Methode van Grammel voor het onderzoek naar de spanningsverdeling bij roterende schijven met sprongsgewijs veranderende dikte

I. - opdracht

D.P. Baayen.

Methode van Grammel voor het onderzoek naar de spanningsverdeling bij roterende schijven met sprongsgewijs veranderende dikte

Experiment: Rekstrookmeting.

September 1968

Inhoud

Inleiding.

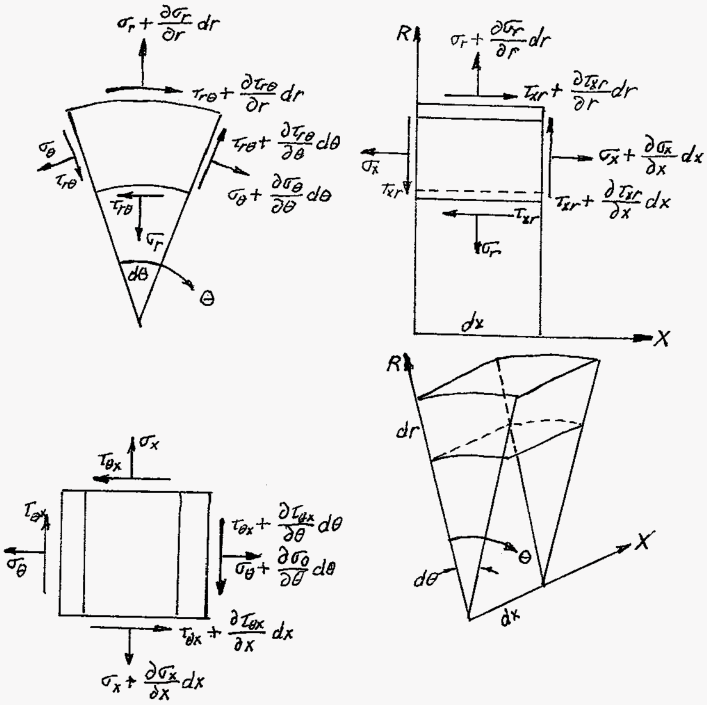
Heeft de als homogeen aangenomen schijf overal dezelfde dikte en zijn de randkrachten zowel aan de binnenkant als aan de buitenkant gelijkmatig verdeeld en zijn er verder geen volume krachten aanwezig, dan heeft men exact met een twee dimensionale spanningstoestand te doen. Als aan deze voorwaarden niet voldaan is, dus zijn b.v. de volume krachten aanwezig in de vorm van centrifugaal krachten t.g.v. rotatie dan kan men een benadering vinden door het probleem als twee dimensionaal te beschouwen.

Wij stellen dat de afgeleide van de hoeksnelheid konstant is en we leggen in het midden van de schijf een draaiend assenstelsel aan met een hoeksnelheid gelijk aan die van de schijf. In dit stelsel staat de schijf dus stil. We zijn dan instaat om de d'Alembert krachten als volume krachten in te voeren.

De invloed van de zwaartekracht wordt verwaarloosd.

I Het niet-uniforme spanningsbeeld

De evenwichtsvergelijkingen in cilindercoördinaten.



De volumekrachten zijn R, Θ en X in de R, Θ en X richting.

Het evenwicht van de afzonderlijke stukken is:

opm. De volumekrachten worden verondersteld in het midden van de infinitesele deeltjes aan te grijpen.

$$0 = \sum K_R = R\,dr\,dx\left[\frac{r\,d\theta + (r+dr)\,d\theta}{2}\right] + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)\,d\theta\,dx$$
$$- \sigma_r\, r\,d\theta\,dx - \sigma_\theta\,dr\,dx \sin\tfrac{1}{2}d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}d\theta\right)dr\,dx\sin\tfrac{1}{2}d\theta +$$
$$+\left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}d\theta\right)dr\,dx - \tau_{r\theta}\,dr\,dx + \left(\tau_{rx} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x}dx - \tau_{rx}\right)\left[\frac{r\,d\theta + (r+dr)\,d\theta}{2}\right]dr$$

We veronderstellen nu dat we de termen met de orde groter dan $dx\,dr\,d\theta$ mogen verwaarlozen.

Bovengenoemde evenwichtsvergelijking gaat dan over in:

$$R\,r + r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} = 0 \qquad \text{I-1}$$

waarbij verder nog gesteld wordt dat $\sin\frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}d\theta$ voor kleine waarde van θ

Evenwicht in θ-richting.

$$\sum K_\theta = 0 = \theta r dr d\theta dx + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) dr dx - \sigma_\theta dr dx +$$
$$+ \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr\right)(r+dr) d\theta dx - \tau_{r\theta} \cdot r d\theta dx +$$
$$+ \tau_{r\theta} \sin \tfrac{1}{2} d\theta \cdot dr dx + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta\right)\left(\sin \tfrac{1}{2} d\theta dr dx\right)$$
$$+ \left(\tau_{\theta x} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} dx - \tau_{\theta x}\right)\left[\frac{r d\theta + (r+dr) d\theta}{2}\right] dr$$

Met dezelfde beperkingen als boven genoemd wordt deze evenwichtsvergelijking:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \theta = 0 \qquad \text{I-2}$$

Evenwicht in X-richting:

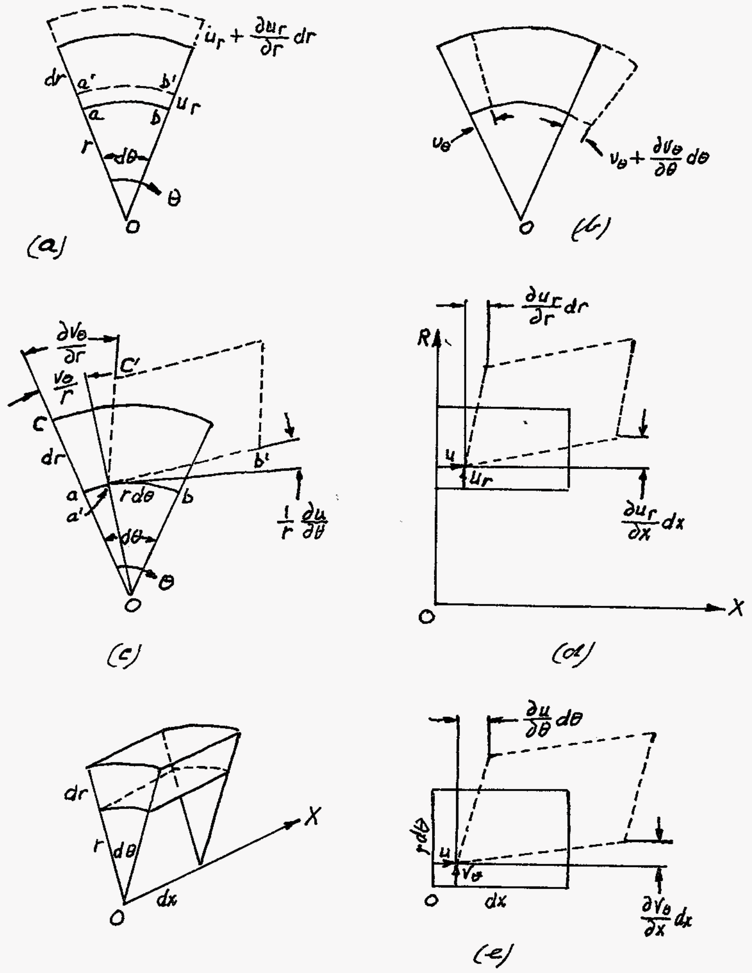
$$\sum K_x = 0 = X r dr d\theta dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right)\left(\frac{r d\theta + (r+dr) d\theta}{2}\right) dr$$
$$+ \left(\tau_{\theta x} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta\right) dr dx - \tau_{\theta x} dr dx + \left(\tau_{rx} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} dr\right)(r+dr) d\theta dx$$
$$- \tau_{rx} \cdot r d\theta dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} + X = 0 \qquad \text{I-3}$$

De algemene evenwichtsvergelijkingen in cilindercoördinaten zijn dus:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + R = 0 \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \theta = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} + X = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{I-4}$$

II De rekvergelijkingen in cylindercoördinaten



De rek in de R-richting is volgens bovenstaande figuur:

$$\varepsilon_r = \frac{u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} \cdot dr - u_r}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \text{II-1}$$

In θ-richting:

Uit de figuur kunnen we zien dat een zuivere radiale verplaatsing een rek in de θ-richting veroorzaakt. De lengte a-b van het elementje was oorspronkelijk $r d\theta$ maar na de radiale verplaatsing u_r is het stukje a'b' de nieuwe plaats en dus zijn nieuwe lengte $(r + dr) d\theta$

De tangentiele rek is dus ten gevolge van de radiale verplaatsing:

$$\varepsilon_{\theta_1} = \frac{(r+u_r)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u_r}{r}$$

De tangentiële verplaatsing V_θ veroorzaakt ook nog een tangentiale rek van:

$$\varepsilon_{\theta_2} = \frac{V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.d\theta - V_\theta}{r\,d\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

⇒ De totale tangentiale rek is dus:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \qquad \text{II-2}$$

De rek in de x-richting is:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{II-3}$$

De afschuifrek wordt gevonden door het verschil tussen de hoek cab en c'a'b' (zie figuur c)

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \qquad \text{II-4}$$

De eerste term komt van de verandering in de radiale verplaatsing u_r in tangentiale richting; de tweede term komt van de verandering in de tangentiale verplaatsing V_θ in radiale richting; de laatste term verschijnt omdat de helling verandering van de lijn a'c' tengevolge is van de rotatie van het element als star lichaam om de as door O

Evenzo vindt men:

$$\gamma_{\theta x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta}.d\theta}{r\,d\theta(1+\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta})} + \frac{\frac{\partial V_\theta}{\partial x}.dx}{dx(1-\frac{\partial u}{\partial x})} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial x} \qquad \text{II-5}$$

$$\gamma_{xr} = \frac{\frac{\partial u_r}{\partial x}.dx}{dx(1+\frac{\partial u}{\partial x})} + \frac{\frac{\partial u}{\partial r}.dr}{dr(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\,dr)} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \text{II-6}$$

De vlakke schijf

Exact genomen kan een spanningstoestand, waarbij volumekrachten zoals centrifugaalkrachten aanwezig zijn bij een elastisch lichaam nooit twee dimensionaal zijn. Maakt men echter de plausibele aanname, dat in een schijf geen enkele schuifspanning of wel zeer kleine schuifspanningen aanwezig zijn op de vlakelementen, die evenwijdig zijn met het middenvlak van de schijf en dat verder de optredende spanningen onafhankelijk zijn van de richting x, de richting van de as van de zeer dunne schijf, dan verkrijgt men een goede benadering van een vlakspanningstoestand.

Omdat $\ddot{x}=0$ geldt $X=0$ en omdat het buitenvlak van de schijf onbelast is geldt verder:

$\sigma_x=0$ en $\tau_{x\theta}=\tau_{xr}=0$. Doordat de schijf dun is gelden de aannames voor σ_x, $\tau_{x\theta}$ en τ_{xr} ook binnen in de schijf.

Uit II-4 volgt dan:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}+\Theta=0$$

De schijf roteert met een constante hoeksnelheid $\dot{\theta}$ en geldt dus $\Theta=0$ en $R=\rho\omega^2 r$ met $\rho=$ massa per volume eenheid.

Omdat de schijf homogeen is, is ρ onafhankelijk van θ dus ook $\rho\omega^2 r$ is onafhankelijk van θ. We hebben dus met een rotatie symmetrische belasting te doen.

Dit houdt in dat **de** afgeleiden naar θ niet bestaan. Bovendien geldt tevens tengevolge van de symmetrie dat de schuifspanning $\tau_{r\theta} = 0$

De evenwichtsvergelijkingen worden nu:

$\tau_{r\theta} = 0$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0$$

ofwel: $\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 r^2 = 0$ III-1

Het oplossen van deze differentiaalvergelijking gaat als volgt in zijn werk.

Voer een spanningsfunctie Φ in zodanig dat aan bovenstaande evenwichtsvoorwaarde voldaan wordt

Dus stel $\sigma_r = \frac{\Phi}{r}$ en $\sigma_\theta = \frac{d\Phi}{dr} + \rho\omega^2 r^2$ III-2

De rekvergelijkingen worden met $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$

$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}$; $\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$ III-3 $\longrightarrow$ $\varepsilon_r = (r\varepsilon_\theta)'$

De wet van Hooke op dit systeem toegepast wordt:

$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)$; $\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$ III-4

Uit III-3 volgt:

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{r}\varepsilon_r - \frac{\varepsilon_\theta}{r}$$

$\Rightarrow \varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0$ III-5

Substitueer III-4 in III-5

$$\Rightarrow (1+\nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) + r\left(\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu\frac{d\sigma_r}{dr}\right) = 0$$

Deze vergelijking noemt men de compatibiliteits-vergelijking uitgedrukt in de spanningen.
Deze vergelijking kan omgezet worden in een spanningsfunctie vergelijking door hierin de voorwaarde III-2 te substitueren.

Dit wordt:

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + r\frac{d\phi}{dr} - \phi + (3+\nu)\rho\omega^2 r^3 = 0$$

Beschouw eerst de homogene vergelijking

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + r\frac{d\phi}{dr} - \phi = 0$$

Stel $\phi_1 = Ar^p$

$$\Rightarrow$$

$$r^2 . p(p-1).A.r^{p-2} + r.p.A.r^{p-1} - Ar^p = 0$$

$$p(p-1)r^p + pr^p - r^p = 0$$

$$p^2 - p + p - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 1 \text{ en } p_2 = -1$$

Dus $\phi_1 = A_1 r + A_2 \cdot \frac{1}{r}$

Een particuliere oplossing is:

$$\phi_2 = -\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\rho\omega^2 r^3$$

$$\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2 = A_1 r + \frac{A_2}{r} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^3$$

Ingevuld $\sigma_r = \frac{\phi}{r} = A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$

$$\sigma_\theta = \frac{d\phi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{3}{8}(3+\nu)\rho\omega^2 r^2 + \rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

De constanten A_1 en A_2 worden bepaald door de randvoorwaarden.

De verplaatsingen zijn:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) = \frac{1}{E}\left[A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 - \nu A_1 - \frac{\nu A_2}{r^2} + \nu\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\rho\omega^2 r^2\right]$$

$$u_r = \frac{r}{E}\left[A_1(1-\nu) - \frac{A_2}{r^2}(1+\nu) - \frac{1-\nu^2}{8}\cdot\rho\omega^2 r^2\right]$$

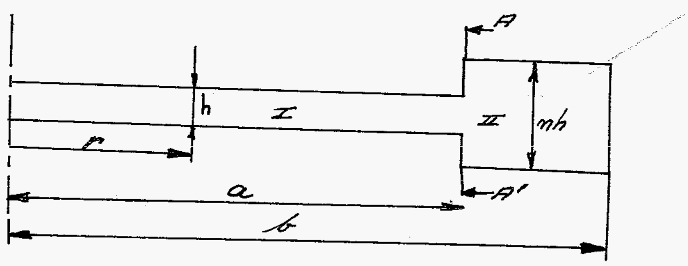
IV De gatloze schijf met getrapte dikte

Het door ons beschouwde geval is een schijf die in het midden massief is en aan de buitenkant plotseling overgaat in een bredere ring.
Omdat de spanningen voor $r=0$ niet oneindig kunnen worden (n.l. elastisch lichaam dat continu vervormt) moet $A_2 = 0$ zijn.

$$\Rightarrow \quad \sigma_r = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$u_r = \frac{r}{E}\left[A_1(1-\nu) - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 r^2\right]$$

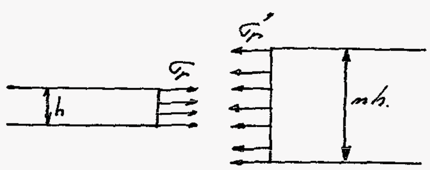


Men kan voor het bepalen van dit probleem verschillende benaderingen volgen.
In de eerste plaats zou men de krans kunnen beschouwen als een rotatorisch symmetrische schijf die daar verbonden is in de doorsnede A-A' met de massieve schijf I.
Zou men aannemen dat de spanning in de doorsnede A-A' discontinu kan veranderen t.g.v. de dikte verandering en neemt men aan dat de radiale verplaatsing in $r = a$ voor

schijf I en II dezelfde zijn dan is men instaat mede door de voorwaarde dat het radiale evenwicht over de twee delen moet blijven gelden, de spanningen in I en II te bepalen.

Men moet dit als volgt zien:

Links van de doorsnede A-A' is de spanning σ_r per hoekeenheid constant over de dikte (vlakspanningstoestand)
Aan de rechterkant van A-A' wordt de dikte n.h met als gevolg dat σ_r plotseling moet dalen met factor n. opdat aan het radiale evenwicht nog voldaan wordt.
In werkelijkheid kunnen in elastische lichamen geen discontinuïteiten in de spanningen optreden omdat anders de schuifspanningen die op deze vlakken werken met discontinue trekspanningen oneindig groot moeten worden.



Radiaal evenwicht op beide stukken voor $r=a$

$$\sigma_r . h . r\,d\theta = \sigma_r' . n . h . r\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_a' = \frac{1}{n}\sigma_a$$

Voor schijf II geldt als op de zelfde manier als bovengenoemd is afgeleid de formule:

$$\sigma_r = A_1' + \frac{A_2'}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1' - \frac{A_2'}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

Voor $r=b$ geldt $\sigma_r = 0$

$\Rightarrow$

$$0 = A_1' + \frac{A_2'}{b^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 \Longrightarrow A_1' = -\frac{A_2'}{b^2} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2$$

Dus $\sigma_r = A_2'\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(r^2 - b^2)$

$$\sigma_\theta = -A_2'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \rho\omega^2\left(\frac{1+3\nu}{8}r^2 - \frac{3+\nu}{8}b^2\right)$$

Verder geldt voor de schijf II voor de rek ε_θ

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

$$= \frac{1}{E}\left[-A_2'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu}{b^2}\right) - \rho\omega^2\left(\frac{1+3\nu}{8}r^2 - \frac{3+\nu}{8}b^2\right) + \left(\frac{3+\nu}{8}\right)\nu\rho\omega^2(r^2 - b^2)\right]$$

$$\frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}\left[-\frac{A_2'}{r^2}(1+\nu) - \frac{A_2'}{b^2}(1-\nu) - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2 + \nu r^2 - \nu b^2)\right]$$

$$\frac{u_r}{r} = \frac{1}{E}\left[-\frac{A_2'}{r^2}(1+\nu) - \frac{A_2'}{b^2}(1-\nu) + \rho\omega^2 r^2\left(\frac{\nu^2-1}{8}\right) + \rho\omega^2 b^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)(1-\nu)\right]$$

Nu moet tengevolge van de aansluiting van schijf I en II voor $R=a$ gelden:

$$u_{r_I} = u_{r_{II}} \Rightarrow \frac{u_{r_I}}{r} = \frac{u_{r_{II}}}{r} = \varepsilon_{\theta_I} = \varepsilon_{\theta_{II}}$$

$$\frac{1}{E}\left[A_1(1-\nu) - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 a^2\right] = \frac{1}{E}\left[-\frac{A_2'}{a^2}(1+\nu) - \frac{A_2'}{b^2}(1-\nu) + \rho\omega^2 a^2\left(\frac{\nu^2-1}{8}\right) + \rho\omega^2 b^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)(1-\nu)\right]$$

$\rightarrow$

$$-A_2'\left(\frac{1+\nu}{a^2} + \frac{1-\nu}{b^2}\right) = A_1(1-\nu) - \frac{1-\nu^2}{8}\rho\omega^2 a^2 - \rho\omega^2 a^2\left(\frac{\nu^2-1}{8}\right) - \rho\omega^2 b^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)(1-\nu)$$

$$= (1-\nu)\left(A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\right)$$

$$A_2' = \left(A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\right)\cdot\frac{a^2 b^2(\nu-1)}{b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)} \qquad \text{IV-1}$$

Bovendien geldt voor $r = a$:

$$\sigma_r' = \frac{1}{n}\sigma_r$$

Voor schijf II geldt:

$$\sigma_r = A_2'\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \rho\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r^2 - b^2\right)$$

Voor $r = a$

$$\sigma_r'(a) = \frac{1}{n}\sigma_r(a) = A_2'\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 - b^2\right)$$

$$A_2' = \left[\frac{1}{n}\sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 - b^2\right)\right]\cdot\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \qquad \text{IV-2}$$

Met gelijkstellen van IV-1 en IV-2 volgt:

$$\left(A_2 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\right)\cdot\frac{a^2 b^2}{b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)} = \left\{\frac{1}{n}\sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 - b^2\right)\right\}\cdot\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\frac{A_1(\nu-1)}{b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)} = \left\{\frac{1}{n}\sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 - b^2\right)\right\}\cdot\frac{1}{b^2 - a^2} + \\ + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\left(\frac{\nu - 1}{b^2 + a^2 + \nu(b^2 - a^2)}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$A_1 = \left\{\frac{1}{n}\sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a^2 - b^2\right)\right\}\left\{\frac{b^2(1+\nu) + a^2(1-\nu)}{(\nu-1)(b^2 - a^2)}\right\} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2 \qquad \text{IV-3}$$

Verder geldt voor schijf I voor $r = a$:

$$\sigma_r(a) = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 \qquad \text{IV-4}$$

Substitueert IV-4 in IV-3

$$A_1 = \left\{\frac{1}{n} A_1 - \frac{3+\nu}{8n}\rho\omega^2 a^2 + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2-b^2)\right\}\left\{\frac{b^2(1+\nu)+a^2(1-\nu)}{(\nu-1)(b^2-a^2)}\right\} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2$$

$$A_1\left[1-\frac{1}{n}\left\{\frac{b^2+a^2}{(\nu-1)(b^2-a^2)}+\frac{\nu}{\nu-1}\right\}\right] = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left\{\left(a^2-b^2-\frac{a^2}{n}\right)\left(\frac{b^2+a^2}{(\nu-1)(b^2-a^2)}+\frac{\nu}{\nu-1}\right)\right\} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2$$

<u>Stel</u> $\frac{b^2+a^2}{(\nu-1)(b^2-a^2)}+\frac{\nu}{\nu-1} = q$

$$\rightarrow \quad A_1 = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left[\left(a^2-b^2-\frac{a^2}{n}\right)q + b^2\right]\cdot\frac{n}{n-q}$$

Stel nu verder:

$$f_1(n) = \left\{\left(\frac{na^2-nb^2-a^2}{n}\right)q+b^2\right\}\cdot\frac{n}{n-q}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 f_1(n)$$

De spanningsverdeling in schijf I wordt dan:

$$\sigma_r = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

Hierbij is A_1 een grootheid die alleen afhangt van de dimensie van de schijf en van zijn hoeksnelheid.

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left\{f_1(n) - r^2\right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 f_1(n) - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

Spanningsverdeling voor schijf I zonder gat in het midden

$0 \le r \le a$

Voor schijf II geldt:

$$A_2' = \left(A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 b^2\right)\left\{\frac{a^2b^2(\nu-1)}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\right\}$$

$$A_2' = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left[f_1(n) - b^2\right]\cdot\left\{\frac{a^2b^2(\nu-1)}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\right\}$$

Stel nu $f_2(n) = \left\{f_1(n) - b^2\right\}\left\{\frac{a^2b^2(\nu-1)}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\right\}$

$\Rightarrow$ $$A_2' = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 f_2(n)$$

De spanningen in schijf II zijn dan:

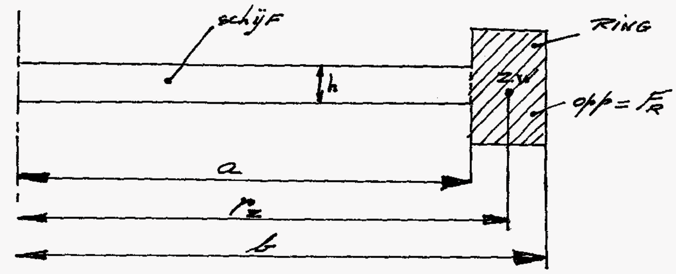
$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left\{f_2(n)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) - (r^2 - b^2)\right\}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 f_2(n)\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2}\right\} - \rho\omega^2\left\{\frac{1+3\nu}{8}r^2 - \frac{3+\nu}{8}b^2\right\}$$

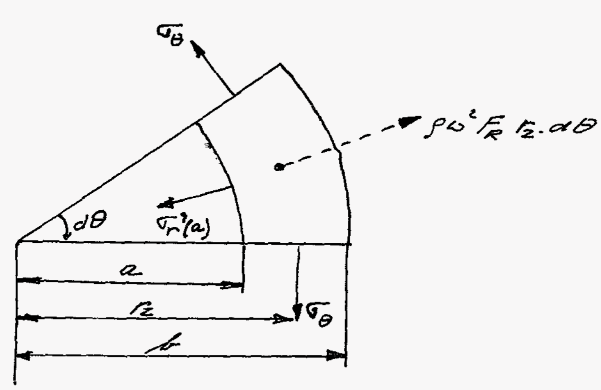
Geldt voor $a < r \leq b$

V Een eenvoudige benadering van het probleem

We beschouwen nu het geval dat de ring werkelijk als ring opgevat kan worden. Dit geldt als de ring aan de voorwaarde voldoet van $\frac{b-a}{b} \ll 1$



Gezocht wordt nu naar de radiale spanning $\sigma_r(a)$ aan de buitenrand van de schijf om als 2e randvoorwaarde de algemene spanningsuitdrukking in de schijf te bepalen.
Het doorsnede oppervlak van de ring is $F_R = (b-a).m.h.$
De straal r_z is de afstand van het zwaartepunt van de ring tot de rotatie as.
Beschouw nu het radiale evenwicht van een ring element met een middelpuntshoek $d\theta$



Het radiale evenwicht is:

$$n.h.\sigma_r^{\prime}(a).a\,d\theta + \overline{\sigma_\theta}.F_R.d\theta = \rho\omega^2 F_R\,d\theta.r_z^2 \qquad \text{V-1}$$

Hierbij is $\overline{\sigma_\theta}$ de gemiddelde waarde van de tangentiële spanning in de ring.

De radiale spanning in de schijf is aan de rand $\sigma_r(a)$. Bij de overgang van de schijf op de ring zakt deze radiale spanning t.g.v. de verbreding van de ring van $\sigma_r(a)$ in $\sigma_r^{\prime}(a)$ en wel zodanig dat geldt: $\sigma_r(a) = n.\sigma_r^{\prime}(a)$

Daar het product $r_z.F_R$ van dezelfde grootte orde is als $a.F_R$ mag aangenomen worden dat de waarde van $\sigma_r^{\prime}(a)$ niet al te veel verschilt met $\overline{\sigma_r}$ dat de gemiddelde waarde van de radiale spanning van de ring is, dus $\sigma_r^{\prime}(a) \simeq \overline{\sigma_r}$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\sigma_r} = \frac{1}{n}\sigma_r(a) \qquad \text{V-2}$$

Met deze gemiddelde waarde van $\overline{\sigma_\theta}$ en $\overline{\sigma_r}$ kan de gemiddelde vergroting van r_z bepaald worden.

n.l.
$$\bar{u}_z = \frac{r_z}{E}\left(\overline{\sigma_\theta} - \nu\overline{\sigma_r}\right) \qquad \text{V-3}$$

Dit geeft met behulp van V-1 en V-2:

Uit V-1 volgt:

$$\overline{\sigma_\theta} = \rho\omega^2 r_z^2 - n.h\,\sigma_r^{\prime}(a).\frac{a}{F_R} = \rho\omega^2 r_z^2 - n.h\,\overline{\sigma_r}.\frac{a}{F_R} = \rho\omega^2 r_z^2 - h\sigma_r(a).\frac{a}{F_R}$$

Dit resultaat in V-3

$$\bar{u}_z = \frac{r_z}{E}\left[\rho\omega^2 r_z^2 - \sigma_r(a)\left(\frac{h.a}{F_R} + \frac{\nu}{n}\right)\right]$$

Aan de andere kant is de vergroting u_r van de schijf bij $r=a$ door de vergelijking:

$$u_r = \frac{a}{E}\left[A(1-\nu) - \frac{\nu-1}{4}\rho\omega^2 a^2\right]$$ bekend.

Bepaling van A:

$$\sigma_r = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

voor $r=a$ dan $\sigma_r = \sigma_r(a)$

$$\sigma_r(a) = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 \Longrightarrow A_1 = \sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2$$

Dan:

$$u_r(a) = \frac{a}{E}\left[(1-\nu)\left(\sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2\right) - \frac{\nu-1}{4}\rho\omega^2 a^2\right]$$

$$u_r(a) = \frac{a}{E}\left[(1-\nu)\sigma_r(a) - \frac{1}{8}(\nu+5)(\nu-1)\rho\omega^2 a^2\right]$$

Daar de verbrede voet van de ring in radiale richting een grote stijfheid heeft dan mag men aannemen dat de radiale rek van de ring zeer klein is d.w.z. dat het verschil van $r_z - a$ bij de vervorming van de ring zo goed als het zelfde blijft. Men mag dan als eerste benadering veronderstellen dat $u_z = u_r(a)$

$\Longrightarrow$

$$\frac{r_z}{E}\left[\rho\omega^2 r_z^2 - \sigma_r(a)\left(\frac{h.a}{F_R} + \frac{\nu}{m}\right)\right] = \frac{a}{E}\left[(1-\nu)\sigma_r(a) - \frac{1}{8}(\nu+5)(\nu-1)\rho\omega^2 a^2\right]$$

$$\sigma_r(a)\left[\frac{h.a}{F_R} + \frac{\nu}{m} + \frac{a}{r_z}(1-\nu)\right] = \omega^2\left[\rho r_z^2 + \frac{1}{8r_z}(\nu+5)(\nu-1)\rho a^2\right]$$

$\Longrightarrow$

$$\sigma_r(a) = \frac{\rho\omega^2\left[r_z^2 + \frac{1}{8r_z}(\nu+5)(\nu-1)a^2\right]}{h\frac{a}{F_R} + \frac{\nu}{m} + \frac{a}{r_z}(1-\nu)} \qquad \text{IV-4}$$

met $F_R = (b-a).n.h$ en $r_z = a + \left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$

Dit is dus de gezochte uitdrukking van $\sigma_r(a)$ als functie van de dimensie van de schijf.

De spanningen in de schijf worden dan.

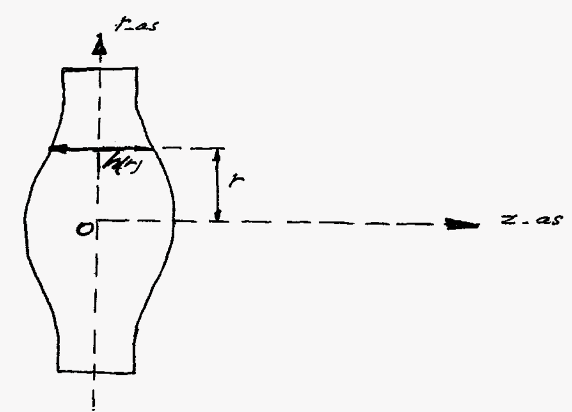
V-5

$$\sigma_r = \sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 = \sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2 - r^2)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r(a) + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 = \sigma_r(a) + \rho\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}a^2 - \frac{1+3\nu}{8}r^2\right)$$

VI Afleiding van de methode van Grammel door middel van het principe der minimale potentiële energie

We beperken ons zoals reeds eerder is vermeld tot dunne rotatorisch symmetrische schijven waarvan de dikte willekeurig een functie van de straal is



Als coördinaten nemen we cilindercoördinaten met als straal r en hoek θ. Loodrecht op het vlak door r en θ nemen we de z-as

Noem de verplaatsingen in resp. r, θ en z-richting

u_r, v_θ en w_z

Dan geldt:

$$u_r = u(r)$$
$$v_\theta = v(r)$$
$$w_z = w(z)$$

Geen functie van θ t.g.v. de rotatie symmetrie ; $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$

De verplaatsingen van het rotatiemiddelpunt O zijn nul genomen daar de verplaatsing van het lichaam als star geheel van geen belang is ; $u_0 = v_0 = w_0 = 0$

Verder kan opgemerkt worden dat de verplaatsing in z-richting dus $w(z)$ te verwaarlozen klein is t.o.v. u en v omdat de schijf dun is in vergelijking met zijn diameter. Uit ons verplaatsingsveld kunnen we vervolgens het vervormingsveld bepalen. Dit is reeds gedaan op blad 2.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

De bijdrage van $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ voor de berekening van de elastische energie laten we weg, daar we de theorie specifieeren voor kleine schijfdikten.

Voor de hoekveranderingen beschouwen we:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0$$

stel $\frac{\partial}{\partial r} = \dot{\ldots}$

Met de gevonden ε's en γ's gaan we de elastische energie berekenen

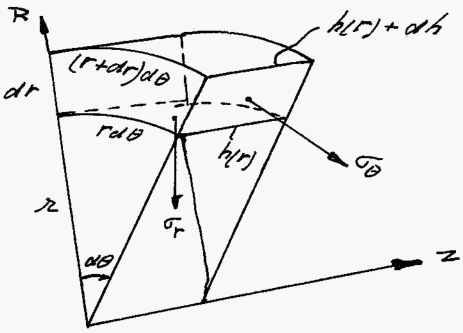
A = elastische energie van de schijf.

V = volume van de schijf.

Daar ten gevolge van de symmetrie $\tau_{r\theta}$ nul moet zijn geldt dus ook $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0$

→ De bijdrage van de afschuifhoek tot de elastische energie is dus nul.

$A = A_\varepsilon$



Voor de bepaling van de elastische energie nemen we als eerste benadering grootheden van de eerste orde. Termen als $(dr)^2 d\theta dt$ enz. verwaarlozen we.

De definitie van elastische energie luidt in formule:

$A = \frac{1}{2}\sigma_i u_i$

Verder geldt:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right) \qquad \text{en} \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \mathring{u}_r$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r\right) \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\mathring{u}_r + \nu\frac{u_r}{r}\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u_r}{r} + \nu\mathring{u}_r\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{VI-1}$$

$\rightarrow$

$$dA = \tfrac{1}{2}\sigma_r \cdot h\,r\,d\theta\,dr \cdot \mathring{u}_r + \tfrac{1}{2}\sigma_\theta \cdot h\,dr \cdot r\,d\theta \cdot \frac{u_r}{r} = \tfrac{1}{2}h\,r\,d\theta\,dr\left(\sigma_r \cdot \mathring{u}_r + \sigma_\theta \cdot \frac{u_r}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}h \cdot r \cdot d\theta\,dr\left(\mathring{u}_r^2 + 2\nu\frac{\mathring{u}_r \cdot u_r}{r} + \frac{u_r^2}{r^2}\right)\frac{E}{1-\nu^2}$$

Voor de gehele schijf geldt:

$$A = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_V \left(\mathring{u}_r^2 + \frac{u_r^2}{r^2} + 2\nu\frac{\mathring{u}_r u_r}{r}\right)dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_V \left(\mathring{u}_r^2 + \frac{u_r^2}{r^2} + 2\nu\frac{\mathring{u}_r u_r}{r}\right)h.r\,d\theta\,dr$$

Nu geldt dat de onbekende functie u_r t.g.v de symmetrie in constructie en belasting ~~alleen~~ alleen een functie van r dus $u_r = u(r)$. De integraal kan wat betreft de hoek $d\theta$ dus onmiddellijk opgelost worden.

$$\Rightarrow A = \frac{2\pi E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\dot{u}^2 + \frac{u^2}{r^2} + 2\nu \frac{\dot{u} u}{r} \right) h\, r\, dr$$

Om een uitdrukking voor de potentiële energie te vinden, moeten we A verminderen met een term, die bestaat uit de som van de belastingsgrootheden vermenigvuldigd met de verplaatsing van hun aangrijpingspunt. Deze term noemen we:

$$W = \int_V \left(f_i^0 - \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \right) u_i \, dV - \int_{A^p} p_i^0 \cdot u_i \, dA$$

Wij hebben alleen maar te maken met volume krachten t.g.v de rotatie. Andere belastingskrachten zijn er niet.

$$W = \int_V \rho \omega^2 r . u . dV = \iint \rho \omega^2 r . u . r\, d\theta . dr . h$$

$$= \int_0^{2\pi} \rho \omega^2 d\theta \int_0^a r^2 u h \, dr = 2\pi \rho \omega^2 \int_0^a r^2 u h \, dr$$

Voor de uiteindelijke uitdrukking van de potentiële energie vinden we dus $V = A - W$

$$V = \frac{2\pi E}{2(1-\nu^2)} \cdot \int_0^a h . r \left[\left(\dot{u}^2 + \frac{u^2}{r^2} + 2\nu \frac{u}{r} . \dot{u} \right) \right] dr - 2\pi \rho \omega^2 \int_0^a r^2 u h \, dr \qquad \text{VI-2}$$

VIII Afleiden der differentiaalvergelijkingen door variëren

Door te variëren vinden we uit de uitdrukking voor de potentiële energie de differentiaalvergelijkingen met hun dynamische randcondities voor de onbekende functie u

Daartoe schrijven we : $V = V(u)$

$$V(u) = \frac{2\pi E}{2(1-\nu^2)} \int_0^a hr \left\{ \dot{u}^2 + \frac{u^2}{r^2} + 2\nu \frac{u}{r} \cdot \dot{u} \right\} dr - 2\pi\rho\omega^2 \int_0^a r^2 h u \, dr.$$

Als nu u de juiste oplossing is wordt nu voor u een andere functie genomen zodanig dat geldt:

$$\bar{u} = u + \varepsilon_1 \dot{u}^*$$

Hierbij is $\dot{u}^*$ een functie van r die voldoet aan alle geometrische randcondities. Dus voor $r = 0$ dan $\dot{u}^* = 0$

ε is een willekeurig getal

Dan is

$$\bar{V} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \int_0^a hr \left\{ \dot{\bar{u}}^2 + \frac{\bar{u}^2}{r^2} + 2\nu \frac{\bar{u}}{r} \cdot \dot{\bar{u}} \right\} dr - 2\pi\rho\omega^2 \int_0^a r^2 h \bar{u} \, dr$$

$$\bar{V} = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \int_0^a hr \left\{ (\dot{u} + \varepsilon \dot{u}^*)^2 + \left(\frac{u + \varepsilon u^*}{r} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{u + \varepsilon u^*}{r} \right) (\dot{u} + \varepsilon \dot{u}^*) \right\} dr$$

$$- 2\pi\rho\omega^2 \int_0^a r^2 h (u + \varepsilon u^*) dr$$

$\bar{V}$ moet minimaal zijn voor u dus als geldt:

$$\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = 0} = 0$$

$$0 = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \int_0^a hr \left\{ 2\dot{u}\dot{u}^* + \frac{2uu^*}{r^2} + 2\nu\left(\frac{u^*}{r}\cdot \dot{u} + \dot{u}^* \cdot \frac{u}{r} \right) \right\} dr - 2\pi\rho\omega^2 \int_0^a r^2 h u^* dr$$

Maak de uitdrukking om de termen in de volgende vorm:

$$\underline{\underline{1^e}} \quad \int_0^a \dot{u}\dot{u}^* rh\, dr = \int_0^a \dot{u} rh\, d(u^*) = \dot{u} rh u^* \Big|_0^a - \int_0^a u^* d(rh\dot{u})$$

$$\underline{\underline{2^e}} \quad \int_0^a \frac{\dot{u}^* u}{r} \cdot rh\, dr = \int_0^a uh\, d(u^*) = u^* uh \Big|_0^a - \int_0^a u^* d(uh)$$

Dus hieruit volgt:

$$0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{u} rh u^* \Big|_0^a - \int_0^a u^* d(rh\dot{u}) + \int_0^a \frac{u^* uh}{r} dr + \nu\left[u^* uh \Big|_0^a - \int_0^a u^* d(uh) + \int_0^a \dot{u} u^* h\, dr \right] \right\} - \int_0^a u^* \rho\omega^2 r^2 h\, dr \qquad \text{III-1}$$

Nu geldt voor u^* als geometrische randvoorwaarde dat men voor $u^*(0) = 0$ neemt. Verder geldt daarnaast dat u^* willekeurig kan zijn. Kies daarom voor u^* zodanig een functie dat geldt dat $u^*(a) = 0$

Dan:

$$0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -\int_0^a u^* d(\dot{u} rh) + \int_0^a \frac{u^* uh}{r} dr - \nu \int_0^a u^* d(uh) + \nu \int_0^a \dot{u} u^* h\, dr \right\} - \int_0^a \rho\omega^2 u^* r^2 h\, dr$$

Dus dan moet voor elke r gelden:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{d}{dr}(rh\dot{u}) - \frac{uh}{r} + \nu\left(\frac{d}{dr}(uh) - \dot{u}h \right) \right\} + \rho\omega^2 r^2 h = 0 \qquad \text{III-2}$$

Kies nu voor $\overset{*}{u}$ een functie van de vorm

$\overset{*}{u}(a) \neq 0$

Dus alle willekeurige $\overset{*}{u}$ met $\overset{*}{u}(a) \neq 0$ geeft:

$$0 = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{u}(a) \cdot a \cdot h\, \overset{*}{u}(a) + \nu\, \overset{*}{u}(a) \cdot u(a) \cdot h \right\}$$

$\Longrightarrow$ voor $r=a$ geldt

$$\dot{u} \cdot a + \nu \cdot u = 0 \Rightarrow \dot{u}(a) = -\nu \frac{u(a)}{a} \qquad \text{VII}-3$$

Dit is de dynamische randvoorwaarde van het probleem.

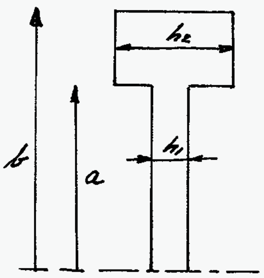
Bij toepassing van de wet van Hooke worden de vergelijkingen VII.2-2 en VII.2-3

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{d}{dr}\left(r h \varepsilon_r + \nu r h \varepsilon_\theta \right) - h \varepsilon_\theta - h \varepsilon_r \right\} + \rho \omega^2 r^2 h = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot r \cdot h \right) - h \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 h = 0 \qquad \text{VII.}-4$$

voor $r=a \Rightarrow \varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta = 0$ dus $\sigma_r = 0$ VII. -5

VIII De schijf bestaande uit twee delen met constante niet gelijke dikte



Substitueer de dimensies van de ring en schijf in vgl. VII.2-1 en kies voor $\overset{*}{u}$

$\overset{*}{u}(0) = \overset{*}{u}(a) = \overset{*}{u}(b) = 0$; $\overset{*}{u}(0)$ = geometrische randvoorwaarde.

$$\left(\frac{\partial \bar V}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 = \frac{E}{1-\nu^2}\Big\{-\int_0^a \overset{*}{u}\, d(rh_1\dot u) - \int_a^b \overset{*}{u}\, d(rh_2 \dot u) + \int_0^a \frac{\overset{*}{u}u}{r}h_1\,dr +$$
$$+ \int_a^b \frac{\overset{*}{u}u}{r}h_2\,dr - \nu\int_0^a \overset{*}{u}\,d(uh_1) - \nu\int_a^b \overset{*}{u}\,d(uh_2) + \nu\int_0^a \overset{*}{u}\dot u h_1\,dr +$$
$$+ \nu\int_a^b \overset{*}{u}\dot u h_2\,dr\Big\} - \int_0^a \overset{*}{u}\rho\omega^2 r^2 h_1\,dr - \int_a^b \overset{*}{u}\rho\omega^2 r^2 h_2\,dr$$

Dus dan moet voor elke r gelden:

$0 \le r \le a$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\Big\{-\frac{d}{dr}(r\dot u)+\frac{u}{r}\Big\} - \rho\omega^2 r^2 = 0 \qquad \text{VIII-1}$$

$a \le r \le b$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\Big\{-\frac{d}{dr}(r\dot u)+\frac{u}{r}\Big\} - \rho\omega^2 r^2 = 0 \qquad \text{VIII-2}$$

Kies nu voor $\overset{*}{u}$ een functie dat geldt : $\overset{*}{u}(b)=0$ en $\overset{*}{u}(a)\neq 0$

voor $\underline{\underline{r=a}}$:

$$0 = \frac{E}{1-\nu^2}\Big\{\dot u r h_1 \overset{*}{u}\Big|_0^a + \dot u r h_2 \overset{*}{u}\Big|_a^b + \nu u \overset{*}{u} h_1\Big|_0^a + \nu u\overset{*}{u}h_2\Big|_a^b\Big\}$$

$$0 = (\dot u_1 r h_1)_a - (\dot u_2 r h_2)_a + (\nu u_1 h_1)_a - (\nu u_2 h_2)_a = 0$$

Stel nu verder : $h_2 = h_1 + \Delta h$

$u_2 = u_1 + \Delta u$

$\Rightarrow$

$$\dot{u}_1 r h_1 - \dot{u}_1 r h_1 - \Delta\dot{u}\, r h_1 - \dot{u}_1 r \Delta h - \Delta\dot{u}\, r \Delta h + \nu u_1 h_1 - \nu u_1 h_1 - \nu \Delta u h_1 -$$

$$- \nu u_1 \Delta h - \nu \Delta u \Delta h = 0$$

$$- \Delta\dot{u}(r h_1 + r\Delta h) - \dot{u}_1 r \Delta h - \nu \Delta u (h_1 + \Delta h) - \nu u_1 \Delta h = 0$$

Hieruit volgt met invoering van de rekken

$$\Delta\varepsilon_r + \nu\Delta\varepsilon_\theta = - \frac{\Delta h}{h_1 + \Delta h}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta\right)$$

Met de wet van Hooke wordt dit

$$\Delta\sigma_r = - \frac{\Delta h}{h_2 + \Delta h} \cdot \sigma_r \qquad \text{VIII} - 3$$

Deze randwaarde is de dynamische randvoorwaarde voor $r = a$

De geometrische randvoorwaarde voor $r = a$ is natuurlijk dat moet gelden dat de radiale verplaatsing u van de twee delen dezelfde is bij de overgang.

Wat stelt nu voorwaarde VIII - 3 voor ?

$$\Delta\sigma_r (h_1 + \Delta h) + \sigma_r \Delta h = 0$$

Sommeer bij deze vergelijking de grootheid $h_1\sigma_r$ $\Rightarrow$

$$(h_1 + \Delta h)(\sigma_r + \Delta\sigma_r) = h_1 \sigma_r \qquad \text{VIII} - 4.$$

<u>Conclusie</u>

De sprongverandering van de dikte Δh en die van de radiale spanning $\Delta\sigma_r$ bij overgang van de twee schijven moet zodanig zijn dat de radiale kracht per lengteeenheid van de gemeenschappelijke rand konstant is.

Bij de keuze van $\dot{u}^*(a) = 0$ en $\dot{u}^*(b) \neq 0$ volgt dat

$$\dot{u}(b) = - \nu \cdot \frac{u(b)}{b} \quad \rightarrow \quad \sigma_r(b) = 0$$

Wanneer aan het profiel willekeurig voorgeschreven is dan laten zich de vergelijkingen

$$d(\sigma_r \cdot r \cdot h\, d\theta) - \sigma_\theta \cdot h \cdot dr\, d\theta + \rho\omega^2 r^2 h \cdot dr\, d\theta = 0$$

en $$r\left(\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{\nu}\frac{d\sigma_\theta}{dr}\right) + \left(\frac{1}{\nu}+1\right)(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

voor de beide spanningen σ_r en σ_θ in het algemeen niet in een gesloten vorm oplossen. We gebruiken dan de benaderingsmethode van „Grammel" zoals die hierboven is opgeleid.

Men vervangt het werkelijke schijfprofiel door een trapvormige benadering en wel zodanig dat de schijf opgebouwd gedacht kan worden door ringvormige deelschijven die ieder op zich een konstante dikte hebben.

Voor elk van deze deelschijven gelden de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= A_1 + \frac{A_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= A_1 - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII-5}$$

Hierbij hebben de konstanten A_1 en A_2 van deelschijf tot deelschijf andere waarden.

Voert men een nieuwe veranderlijke $x = \frac{1}{r^2}$ in en een nieuwe spanningswaarde n.l.

$$s = \sigma_r + \alpha\omega^2 r^2 \quad \text{en} \quad t = \sigma_\theta + \beta\omega^2 r^2 \qquad \text{VIII-6}$$

Hierbij geldt

$$\alpha = \frac{3+\nu}{8}\cdot\rho \quad \text{en} \quad \beta = \frac{1+3\nu}{8}\rho \qquad \text{VIII-7}$$

De vergelijking VIII-5 wordt dan:

$$s = A_1 + A_2 x \quad \text{en} \quad t = A_1 - A_2 x \qquad \text{VIII-8}$$

Is nu b.v. van een deelschijf aan de buitenrand r_i de spanningen σ_{ri} en $\sigma_{\theta i}$ bekend, dan kan men volgens vgl. VIII-6 ook de waarden s_i en t_i aan de buitenrand bepalen.
Vervolgens kan men de waarde s_{i+1} en t_{i+1} aan de binnenrand van de deelschijf berekenen uit VIII-8
Dit gaat als volgt:

Men bepaalt eerst uit $s_i = A_1 + A_2 X_i$ en $t_i = A_1 - A_2 X_i$ de konstanten A_1 en A_2

$$s_i + t_i = 2A_1 \Longrightarrow A_1 = \frac{s_i + t_i}{2}$$

$$s_i - t_i = 2A_2 X_i \Longrightarrow \frac{s_i - t_i}{2X_i}$$

Dit in VIII-8 levert:

$$s_{i+1} = A_1 + A_2 X_{i+1}$$

$$t_{i+1} = A_1 - A_2 X_{i+1}$$

$$\Longrightarrow \quad s_{i+1} = \frac{s_i + t_i}{2} + \frac{s_i - t_i}{2X_i} \cdot X_{i+1}$$

$$= s_i - \left(\frac{s_i - t_i}{2X_i}\right) X_i + \frac{s_i - t_i}{2X_i} \cdot X_{i+1}$$

$$= s_i + \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2X_i}\right)\left(s_i - t_i\right)$$

Stel nu $q = \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2X_i}\right)\left(s_i - t_i\right)$

$$\Longrightarrow \quad s_{i+1} = s_i + q \qquad \text{VIII-9}$$

$$t_{i+1} = \frac{s_i + t_i}{2} - \frac{s_i - t_i}{2X_i} \cdot X_{i+1}$$

$$= t_i - \left(\frac{X_{i+1} - X_i}{2X_i}\right)\left(s_i - t_i\right)$$

$$\Longrightarrow \quad t_{i+1} = t_i - q \qquad \text{VIII-10}$$

Om van de ene deelschijf naar de volgende over de kunnen gaan moet men zoals is afgeleid een sprong in de spanningen s en t toe laten dus Δs en Δt die een functie zijn van de dikte verandering Δh. Bij een sprongverandering van Δs en Δt verandert ook de spanning σ_r en σ_θ in $\Delta\sigma_r$ en $\Delta\sigma_\theta$ waarbij natuurlijk $\alpha\omega^2r^2$ en $\beta\omega^2r^2$ konstant zijn bij de overgang. Bij de overgang van twee deelschijven hebben we twee voorwaarden gevonden. Deze waren:

1 De sprongverandering van de dikte Δh en die van de radiale spanning $\Delta\sigma_r$ moet zodanig zijn dat de radiale kracht per lengte eenheid van de gemeenschappelijke rand konstant is.

2 Bij de gemeenschappelijke rand van twee deelschijven behouden de schijven hun samenhang d.w.z. dat de radiale verplaatsing voor en na de sprong dezelfde is

Deze twee voorwaarden houden in dat moet gelden.

$$h\sigma_r = (h+\Delta h)(\sigma_r + \Delta\sigma_r) \Longrightarrow \Delta\sigma_r = -\frac{\Delta h}{h+\Delta h}\cdot\sigma_r$$

$$\frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{r}{E}\left\{\sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \Delta\sigma_r)\right\}$$

$$\Longrightarrow \Delta\sigma_\theta = \nu\Delta\sigma_r \qquad \text{VIII - 11}$$

uit VIII - 6

$$s + \Delta s = \sigma_r + \Delta\sigma_r + \alpha\omega^2r^2$$

$$\Longrightarrow \Delta s = \Delta\sigma_r$$

Dus $\Delta s = -\dfrac{\Delta h}{h+\Delta h}\cdot\sigma_r$ VIII - 12

uit vgl VIII - 11 volgt:

$$\Delta\sigma_\theta = \nu\sigma_r \Longrightarrow \Delta\sigma_\theta = \Delta t = \nu\Delta s \qquad \text{VIII - 13}$$

Samenvatting

De vergelijkingen die in een willekeurig profiel de spanningen σ_r en σ_θ vastleggen zijn:

$$x = \frac{1}{r^2}$$

$$s = \sigma_r + \alpha\omega^2 r^2 \quad ; \quad t = \sigma_\theta + \beta\omega^2 r^2$$

$$\alpha = \frac{3+\nu}{8}\rho \quad ; \quad \beta = \frac{1+3\nu}{8}\rho$$

Bij schijfovergang:

$$\Delta s = -\frac{\Delta h}{h+\Delta h}\cdot\sigma_r \quad ; \quad \Delta t = \nu\Delta s \quad ; \quad s^* = s+\Delta s \quad ; \quad t^* = t+\Delta t$$

$$q = \frac{x_{i+1}-x_i}{2x_i}(s_i - t_i) \quad ; \quad \xi = \frac{x_{i+1}-x_i}{2x_i}$$

$$\eta = -\frac{\Delta h}{h+\Delta h}$$

$$s_{i+1} = s_i + q \quad ; \quad t_{i+1} = t_i - q .$$

Dit systeem wordt toegepast op de massieve schijf die geen belasting heeft aan de buitenrand. De voorwaarde voor $r=0$ is dat de spanning σ_r en σ_θ aan elkaar gelijk moeten zijn.
Dan volgt hieruit dat $s=\sigma_r$ en $t=\sigma_\theta$ en dus voor $r=0$ geldt $s=t$
Men begint dan voor de berekening van de schijf in het punt $r=0$ oftewel $x=\infty$. Omdat de spanningen in $r=0$ niet bekend zijn neemt men een willekeurige keuze voor $\sigma_r'=\sigma_\theta'$ en dus willekeurige $s'=t'$

In de eerste schijfdoorsnede geldt

$$\xi = \frac{x_{i+1}-x_i}{2x_i} = \frac{x_{i+1}}{2x_i} - \frac{1}{2} \Longrightarrow \xi = -\frac{1}{2} \text{ voor } x_i = \infty \text{ en dus } q'=0$$

Met behulp van de bovengenoemde formules kan men dan de spanningen bij alle doorsneden berekenen en dus ook aan de buitenrand. Tengevolge van de willekeurige start van s' en t' krijgt men in het algemeen niet die spanning aan de buitenzijde die daar in werkelijkheid werkzaam is $(\sigma_r = 0)$

Stel deze is σ_b'

We moeten dan de berekening met een tweede willekeurige spanningstoestand herhalen die bij de zelfde beginwaarde start n.l. voor $r=0$ dan $s'' = t''$ maar $\omega = 0$

Stel nu dat de waarde aan de rand wordt σ_b''

Om nu toch nog de voorgeschreven randwaarde n.l. $\sigma_b = 0$ te krijgen moet men aan de eerste spanningstoestand een α-voudige van de tweede spanningstoestand toevoegen zodanig dat geldt:

$$\sigma_b = 0 = \sigma_b' + \alpha \sigma_b'' \longrightarrow \alpha = -\frac{\sigma_b'}{\sigma_b''}$$

Opmerking

Bij de willekeurige keuze voor de aanvangswaarde van σ_b bij de berekening moet men er rekening mee houden dat de beginwaarde van s' en t' dicht bij elkaar liggen. Men kiest dan ook voor σ_b' een waarde in de buurt van $\sigma_r' + (\alpha - \beta)\,\omega^2 r^2$ met een waarde voor r die overeenkomt met de plaats van starten.

IX Berekening van de theoretische radiale- en tangentiale spanning in de schijf.

1. De methode volgens hoofdstuk V

Volgens de afleiding op blz. 11 e.v. geldt:

Voor schijf I :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\,\rho\omega^2\left(f_1(n) - r^2\right) \\ \sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\,\rho\omega^2 f_1(n) - \frac{1+3\nu}{8}\,\rho\omega^2 r^2 \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq r \leq 16 \text{ cm.}$$

Voor schijf II :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8}\,\rho\omega^2\left\{ f_2(n)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \left(r^2 - b^2\right)\right\} \\ \sigma_\theta &= -\frac{3+\nu}{8}\,\rho\omega^2 f_2(n)\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2}\right\} - \rho\omega^2\left(\frac{1+3\nu}{8}\,r^2 - \frac{3+\nu}{8}\,b^2\right) \end{aligned}\right\} \quad 16 \leq r \leq 20 \text{ cm}$$

met $q = \dfrac{b^2+a^2}{(\nu-1)(b^2-a^2)} + \dfrac{\nu}{\nu-1}$

$$f_1(n) = \left\{\left(\frac{na^2 - a^2 - nb^2}{n}\right) q + b^2\right\} \cdot \frac{n}{n-q}$$

$$f_2(n) = \left\{f_1(n) - b^2\right\}\left\{\frac{a^2 b^2(\nu-1)}{a^2+b^2+\nu(b^2-a^2)}\right\}$$

Verder geldt:

$h_2 = n h_1$ met $h_1 = 8$ mm ; $h_2 = 30$ mm $\Rightarrow n = \frac{30}{8}$

$a = 16$ cm ; $b = 20$ cm ; $\nu = \frac{3}{10}$; $\rho = 0{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg.s/cm²

$q = -6{,}9365$

$f_1(n) = 657{,}04$

$f_2(n) = -26351{,}01$

$\omega = 314$ rad/s

r [cm]	σ_r Kgf	σ_θ Kgf
4.7	206	209
5.7	203	207
6.7	199	205
8.2	192	201
10.2	180	194
12.2	165	186
15.4	136	169
16.0	130 ; 35	166 ; 137
18.0	31	117

$\omega = 418{,}7$ rad/s

r cm	σ_r Kgf	σ_θ Kgf
4.7	367	373
5.7	361	369
6.7	354	365
8.2	341	358
10.2	320	345
12.2	294	331
15.4	243	301
16.0	232 ; 62	295 ; 244
18.0	35	208

$\omega = 523{,}33$ rad/s

r cm	σ_r Kgf	σ_θ Kgf
4.7	574	582
5.7	564	577
6.7	553	570
8.2	533	559
10.2	500	540
12.2	459	516
15.4	379	470
16.0	362 ; 97	461, 373
18.0	62	326

$\omega = 628$ rad/s

r cm	σ_r Kgf	σ_θ Kgf
4.7	826	840
5.7	813	833
6.7	797	823
8.2	768	807
10.2	720	779
12.2	661	745
15.4	546	679
16.0	522 ; 139	665 ; 548
18.0	79	470

2. De methode volgens „Grammel"

De numerieke benadering kan in de vorm van een tabel gegeven worden.

Dit is op de volgende bladz. uitgewerkt.

Doorsnede Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r [cm]	0	4.7	5.7	6.7	8.2	10.2	12.2	15.4	16	20
r^2	0	22,09	32,49	44,89	67,24	104,04	148,84	237,16	256	400
$10^4 : r^2 = 10^4 \cdot X$	∞	452,69	307,79	222,77	148,72	96,12	67,12	42,17	39,06	25
y [cm]	9,8	9,8	9,8	9,8	4,8	9,8	9,8	9,8	3	
$-\Delta y$		0	0	0	0	0	0	0	-2,2	
$-\Delta y : (y+\Delta y) = \eta$		0	0	0	0	0	0	0	-0,73	
$s' - \alpha\omega^2 r^2 = \sigma_r'$	200	192,8	189,4	185,3	178,0	166,0	151,3	122,5	116,3	-5,0
$\alpha\omega^2 r^2$	0	7,2	10,6	14,7	22,0	34,0	48,7	77,6	83,7	130,8
$\eta\sigma_r' = \Delta s'$		0	0	0	0	0	0	0	-84,9	
$\overset{*}{s}{}' + g' = s'$		200	200	200	200	200	200	200	200	125,8
$\overset{*}{s}{}' = s' + \Delta s'$	200	200	200	200	200	200	200	200	115,1	
g'	0	0	0	0	0	0	0	0	10,7	
$\overset{*}{t}{}' = t' + \Delta t'$	200	200	200	200	200	200	200	200	174,5	
$\overset{*}{t}{}' - g' = t'$		200	200	200	200	200	200	200	200	163,8
$\frac{1}{m} \cdot \Delta s' = \Delta t'$		0	0	0	0	0	0	0	-25,5	
$\beta\omega^2 r^2$	0	4,2	6,1	8,4	12,6	19,6	28,0	44,6	48,1	75,2
$t' - \beta\omega^2 r^2 = \sigma_\theta'$	200	195,9	193,9	191,6	187,4	180,4	172,0	155,4	151,9	88,6
$\overset{*}{s}{}' - \overset{*}{t}{}'$	0	0	0	0	0	0	0	0	-59,4	
$(X_{i+1} - X_i) : 2X_i = \xi$	-0,5	-0,16	-0,14	-0,17	-0,18	-0,15	-0,19	-0,04	-0,18	
$g' = \xi / (\overset{*}{s}{}' - \overset{*}{t}{}')$	0	0	0	0	0	0	0	0	10,7	
η		0	0	0	0	0	0	0	-0,73	
$\overset{*}{s}{}'' + g'' = s'' \equiv \sigma_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	36,2
$\eta\sigma_r'' = \Delta s''$		0	0	0	0	0	0	0	0	-73
$\overset{*}{s}{}'' = s'' + \Delta s''$	100	100	100	100	100	100	100	100	27	
g''	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\overset{*}{t}{}'' = t'' + \Delta t''$	100	100	100	100	100	100	100	100	78,1	
$\overset{*}{t}{}'' - g'' = t'' = \sigma_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	68,9
$\frac{1}{m} \Delta s'' = \Delta t''$		0	0	0	0	0	0	0	-21,9	
$\overset{*}{s}{}'' - \overset{*}{t}{}''$	0	0	0	0	0	0	0	0	-51,1	
ξ	-0,5	-0,16	-0,14	-0,17	-0,18	-0,15	-0,19	-0,04	-0,18	
$g'' = \xi / (\overset{*}{s}{}'' - \overset{*}{t}{}'')$	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\sigma_r'' + \frac{1}{2}\Delta s'' = \overline{\sigma}_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	63,5	36,3
$\sigma_r' + \frac{1}{2}\Delta s' = \overline{\sigma}_r'$	200	192,8	189,4	185,3	178,0	166,0	151,3	122,5	73,8	-5,0
$\sigma\overline{\sigma}_r''$	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	8,8	-5,0
$\sigma_r = \overline{\sigma}_r' + \sigma\overline{\sigma}_r''$	213,8	206,6	203,2	199,1	191,8	179,8	165,1	136,3	82,6	0
$\sigma_\theta'' + \frac{1}{2}\Delta t'' = \overline{\sigma}_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	89,0	68,9
$\sigma_\theta' + \frac{1}{2}\Delta t' = \overline{\sigma}_\theta'$	200	195,8	193,9	191,6	187,4	180,4	172,0	155,4	139,1	88,6
$\sigma\overline{\sigma}_\theta''$	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	13,8	12,3	9,5
$\sigma_\theta = \overline{\sigma}_\theta' + \sigma\overline{\sigma}_\theta''$	213,8	209,7	207,7	205,4	201,2	194,2	185,8	169,2	151,4	98,1

$\omega = 3000$ omw/min
$\alpha\omega^2 = 0,327$
$\beta\omega^2 = 0,188$
$\sigma = 0,138$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r [cm]	0	4,7	5,7	6,7	8,2	10,2	12,2	15,4	16	20
r^2	0	22,09	32,49	44,89	67,24	104,04	148,84	237,16	256	400
$\omega^4 : r^2 = \omega^4 \cdot x$	∞	452,69	307,79	222,77	148,72	96,12	67,19	42,17	39,06	25,0
y [cm]	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	3	
$-\Delta y$		0	0	0	0	0	0	0	−2,2	
$-\Delta y : (y+\Delta y) = \eta$		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$s' - \alpha\omega^2 r^2 = \sigma_r'$	200	187,21	181,19	170,06	161,07	139,76	114,28	62,68	51,78	−64,64
$\alpha\omega^2 r^2$	0	12,79	18,81	25,94	38,93	60,24	85,72	137,32	148,22	231,60
$\eta\sigma_r' = \Delta s'$		0	0	0	0	0	0	0	−37,80	
$s^{*\prime} + q' = s'$		200	200	200	200	200	200	200	200	166,96
$s^{*\prime} = s' + \Delta s'$	200	200	200	200	200	200	200	200	162,20	
q'	0	0	0	0	0	0	0	0	4,76	
$t^{*\prime} = t' + \Delta t'$	200	200	200	200	200	200	200	200	188,66	
$t^{*\prime} - q' = t'$		200	200	200	200	200	200	200	200	183,90
$\frac{1}{m} \cdot \Delta s' = \Delta t'$		0	0	0	0	0	0	0	−11,34	
$\beta\omega^2 r^2$	0	7,38	10,85	14,99	22,46	34,75	49,71	79,21	85,50	133,60
$t' - \beta\omega^2 r^2 = \sigma_\theta'$	200	192,62	185,15	185,01	177,54	165,25	150,29	120,79	114,50	50,30
$s^{*\prime} - t^{*\prime}$	0	0	0	0	0	0	0	0	−26,46	
$(x_{i+1} - x_i) : 2x_i = \xi$	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,19	−0,04	−0,18	
$q' = \xi(s^{*\prime} - t^{*\prime})$	0	0	0	0	0	0	0	0	4,76	
η		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$s^{*\prime\prime} + q'' = s'' = \sigma_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	36,20
$\eta\sigma_r'' = \Delta s''$		0	0	0	0	0	0	0	−73	
$s^{*\prime\prime} = s'' + \Delta s''$	100	100	100	100	100	100	100	100	27	
q''	0	0	0	0	0	0	0	0	9,20	
$t^{*\prime\prime} = t'' + \Delta t''$	100	100	100	100	100	100	100	100	78,1	
$t^{*\prime\prime} - q'' = t'' = \sigma_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	68,90
$\frac{1}{m} \cdot \Delta s'' = \Delta t''$		0	0	0	0	0	0	0	−21,9	
$s^{*\prime\prime} - t^{*\prime\prime}$	0	0	0	0	0	0	0	0	−51,1	
ξ	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,19	−0,04	−0,18	
$q'' = \xi(s^{*\prime\prime} - t^{*\prime\prime})$	0	0	0	0	0	0	0	0	9,20	
$\sigma_r'' + \frac{1}{2}\Delta s'' = \bar{\sigma}_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	63,5	36,3
$\sigma_r' + \frac{1}{2}\Delta s' = \bar{\sigma}_r'$	200	187,21	181,19	170,06	161,06	139,76	114,28	62,68	32,88	−64,64
$\sigma\bar{\sigma}_r''$	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	113,41	64,64
$\sigma_r = \bar{\sigma}_r' + \sigma\bar{\sigma}_r''$	378,6	365,81	359,79	348,66	339,66	318,36	292,88	241,28	146,29	0
$\sigma_\theta'' + \frac{1}{2}\Delta t'' = \bar{\sigma}_\theta''$	100	100	100	100	100	200	100	100	89,05	68,9
$\sigma_\theta' + \frac{1}{2}\Delta t' = \bar{\sigma}_\theta'$	200	192,62	185,15	185,01	177,54	165,25	150,29	120,79	108,83	50,30
$\sigma\bar{\sigma}_\theta''$	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	178,6	159,04	123,06
$\sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta' + \sigma\bar{\sigma}_\theta''$	378,6	371,22	363,75	363,61	356,14	343,85	328,89	299,39	267,87	173,36

$\omega = 4000$ obr/min
$\alpha\omega^2 = 0,579$
$\beta\omega^2 = 0,334$
$\sigma = 1,786$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r [cm]	0	4,7	5,7	6,7	8,2	10,2	12,2	15,4	16	20
r^2	0	22,09	32,49	44,89	67,24	104,04	148,84	237,16	256	400
$\omega^4 : r^2 = \omega^4 \cdot x$	∞	452,7	307,8	222,8	148,7	96,1	67,1	42,1	39,0	25
y [cm]	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	3	
$-\Delta y$		0	0	0	0	0	0	0	−2,2	
$-\Delta y : (y+\Delta y) = \eta$		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$s' - \alpha\omega^2 r^2 = \sigma_r'$	200	180,0	170,6	159,4	139,2	105,8	65,3	−14,6	−31,7	−141,8
$\alpha\omega^2 r^2$	0	20,0	29,4	40,6	60,9	94,2	134,7	214,6	231,7	362
$\eta\sigma_r' = \Delta s'$		0	0	0	0	0	0	0	23,1	
$\overset{*}{q}' + q' = s'$		200	200	200	200	200	200	200	200	220,2
$\overset{*}{s}' = s' + \Delta s'$	200	200	200	200	200	200	200	200	223,1	
q'	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,9	
$\overset{*}{t}' = t' + \Delta t'$	200	200	200	200	200	200	200	200	206,9	
$\overset{*}{t}' - q' = t'$		200	200	200	200	200	200	200	200	209,9
$\frac{1}{m}\Delta s' = \Delta t'$		0	0	0	0	0	0	0	6,9	
$\beta\omega^2 r^2$	0	11,5	17,0	23,4	35,1	54,3	77,7	123,8	133,6	208,8
$t' - \beta\omega^2 r^2 = \sigma_\theta'$	200	188,5	183,0	176,6	164,9	145,7	122,3	76,2	66,4	1,0
$\overset{*}{s}' - \overset{*}{t}'$	0	0	0	0	0	0	0	0	16,2	
$(X_{i+1} - X_i) : 2X_i = \xi$	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,19	−0,04	−0,10	
$q' = \xi(\overset{*}{s}' - \overset{*}{t}')$	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,9	
η		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$\overset{*}{s}'' + q'' = s'' \equiv \sigma_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	36,2
$\eta\sigma_r'' = \Delta s''$		0	0	0	0	0	0	0	−73	
$\overset{*}{s}'' = s'' + \Delta s''$	100	100	100	100	100	100	100	100	27	
q''	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\overset{*}{t}'' = t'' + \Delta t''$	100	100	100	100	100	200	100	100	78,1	
$\overset{*}{t}'' - q'' = t'' = \sigma_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	68,9
$\frac{1}{m}\Delta s'' = \Delta t''$		0	0	0	0	0	0	0	−21,9	
$\overset{*}{s}'' - \overset{*}{t}''$	0	0	0	0	0	0	0	0	−51,1	
ξ	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,14	−0,04	−0,10	
$q'' = \xi(\overset{*}{s}'' - \overset{*}{t}'')$	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\sigma_r'' + \frac{1}{2}\Delta s'' = \bar{\sigma}_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	63,5	36,3
$\sigma_r' + \frac{1}{2}\Delta s' = \bar{\sigma}_r'$	200	180,0	170,6	159,4	139,2	105,8	65,3	−14,6	−20,1	−144,8
$\sigma\bar{\sigma}_r''$	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	248,7	141,8
$\sigma_r = \bar{\sigma}_r' + \sigma\bar{\sigma}_r''$	591,6	571,6	562,2	551,0	530,8	497,4	457,0	377,0	228,6	0
$\sigma_\theta'' + \frac{1}{2}\Delta t'' = \bar{\sigma}_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	89,1	69,0
$\sigma_\theta' + \frac{1}{2}\Delta t' = \bar{\sigma}_\theta'$	200	188,5	183,0	176,6	165,0	145,7	122,3	76,2	69,9	1,0
$\sigma\bar{\sigma}_\theta''$	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	391,6	348,8	269,8
$\sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta' + \sigma\bar{\sigma}_\theta''$	591,6	580,0	574,6	560,2	556,5	537,3	513,9	467,8	418,6	270,9

$\omega = 5000$ ot/min
$\alpha\omega^2 = 0,905$
$\beta\omega^2 = 0,522$
$\sigma = \frac{0{,}141 \cdot 780}{36{,}2} = 3{,}016$

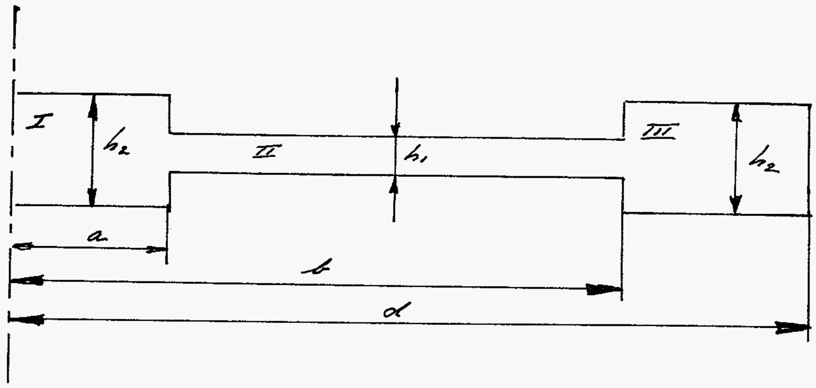
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r [cm]	0	4,7	5,7	6,7	8,2	10,2	12,2	15,4	16	20
r^2	0	22,09	32,49	44,89	67,24	104,04	148,84	237,16	256	400
$\omega^4 : r^2 = \omega^4 \cdot x$	∞	452,7	307,8	222,8	148,7	96,1	67,1	42,1	39,0	25
y [cm]	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	4,0	3	
$-\Delta y$		0	0	0	0	0	0	0	−2,2	
$-\Delta y : (y+\Delta y) = \eta$		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$s' - \alpha\omega^2 r^2 = \sigma_r'$	200	171,2	157,7	141,5	112,4	64,0	6,1	−109,0	−133,6	−236,0
$\alpha\omega^2 r^2$	0	28,78	42,33	58,49	87,61	135,56	193,94	309,02	333,57	521,2
$\eta\sigma_r^2 = \Delta s'$		0	0	0	0	0	0	0	97,51	
$\overset{*}{s}{}' + q' = s'$		200	200	200	200	200	200	200	200	285,2
$\overset{*}{s}{}' = s' + \Delta s'$	200	200	200	200	200	200	200	200	297,5	
q'	0	0	0	0	0	0	0	0	−12,3	
$\overset{*}{t}{}' = t' + \Delta t'$	200	200	200	200	200	200	200	200	229,3	
$\overset{*}{t}{}' - q' = t'$		200	200	200	200	200	200	200	200	241,5
$\frac{1}{m} \cdot \Delta s' = \Delta t'$		0	0	0	0	0	0	0	29,3	
$\beta\omega^2 r^2$		16,61	24,43	33,76	50,56	78,24	111,93	178,34	192,51	300,8
$t' - \beta\omega^2 r^2 = \sigma_\theta'$	200	183,4	175,6	166,2	149,4	121,8	88,0	21,7	7,5	−59,3
$\overset{*}{s}{}' - \overset{*}{t}{}'$	0	0	0	0	0	0	0	0	68,3	
$(x_{i+1} - x_i) : 2x_i = \xi$	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,19	−0,04	−0,18	
$q' = \xi(\overset{*}{s}{}' - \overset{*}{t}{}')$	0	0	0	0	0	0	0	0	−12,3	
η		0	0	0	0	0	0	0	−0,73	
$\overset{*}{s}{}'' + q'' = s'' \equiv \sigma_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	36,2
$\eta\sigma_r'' = \Delta s''$		0	0	0	0	0	0	0	−73	
$\overset{*}{s}{}'' = s'' + \Delta s''$	100	100	100	100	100	100	100	100	27	
q''	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\overset{*}{t}{}'' = t'' + \Delta t''$	100	100	100	100	100	100	100	100	78,1	
$\overset{*}{t}{}'' - q'' = t'' = \sigma_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	100	68,9
$\frac{1}{m} \Delta s'' = \Delta t''$		0	0	0	0	0	0	0	−21,9	
$\overset{*}{s}{}'' - \overset{*}{t}{}''$	0	0	0	0	0	0	0	0	−54,1	
ξ	−0,5	−0,16	−0,14	−0,17	−0,18	−0,15	−0,19	−0,04	−0,18	
$q'' = \xi(\overset{*}{s}{}'' - \overset{*}{t}{}'')$	0	0	0	0	0	0	0	0	9,2	
$\sigma_r'' + \frac{1}{2}\Delta s'' = \bar{\sigma}_r''$	100	100	100	100	100	100	100	100	63,5	36,3
$\sigma_r' + \frac{1}{2}\Delta s' = \bar{\sigma}_r'$	200	171,2	157,7	141,5	112,4	64,0	6,1	−109,0	−133,6	−236,0
$\sigma\bar{\sigma}_r''$	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	413,9	236,0
$\sigma_r = \bar{\sigma}_r' + \sigma\bar{\sigma}_r''$	851,9	823,1	809,6	793,4	764,3	715,9	658,0	542,9	280,4	0
$\sigma_\theta'' + \frac{1}{2}\Delta t'' = \bar{\sigma}_\theta''$	100	100	100	100	100	100	100	100	89,1	68,9
$\sigma_\theta' + \frac{1}{2}\Delta t' = \bar{\sigma}_\theta'$	200	183,4	175,6	166,2	149,4	121,8	88,1	21,7	7,5	−59,3
$\sigma\bar{\sigma}_\theta''$	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	651,9	580,5	449,2
$\sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta' + \sigma\bar{\sigma}_\theta''$	851,9	835,3	827,5	818,1	801,3	773,7	740,0	673,6	588,0	389,9

$\omega = 6000$ об/мин
$\alpha\omega^2 = 1{,}303$
$\beta\omega^2 = 0{,}752$
$\sigma = 6{,}519$

.3. Samenvatting van het bovengenoemde

De schijf waaraan gemeten was bestond uit drie gedeelten, de eigenlijke schijf met een straal van 4-16 cm en aan de buitenrand hierna een veel dikkere ring. Aan de binnenrand was ook een ring maar van veel kleinere breedte. Het geheel was op een as gekrompen van dikte ∅ 30 mm. In de opdracht was mij de suggestie geopperd om deze binnenring met as te beschouwen als een deel van de schijf met een dikte als de schijf. Deze veronderstelling is in eerste instantie aannemelijk omdat de invloed van deze vereenvoudiging van as en ring naar schijf klein verondersteld kon zijn doordat de rotatieafstand r klein is en dus de verandering in volumekrachten klein zijn. Maar bij vergelijking van de theorie en het experiment kreeg men grote verschillen in de spanningen zowel met de methode van Grammel als met die methoden die genoemd zijn in voorgaande hoofdstukken.
Het spreekt dan voor zich om nu het probleem eens te onderzoeken met de schijf opgebouwd als drie deelschijven van verschillende dikte waarbij de as ~~tot de~~ binnenschijf gerekend wordt.
Dit is op de volgende bladzijden uitgevoerd.

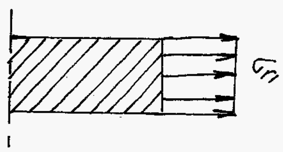
X Beschouw het probleem als drie schijven



Zoals reeds in de vorige hoofdstukken is afgeleid geldt voor een platte schijf met konstante dikte:

$$\sigma_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = c_1 - \frac{c_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$



Toegepast op schijf I wordt dit:

Randvoorwaarden: $r = 0$; $\sigma_r = \sigma_\theta$

$r = a$; $\sigma_r = \sigma_{r1}$

$$\Rightarrow \sigma_r = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

$$\sigma_\theta = A_1 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2$$

Voor $r = a$ dan $\sigma_r = \sigma_{r1}$

$$\Rightarrow \sigma_{r1} = A_1 - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 \Longrightarrow A_1 = \sigma_{r1} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2$$

$$\sigma_r = \sigma_{r1} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2 - r^2)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{r1} + \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 a^2 - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 \qquad \text{X}-1$$

Stel nu verder $\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 = \alpha$ en $\frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 = \beta$

$$\Rightarrow \sigma_r = \sigma_{r1} + \alpha(a^2 - r^2)$$

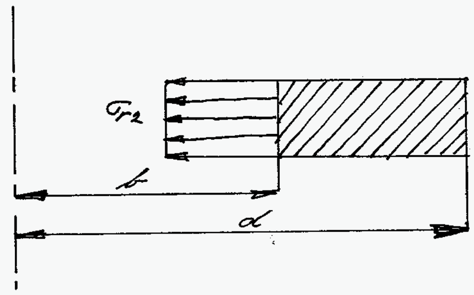
$$\sigma_\theta = \sigma_{r1} + \alpha a^2 - \beta r^2$$

Verder geldt:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{1}{E}\left[\sigma_{r1} + \alpha a^2 - \beta r^2 - \nu\sigma_{r1} - \nu\alpha(a^2 - r^2)\right]$$

$$\Rightarrow \quad u_z = \frac{r}{E}\left\{\sigma_{r1}(1-\nu) + \alpha a^2 - \beta r^2 - \nu\alpha(a^2 - r^2)\right\}. \qquad X - 2.$$

Toegepast op schijf III



Algemeen geldt:

$$\sigma_r = c_1 + \frac{c_2}{r^2} - \alpha r^2$$

$$\sigma_\theta = c_1 - \frac{c_2}{r^2} - \beta r^2$$

Voor $r = b$ dan $\sigma_r = \sigma_{r2}$

$$\sigma_{r2} = c_1 + \frac{c_2}{b^2} - \alpha b^2 \Longrightarrow c_1 = \sigma_{r2} + \alpha b^2 - \frac{c_2}{b^2}$$

Voor $r = d$ dan $\sigma_r = 0$

$$0 = c_1 + \frac{c_2}{d^2} - \alpha d^2 \Longrightarrow c_1 = \alpha d^2 - \frac{c_2}{d^2}$$

$$\sigma_{r2} + \alpha b^2 = \alpha d^2 - \frac{c_2}{d^2} + \frac{c_2}{b^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{b^2 d^2}{d^2 - b^2}\cdot\sigma_{r2} - \alpha b^2 d^2$$

$$c_1 = \alpha d^2 - \frac{b^2}{d^2 - b^2}\cdot\sigma_{r2} + \alpha b^2 = \alpha(d^2 + b^2) - \frac{b^2}{d^2 - b^2}\cdot\sigma_{r2}$$

Dus :

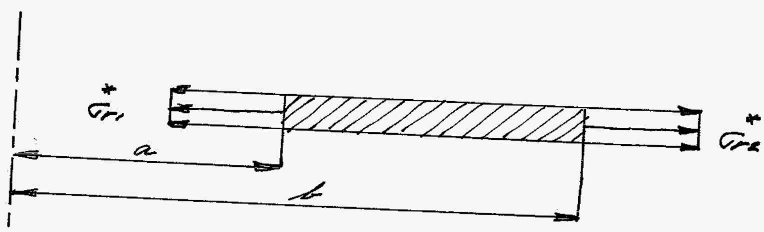
$$\sigma_r = \alpha(d^2+b^2) - \frac{b^2}{d^2-b^2}\cdot\sigma_{r2} + \frac{b^2d^2}{d^2-b^2}\cdot\frac{\sigma_{r2}}{r^2} - \frac{\alpha b^2d^2}{r^2} - \alpha r^2$$

$$\sigma_\theta = \alpha(d^2+b^2) - \frac{b^2}{d^2-b^2}\cdot\sigma_{r2} - \frac{b^2d^2}{d^2-b^2}\cdot\frac{\sigma_{r2}}{r^2} + \frac{\alpha b^2d^2}{r^2} - \beta r^2 \qquad \text{X-3}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\Big\{\alpha(d^2+b^2) - \frac{b^2}{d^2-b^2}\cdot\sigma_{r2} - \frac{b^2d^2}{d^2-b^2}\cdot\frac{\sigma_{r2}}{r^2} + \frac{\alpha b^2d^2}{r^2} - \beta r^2$$
$$- \nu\alpha(d^2+b^2) + \nu\cdot\frac{b^2}{d^2-b^2}\cdot\sigma_{r2} - \frac{\nu b^2d^2}{d^2-b^2}\cdot\frac{\sigma_{r2}}{r^2} + \frac{\nu\alpha b^2d^2}{r^2} + \nu\alpha r^2\Big\}$$

$$\Longrightarrow \quad u_{III} = \frac{r}{E}\Big\{\alpha(1-\nu)(d^2+b^2) - (1-\nu)\cdot\frac{b^2}{d^2-b^2}\cdot\sigma_{r2} - (1+\nu)\frac{b^2d^2}{d^2-b^2}\cdot\frac{\sigma_{r2}}{r^2}$$
$$+ (1+\nu)\frac{\alpha b^2d^2}{r^2} - r^2(\beta-\nu\alpha)\Big\} \qquad \text{X-4}$$

Voor schijf II



$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \alpha r^2$$

$$\sigma_\theta = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - \beta r^2$$

Voor $r = a$ dan $\sigma_r = \sigma^*_{r1}$

$$\sigma^*_{r1} = B_1 + \frac{B_2}{a^2} - \alpha a^2 \Longrightarrow B_1 = \sigma^*_{r1} + \alpha a^2 - \frac{B_2}{a^2}$$

Voor $r = b$ dan $\sigma_r = \sigma^*_{r2}$

$$\sigma^*_{r2} = B_1 + \frac{B_2}{b^2} - \alpha b^2 \Longrightarrow B_1 = \sigma^*_{r2} + \alpha b^2 - \frac{B_2}{b^2}$$

uit $\overset{*}{\sigma}_{r1} + \alpha a^2 - \frac{\beta_2}{a^2} = \overset{*}{\sigma}_{r2} + \alpha b^2 - \frac{\beta_2}{b^2}$

$$\beta_2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1} + \alpha(b^2 - a^2)$$

$$\rightarrow \beta_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) - \alpha a^2 b^2$$

$$\beta_1 = \overset{*}{\sigma}_{r2} + \alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) + \alpha a^2$$

$\rightarrow$

$$\sigma_r = \overset{*}{\sigma}_{r2} + \alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) + \alpha a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2(a^2 - b^2)}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) - \frac{\alpha a^2 b^2}{r^2} - \alpha r^2$$

$$\sigma_\theta = \overset{*}{\sigma}_{r2} + \alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) + \alpha a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2(a^2 - b^2)}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right) + \frac{\alpha a^2 b^2}{r^2} - \beta r^2$$

X - 5

$$u_{II} = \frac{r}{E}\Big\{(1-\nu)\overset{*}{\sigma}_{r2} + (1-\nu)\alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1-\nu) + \alpha a^2(1-\nu)$$
$$- \frac{a^2 b^2}{r^2(a^2 - b^2)}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1+\nu) + \frac{\alpha a^2 b^2}{r^2}(1+\nu) - r^2(\beta - \nu\alpha)\Big\}$$

X - 6

De overgangsvoorwaarden van de ene schijf naar de andere zijn nu:

1° voor $r = a$; $u_I = u_{II}$ en $\sigma_{r1} = \frac{h_1}{h_2}\overset{*}{\sigma}_{r1} = n\overset{*}{\sigma}_{r1}$

2° voor $r = b$; $u_{II} = u_{III}$ en $\sigma_{r2} = \frac{h_1}{h_2}\overset{*}{\sigma}_{r2} = n\overset{*}{\sigma}_{r2}$

ad 1

$$n\overset{*}{\sigma}_{r1}(1-\nu) + \alpha a^2 = (1-\nu)\overset{*}{\sigma}_{r2} + (1-\nu)\alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1-\nu) + \alpha a^2(1-\nu)$$
$$- \frac{b^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1+\nu) + \alpha b^2(1+\nu) + \nu\alpha a^2$$

X - 7

ad 2

$$(1-\nu)\overset{*}{\sigma}_{r2} + (1-\nu)\alpha b^2 - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1-\nu) + \alpha a^2(1-\nu) - \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(\overset{*}{\sigma}_{r2} - \overset{*}{\sigma}_{r1}\right)(1+\nu) + \alpha a^2(1+\nu) =$$
$$= \alpha(1-\nu)(a^2 + b^2) - (1-\nu)\frac{b^2 n}{a^2 - b^2}\overset{*}{\sigma}_{r2} - (1+\nu)\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot n\overset{*}{\sigma}_{r2} + (1+\nu)\alpha a^2$$

Uit randwaarde X-7 is de waarde van $\overset{*}{\sigma}_{r1}$ en $\overset{*}{\sigma}_{r2}$ te bepalen uit de afmetingen van de schijven en hun rotatiesnelheid. Zijn deze bekend dan is ook de spanning σ_r en σ_θ in schijf II te bepalen met vgl. X-5

XI Bepaling van de theoretische spanning in schijf II

I

$\omega = 3000$ omw/min dan $\alpha = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 = 0{,}327$; $\beta = \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 = 0{,}188$

hierin is $a = 4$ cm ; $b = 16$ cm ; $d = 20$ cm ; $h_1 = 0{,}8$; $h_2 = 3$ cm ; $\nu = 0{,}3$; $m = \frac{h_1}{h_2} = 0{,}27$

Uit 7-1 :

$$0{,}19\overset{*}{\sigma}_{r1} + 5{,}23 = 0{,}7\overset{*}{\sigma}_{r2} + 58{,}60 + 0{,}05\overset{*}{\sigma}_{r2} - 0{,}05\overset{*}{\sigma}_{r1} + 3{,}66 + 1{,}39\overset{*}{\sigma}_{r2} - 1{,}39\overset{*}{\sigma}_{r1} + 108{,}83 + 1{,}57$$

$$1{,}63\overset{*}{\sigma}_{r1} = 167{,}43 + 2{,}14\overset{*}{\sigma}_{r2}$$

$$\rightarrow \overset{*}{\sigma}_{r1} = 1{,}31\overset{*}{\sigma}_{r2} + 102{,}72$$

Uit 7-2 :

$$0{,}7\overset{*}{\sigma}_{r2} + 58{,}60 + 0{,}05\overset{*}{\sigma}_{r2} - 0{,}05\overset{*}{\sigma}_{r1} + 3{,}66 + 0{,}09\overset{*}{\sigma}_{r2} - 0{,}09\overset{*}{\sigma}_{r1} + 6{,}80 = 150{,}16 - 0{,}34\overset{*}{\sigma}_{r2}$$

$$- 0{,}98\overset{*}{\sigma}_{r2} + 170{,}04$$

$$\rightarrow -0{,}14\overset{*}{\sigma}_{r1} = -2{,}16\overset{*}{\sigma}_{r2} + 251{,}14$$

$$\overset{*}{\sigma}_{r1} = 15{,}43\overset{*}{\sigma}_{r2} - 1793{,}86$$

dus: $102{,}72 + 1{,}31\overset{*}{\sigma}_{r2} = 15{,}43\overset{*}{\sigma}_{r2} - 1793{,}86$

$$\rightarrow \overset{*}{\sigma}_{r2} = 134{,}32 \text{ kg/cm}$$

$$\overset{*}{\sigma}_{r1} = 278{,}60 \text{ kg/cm}^2$$

Voor schijf II geldt dan voor $\omega = 3000$ omw/min

$$\sigma_r = 222{,}64 + \frac{1124{,}35}{r^2} - 0{,}327\,r^2$$

$$\sigma_\theta = 222{,}64 - \frac{1124{,}35}{r^2} - 0{,}188\,r^2 \qquad \text{XI-1}$$

2e Belastingtoestand

$\omega = 4000$ omw/min $\rightarrow \alpha = 0{,}579$; $\beta = 0{,}334$

In 7-1

$\rightarrow \sigma_{r1}^{*} = 1{,}31\,\sigma_{r2}^{*} + 185{,}28$

In 7-2

$\rightarrow \sigma_{r1}^{*} = 15{,}43\,\sigma_{r2}^{*} - 3176{,}23$

$\Rightarrow \sigma_{r2}^{*} = 238$ kgf/cm²

$\sigma_{r1}^{*} = 497$ kgf/cm²

Dus resultaat wordt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 378 + \frac{2040}{r^2} - 0{,}579\, r^2 \\ \sigma_\theta &= 378 - \frac{2040}{r^2} - 0{,}334\, r^2 \end{aligned}\right\| \quad \overline{XI}-2$$

3e Belastingsgeval

$\omega = 5000$ omw/min $\rightarrow \alpha = 0{,}905$; $\beta = 0{,}522$

$$\left.\begin{aligned} \text{In 7-1} \quad \sigma_{r1}^{*} &= 1{,}31\,\sigma_{r2}^{*} + 284 \\ \text{In 7-2} \quad \sigma_{r1}^{*} &= 15{,}43\,\sigma_{r2}^{*} - 4965 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \sigma_{r2}^{*} &= 372 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_{r1}^{*} &= 771 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_r &= 592 + \frac{3103}{r^2} - 0{,}905\, r^2 \\ \sigma_\theta &= 592 - \frac{3103}{r^2} - 0{,}522\, r^2 \end{aligned}\right\| \quad \overline{XI}-3$$

4e Belastingsgeval

$\omega = 6000$ omw/min $\Rightarrow \alpha = 1{,}303$; $\beta = 0{,}752$

$$\left.\begin{aligned} \text{In 7-1} \quad \sigma_{r1}^{*} &= 1{,}31\,\sigma_{r2}^{*} + 409 \\ \text{In 7-2} \quad \sigma_{r1}^{*} &= 15{,}43\,\sigma_{r2}^{*} - 7148 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{r1}^{*} &= 1110 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_{r2}^{*} &= 535 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_r &= 851 + \frac{4476}{r^2} - 1{,}303\, r^2 \\ \sigma_\theta &= 851 - \frac{4476}{r^2} - 0{,}752\, r^2 \end{aligned}\right\| \quad \overline{XI}-4$$

Uit de aldus verkregen vergelijkingen vinden we:

$\omega = 3000$ omw/min		
r cm	σ_r	σ_θ
4.7	266	168
5.7	247	182
6.7	233	189
8.2	217	193
10.2	199	192
12.2	182	187
15.4	150	173

$\omega = 4000$ omw/min		
r cm	σ_r	σ_θ
4.7	458	278
5.7	422	304
6.7	398	317
8.2	370	325
10.2	337	324
12.2	306	315
15.4	249	290

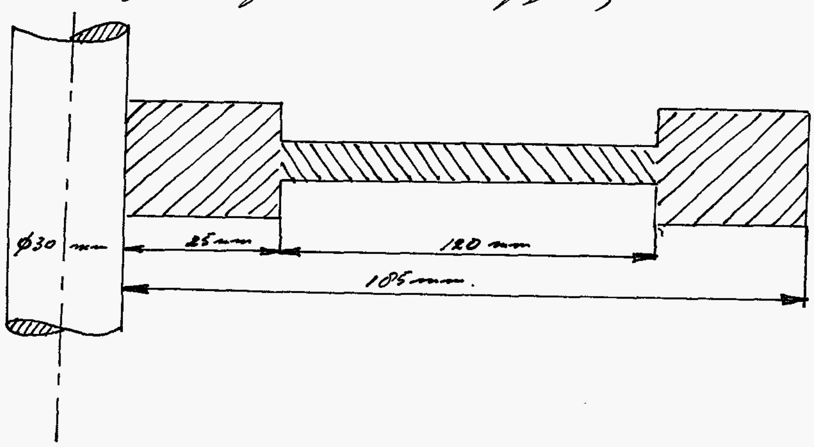
$\omega = 5000$ omw/min		
r cm	σ_r	σ_θ
4.7	713	439
5.7	658	480
6.7	620	499
8.2	577	511
10.2	528	508
12.2	470	493
15.4	391	455

$\omega = 6000$ omw/min		
r cm	σ_r	σ_θ
4.7	1026	631
5.7	946	689
6.7	892	718
8.2	830	734
10.2	759	730
12.2	687	709
15.4	561	654

XII Het Experiment

Met behulp van de automatische rekstrookmeetapparatuur van Peekel werden metingen verricht aan een ronde platte schijf die op twee plaatsen plotseling in dikte veranderde.

De afmetingen van de schijf zijn:

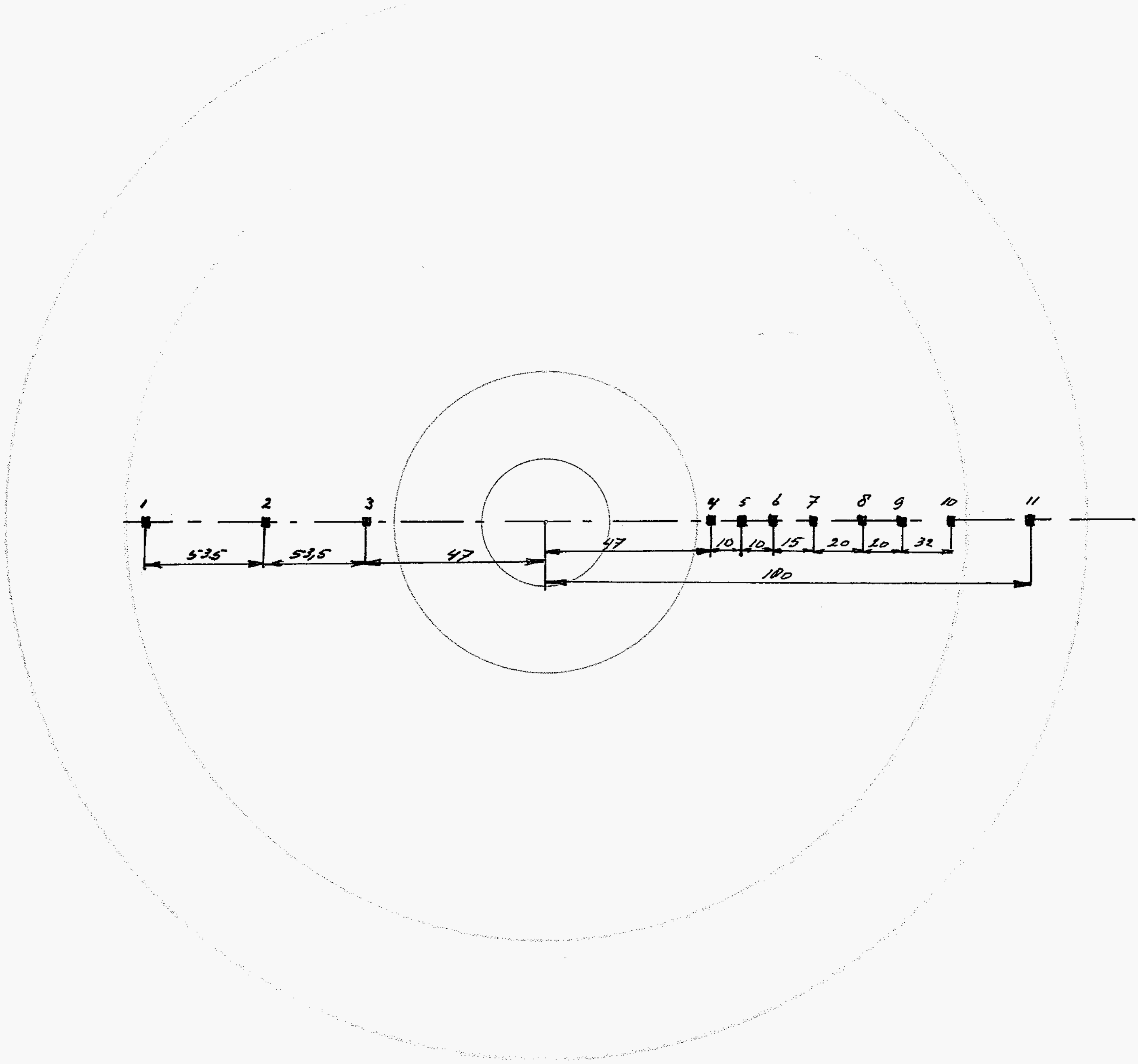


De belasting verkreeg men door de schijf met een electromotor, die continu te variëren was in toerental van 0-3000 omw/min en van 3000-6000 omw/min, via een riemoverbrenging te laten roteren.
De fijnste toerental instelling werd gedaan door middel van een tachometer.

De rekstrookjes werden op een doorsnede aan één kant van de schijf geplakt. De referentierekstrookjes radiaalsymmetrisch ook aan dezelfde kant van de schijf.

Verder werd in één meetpunt twee rekken gemeten n.l. E_r en E_θ die als hoofdrekken verondersteld werden.

Op de volgende pagina vindt men een afbeelding van de plaatsing van de rekstrookjes.



Alle maten in mm.

Rekstrookje : H.P.C 4
Gage lengte 4 mm.
K-factor = 2.04

Bij elke meetserie werden de toerentallen twee maal ingesteld te beginnen bij 3000 t/m 6000 en dan van 6000 weer via 5000 en 4000 naar 3000.

Deze serie werd drie maal uitgevoerd. Verder moet nog vermeld worden dat per meetserie slechts de helft van het totaal aantal filamenten aangesloten kon worden op het meetapparatuur waardoor dus de totale meetserie herhaald moest worden.

De metingen werden onmiddellijk in een ponsband gezet. Hieruit werden de spanningen verkregen.

De onnauwkeurigheid van deze spanningen volgt natuurlijk samen met de standaarddeviatie van de rekmetingen.

Dat de deviaties van de spanningen nog vrij aanzienlijk kunnen worden komt door het voorschrift dat deze gevonden worden door de rekdeviaties te vermenigvuldigen met de elasticiteitsmodulus E. die $2{,}1 . 10^6$ in waarde is.

De verkregen spanningen zijn na middelen als volgt:

ω	4R	4L	5R	5L	6R	6L	7R	7L	8R	8L	9R
3000	264	186	251	213	260	220	215	210	207	210	183
4000	475	321	447	369	451	390	380	365	359	362	325
5000	755	513	701	534	713	620	620	574	516	548	512
6000	1080	734	1006	807	990	850	860	811	735	776	742

ω	9L	10R	10L	11R	11L	3L	3R	2L	2R	1L	1R
3000	184	161	183	49	155	195	290	205	218	193	174
4000	335	279	318	72	257	389	482	385	448	329	291
5000	515	423	476	107	388	557	775	570	610	495	443
6000	723	597	665	142	517	772	1103	781	808	681	610

De resultaten van het experiment zijn vermeld in de volgende grafieken.

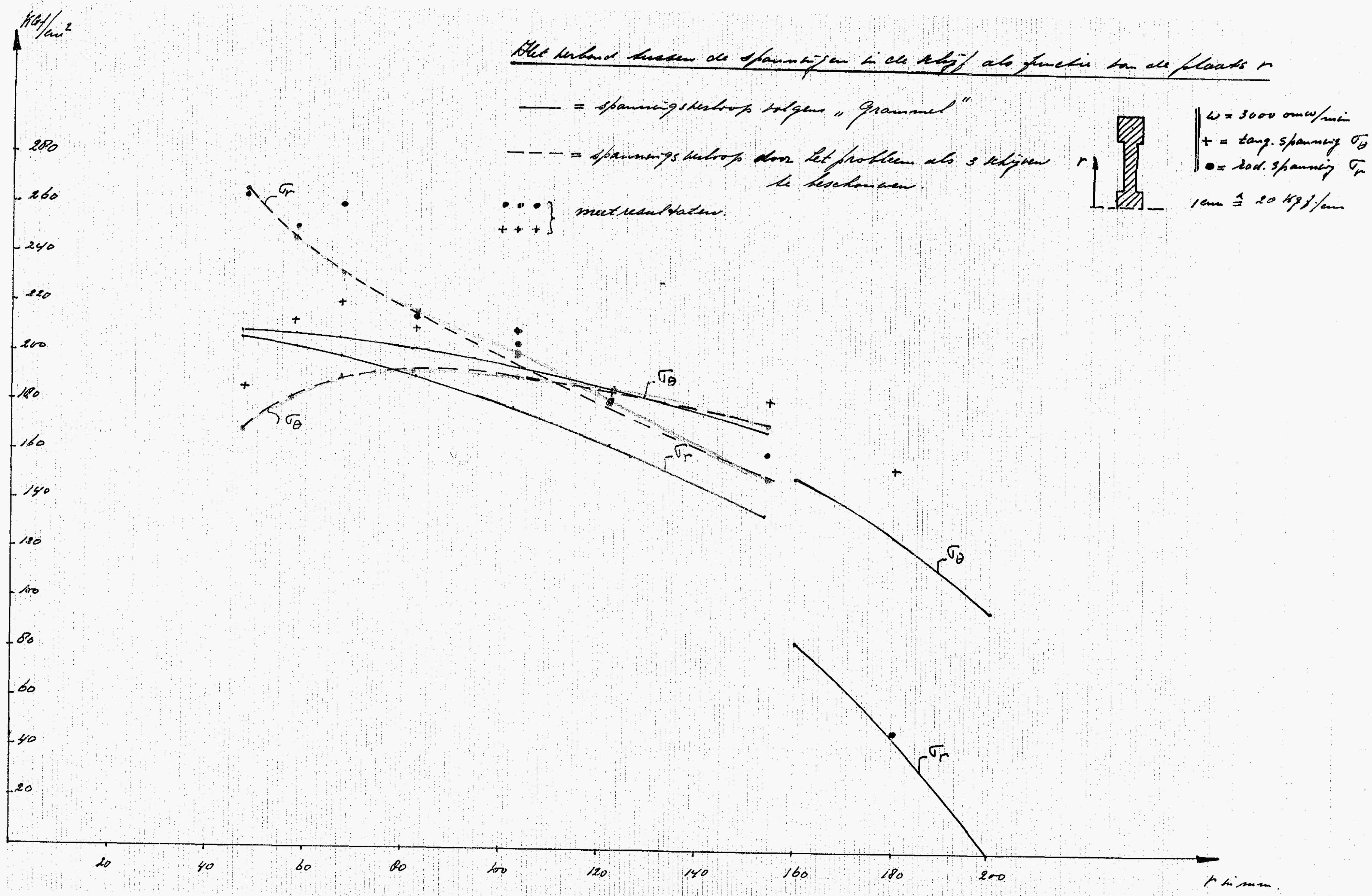
Ter vergelijking staan steeds de experimentele en de theoretische waarden.

Conclusie

Ondanks het feit dat het probleem op zich tamelijk gemakkelijk is, zijn de resultaten verkregen door de theorie en als meetwaarden bepaald slecht te noemen. Van de gevolgde methoden is die van de elementaire schijven theorie nog als beste in overeenstemming met het experiment. De methode van Grammel waar het uiteindelijk om ging geeft een zeer grote afwijking naar het midden van de schijf. Deze methode gaat eigenlijk alleen maar goed als het profiel van de schijf gelijkmatig, continue verandert, dus als het profiel een „gladde" functie voorstelt. Vermoedelijk zijn de sprongen in bovengenoemd voorbeeld te rigoreus.

Dat de „bekende" vlakke schijven theorie ook afwijkt is vermoedelijk het gevolg van de aanname dat de twee ringen als vlakspanningstoestand ingevoerd zijn. Vooral de binnenring met de as is in geen geval niet als vlakspanningstoestand te beschouwen. De platte schijven waaruit de as en de binnenring opgebouwd gedacht kunnen worden, zullen bij rotatie niet vlak blijven doordat de dwarscontractie niet dezelfde blijft bij verschillende straalafstand. Dit veroorzaakt dat de schijven niet meer met elkaar aansluiten. Omdat dit toch het

gevallen uit hoofde van de constructie ontstaan er in axiale richting van de schijf en as spanningen die hun invloed doen uitoefenen op de tangentiele - en radiale spanningen in de schijf en de naven.
Voor zover ik nu kan oordelen is dit typisch een probleem, dat men vraagt om met ruimte elementen via de elementen methode op te lossen


Het verband tussen de spanningen in de schijf als functie van de plaats r
—— = spanningsverloop volgens "Grammel"
– – – = spanningsverloop door het probleem als 3 schijven te beschouwen.
• • • + + + } meetresultaten.
ω = 3000 omw/min
+ = tang. spanning σ_θ
● = rad. spanning σ_r
1 cm ≙ 20 Kgf/cm
r
σ_r
σ_θ
σ_θ
σ_r
σ_θ
σ_r
Kgf/cm²
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
r in mm.

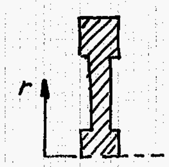
$\omega = 4000$

Het verband tussen de spanningen in de schijf als functie van de plaats r

—— = spanningsverloop volgens „Grammel"

- - - = spanningsverloop door het probleem als 3 schijven te beschouwen.

• • • • / + + + + } rekstrook meetresultaten.

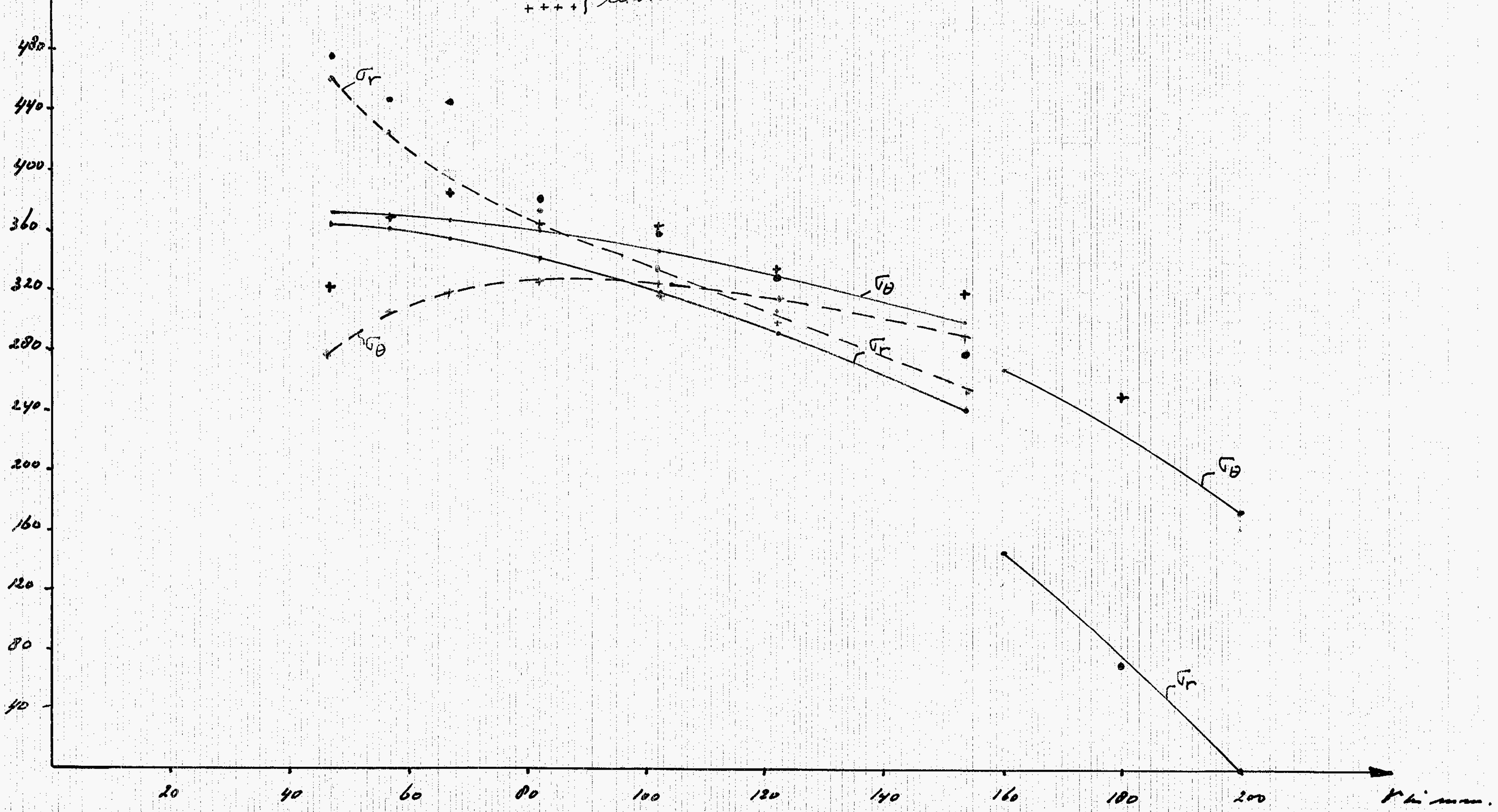


$\omega = 4000$ omw/min

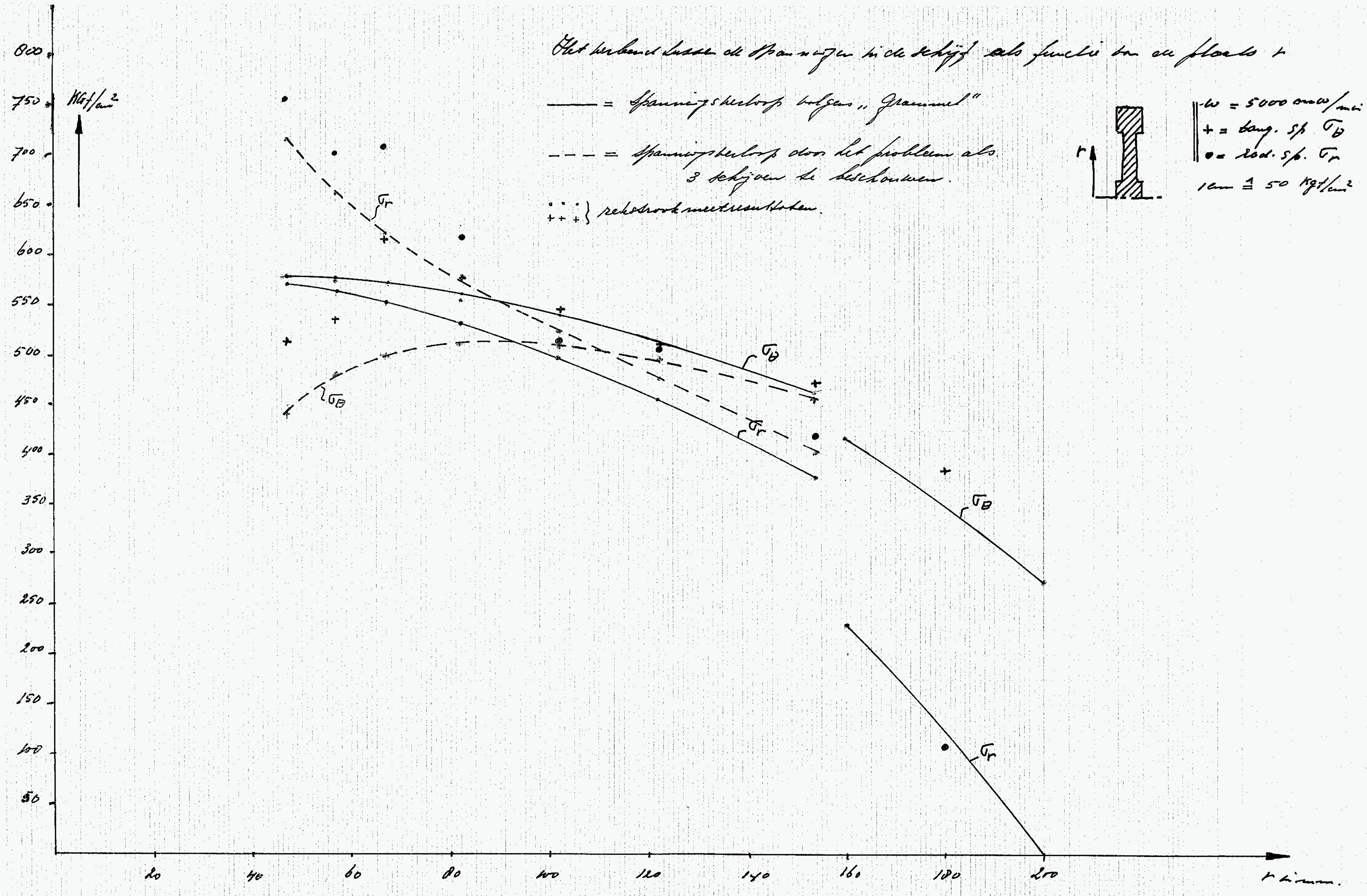
$+$ = tang. sp. σ_θ

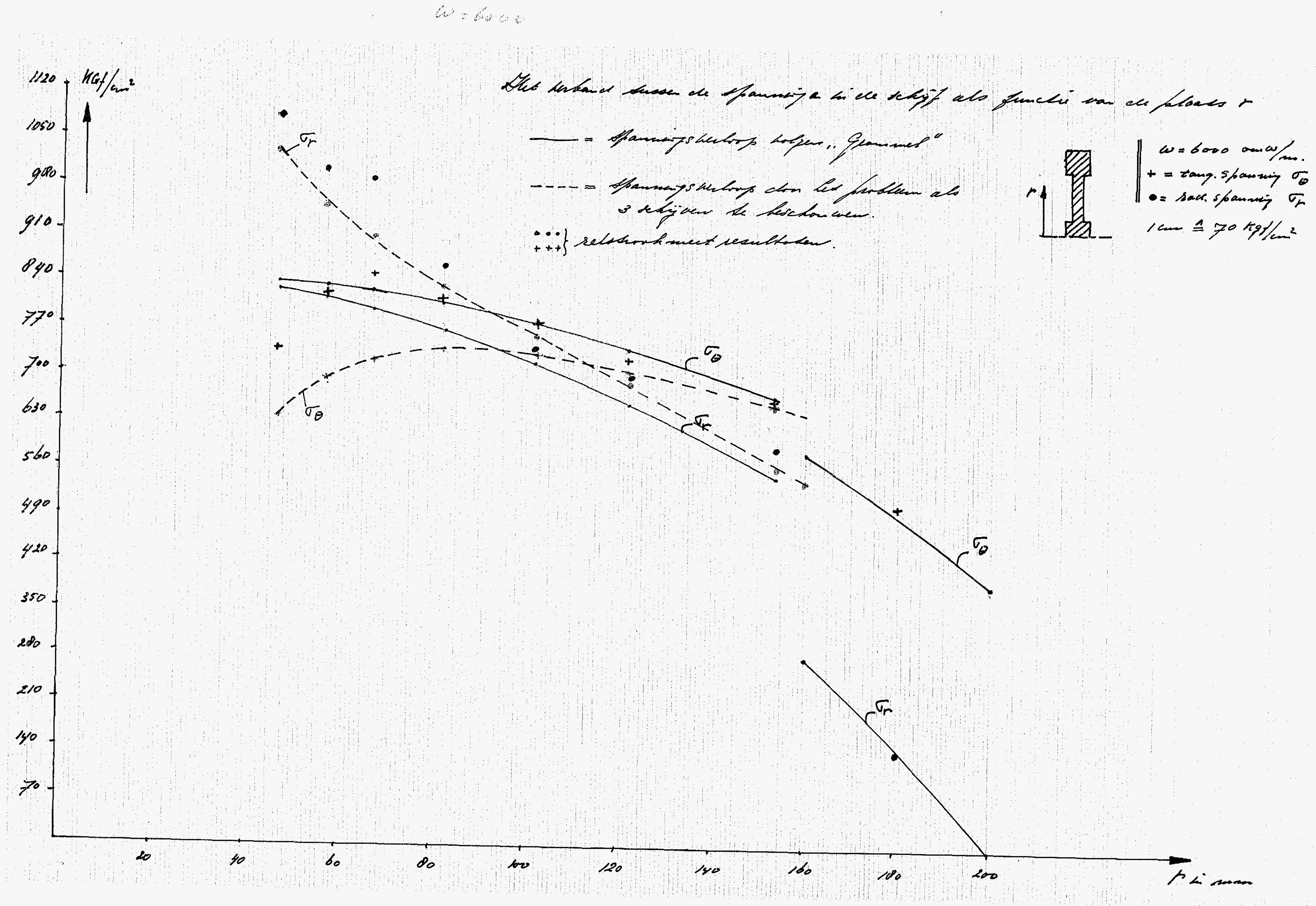
$\circ$ = rad. sp. σ_r

1 cm $\hat{=}$ 40 kgf/cm^2



ω = 5000


Het verband tussen de spanningen in de schijf als functie van de plaats r
—— = Spanningsverloop volgens „Grammel"
– – – = Spanningsverloop door het probleem als 3 schijven te beschouwen.
• • • / + + + } rekstrookmeetresultaten.
ω = 5000 omw/min
+ = tang. sp. σ_θ
● = rad. sp. σ_r
1 cm ≙ 50 Kgf/cm²
Kgf/cm²
r
σ_r
σ_θ
r in mm.
800
750
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

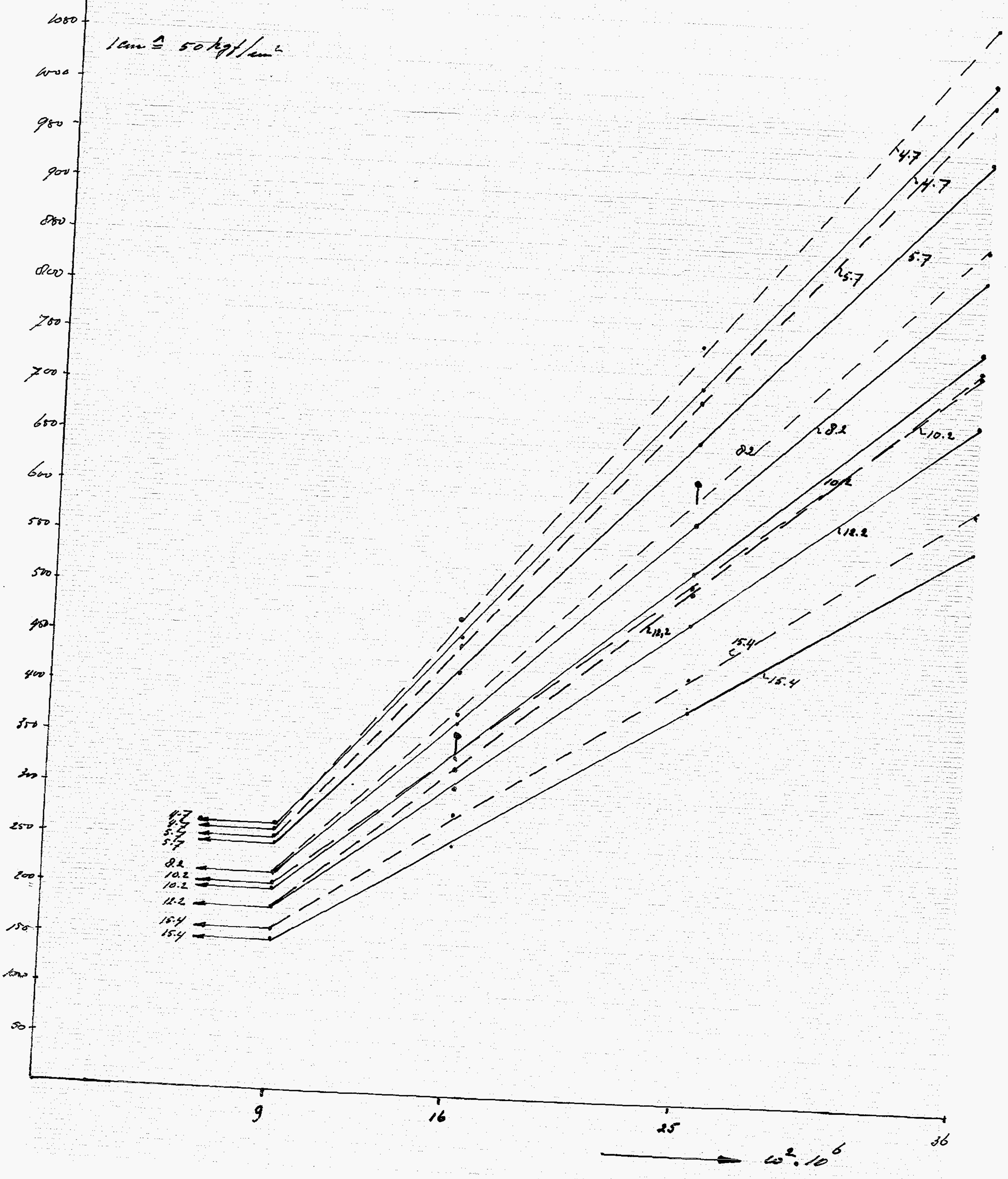

ω = 6000
Het verband tussen de spanning in de schijf als functie van de plaats r
—— = Spanningsverloop volgens „Grammel"
- - - - = Spanningsverloop door het probleem als 3 schijven te beschouwen.
• • • + + + } relaxatiemeetresultaten.
ω = 6000 omw/m.
+ = tang. spanning σθ
• = rad. spanning σr
1 cm ≙ 70 Kgf/cm²
Kgf/cm²
1120
1050
980
910
840
770
700
630
560
490
420
350
280
210
140
70
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
r in mm
σr
σθ
r

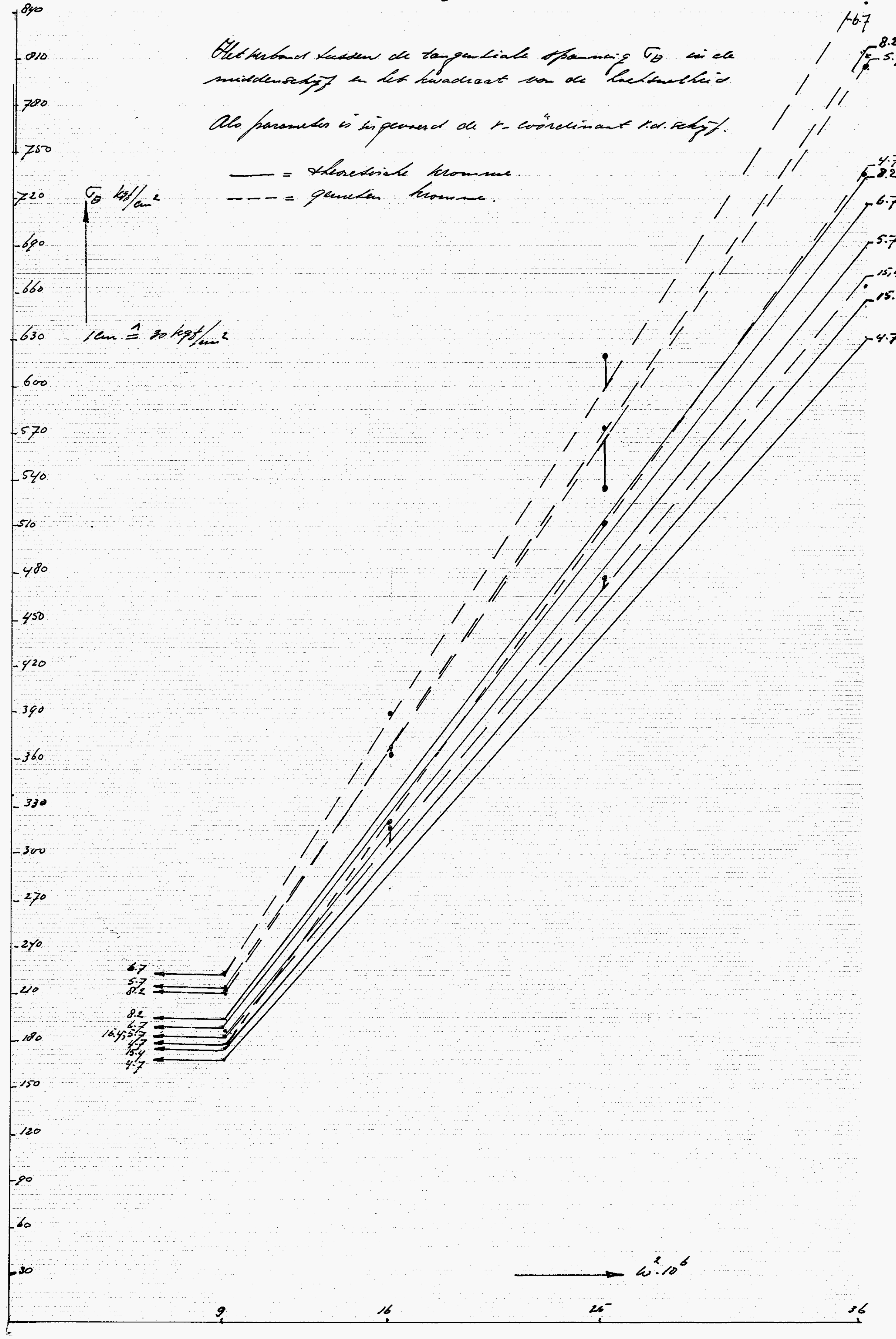
Het verband tussen de radiale spanning in de middenschijf en het kwadraat van de hoeksnelheid.

Als parameter is aangenomen de r-coördinaat in de schijf.

—— = theoretische kromme.

- - - = gemeten kromme.




Het verband tussen de tangentiale spanning σθ in de middenschijf en het kwadraat van de hoeksnelheid.
Als parameter is uitgezet de r-coördinaat v.d. schijf.
—— = theoretische kromme.
- - - = gemeten kromme.
σθ kgf/cm²
1 cm ≙ 30 kgf/cm²
ω²·10⁶
840
810
780
750
720
690
660
630
600
570
540
510
480
450
420
390
360
330
300
270
240
210
180
150
120
90
60
30
9
16
25
36
6.7
5.7
8.2
4.7
15.4
16.4