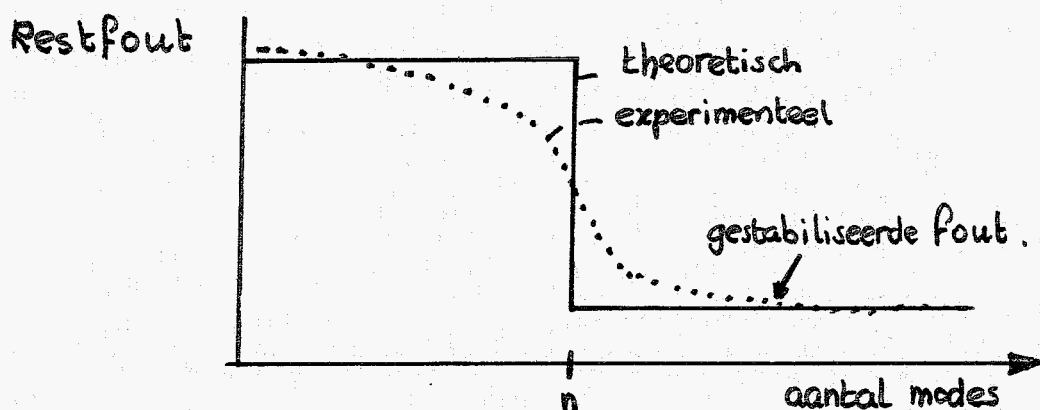
Het optimale aantal modes, gerelateerd aan de gehanteerde meetresultaten volgt nu uit de volgende twee beschouwingen:

- Een Fit met minder modes dan in de werkelijkheid in de frequentieresponsfuncties aanwezig is zal aanleiding geven tot een aanzienlijke fout doordat een aantal aanwezige modes niet gefit kunnen worden. De hierdoor ontstane systematische fout is hieronder schematisch aangegeven door het gearceerde gebied.



- Een Fit met meer dan het in werkelijkheid aanwezige aantal modes zal eveneens aanleiding geven tot een (geringere) fout tengevolge van immer aanwezige meetruis. Bij een steeds toenemend aantal modes zal deze fout zich stabiliseren op een waarde, overeenkomend met het ruisniveau.

Op basis van deze twee beschouwingen berekenen wij nu de kleinste kwadraten restfout voor een verschillend aantal modes en bestuderen wij de variaties in deze restfout. Bij het zich stabiliseren van de restfout weten wij dat het optimale aantal modes is bereikt. De volgende figuur toont een theoretische en praktische registratie van de restfout als functie van het aantal beschouwde modes.

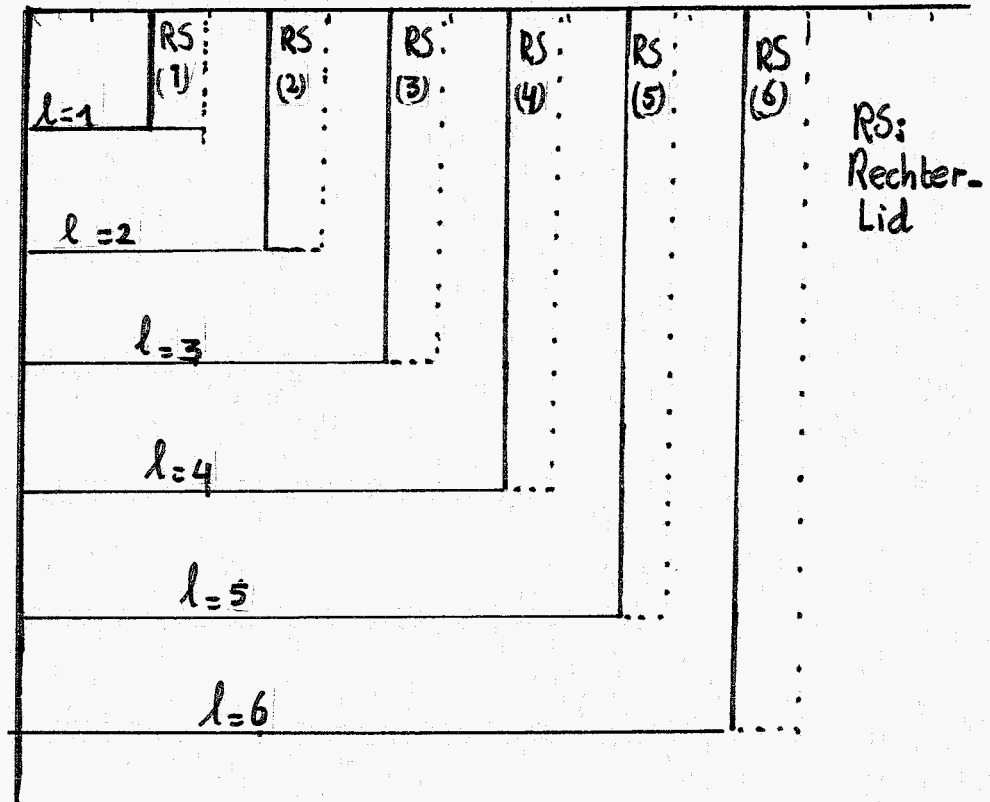


In de praktijk betekent het berekenen van deze restfout variaties voor l verschillende modes dat wij l lineaire stelsels op moet stellen en op moeten lossen voor het berekenen van de α_i coëfficiënten op de door (4.34) aangegeven wijze. Alle daarin voorkomende matrices voor $l < n$ zijn echter submatrices van de matrix in (4.34)

Voor het speciale geval van 2 modes ($l=2$) volgt:

$$\begin{bmatrix} R(0,0) & R(1,0) & R(2,0) & R(3,0) \\ R(0,1) & R(1,1) & R(2,1) & R(3,1) \\ R(0,2) & R(1,2) & R(2,2) & R(3,2) \\ R(0,3) & R(1,3) & R(2,3) & R(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(4,0) \\ R(4,1) \\ R(4,2) \\ R(4,3) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

De algemene tendens is hieronder schematisch aangegeven.



In de praktijk start men veelal met een matrix met nogal wat meer modi (m) dan volgt uit een visuele inspectie van de frequentieresponsfuncties. Achtereenvolgens worden nu coëfficiënten α_k en de daarbij behorende restfout E_k bepaald voor aantallen modi $l \leq m$.

Het optimale aantal modi volgt uit de variatie van deze restfout maar stabiliseert zich echter t.g.v. de aanwezige meetruis veelal op een aantal dat groter is dan het optimale aantal, er worden dus meestal ook "mathematische" modi gecreëerd. Een reductie tot het werkelijke optimale aantal kan geschieden via het hierna gepresenteerde algoritme.

□ Berekening van de rang van de matrix waaruit de α 's worden berekend.

Een tweede mogelijkheid voor het bepalen van het optimale aantal modes dat een rol speelt in een verzameling metingen is gebaseerd op het berekenen van de rang van de matrix uit vergelijking (4.34)

In een systeem met m modes is de impulsrespons $h_j(t)$ gebaseerd op een lineaire combinatie van m complexe, exponentiële termen. De vergelijkingen (4.34) bestaande uit $2n$ vergelijkingen zal dan dus $2m$ onafhankelijke vergelijkingen beschrijven en daarnaast nog een aantal rijen en kolommen bevatten die een lineaire combinatie zijn van de $2m$ basisvergelijkingen. Het aantal onafhankelijke rijen of kolommen van een vierkante matrix heet de rang van die matrix. Door het bepalen van de rang van de matrix kan dus het aantal eigenhoekfrequenties van het systeem worden vastgelegd.

Een nadeel van deze methode is dat de berekening van de rang van de matrix vereist dat een schatting van de in de metingen aanwezige ruis aanwezig is.

De verdere consequenties verbonden aan het implementeren van deze methode en de in de praktijk te ontmoeten problemen zullen wij hier verder buiten beschouwing laten.

6. Een multi-input fit procedure.

De in het voorgaande beschreven fit procedures waren alle gebaseerd op enkelvoudige input-frequentie-respons functies m.a.w. responsfuncties die men kan verkrijgen door de constructie respons (bijv. de versnelling) te meten op één enkele plaats en de constructie te exciteren op achtereenvolgens alle andere plaatsen of omgekeerd de constructie op één plaats te exciteren en op alle achtereenvolgende andere plaatsen de respons te registreren. In theorie levert zulk een enkelvoudige input strategie alle noodzakelijke informatie voor het bepalen van de eigentrillingsvormen in de beschouwde frequentieband, behorende bij de excitatievorm. In de praktijk is dit veelal echter niet het geval. Een zekere excitatieplaats kan heel dichtbij liggen of zelfs samenvallen met een knoop van een belangrijke trilvorm met als gevolg dat deze trilvorm helemaal niet voorkomt in de frequentie-respons functie die gemeten wordt. Constructies met nabijgelegen of geheel samenvallende eigenwaarden maken eveneens een multi-input aanpak noodzakelijk. In sommige gevallen is het dan ook noodzakelijk een analyse uit te voeren op basis van data sets, behorende bij 2 tot 10 excitatieplaatsen, die achtereenvolgens via standaard technieken gekreërd zijn. Huidige analyse technieken maken geen optimaal gebruik

van alle op deze manier gekreëerde informatie. Via visuele inspectie van alle data kan wel bepaald worden hoeveel relevante modes aanwezig zijn en wat de beste excitatieplaats is om modale data via de eerder beschreven Fil - procedures aan deze data te onttrekken. Dit vereist echter redelijk veel inzicht en ervaring en kost bovendien veel tijd. In het nu volgende wordt een methode beschreven (zie ook [10]) waarbij alle informatie van verschillende excitatieplaatsen simultaan wordt gebruikt voor het bepalen van de modale parameters (De zogeheten Poly - Reference MDOF technique).

Wij gaan uit van een viskeus gedempt, Lineair dynamisch systeem met n graden van vrijheid, beschreven door het volgende stelsel van n gekoppelde, 2^e orde differentiaalvergelijkingen:

$$M \ddot{q}(t) + B \dot{q}(t) + K q(t) = \underline{f}(t) \quad (6.1)$$

waarbij: M - $(n \times n)$, symmetrische, positief definitie massamatrix

B - $(n \times n)$, symmetrische, viskeuze dempingsmatrix

K - $(n \times n)$, symmetrische, positief definitie stijfheidsmatrix

$q(t)$ - vector, bevattende de n gegeneraliseerde coördinaten.

$f(t)$ - vector, bevattende de n gegeneraliseerde krachten.

Wij transformeren stelsel (6.1) via de methode van Duncan naar een stelsel van $2n$, eerste orde differentiaalvergelijkingen:

$$C \dot{y}(t) + D y(t) = g(t) \quad (6.2)$$

waarbij: $C = \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$ $y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$ $g(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$

Voor de verdere beschouwingen is het handig vergelijking (6.2)

in een nog iets andere vorm schrijven, namelijk via de introductie van de gegeneraliseerde impulsen: $\underline{p} = \underline{M} \dot{\underline{q}}$

en:

$$\underset{(2n \times 2n)}{A} := \begin{bmatrix} 0 & \underline{M}^{-1} \\ -\underline{K} & -\underline{B}\underline{M}^{-1} \end{bmatrix}; \quad \underset{(2n \times 1)}{\underline{h}(t)} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}(t) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \underline{p}(t) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

krijgen wij:

$$\boxed{\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A} \underline{y}(t) + \underline{h}(t)} \quad (6.5)$$

Wij beschouwen nu twee eigenwaardeproblemen van orde n , namelijk:

$$\underline{A} \underline{u} = \lambda \underline{u} \quad (6.6)$$

$$\underline{v}^T \underline{A} = \lambda \underline{v}^T \quad (\text{of } \underline{A}^T \underline{v} = \lambda \underline{v}) \quad (6.7)$$

Beide eigenwaardeproblemen leveren dezelfde set van $2n$, in het algemeen complexe eigenwaarden λ_k .

Vergelijking (6.6) levert daarbij de met λ_k korresponderende **Rechter-**eigenvektoren \underline{u}_k ($k=1, 2, \dots, 2n$) en vergelijking (6.7) de met λ_k korresponderende **Linker-**eigenvektoren \underline{v}_k ($k=1, 2, \dots, 2n$).

Indien de matrix \underline{A} symmetrisch is vervalt het onderscheid tussen Linker- en rechtereigenvektoren en geldt $\underline{u}_k = \underline{v}_k$ voor $k=1, 2, \dots, 2n$.

Indien wij veronderstellen dat geen der trillingsmodes van het systeem precies kritisch gedempt is, kan aangetoond worden dat alle eigenvektoren \underline{u}_k respectievelijk \underline{v}_k onderling onafhankelijk genomen kunnen worden en dus precies de $(2n \times 2n)$ dimensionale deelruimte opspannen.

Wij verzamelen alle eigenwaarden in de $(2n \times 2n)$ diagonaal-matrix Λ , de eigenvectoren \underline{u}_k in de $(2n \times 2n)$ matrix U en de eigenvectoren \underline{v}_k in de $(2n \times 2n)$ matrix V :

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} & U &= [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{2n}] \\ & & V &= [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{2n}] \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Voor een eigenwaarde λ_k en eigenvector \underline{u}_k respectievelijk λ_l en \underline{v}_l geldt:

$$A \underline{u}_k = \lambda_k \underline{u}_k \quad (6.9)$$

$$\underline{v}_l^T A = \lambda_l \underline{v}_l^T \quad (6.10)$$

Vermenigvuldigen van (6.9) met \underline{v}_l^T en (6.10) met \underline{u}_k , gevolgd door aftrekken van de verkregen uitdrukkingen leidt tot:

$$(\underline{v}_l^T A \underline{u}_k) - (\underline{v}_l^T A \underline{u}_k) = (\lambda_k - \lambda_l) (\underline{v}_l^T \underline{u}_k) \quad (6.11)$$

Indien $\lambda_k \neq \lambda_l$ voor $k \neq l$ volgt dan de orthogonaliteit der eigenvectoren, namelijk:

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_l^T \underline{u}_k &= 0 \\ \underline{v}_l^T A \underline{u}_k &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ voor } l \neq k \quad (6.12)$$

Het matrixproduct $V^T U$ gaat dus over in een $(2n \times 2n)$ diagonaal matrix en omdat de lengte van elke

eigenvektor vrij gekozen mag worden benutten wij een normeringsconditie om deze diagonaalmatrix één-één-duidig vast te leggen, n.l.

$$V^T U = I \quad (6.13)$$

Het eigenwaarde probleem (6.9) kan algemeen nu ook geschreven worden als :

$$AU = U \Lambda \quad (6.14)$$

Voorvermenigvuldiging van (6.14) met V^T levert dan :

$$\boxed{V^T A U = \Lambda} \quad (6.15)$$

De matrix A is dus via de matrix van eigenvektoren V en U diagonaliseerbaar hetgeen een belangrijke eigenschap zal blijken te zijn.

Intermezzo

Aangezien de matrix U regulier is volgt uit (6.14) ook $U^{-1} A U = \Lambda$, dwz $V^T = U^{-1}$. In plaats van een 2^e eigenwaardeprobleem op te lossen kunnen wij dus ook een $(n \times n)$ matrix inverteren. Dat het in feite met een nog geringer inspanning kan blijkt uit het nu volgende. We partitioneren twee eigenvektoren u_k en v_k in twee deelvektoren met elk n componenten, namelijk:

$$u_k = \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{bmatrix} \quad v_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Substitutie van deze vektoren in (6.6) respectievelijk (6.7) leidt dan tot:

$$\begin{array}{l|l} \underline{M}^{-1} \underline{u}_{2k} = \lambda_k \underline{u}_{1k} & \text{(a)} \\ -\underline{K} \underline{v}_{2k} = \lambda_k \underline{v}_{1k} & \text{(c)} \end{array} \quad (6.17)$$

$$-\underline{K} \underline{u}_{1k} - \underline{B} \underline{M}^{-1} \underline{u}_{2k} = \lambda_k \underline{u}_{2k} \quad \text{(b)} \quad \underline{M}^{-1} \underline{v}_{1k} - \underline{M}^{-1} \underline{B} \underline{v}_{2k} = \lambda_k \underline{v}_{2k} \quad \text{(d)}$$

Na enige omwerkingen volgt dan ook:

$$\begin{array}{l|l} \underline{u}_{2k} = \lambda_k \underline{M} \underline{u}_{1k} & \text{(a)} \\ \underline{v}_{1k} = -\frac{1}{\lambda_k} \underline{K} \underline{v}_{2k} & \text{(c)} \end{array} \quad (6.18)$$

$$\lambda_k^2 \underline{M} \underline{u}_{1k} + \lambda_k \underline{B} \underline{u}_{1k} + \underline{K} \underline{u}_{1k} = \underline{0} \quad \text{(b)} \quad \lambda_k^2 \underline{M} \underline{v}_{2k} + \lambda_k \underline{B} \underline{v}_{2k} + \underline{K} \underline{v}_{2k} = \underline{0} \quad \text{(d)}$$

Hieruit volgt dus dat de deelvectoren \underline{u}_{1k} en \underline{v}_{2k} beide oplossingen zijn van het standaard kwadratische eigenwaardeprobleem $[\lambda^2 \underline{M} + \lambda \underline{B} + \underline{K}] \underline{x} = \underline{0}$ en dat dus beide vektoren op een schaalfactor na identiek zijn;

$$\underline{v}_{2k} = \alpha_k \underline{u}_{1k}, \quad \alpha_k \text{ willekeurig} \quad (6.19)$$

Wij krijgen dus voor de totale vektoren \underline{u}_k resp \underline{v}_k :

$$\underline{u}_k = \begin{bmatrix} \underline{u}_{1k} \\ \lambda_k \underline{M} \underline{u}_{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \lambda_k \underline{M} \end{bmatrix} \underline{u}_{1k} \quad (6.20)$$

$$\underline{v}_k = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_k}{\lambda_k} \underline{K} \underline{u}_{1k} \\ \alpha_k \underline{u}_{1k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_k} \underline{K} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \alpha_k \underline{u}_{1k} \quad (6.21)$$

De factor α_k volgt meteen uit het gehanteerde normeringsvoorschrift (6.13), hetgeen leidt tot:

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\underline{u}_k^T [\lambda_k^2 M - K] \underline{u}_k} \quad (6.22)$$

Voor de $(2n \times 2n)$ matrices U en V kan nu geschreven worden:

$$U = \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

waarbij
$$U_1 = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{2n}] \quad (6.24)$$

$$U_2 = M U_1 \Lambda_1 \quad (6.25)$$

$$V_1 = -K U_1 \Lambda_1 \Gamma \alpha_1 \quad (6.26)$$

$$V_2 = U_1 \Gamma \alpha_1 \quad (6.27)$$

Hierbij is $\Gamma \alpha_1$ een $(2n \times 2n)$ diagonaalmatrix bevattende de voor elke mode geldende α_k volgens (6.22)

einde intermezzo

We gaan vervolgens terug naar relatie (6.3) en gaan over op zogeheten natuurlijke coördinaten via de coördinaten transformatie:

$$\underline{y}(t) = U \underline{q}(t) \quad (6.28)$$

Nu volgt na vóórvermenigvuldiging van (6.5) met V^T :

$$\underline{\dot{q}} = \Lambda_1 \underline{q} + V^T \underline{h}(t) \quad (6.29)$$

Wij beperken ons tot harmonische excitatie en de daar noodzakelijkerwijs uit volgende, harmonische respons, via de definities:

$$\left. \begin{aligned} \underline{q}(t) &= \underline{\hat{q}} e^{j\omega t}; & \underline{\eta}(t) &= \underline{\hat{\eta}} e^{j\omega t}; & \underline{y}(t) &= \underline{\hat{y}} e^{j\omega t}, \\ \underline{f}(t) &= \underline{\hat{f}} e^{j\omega t}; & \underline{h}(t) &= \underline{\hat{h}} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} (6.30)$$

dan volgt uit (6.29)

$$\{j\omega \mathbf{I} - \mathcal{A}_1\} \underline{\hat{\eta}} = \mathbf{V}^T \underline{\hat{h}} \quad (6.31)$$

of:

$$\underline{\hat{\eta}} = \{j\omega \mathbf{I} - \mathcal{A}_1\}^{-1} \mathbf{V}^T \underline{\hat{h}} \quad (6.32)$$

Wij hebben daarbij aangenomen dat $j\omega$ niet gelijk is aan één der berekende, complexe eigenwaarden λ_k .
Maken wij gebruik van de definities (6.30) dan kan dit omgewerkt worden tot:

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{q}} \\ j\omega \mathbf{M} \underline{\hat{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \{j\omega \mathbf{I} - \mathcal{A}_1\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{0}} \\ \underline{\hat{f}} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Hieruit volgt:

$$\underline{\hat{q}} = \mathbf{H}(\omega) \underline{\hat{f}} \quad (34)$$

waarbij de transferfunctie matrix $\mathbf{H}(\omega)$ van orde ~~(6.34)~~ wordt gegeven door:

$$\boxed{\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{U}_1 \{j\omega \mathbf{I} - \mathcal{A}_1\}^{-1} \mathbf{V}_2^T} \quad (6.35)$$

Met behulp van (6.27) kan hiervoor ook geschreven worden:

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_k \underline{u}_k \cdot \underline{u}_k^T}{(j\omega - \lambda_k)} \quad (6.36)$$

Dit wordt in de praktijk ook wel genoteerd als:

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{(j\omega - \lambda_k)} \quad (6.37)$$

Men spreekt dan van de polen λ_k en residu-matrices A_k ($k=1, 2, 3, \dots, 2n$). Dit resultaat is identiek met relatie (1.7).

De essentie van het hierna volgende is het uit een aantal frequentieresponsfuncties (elementen van de matrix $H(\omega)$) die in een experimentele situatie zijn bepaald de modale parameters (eigenwaarden en -vectoren of polen en residuen) te berekenen van een diskreet model dat de experimenten zo goed mogelijk simuleert.

Wij gaan daartoe terug naar het homogene deel van vergelijking (6.5). De homogene oplossing hiervan kan geschreven worden als:

$$\underline{y}(t) = e^{At} \underline{y}(0) \quad (6.38)$$

waarbij

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \quad (6.39)$$

Dank zij het feit dat de matrix A diagonaliseerbaar is (zie (6.15)) kan nu ook geschreven worden:

$$\underline{y}(t) = V^{-1} e^{t \Lambda} U \underline{y}(0) \quad (6.40)$$

waarbij $e^{t \Lambda}$ een $(2n \times 2n)$ diagonaalmatrix is met op diagonaal plaats $[k, k]$ het complexe getal:

$$e^{t \Lambda} [k, k] = e^{\lambda_k t} \quad k=1, 2, 3, \dots, 2n \quad (6.41)$$

Een bekende experimentele techniek voor het bepalen van de modale parameters (eigenwaarden λ_k en eigenvectoren \underline{u}_k) is nu gebaseerd op het bepalen van n frequentieresponsfuncties, bijvoorbeeld de frequentieresponsfuncties behorende bij excitatievrijheidsgraad i en responsvrijheidsgraden j ; $i = \text{willekeurig}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Gebruikmakend van het reciprociteits-theorema van Maxwell-Betti kunnen wij deze frequentieresponsfuncties ook associëren met excitatievrijheidsgraden j en responsvrijheidsgraad i ; $j = 1, 2, \dots, n$.

Wij gaan in het volgende uit van n_e excitatie- en n responsvrijheidsgraden zoals zij in de praktijk zullen worden bepaald maar associëren de bepaalde frequentieresponsfuncties met n excitatievrijheidsgraden en n_e responsvrijheidsgraden. In het algemeen zal gelden dat $n_e \ll n$.

De benaderings (curve-fit) - procedure is nu gebaseerd op het vrije trillingsgedrag van de responsvrijheidsgraden (n_e stuks) na het optreden van eenheidsimpulsfuncties in de excitatiepunten. (n stuks). Deze impulsresponsies ($n_e \times n$ stuks) zijn immers de inverse Fouriergetransformeerden van de bepaalde frequentieresponsfuncties.

We gaan dus uit van een bestand van $(n_e \times n)$ impuls-responsfuncties $h_{kl}(t)$, n.l. de respons van vrijheidsgraad k van de konstruktie ($k=1,2,3,\dots,n_e$) tengevolge van een eenheidsimpuls in vrijheidsgraad l van de konstruktie ($l=1,2,3,\dots,n$).

We definiëren de responsvektor $\underline{h}_i(t)$ als:

$$\underline{h}_i(t) = \begin{bmatrix} h_{1i}(t) \\ h_{2i}(t) \\ \vdots \\ h_{n_e i}(t) \end{bmatrix} \quad (n_e \times 1), \quad i=1,2,\dots,n$$

Deze responsvectoren $\underline{h}_i(t)$ zijn door de wijze waarop zij worden bepaald (via een inverse FFT uit frequentieresponsvektor $\underline{H}_i(\omega)$) in een digitale vorm aanwezig. Wij nemen de tijdstapgrootheid weer Δt en definiëren verder:

$$\underline{S} := e^{\Delta t \underline{\Lambda}_1} \quad (2n \times 2n) \quad (6.42)$$

$$\underline{h}_i(k) = n_e\text{-dimensionale responsvektor op } t = k\Delta t; \text{ behorende bij excitatiepunt } i \quad (i=1,2,3,\dots,n). \quad (6.43)$$

Uit (6.40) volgt nu:

$$\underline{h}_i(k) = \underline{F} \underline{S}^k \underline{U} \underline{y}_i(0) \quad (6.44)$$

waarbij \underline{F} een $(n_e \times 2n)$ matrix is welke de met \underline{h}_i

corresponderende rijen van V^T bevat en $\underline{y}_i(0)$ is de systeemvektor op $t=0$, behorende bij een impulsfunctie in vrijheidsgraad i ; $\underline{y}_i(\omega)$ is in principe niet bekend.

Intermezzo. In paragraaf 4.2.1 zijn wij voor de impulsrespons $h_{ij}(t)$ uitgegaan van:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{2n} (V_{ijk} + jW_{ijk}) e^{\lambda_k t}$$

waarbij dus $(V_{ijk} + jW_{ijk})$ element $[i,j]$ van de residumatrix A_k representeert. Vergelijking (6.44) beschrijft een analoge relatie, n.l.

$$h_{ij}(t) = \underline{v}_i^T e^{t \Lambda_j} \underline{r}_j$$

waarbij $\underline{r}_j = \bigcup \underline{y}_j(0)$
Hieruit volgt dan:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{2n} \underline{v}_i[k] \underline{r}_j[k] e^{\lambda_k t}$$

zodat dezelfde relatie ontstaat indien

$$\underline{v}_i[k] \underline{r}_j[k] = V_{ijk} + jW_{ijk}.$$

Verder geldt dat de grootheden X_k uit paragraaf 4.2.1 overeenkomen met de diagonaaltermen van S .

Vervolgens nemen wij aan dat het systeem m relevante modes bezit (complexe eigentrillingsvormen) waarbij veelal m relatief klein is t.o.v. n, en nemen aan dat het dynamisch gedrag met deze modes voldoende nauwkeurig kan worden beschreven. In feite maken wij dan gebruik van een methode genaamd Dynamische reductie. Voor de matrix S krijgen wij dan een (2m × 2m) matrix, n.l. op de diagonaal de m eigenwaarden en de toegevoegd complexe. De matrix U wordt een (2m × 2n) matrix (de korresponderende eigenvektoren en de toegevoegd complexe) en de matrix F wordt een (ne × 2m) matrix. De matrix FS^k heeft dimensie (ne × 2m)

We krijgen dus:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_i(k) \\ (n_e \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ (n_e \times 2m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S^k \\ (2m \times 2m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ (2m \times 2n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{y}_i(b) \\ (2n \times 1) \end{bmatrix}$$

We bepalen nu het kleinste gehele getal p dat voldoet aan $(p \times n_e) \geq 2m$. Een matrix G wordt gedefinieerd als:

$$G = \begin{bmatrix} F \\ FS \\ FS^2 \\ \vdots \\ FS^p \end{bmatrix} \quad (p+1)n_e \times 2m \quad (6.45)$$

Omdat de matrix G tenminste n_e rijen meer heeft dan kolommen bestaat er een $(n_e \times (p+1)n_e)$ matrix Q met rang n_e , zodanig dat

$$Q G = 0 \quad (6.46)$$

In feite volgt uit de keuze voor p en (6.45) dat de matrix G een (linker) nulruimte bezit van dimensie n_e of groter. We kunnen dus altijd minstens n_e vektoren vinden die onafhankelijk zijn en in deze nulruimte liggen, waarmee de matrix Q in principe is gedefinieerd.

We schrijven Q in vierkante, $(n_e \times n_e)$ submatrices $B(s)$:

$$Q = [B(p), B(p-1), \dots, B(2), \dots, B(1), B(0)] \quad (6.47)$$

Zonder beperking van de algemeenheid mag de submatrix $B(0)$ gelijk gesteld worden aan de $(n_e \times n_e)$ eenheidsmatrix. Substitutie van (6.45), (6.47) in (6.46) leidt nu tot:

$$\sum_{s=0}^p B(s) F S^{p-s} = 0 \quad (6.48)$$

Opmerking. Voor $n_e = 1$ (slechts 1 excitatiepunt) volgt $p = 2m$, G is een $(2m+1) \times 2m$ matrix, Q een $1 \times (2m+1)$ matrix en $B(s)$ een (1×1) matrix. Relatie (6.48)

We krijgen dan:

$$\sum_{s=0}^{2m} b_s F S^{2m-s} = 0$$

met $F = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_{2m}]$ volgen hieruit nu $2m$ vergelijkingen, n.l.

$$\sum_{s=0}^{2m} b_s f_k (e^{\lambda_k \Delta t})^{2m-s} = 0 \quad \text{voor } k=1, 2, \dots, 2m.$$

Dit zijn polynoom uitdrukkingen die volledig analoog zijn aan de in paragraaf (4.2.1) gepresenteerde uitdrukking, n.l. (4.14)

Uit (6.44) en (6.48) volgt nu:

$$\sum_{s=0}^p B(s) \underline{h}_i(p-s+k) = \left[\sum_{s=0}^p B(s) F S^{p-s} \right] S^k \underline{u}_{y_i(0)} \quad (6.49)$$

Onafhankelijk van excitatievrijheidsgraad i ($i=2, 3, \dots, n$) en van tijdsintervalparameter k volgt dus:

$$\boxed{\sum_{s=1}^p B(s) \underline{h}_i(p-s+k) = -\underline{h}_i(p+k)} \quad (6.50)$$

Relatie (6.50) geeft aan dat de kolom van vrijheidsgraden \underline{h}_i ($n_e \times 1$), behorende bij tijdsinterval $(p+k)$, geschreven kan worden als een lineaire combinatie van de kolommen van vrijheidsgraden \underline{h}_i , behorende bij de p daaraan voorafgaande tijdsintervallen. Daarmee is deze relatie de uitgebreidere vorm van de eerder afgeleide relatie (4.19).

Door nu excitatieplaats i en tijdsintervalparameter k

in (6.50) te variëren, dus voor ($i=1, 2, \dots, n$) en $k=0, 1, 2, \dots, n_e$), ontstaat het volgende stelsel vergelijkingen:

$$B[\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n] = -[R_1, R_2, \dots, R_n] \quad (6.51)$$

waarbij :

$$R_i = [\underline{h}_i(p), \underline{h}_i(p+1), \underline{h}_i(p+2), \dots] \quad (6.52)$$

$(n_e \times k_e)$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \underline{h}_i(p-1), \underline{h}_i(p), & \dots \\ \underline{h}_i(p-2), \underline{h}_i(p-1), & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \underline{h}_i(0), \underline{h}_i(1), & \dots \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

$((p \times n_e) \times k_e)$

$$B = [B(1), B(2), \dots, B(p)] \quad ((p \times n_e) \times k_e) \quad (6.54)$$

Hierbij is (k_e+1) het aantal malen dat men relatie (6.50) opschrijft. Deze kan in principe willekeurig groot gekozen worden maar hangt wel af van het beschikbare aantal datapunten. In het algemeen zal het stelsel (6.51) overbepaald zijn zodat een kleinste kwadratenoplossing uitkomst zal moeten bieden. Wij schrijven daartoe (6.51) als :

$$B^T \Pi = -R \quad (6.55)$$

$(n_e \times p \cdot n_e) \cdot (n_e \cdot p \times n \cdot k_e) = (n_e \times n \cdot k_e)$

Wij wensen nu B zo te bepalen dat :

$$[BT+R][BT+R]^T \quad (6.56)$$

minimaal wordt. Dit zal het geval zijn indien

$$BTT^T + RT^T = 0 \quad (6.57)$$

ofwel:

$$B \left[\sum_{i=1}^n T_i T_i^T \right] = - \sum_{i=1}^n R_i T_i^T \quad (6.58)$$

$$(n \times p \cdot n_e) (p \cdot n_e \times p \cdot n_e) = (n_e \times p \cdot n_e)$$

Eenvoudig kan nagegaan worden dat de uitdrukkingen $T_i T_i^T$ en $R_i T_i^T$ diskrete representaties zijn van auto- en cross correlatie functies, behorende bij de elementen van de vektoren $\underline{h}_i(t)$. Deze functies kunnen efficiënt bepaald worden indien wij weer gebruik maken van FFT algoritmen (Zie ook paragraaf 4.2.2). Uit (6.58) kan dus de matrix B op een-eenduidige manier worden bepaald.

Voor het bepalen van resonantie frequenties en dempingswaarden (dus de complexe eigenwaarden λ_k) gaan wij terug naar (6.48) en beschouwen enkel de l^e kolom ($l = 1, 2, 3, \dots, 2m$), welke geschreven kan worden als:

$$\left[\sum_{s=0}^P B(s) S_l^{p-s} \right] F_l = 0 \quad (6.59)$$

Hierbij is:

$$S_l = e^{\lambda_l \Delta t}, \text{ het } l^{\text{e}}\text{-diagonaalelement van } S; \text{ de } l^{\text{e}} \text{ relevante eigenwaarde dus,}$$
$$\underline{F}_l = \text{de } l^{\text{e}} \text{ kolom van } \underline{F}$$

Wij krijgen dus:

$$\left[\underline{I} e^{\lambda_l p \Delta t} + B(1) e^{\lambda_l (p-1) \Delta t} + \dots + B(p-1) e^{\lambda_l \Delta t} + B(p) \right] \underline{F}_l = 0 \quad (6.60)$$

$$l = 1, 2, \dots, 2m.$$

Wij zoeken een oplossing $\underline{F}_l \neq 0$ hetgeen enkel kan indien de coëfficiëntenmatrix in het linkerlid singulier is. Het eisen dat de determinant van deze matrix nul moet zijn levert oplossingen voor λ_l ($l=1, 2, \dots, 2m$) en korresponderende eigenvectoren \underline{F}_l . Indien deze coëfficiëntenmatrix bij invulling van één der gevonden oplossingen λ_l een rangvermindering heeft van 1 hebben wij te maken met een enkelvoudige eigenwaarde. Bij een rangvermindering $r > 1$ en $r < n_e$ geeft deze rangvermindering meteen de multipliciteit aan van de gevonden eigenwaarde. Ook dan kan een volledige set van onderling orthonormale eigenvectoren \underline{F}_l worden bepaald. Voor $n_e = 1$ (slechts één enkele excitatievrijheidsgraad) is (6.60) identiek met de eerder gehanteerde polynoom uitdrukking (4.14)

Voor het bepalen van de modale verplaatsingen gaan

wij terug naar (6.44) waar direkt uit volgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{h}_i(0) \\ \underline{h}_i(1) \\ \vdots \\ \underline{h}_i(k_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{F} \underline{S} \\ \vdots \\ \underline{F} \underline{S}^{k_e} \end{bmatrix} \cdot \underline{U} \cdot \underline{y}_i(0) \quad (6.61)$$

$(k_e \cdot n_e \times 1) \quad (k_e \cdot n_e \times 2m) \quad (2m \times 1)$

Uit deze vergelijking kan direkt of via een kleinste kwadratenalgoritme de kolom $\underline{r}_i = \underline{U} \underline{y}_i(0)$ worden berekend voor $i=1, 2, \dots, n_e$. Omdat \underline{F} reeds bekend is kunnen dan de coëfficiënten van elke exponentiële functie in de impulsrespons (6.44) dan worden bepaald. Dit zijn dan de z.g. residuen of modale verplaatsingen. Dit is weer een proces wat analog is aan de door relatie (4.25) beschreven vergelijkingen

Indien de vektoren \underline{r}_i uit (6.60), behorende bij een meervoudige wortel zo gekozen zijn dat zij lineair onafhankelijk zijn kan aangebond worden dat de residu berekening via (6.61) consistente informatie oplevert voor de bepaling van alle modes, behorende bij die meervoudige wortel.

Bovendien geldt dat men uit (6.61) n_e schatters bepaald voor elke mode shape, elke geschaald om de respons weer te geven na een impuls in de betreffende excitatie vrijheidsgraad.