Niet-lineaire trillingen

Afdeling der Werktuigbouwkunde.

GROEP TECHNISCHE MECHANICA.

NIET-LINEAIRE TRILLINGEN.

door:

AAF v.d. VEN.

februari 1964.

Techische Hogeschool. Eindhoven.

INHOUDSOPGAVE.

LITERATUURLIJST.

Lit 1. J.P. den Hartog.
Mechanical Vibrations.
Mc. Graw - Hill 1956.

Lit 2. Richter.
Bauelementen der Feinmechanik.

wat is hieraan ontleend?

Lit 3. J. Stoker
Non-linear Oscillations.
Intersclence Publishers. 1950.

Lit 4. Minorski.
Nonlinear Oscillations.

Lit 5. J. Kožešnik.
Dynamics of Machines
Noordhoff 1962.

I.1. Inleiding.

In dit eerste hoofdstuk behandelen we een aantal oplossingen van de Duffingvergelijking. Voor een beter inzicht bekijken we eerst even het probleem dat we willen oplossen.

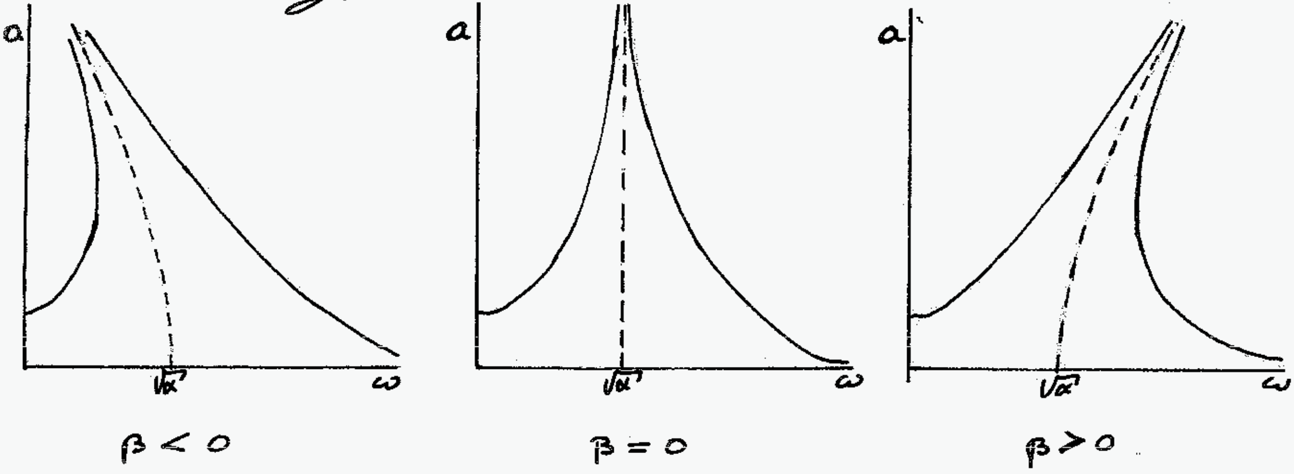
De Duffingsvergelijking luidt:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.1)$$

ρ en β klein, φ is een constante.

Dit is de bewegingsvergelijking ~~voor~~ voor gedwongen trillingen van een systeem met één graad van vrijheid en 'n niet-lineaire veer.

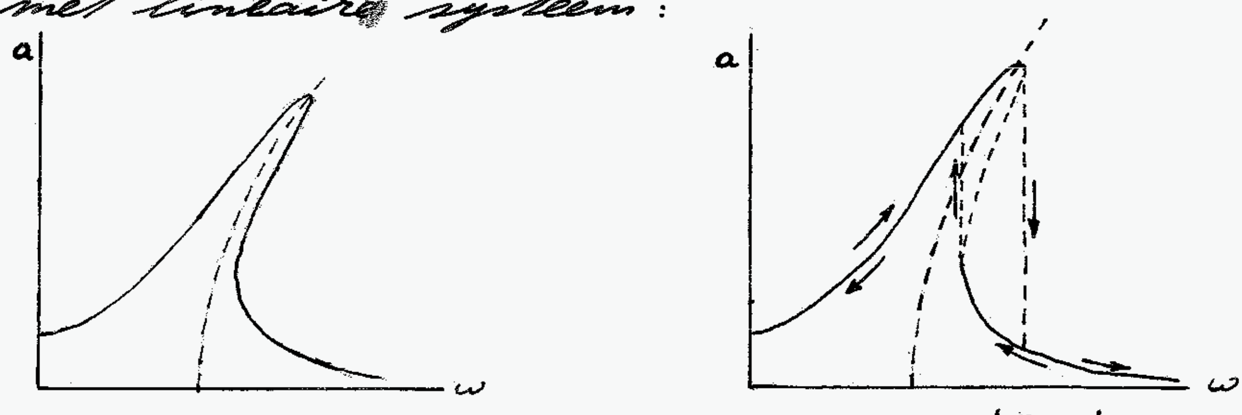
Voor het ongedempte systeem krijgen we de volgende resonantiekrommen:



------ : ruggegraat ($F = 0$).

We noemen $\beta < 0$ een zacht systeem en $\beta > 0$ een hard systeem.

Bij een gedempt systeem krijgen we, analoog met lineaire systeem:



Sprongverschijnselen

Als we deze resonantiekrommen doorlopen, zien we zowel bij toenemende als bij afnemende frequentie een sprong optreden. Ik wil deze sprongen ook bij mijn experimenten laten zien.

Hiertoe heb ik een niet-lineair veersysteem ontworpen, dat op een triltafel een gedwongen trilling krijgt. We zullen van dit systeem een resonantiekromme opnemen.

Tevens bespreken we de volgende oplossingsmethoden van de Duffing-vergelijking:

1. Duffing (1918): iteratiemethode.
2. Reinhardt (1963): met fictieve kracht.
3. De perturbation-methode (±1883): met ontwikkeling rond de vrije, lineaire oplossing.
4. Rauscher (1938): iteratiemethode uitgaande van de niet-lineaire vrije trilling.
5. ~~Schweissinger~~ (1950).

[illegible]

II. Oplossingsmethoden.

2.1. Methode Duffing.

We gaan uit van:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \beta F_0 \cos\omega t. \qquad (211)$$

[illegible] We nemen F klein en schrijven daarom:

$$F = \beta F_0$$

We bekijken eerst het geval dat er geen demping is. Dus $\rho = 0$.

We kunnen (211) dan schrijven als:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \alpha)x - \beta x^3 + \beta F_0 \cos\omega t \qquad (212)$$

Als eerste benadering nemen we:

$$x_0 = A\cos\omega t \quad + [illegible]? \qquad (213)$$

[illegible] Dit in (212) stoppen, waarbij we gebruik maken van:

$$\cos^3\omega t = \frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t \qquad (214)$$

krijgen we:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left[(\omega^2 - \alpha)A - \frac{3}{4}\beta A^3 + \beta F_0\right]\cos\omega t - \frac{1}{4}\beta A^3 \cos 3\omega t =$$
$$= a\cos\omega t + b\cos 3\omega t \qquad (215)$$

De oplossing hiervan is:

$$x_1 = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t - \frac{a}{2\omega}t\sin\omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega^2}\cos\omega t \qquad (216)$$

Deze oplossing bevat een term met $t\sin\omega t$. Dit zou willen zeggen dat de amplitude van x_1 steeds groter zou worden. Dit gebeurt niet dus moet $a = 0$ zijn. Dus:

$$(\omega^2 - \alpha)A - \frac{3}{4}\beta A^3 + \beta F_0 = 0$$

Dit geeft de belangrijke relatie voor $\omega = \omega(A)$:

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A} \qquad (217)$$

Uit de randvoorwaarde $\dot{x}(t=0) = 0$ volgt $B_1 = 0$.
M.b.v. (217) wordt (216) dan:

$$x_1(t) = A_1\cos\omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega^2}\cos 3\omega t. \qquad (218)$$

De volgende stap is essentieel voor de methode van Duffing. β en F zijn klein. We kunnen de oplossing dus beschouwen als een Fourrier-ontwikkeling om de vrije lineaire trilling.

Als dan A een goede benadering was, mogen A_1 en A niet te veel verschillen. We nemen daarom $A_1 = A$. Dit geeft voor (218):

$$x_1(t) = A\cos\omega t + \frac{\beta A^3}{32\left(\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A}\right)}\cos 3\omega t \qquad (219).$$

We moeten er nu op letten dat A niet de amplitude van de trilling is, doch de eerste coefficient van de Fourrierontwikkeling. Bij kleine β zal het verschil tussen deze twee echter klein zijn.

We willen nu iets weten over het toepassingsgebied van deze methode. We hebben al eerder gezien dat β en F klein moeten zijn. Dit omdat we uitgaan van de vrije lineaire trilling.

Als we $x_1(t)$ weer in (212) stoppen en deze oplossen vinden we:

$$x_2 = A\cos\omega t + \frac{1}{32}\cdot\frac{\beta A^3\cos 3\omega t}{\left(\alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{\beta F_0}{A}\right)} + \cdots\cdots$$

We kunnen deze vergelijking dimensieloos maken door te delen door een karakteristieke lengte: y_0:

$$\frac{x_2}{y_0} = \frac{A}{y_0}\cos\omega t + \frac{1}{32}\cdot\frac{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{A^3}{y_0}\cos 3\omega t}{\left(1 + \frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha}A^2 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{F_0}{A}\right)} \qquad (220)$$

We voeren in:

$$\frac{x_2}{y_0} = \xi_2 \quad ; \quad \frac{A}{y_0} = \eta \quad ; \quad \frac{\beta y_0^2}{\alpha} = \delta \quad ; \quad \frac{F_0}{y_0^3} = \varphi$$

(220) wordt dan:

$$\xi_2 = \eta\cos\omega t + \frac{1}{32}\frac{\delta\eta^3}{\left(1 + \frac{3}{4}\delta\eta^2 - \frac{\delta\varphi}{\eta}\right)}\cos 3\omega t$$

Als we A als amplitude nemen, maken we dus een, procentuele, fout van.

$$\Delta = \frac{\delta\eta^2}{32\left(1 + \frac{3}{4}\delta\eta^2 - \frac{\delta\varphi}{\eta}\right)}\cdot 100\,\% \qquad (221)$$

?

Behalve de δ (β) mag dus ook de η (A) niet te groot worden

We gaan nu verder met $\rho \neq 0$. Als er demping is, treedt er een faseverschil op tussen x en F. We geven dit aan met de hoek φ:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F\cos(\omega t + \varphi) = -F\sin\varphi\sin\omega t + F\cos\varphi\cos\omega t =$$
$$= H\cos\omega t - G\sin\omega t \qquad (222)$$

We nemen ρ, β en F klein

We schrijven (222) als:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \alpha)x - \beta x^3 + H\cos\omega t - G\sin\omega t \qquad (223)$$

Stel: $x_0 = A\cos\omega t$: $\qquad (224)$

$$\ddot{x}_1 + \rho\dot{x}_1 + \omega x_1 = \left[(\omega^2 - \alpha)A - \tfrac{3}{4}\beta A^3 + H\right]\cos\omega t - \tfrac{1}{4}\beta A^3\cos 3\omega t - G\sin\omega t.$$

De homogene oplossing van deze vergelijking dempt uit, en is dus niet interessant.

We stellen als particuliere oplossing:

$$x_1 = A\cos\omega t + B\cos 3\omega t \qquad (225)$$

Als we dit in de vergelijking stoppen, vinden we de volgende twee vergelijkingen:

$$(\alpha - \omega^2)A + \tfrac{3}{4}\beta A^3 = H = F\cos\varphi \qquad (226)$$
$$A\rho\omega = G = F\sin\varphi \qquad (227)$$

Als we resonantie definieren (de definitie [illegible]) als $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ρ is klein), dan vinden we dat de top van de resonantiekromme moet liggen op de hyperbool: $\qquad A_{res} = \frac{F}{\rho}\cdot\frac{1}{\omega} \qquad (228)$

We kunnen φ elimineren door (226) en (227) te kwadrateren en op te tellen. Dit geeft:

$$\left[(\alpha - \omega^2)A + \tfrac{3}{4}\beta A^3\right]^2 + \rho^2 A^2\omega^2 = H^2 + G^2 = F^2 \qquad (229).$$

Voor de coefficient B vinden we de uitdrukking: $\qquad B = \frac{1}{32}\,\frac{\beta A^3}{\omega^2}$

De fout is bij kleine demping dus nagenoeg hetzelfde als bij het ongedempte systeem.

2.2. Methode Reinhoudt.

We schrijven de differentiaalvergelijking als:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha x = -\beta x^3 + F\cos(\omega t + \varphi). \qquad (221)$$

ρ en β klein.

We noemen $-\beta x^3$: de stoorterm. Bij kleine uitwijkingen x (kleine A) zal de invloed van de stoorterm klein zijn. Voor het goed verlopen van deze methode is het dus noodzakelijk dat de amplitude niet te groot wordt.

We stellen als eerste benadering:

$$x = x_1 = A\cos\omega t \qquad (222)$$

Met deze x_1 geeft de stoorterm een fictieve kracht:

$$-\beta x_1^3 = -\beta A^3\cos^3\omega t = -\beta A^3\left(\tfrac{3}{4}\cos\omega t + \tfrac{1}{4}\cos 3\omega t\right) \qquad (223)$$

Dit in (221) stoppen geeft:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha x = \left[F\cos\varphi - \tfrac{3}{4}\beta A^3\right]\cos\omega t + F\sin\varphi\sin\omega t - \tfrac{1}{4}\beta A^3\cos 3\omega t - \left[\beta x^3\right]_1 \qquad (224)$$

Hierin is $-[\beta x^3]_1$ een correctieterm, welke aangeeft dat we x_1 als oplossing gebruikt hebben.

De (224) bevat de frequentie 3ω. We stellen daarom als volgende oplossing:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega t + B\cos(3\omega t + \psi) \qquad (225)$$

Omdat $B \ll A$ en we een eerste orde benadering zoeken, kunnen we de termen tgv x_2 in de stoorterm verwaarlozen. Als we nu (225) in (224) stoppen vinden we de volgende vergelijkingen:

$$-A\omega^2 + \alpha A = F\cos\varphi - \tfrac{3}{4}\beta A^3 \qquad (226)$$

$$A\rho\omega = F\sin\varphi \qquad (227)$$

Als $\rho = 0$ ($\varphi = 0$) vinden we:

$$\omega^2 = \alpha + \tfrac{3}{4}\beta A^2 - \frac{F}{A} \qquad (228)$$

We zien dat we dezelfde resultaten krijgen als bij de Duffing methode. Dit is niet zo verwonderlijk, aangezien beide methoden nagenoeg gelijk zijn.

We substitueren namelijk bij beiden in de differentiaalverg. de oplossing:

$$x = A\cos\omega t + B\cos 3\omega t$$

en verwaarlozen dan de termen met $\cos 3\omega t$.

We definieren als resonantie, bij kleine ρ, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Uit (226) vinden we dan, als we $F=0$ nemen, de volgende formule voor de ruggegraat:

$$a_{res} = \sqrt{\frac{-\alpha + \omega_{res}^2}{\frac{3}{4}\beta}} \qquad (229)$$

Voor de bepaling van de flanken voeren we een schijnbare veerstijfheid α_s in:

$$\alpha_s = (\alpha + \tfrac{3}{4}\beta A^2) \qquad (230)$$

Dus: $\alpha_s = \alpha_s(A)$.

De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$\ddot{x} + \rho\dot{x} + \alpha_s x = F\cos(\omega t + \varphi). \qquad (231)$$

De procedure gaat nu als volgt:

We kiezen een bepaalde A. Bepalen voor deze A de α_s. We kunnen nu op de elementaire manier de resonantiekromme voor (231) berekenen. De punten van deze kromme die overeenkomen met $\bar{x} = A$ zijn dan tevens punten van het niet-lineaire systeem. We kunnen zo punt voor punt van de resonantie kromme bepalen.

2.3. Perturbation methode.

We nemen $\rho = 0$ en F klein: $F = \beta F_0$.

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \beta F_0 \cos\omega t \qquad (231)$$

We ontwikkelen de uitwijking in:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) \qquad (232)$$

Hierin is $x(t)$ een periodieke oplossing met dezelfde frequentie als $F\cos\omega t$.

We definieren $\omega t = \theta$. De differentiaalvergelijking (231) wordt dan:

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta} + \alpha x + \beta x^3 = \beta F_0 \cos\omega t. \qquad (233)$$

$x(\theta)$ moet voldoen aan:

1° $x(\theta + 2\pi) = x(\theta)$: periodiek.
2° $x(0) = A$.
3° $x'(0) = 0$.
 $'$ betekent $\frac{d}{d\theta}$.

Het verschil met de Duffingmethode is dat A hier de maximale waarde van de $x(t)$ aangeeft en niet de eerste Fouriercoefficient.

We nemen voor de parameter ε : β.
β is klein. We kunnen de oplossing dus opvatten als een ontwikkeling in de buurt van de vrije lineaire oplossingen. Hiervoor is vereist dat β en F klein zijn en A niet te groot.

We nemen A vast en beschouwen ω als functie van A. Daarom ontwikkelen we ω ook:

$$x(\theta) = x_0(\theta) + \beta x_1(\theta) + \beta^2 x_2(\theta) + \cdots \qquad (234)$$

$$\omega = \omega_0 + \beta\omega_1 + \beta^2\omega_2 + \cdots \qquad (235)$$

De condities worden nu:

1° $x_i(\theta + 2\pi) = x_i(\theta)$
2° $x_0(0) = A$; $x_j(0) = 0$ $(j \neq 0)$
3° $x_0'(0) = 0$; $x_j'(0) = 0$

We gaan (234) en (235) in de differentiaalvergelijking stoppen:

Dit geeft:

$$(\omega_0^2 + 2\beta\omega_0\omega_1 + \cdots)(x_0'' + \beta x_1'' + \cdots) + \alpha(x_0 + \beta x_1 + \cdots) +$$
$$+ \beta\,(x_0^3 + 3x_1 x_0^2 \cdot 2\beta + \cdots) = \beta F_0 \cos\theta . \qquad (236)$$

We nemen eerst de termen met β tot de macht nul:

$$\omega_0^2\, x_0'' + \alpha x_0 = 0 \qquad (237)$$

Met als oplossing:

$$x_0(t) = A_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}\cdot\theta\right) + B_0 \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}\cdot\theta\right) \qquad (238)$$

De drie condities worden:

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \sqrt{\alpha} = \omega_0 \\ 2^\circ & A_0 = A \\ 3^\circ & B_0 = 0 \end{array}\right\} \therefore \quad \begin{array}{l} x_0 = A\cos\theta \\ \omega_0 = \sqrt{\alpha} \end{array} \qquad (239)$$

De termen met de 1e orde β geven:

$$\omega_0^2 x_1'' + \alpha x_1 = -2\omega_0\omega_1 x_0'' - x_0^3 + F_0\cos\theta$$

$x_0 = A\cos\theta$ substitueren geeft:

$$\omega_0^2 x_1'' + \alpha x_1 = (2\omega_0\omega_1 A - \tfrac{3}{4}A^3 + F_0)\cos\theta - \tfrac{1}{4}A^3\cos 3\theta \qquad (240)$$

Om de periodiciteit te behouden moet weer de coefficient van $\cos\theta$ nul zijn:

$$2\omega_0\omega_1 A - \tfrac{3}{4}A^3 + F_0 = 0$$
$$\therefore\ \omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{3}{4}A^2 - \frac{F_0}{A}\right) \qquad (241)$$

(240) wordt dan:

$$\omega_0^2 x_1'' + \alpha x_1 = -\tfrac{1}{4}A^3\cos 3\theta$$

De oplossing hiervan is:

$$x_1 = A_1\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}\cdot\theta\right) + B_1\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}\cdot\theta\right) - \frac{A^3}{4(\alpha - 9\omega_0^2)}\cos 3\theta =$$

$$= A_1\cos\theta + B_1\sin\theta + \frac{A^3}{32\alpha}\cos 3\theta \qquad (242)$$

De randvoorwaarden geven:

$$A_1 = -\frac{A^3}{32\alpha} \quad \text{en} \quad B_1 = 0$$

Als we $\beta^2 = 0$ nemen krijgen we dus de volgende oplossingen:

$$x = A\cos\theta + \frac{\beta A^3}{32\alpha}(-\cos\theta + \cos 3\theta)$$
$$\omega = \sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{3}{4}A^2 - \frac{F_0}{A}\right) \qquad (243)$$

We willen nu iets weten over de fout in de relatie $\omega = \omega(A)$

De termen met β^2 geven:

$$(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)\, x_0'' + 2\omega_0\omega_1 x_1'' + \omega_0^2 x_2'' + \alpha x_2 + 3x_0^2 x_1 = 0$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \alpha x_2 = -(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)\, x_0'' - 2\omega_0\omega_1 x_1'' - 3x_0^2 x_1 \qquad (244)$$

De factor voor $\cos(\theta)$ in (244) nul stellen:

$$\omega_2 = -\frac{\omega_1^2}{2\omega_0} + \frac{\omega_1 A^2}{32\alpha} - \frac{1}{128}\cdot\frac{A^4}{\omega_0\alpha}$$

$$\therefore\ \delta = \frac{\beta^2\omega_2}{\omega_0} = \frac{\beta^2 n_2}{n_0} = -\frac{(\beta\omega_1)^2}{2\omega_0^2} + \frac{\beta\omega_1}{\omega_0}\cdot\frac{\beta A^2}{32\alpha} - \frac{1}{128}\cdot\left(\frac{\beta A^2}{\alpha}\right)^2 \qquad (245)$$

met:
$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\alpha} \\ \omega_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{3}{4}A^2 - \frac{F_0}{A}\right) \\ F_0 &= \alpha\cdot y_0/\beta \end{aligned}\right\} \therefore\ \frac{\beta\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\,\frac{\beta A^2}{\alpha} - \frac{y_0}{A}\right)$$

Als we $A \gg y_0$ nemen:

$$\frac{\beta\omega_1}{\omega_0} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\beta A^2}{\alpha} = \frac{3}{8}\gamma \quad \text{met } \gamma = \frac{\beta A^2}{\alpha} \qquad (246)$$

(246) substitueren in (245) geeft:

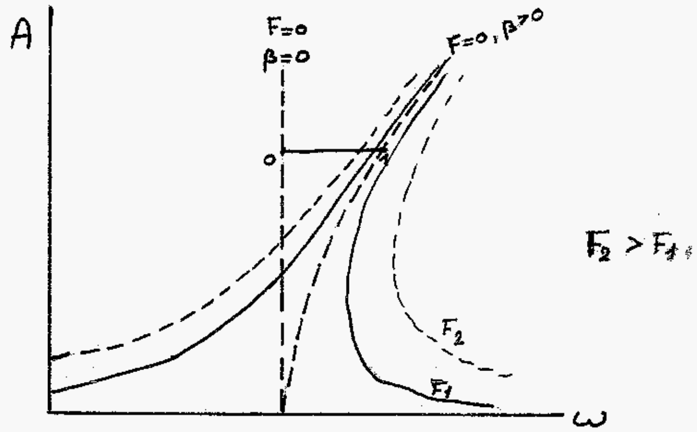
$$\delta = \frac{\beta^2 n_2}{n_0} = -\frac{9}{128}\gamma^2 + \frac{3}{256}\cdot\gamma^2 - \frac{1}{128}\gamma^2 = \frac{17}{256}\gamma^2$$

Dus: $$\underline{\delta = 6{,}46 \times \left(\frac{\beta A^2}{\alpha}\right)^2\ \%.} \qquad (247)$$

De methode gaat dus goed bij kleine β en A.

2.4. Methode Rauscher.

De methode Rauscher is een iteratie-methode die, in tegenstelling tot de vorige methodes, uitgaat van een schatting van de vrije, <u>niet</u>-lineaire trilling, i.p.v uit te gaan van de lineaire trilling.



We gaan bij deze methode dus uit van het punt 1, en Duffing van het punt 0. Het feit dat we reeds met een niet-lineaire schatting beginnen, brengt met zich mede dat we geen kleine β meer hoeven te eisen. Wel gaat het iteratieproces sneller bij kleinere F. De beginschatting is dan beter.

We definieren $\theta = \omega t$, en schrijven de differentiaal vergelijking als:

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + f(x) = P \cos\theta \tag{241}$$

We bekijken het veel voorkomende geval dat $f(x)$ oneven is:

$$-f(x) = f(-x) \tag{242}$$

Er gelden de volgende condities:

$$x(\theta + 2\pi) = x(\theta)$$
$$x(0) = A$$
$$x'(0) = 0$$

A is dus de maximale uitwijking.
We zoeken weer naar $\omega = \omega(A)$.

We nemen als eerste benadering: $P = 0$

$$\omega_0^2 \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2} + f(x) = 0 \qquad (243)$$

We noemen: $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ (244).

We lossen (243) exact als volgt op:

Stel: $\frac{dx}{d\theta} = V$ dan: $\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \cdot V = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{d\theta} = V\frac{dV}{dx}$

Dus (243) wordt:

$$V\omega_0^2 \frac{dV}{dx} + f(x) = 0$$

Integreren van A tot x geeft:

$$\tfrac{1}{2}\omega_0^2 V_x^2 = -\int_A^x f(x)\,dx = -[F(x) - F(A)]. \qquad (V_A = 0)$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = V_x = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{2[F(A) - F(x)]} .$$

$$d\theta = \frac{\omega_0}{\sqrt{2[F(A) - F(x)]}}\,dx .$$

Nog een keer integreren:

$$\theta_0(x) = \omega_0 \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{2[F(A) - F(x)]}} \qquad (245)$$

Door x van 0 tot A te lopen, vinden we uit (245):

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2[F(A) - F(x)]}} \qquad (246).$$

Deze formule is de exacte formule voor de ruggegraat ~~een~~ de eerste benadering voor de flanken.

Als we $\theta_0(x)$ en ω_0 gevonden hebben gaan we verder met:

$$\omega_1^2 \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2} + f(x) - P\cos\theta_0(x) = 0 \qquad (247)$$

We zien dus dat we snelle convergentie krijgen als P klein is.

Het nadeel van deze methode is het vele rekenwerk dat vereist is. We kunnen het nog het beste grafisch oplossen. We zullen dit toepassen op: $f(x) = \alpha x + \beta x^3$

Dan is: $F(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$

(246) wordt dan:

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\alpha(A^2-x^2)+\frac{1}{2}\beta(A^4-x^4)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{d(\frac{x}{A})}{\sqrt{\alpha}\sqrt{(1-(\frac{x}{A})^2)+\frac{1}{2}\frac{\beta A^2}{\alpha}(1-(\frac{x}{A})^4)}}$$

Noem: $\frac{x}{A} = \xi$, $\frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}} = \nu_0$, $\frac{\beta A^2}{\alpha} = \gamma(A)$

We krijgen dan de dimensieloze uitdrukking:

$$\frac{1}{\nu_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)+\frac{1}{2}\gamma(1-\xi^4)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 h(\xi)\,d\xi \qquad (248)$$

$$\text{met: } h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)+\frac{1}{2}\gamma(1-\xi^4)}}$$

N.B.: $\beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ dan $\nu_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\alpha}$.

We zullen nu $f(\xi)$ voor verschillend γ, dus A, in grafiek.

We hebben dit verderop in het verslag uitgewerkt voor $\frac{\alpha}{\beta} = 3$ cm².

Uit de grafiek $f(\xi)$ bepalen we door planimetreren de ν_0 bij bepaalde $\gamma(A)$.

Bij deze zelfde A bepalen we dan ook uit deze grafiek θ_0. Hiertoe schrijven we deze als:

$$\theta_0 = \nu_0 \int_1^\xi h(\xi)\,d\xi. \qquad (249)$$

We doen dit voor verschillende ξ. Voor deze waarden van ξ bepalen we tevens: $\cos(\theta_0(\xi))$

Door (247) te delen door αA krijgen we:

$$\nu_1^2 \frac{d^2\xi}{d\theta^2} + f(\xi) - \frac{F}{\alpha A}\cos(\theta_0(\xi)) = 0 \qquad (250)$$

$$\text{met } f(\xi) = \frac{1}{\alpha A} f(x) = \xi + \gamma\xi^3.$$

We noemen: $f(\xi) - \frac{F}{\alpha A}\cos(\theta_0(\xi)) = g(\xi)$

en $G(\xi) = \int_1^\xi g(\xi)\,d\xi$.

Op analoge manier als de eerste keer krijgen we dan:

$$\Theta_1(\xi) = \nu_1 \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2[G(1)-G(\xi)]}} \qquad (251)$$

$$\frac{1}{\nu_1} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2[G(1)-G(\xi)]}} \qquad (252)$$

De methode die we volgen gaat nu als volgt:
We zetten $g(\xi)$ in grafiek en bepalen hieruit voor enkele waarden van ξ : $G(\xi)$ (ook voor $\xi = 1$). Voor deze ξ's kunnen we uitrekenen: $k(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2[G(1)-G(\xi)]}}$

Deze zetten we weer in grafiek en bepalen dan $\Theta_1(\xi)$ en $\nu_1(\xi)$ Als we na deze stap stoppen, wat dikwijls al voldoende is, bepalen we alleen ν_1.

We hebben dan de ω die hoort bij de A, waarvan we zijn uitgegaan. We doen dit hele verhaal dan nog een paar keer voor andere A's. . Op deze manier vinden we dan ω als functie van A.

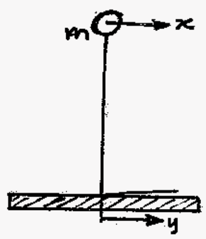
Bij de eerste stap (ω_0 en Θ_0) maakt het geen verschil of A positief of negatief is. Bij de tweede stap, en dan met name in de $g(\xi)$, echter wel. We moeten deze tweede stap dus met het dubbele aantal A's doen. Deze methode geeft dus nogal veel werk.

Voordelen zijn:

1. Ook bruikbaar bij grotere β.
2. Snelle convergentie bij kleine P.

2.5 Methode Schweissinger

We definieren: $\psi(x) = \alpha x + \beta x^3$



De bewegingsvergelijking voor nevenstaand systeem luidt dan:

$$\ddot{x} + \psi(x-y) = 0 \qquad (251)$$

Stel: $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi) =$

$= y_0 \cos\varphi \sin\omega t + y_0 \sin\varphi \cos\omega t =$

$= G_1 \sin\omega t + G_2 \cos\omega t$.

$\therefore\ y_0^2 = G_1^2 + G_2^2$ en $\dfrac{G_2}{G_1} = \tan\varphi$

We schatten de volgende periodieke oplossing:

$$\Delta x = (y - x) = A \sin\omega t \qquad (252)$$

(251) wordt dan:

$$\Delta\ddot{x} + \psi(\Delta x) = \ddot{y} \qquad (253)$$

en na substitutie van (252):

$$-\omega^2 A \sin\omega t + \psi(A\sin\omega t) = -\omega^2 G_1 \sin\omega t - \omega^2 G_2 \cos\omega t + \varepsilon \qquad (254)$$

Hierin is ε een correctieterm die de grootte van de fout in de schatting aangeeft. Hoe kleiner $|\varepsilon|$ des te beter is de benadering: $\Delta x = A\sin\omega t$. We gaan dus zoeken voor welke waarden van G_1 en G_2 de $|\varepsilon|$ minimaal is.

Dit is zo indien onderstaande integraal minimaal is:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-A\omega^2 \sin\theta + \psi(A\sin\theta) + \omega^2 G_1 \sin\theta + \omega^2 G_2 \cos\theta\right]^2 d\theta.$$

We willen dus ε^2 genomen over één periode minimaal hebben. Dit geeft:

$$\frac{\partial I}{\partial G_1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-A\omega^2 \sin\theta + \psi(A\sin\theta) + \omega^2 G_1 \sin\theta + \omega^2 G_2 \cos\theta\right]\sin\theta\, d\theta \qquad (255)$$

$$\frac{\partial I}{\partial G_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-A\omega^2 \sin\theta + \psi(A\sin\theta) + \omega^2 G_1 \sin\theta + \omega^2 G_2 \cos\theta\right]\cos\theta\, d\theta \qquad (256)$$

(256) geeft:

$$\int_0^{2\pi} G_2 \cos^2\theta\, d\theta = 0 \;\Rightarrow\; G_2 = 0$$

$$\therefore G_1 = 0$$

(255) wordt: $\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \pi\right)$

$$-\pi A\omega^2 + \int_0^{2\pi} \psi(A\sin\theta)\, d\theta + \pi\omega^2 G_1 = 0$$

$$\therefore \; G_1 = A - \frac{1}{\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} \psi(A\sin\theta)\, d\theta \qquad (257)$$

$$\int_0^{2\pi} \psi(A\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} [\alpha A\sin^2\theta + \beta A^3\sin^4\theta]\, d\theta =$$

$$= \pi(\alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3)$$

Dus (257) wordt:

$$G_1 = A - \frac{1}{\omega^2}(\alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3) \qquad (258)$$

$$G_2 = 0 \implies G_1 = y_0$$

Uit (258) vinden we de volgende relatie voor ω:

$$\omega^2 = \frac{\alpha A + \frac{3}{4}\beta A^3}{A - y_0} = \alpha \cdot \frac{\frac{A}{y_0} + \frac{3}{4}\frac{\beta y_0^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{A}{y_0}\right)^3}{\frac{A}{y_0} - 1}$$

Noem: $\frac{A}{y_0} = \eta$; $\frac{\beta y_0^2}{\alpha} = \delta$; $\omega = 2\pi n$; $\alpha = \omega_0^2 = (2\pi n_0)^2$

We krijgen dan de volgende dimensieloze uitdrukking:

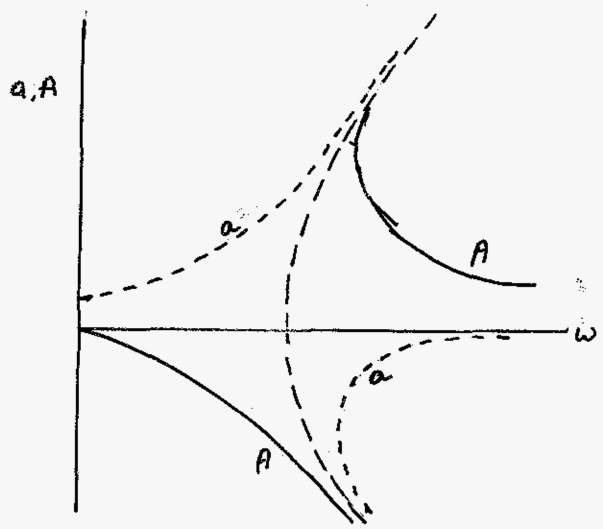
$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = \frac{\eta + \frac{3}{4}\delta\eta^3}{\eta - 1} \qquad (259)$$

De minimale waarde van ε, als G_1 en G_2 voldoen aan (258) is:

$$\varepsilon_{min} = -\omega^2 A\sin\omega t + \psi(A\sin\omega t) + \omega^2 G_1\sin\omega t + \omega^2 G_2\cos\omega t =$$
$$= [-\omega^2 A + \alpha A + \omega^2 A - \alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3 - \tfrac{3}{4}\beta A^3]\sin\omega t + \tfrac{1}{4}\beta A^3\sin 3\omega t =$$
$$= \tfrac{1}{4}\beta A^3 \sin 3\omega t$$

Deze methode gaat dus goed voor kleine β en A. Als we als criterium nemen dat $\varepsilon \ll \alpha A$ geldt: $\frac{1}{4}\frac{\beta A^2}{\alpha} \ll 1$.

Let op: de in relatie (258) voorkomende A is niet de amplitude van x maar van Δx



Als a de amplitude van x is gesteld:

$$a = -(A - y_0)$$

Relatie (258):

$$\omega^2 = \frac{\alpha A + \frac{3}{4}\beta A^3}{A - y_0} \qquad (258)$$

wordt dan:

$$\omega^2 = \frac{\alpha(-a+y_0) + \frac{3}{4}\beta(-a+y_0)^3}{-a}$$

We nemen y_0 klein ($y_0^2 \ll y_0$) en $\alpha y_0 = F$:

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta a^2 - \frac{F}{a} \qquad (260)$$

Dit is hetzelfde resultaat als we verkregen bij de Duffing-methode.

We kunnen deze twee methoden als volgt met elkaar vergelijken:

Duffing

$$\Delta\ddot{x} + \omega^2\Delta x = \omega^2\Delta x - \psi(\Delta x) + \ddot{y}$$

$$\Delta x_0 = A\cos\omega t$$

$$\Delta\ddot{x}_1 + \omega^2\Delta x_1 =$$

$$= \omega^2 A\cos\omega t - \psi(A\cos\omega t) + \ddot{y} =$$

$$= (\omega^2 A - \alpha A - \tfrac{3}{4}\beta A^3)\cos\omega t - \tfrac{1}{4}A^3\cos 3\omega t +$$

$$-\omega^2 y_0\cos\omega t$$

Terwille van de periodiciteit van de oplossing eisen we:

$$\omega^2 A - \alpha A - \tfrac{3}{4}\beta A^3 - \omega^2 y_0 = 0$$

Schweissinger.

$$\Delta\ddot{x} + \psi(\Delta x) = \ddot{y}$$

$$\Delta x_0 = A\cos\omega t$$

$$-\omega^2 A\cos\omega t + \psi(A\cos\omega t) =$$

$$= -\omega^2 y_0\cos\omega t + \varepsilon$$

$$\therefore\ \varepsilon = (\omega^2 y_0 - \omega^2 A + \alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3)\cos\omega t +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\beta A^3\cos 3\omega t.$$

ε minimaliseren, geeft:

$$\varepsilon_{min} = \tfrac{1}{4}\beta A^3\cos 3\omega t.$$

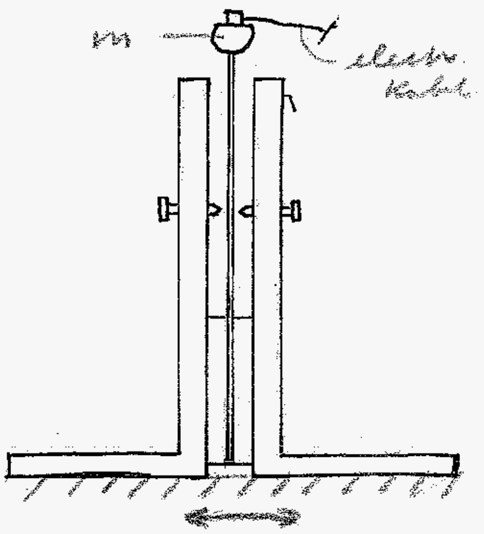
Dit is dus verkregen door:

$$\omega^2 y_0 - \omega^2 A + \alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3 = 0$$

III Experimenten.

3.1. Inleiding.

We doen onze metingen aan een systeem zoals getekend in onderstaande figuur:



Het systeem bestaat uit een bladveer waaraan een massa m is bevestigd. De massa wordt in trilling gebracht d.m.v. een triltafel, waarop het stelsel is bevestigd.

De niet-lineariteit wordt verkregen doordat de veer bij een bepaalde uitslag van de massa stoot tegen twee bouten, waardoor de stijfheid plotseling groter wordt. We benaderen deze niet-lineariteit door een functie $f(x) = cx + \beta x^3$, welke in het door ons gebruikte gebied het beste met de stijfheidskarakteristiek overeenkomt.

We doen de volgende experimenten:

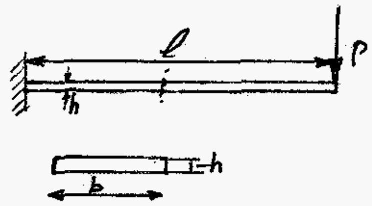
1° Het meten van de resonantiekromme plus het aantonen van de sprongen.

2° Het meten van de demping en vergelijken met de ρ berekend uit de resonantiekromme.

3°. Het berekenen van de ruggegraat en vergelijken met de gemeten waarde.

3.2. Het hoofdsysteem.

[illegible] We gaan eerst kijken naar het lineaire hoofdsysteem. Dit bestaat uit een bladveer met een massa.



Voor de stijfheid van deze bladveer geldt:

$$c = \frac{P}{f} = \frac{Ebh^3}{4l^3} = \frac{3EI}{l^3}$$

We nemen een bladveer met de volgende eigenschappen:

$E = 2 \times 10^6\, [kgf/cm^2]$; $l = 17{,}5\, [cm]$; $b = 2\, [cm]$; $h = 0{,}2\, [cm]$

Dan geldt:

$$c = 1{,}5\ [kgf/cm].$$

We nemen een massa van:

$$m = 0{,}105 \times 10^{-3}\ [kgf\,sec^2/cm]$$

We vinden dan voor de eigenfrequentie:

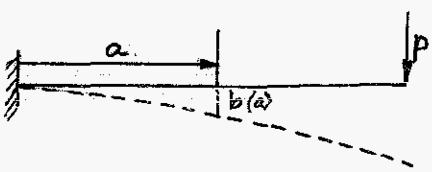
$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = 19\ [Hz].$$

De bewegingsvergelijking luidt, als we voor de beweging van de trilltafel: $y = y_0 \cos \omega t$ schrijven:

$$m\ddot{x} + c(x - y) = 0 \qquad (331)$$

Dit geeft voor de amplitude van de massa:

$$\bar{x} = \frac{c y_0}{c - m\omega^2} \qquad (332).$$



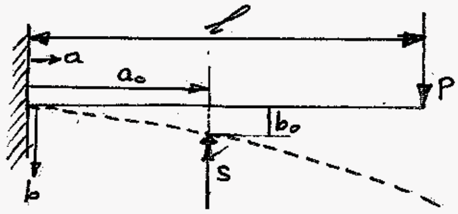
Voor de zakking b t.p.v. a geldt:

$$b(a) = \frac{Pa^2}{6EI}[3l - a]$$

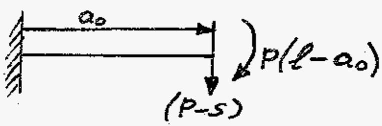
$c = \frac{3EI}{l^3}$ en $\frac{a}{l} = \xi$ geeft:

$$b(\xi) = \frac{P}{c}\,\xi^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\xi\right) \qquad (333)$$

3.3. Het niet-lineaire systeem.



We brengen een extra steunpunt aan in (a_0, b_0). Dit geeft een extra kracht S die we bepalen uit:

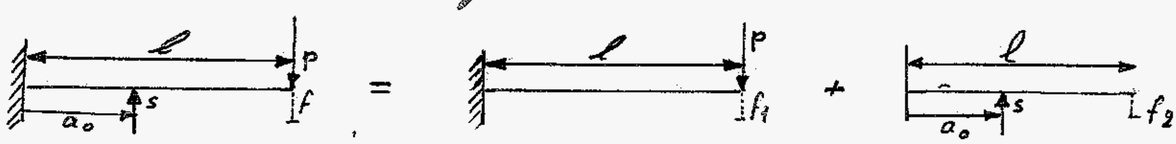


$$b_0 = \frac{(P-S)\,a_0^3}{3EI} + \frac{P(l-a_0)\,a_0^2}{2EI}$$

Noem: $\xi = \frac{a}{l}$ en $\xi_0 = \frac{a_0}{l}$:

$$S = -c\, b_0\, \xi_0^{-3} + P\, \xi_0^{-1}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\xi_0\right) \qquad (331)$$

Voor de zakking f t.p.v. a = l vinden we:



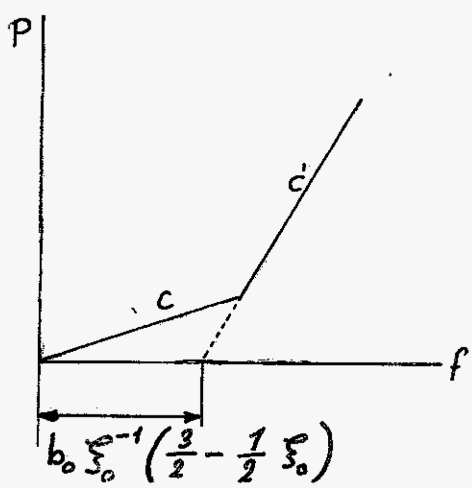
$$f = f_1 + f_2$$

$$f_1 = \frac{P\,l^3}{3EI} = \frac{P}{c}$$

en $$f_2 = \frac{S a_0^3}{3EI} + \frac{3\,a_0^2}{2EI}\,l = +\frac{S}{c}\,\xi_0^2\left\{+\frac{1}{2}\xi_0 - \frac{3}{2}\right\}$$

(331) substitueren geeft:

$$f = -b_0\,\xi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\xi_0 - \frac{3}{2}\right) + \frac{P}{c}\left(1 - \frac{9}{4}\xi_0 + \frac{3}{2}\xi_0^2 - \frac{1}{4}\xi_0^3\right) \qquad (332)$$



$$c' = \frac{c}{1 - \frac{9}{4}\xi_0 + \frac{3}{2}\xi_0^2 - \frac{1}{4}\xi_0^3}$$

We nemen het steunpunt in :

$a_0 = 6{,}5$ cm en $b_0 = 0{,}15$ cm.

Dan is : $\xi_0 = \frac{6{,}5}{17{,}5} = 0{,}372$

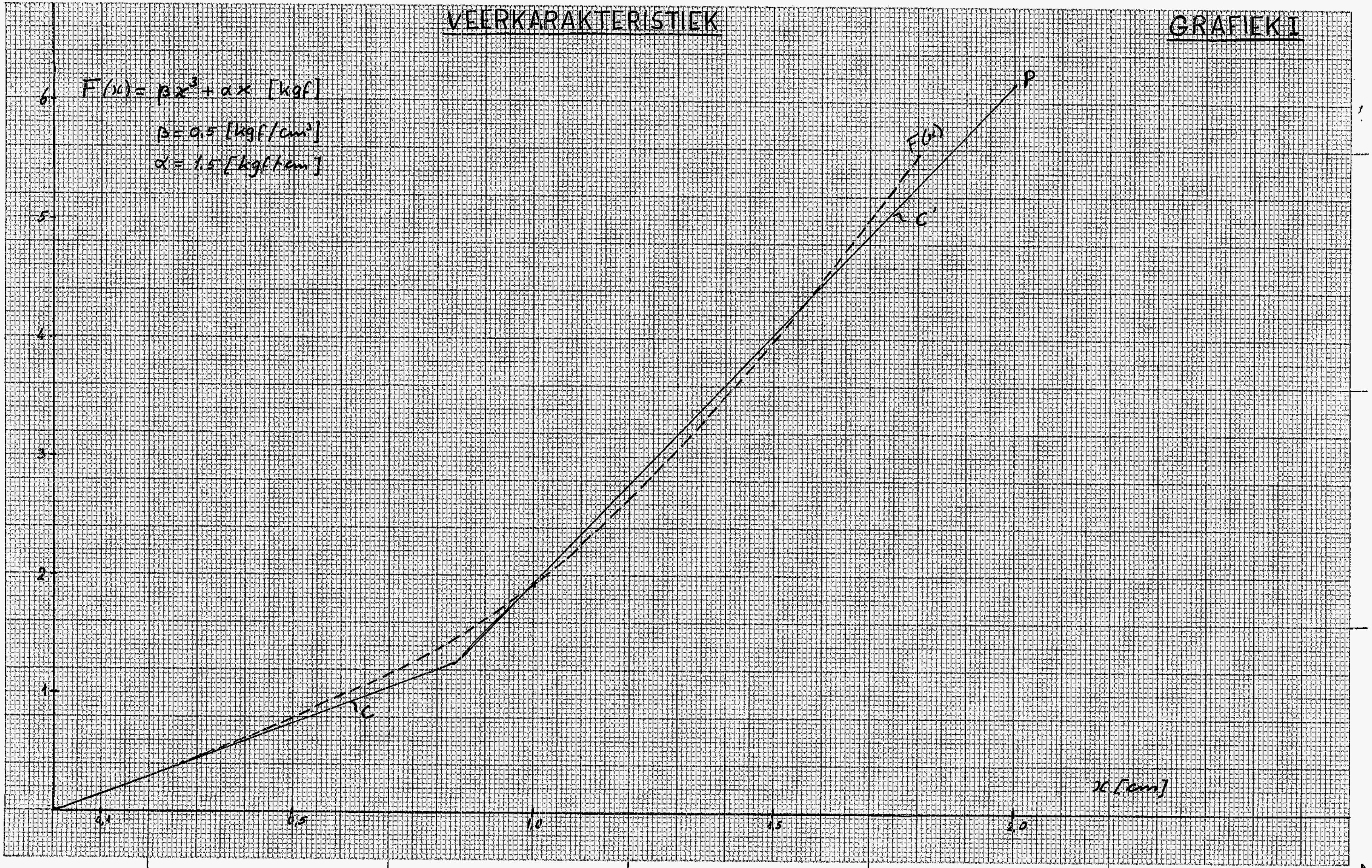
We vinden dan voor de zakking :

$$f = 0{,}53 + \frac{P}{4{,}18} \qquad (333)$$

We benaderen deze door de 3° graads-kromme :

$$f(x) = 1{,}5\,x + 0{,}5\,x^3 \qquad (334)$$

Zie hiervoor grafiek : I



VEERKARAKTERISTIEK
GRAFIEK I
$F(x) = \beta x^3 + \alpha x$ [kgf]
$\beta = 0.5$ [kgf/cm³]
$\alpha = 1.5$ [kgf/cm]
P
F(x)
C'
C
x [cm]
0,1
0,5
1,0
1,5
2,0
1
2
3
4
5
6

3.4 Resonantiekromme.

We meten de uitwijkingen met een piezo-elektrische versnellingsmeter. (ref 4329).
We registreren met een buisvoltmeter
Het versnellingsmetertje wordt op de massa bevestigd. De massa van deze meter is bij de m in rekening gebracht.

We kregen de volgende waarnemingen:

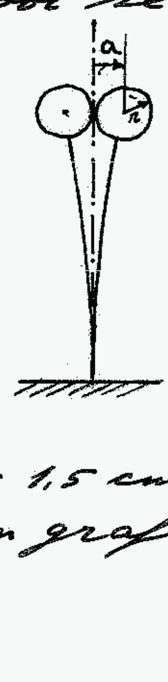
n	a
Hz	cm
10,5	0,021
15	0,054
17,3	0,106
18	0,170
19,2	0,610
20,1	0,814
20,7	0,966
21,5	1,125
23,9	1,500
24,3	1,710
25	Sprong

n	a
Hz	cm
26	0,017
24	0,025
22	0,040
20,2	0,111
20	0,158
19,8	0,303
19,7	0,477
19,7	Sprong
19,6	0,694

a = amplitude van de trilling
n = toerental van de tafel.

De metingen zijn verricht bij een y_0 van de tafel van : $y_0 = 0,02$ cm

De waarnemingen zijn in grafiek III uitgezet. De sprongen, vooral die bij 25 Hz, waren mooi te zien



We hebben nog een extra controle op de ijking uitgevoerd door te meten bij welk toerental de doorsnede van de bolvormige massa in de twee uiterste standen juist nul was. De amplitude is dan gelijk aan de straal van de massa, d.i. : 1,5 cm. Dit gebeurde bij n = 23 cm. Dit punt is in grafiek III aangegeven door ⊙.

3.5 Bepaling van de demping.

We registreren de uitwijking van de massa m.b.v. een buisvoltmeter.

Voor een vrije gedempte trilling geldt:

$$x = e^{-\frac{\rho}{2}t}\left[A\cos\left(\sqrt{\alpha-\frac{\rho^2}{4}}\cdot t\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha-\frac{\rho^2}{4}}\cdot t\right)\right] \qquad (351)$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\alpha - \frac{\rho^2}{4}}$$

voor kleine ρ wordt dit:

$$\omega = \sqrt{\alpha}$$

en de trillingstijd:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{19} \qquad (352)$$

Als x_n de amplitude op het tijdstip t is en x_{n+m} de amplitude m perioden later dan geldt:

$$\frac{x_n}{x_{n+m}} = \frac{C\ e^{-\frac{\rho}{2}t}}{C\cdot e^{-\frac{\rho}{2}(t+mT)}} = e^{+\frac{\rho}{2}mT}$$

$$\therefore \quad \frac{x_n}{x_{n+m}} = e^{\left(\frac{m\rho}{2n_0}\right)} \qquad (353)$$

- We meten nu als volgt:

Geef de massa een bepaalde uitslag. Druk dan een stopwatch in op het ogenblik dat de voltmeter een bepaalde uitslag heeft. Wacht dan tot de uitslag op de voltmeter is afgenomen tot een andere waarde en stop dan de stopwatch. De tijd gemeten met de stopwatch en de verhouding van de twee uitslagen op de voltmeter is dan een maat voor de demping.

We noemen de waarden op de voltmeter: a_n en a_{n+m}. Deze waarden zijn evenredig met de uitslag van de massa, en dus is:

$$\frac{a_n}{a_{n+m}} = \frac{x_n}{x_{n+m}}$$

We hebben de meting eerst tien keer gedaan voor dezelfde a_n en a_{n+m}, om hieruit de standaarddeviatie en de fout te bepalen. We zullen zien dat deze fout klein is. Daarna hebben we nog enige metingen verricht voor andere a's om te kijken of de ρ onafhankelijk van de amplitude was.

$a_n = 70$ mV en $a_{n+m} = 5$ mV

nr	t	$\bar{t}-t$	$(\bar{t}-t)^2$
	sec.	10^{-1}	10^{-2}
1	4.9	−1.1	1.21
2	4.75	0.4	0.16
3	4.7	0.9	0.81
4	4.7	0.9	0.81
5	4.7	0.9	0.81
6	4.7	0.9	0.81
7	4.9	−1.1	1.21
8	4.7	0.9	0.81
9	4.9	−1.1	1.21
10	4.9	−1.1	1.21
	$\bar{t} = 4.79$		$\Sigma = 9.05$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\bar{t}-t)^2}{n-1}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{9.05}{9}} = 0.1$$

Dus de fout in de enkele waarneming is : $\pm 2\sigma = \pm 0{,}2$ sec

De fout in het gemiddelde is :

$$\pm\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0{,}2}{\sqrt{n}} = 0{,}063 \text{ sec.}$$

$$t = 4{,}8 \text{ sec} \longrightarrow m = 4{,}8 \times 19 = 91{,}2$$

$$\frac{a_n}{a_{n+m}} = \frac{x_n}{x_{n+m}} = 14 = e^{2.64}$$

met (353) vinden we : $\frac{m\rho}{2n_0} = 2{,}64$

$$\rho = \frac{2{,}64 \times 2 \times 19}{91.2} = 1{,}09 \left[\frac{1}{\text{sec}}\right]$$

Dit is de ρ per massaeenheid. Bij een massa van : $0{,}105 \times 10^{-3}$ [kgf sec²/cm] vinden we dus voor de demping in ons systeem :

$$\rho = 1{,}09 \times 0{,}105 \times 10^{-3} = 1{,}15 \times 10^{-4} \text{ [kgf sec/cm]}$$

Voor andere a's :

$a_n = 50$ mV ; $a_{n+m} = 5$ mV : $t = 4{,}15$ sec $\Rightarrow \rho = 0{,}117 \times 10^{-3}$ [kgf sec/cm]

$a_n = 90$ mV ; $a_{n+m} = 10$ mV : $t = 4{,}2$ sec $\Rightarrow \rho = 0{,}115 \times 10^{-3}$ ["]

De ρ is dus in het door mij onderzochte gebied constant.

Bovenstaande dempingmetingen zijn verricht aan het lineaire systeem.

Ik heb ook nog een meting verricht aan het niet-lineaire systeem. Dit gaf als resultaat:

$a_n = 90\,mV$; $a_{n+m} = 10\,mV \Rightarrow t = 3{,}6$ sec.

We zien dat de tijd hier kleiner is dan bij de vorige metingen. Dit is gemakkelijk te verklaren. Bij de niet-lineaire trillingen blijft de frequentie namelijk niet constant. Deze neemt toe met groter wordende amplitude, en dus neemt de trillingstijd af. En dit heeft weer tot gevolg dat de amplitude van de vrije trilling sneller daalt.

We kunnen uit de resonantiekromme ook de demping bepalen. We weten dat de top van de kromme ligt op de hyperbool: $\quad a\rho\omega = F = \alpha y_0$

$$\therefore \quad \rho = \frac{\alpha y_0}{a\omega} = \frac{\alpha y_0}{2\pi a n_0}$$

De top treedt op bij: $n = 25$ Hz.

$a = 1{,}725$ cm.

Als we ipv α nemen de $c = 1{,}5$ [kgf/cm] dan we direct de ρ van het hele systeem, dus niet per massaeenheid.

We vinden voor de ρ: als $y_0 = 0{,}02$ cm

$$\rho = \frac{1{,}5 \times 0{,}02}{2 \cdot \pi \times 1{,}725 \times 25} = 0{,}111 \ [\text{kgf sec/cm}] \times 10^{-3}.$$

Dit komt goed overeen met de berekende ρ.

3.6. Bereking van de ruggegraat.

We kennen voor de ruggegraat ($F=0$) de volgende formule (zie o.a. Duffing):

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A^2$$

welke we met: $\alpha = \omega_0^2$, kunnen schrijven als:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha}A^2$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad n_0 = 19\ Hz \quad :$$

$$n^2 = 361\left(1 + \frac{1}{4}A^2\right) \qquad (361)$$

We bepalen dus de n bij verschillende A:

A	n
cm	Hz
0,00	19
0,50	19.6
0,75	20.3
1,00	21.2
1,25	22.4
1,50	23.8
1,75	25.2
2,00	26.8

We hebben deze ruggegraat- ~~resonantie~~ kromme getekend in de gemeten resonantiekromme.

De overeenstemming tussen beiden is goed.

We hebben de ruggegraat voor de punten $A=0,1,2$cm berekend volgens Rauscher. We bepalen eerst $h(\xi)$:

ξ	$1-\xi^2$	$1-\xi^4$	$h(\xi)$	$h(\xi)$	$h(\xi)$
			$\gamma=0:\beta=0$	$A=1cm;\gamma=\frac{1}{3}$	$A=2cm;\gamma=\frac{4}{3}$
0,0	1.00	1,000	1,00	0,926	0,775
0,2	0,96	0,998	1,02	0,942	0,785
0,4	0,84	0,974	1,09	1,000	0,820
0,6	0,64	0,877	1,25	1,130	0,903
0,8	0,36	0,590	1,67	1,480	1,095
0,9	0,19	0,342	2,29	2,010	1,510
0,94	0,116	0,220	2,94	2,550	1,950
0,98	0,04	0,092	5,00	4,250	3,140

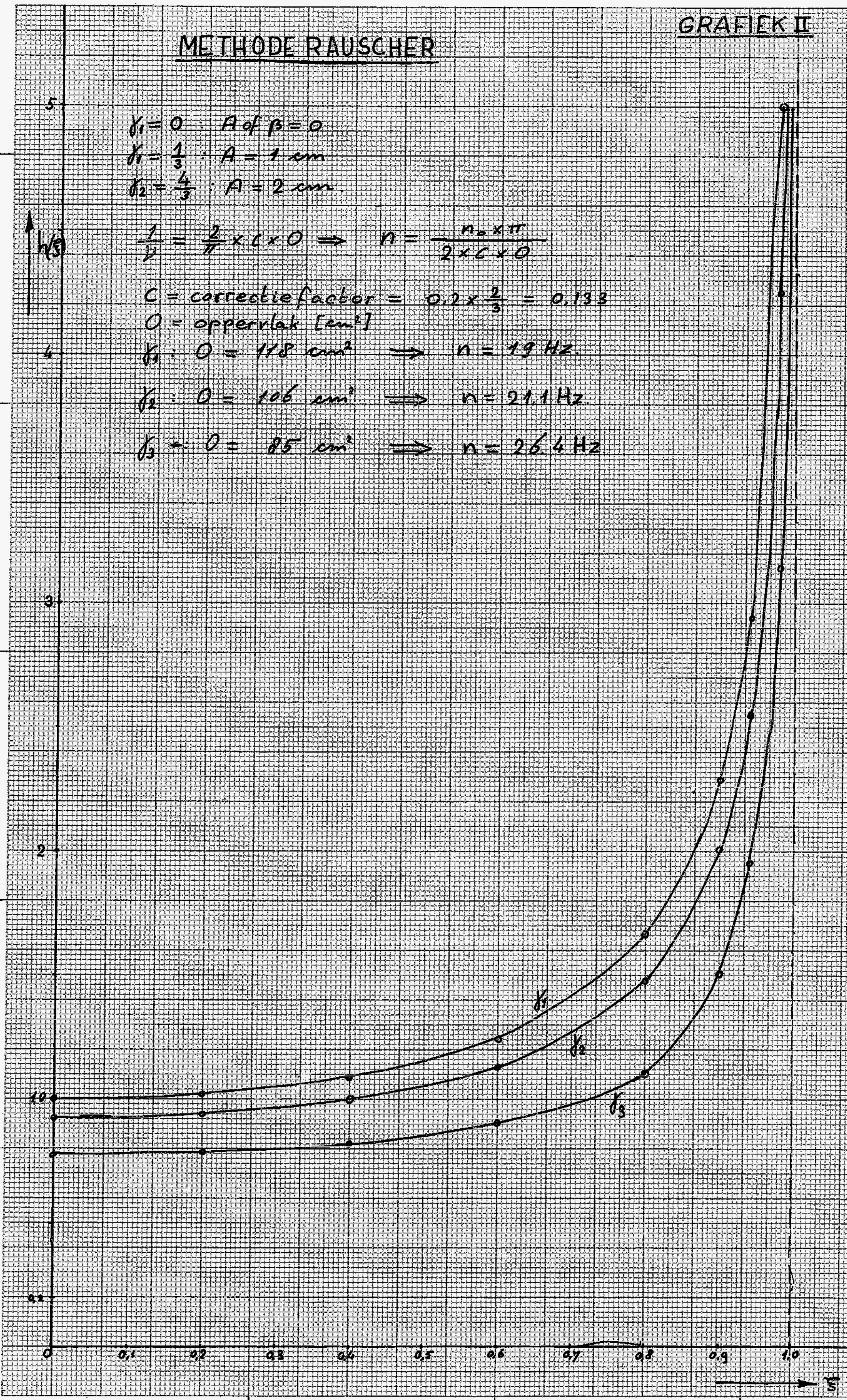
We vinden voor de toerentallen:

$A = 0$ of $\beta = 0$: $n = 19$ Hz

$A = 1$ cm : $n = 21.1$ Hz

$A = 2$ cm : $n = 26.4$ Hz

Zie hiervoor grafiek: II


GRAFIEK II
METHODE RAUSCHER
γ1 = 0 : A of β = 0
γ1 = 1/3 : A = 1 cm
γ2 = 4/3 : A = 2 cm
1/ν = 2/π × c × O ⇒ n = n0 × π / (2 × c × O)
C = correctiefactor = 0,2 × 2/3 = 0,133
O = oppervlak [cm²]
γ1 : O = 118 cm² ⇒ n = 19 Hz.
γ2 : O = 106 cm² ⇒ n = 21,1 Hz
γ3 : O = 85 cm² ⇒ n = 26,4 Hz
h(ξ)
5
4
3
2
1,0
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
ξ
γ1
γ2
γ3

3.7. Berekening van de flanken

Omdat $\beta \ll \alpha$ verwaarlosen we voor deze berekening de demping. We gebruiken de methode Schweissinger:

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = \frac{\eta + \frac{3}{4}\eta^3 \cdot \delta}{\eta - 1}$$

met: $\eta = 1 - \frac{\bar{x}}{y_0} = 1 - \frac{\bar{x}}{0{,}02} = 1 - 50\bar{x}$

en $\delta = \frac{\beta y_0^2}{\alpha} = \frac{0{,}5 \times (0{,}02)^2}{1{,}5} = 0{,}133 \times 10^{-3}$

$n_0 = 19\,Hz$

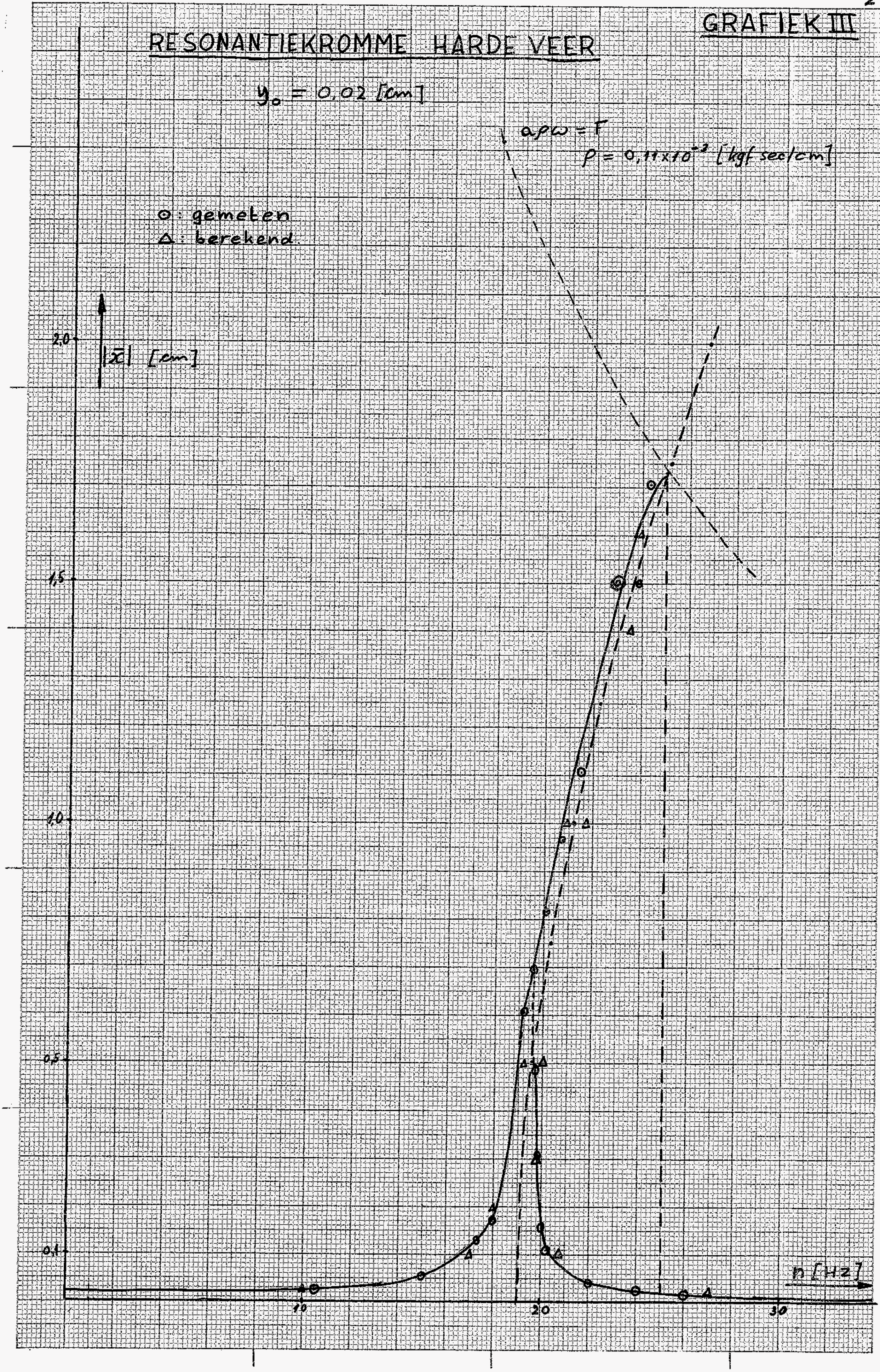
$$\therefore \quad n = n_0 \sqrt{\frac{\eta + \frac{3}{4}\eta^3 \cdot \delta}{\eta - 1}} = 19 \sqrt{\frac{\eta + 0{,}1 \times 10^{-3}\,\eta^3}{\eta - 1}}$$

$\bar{x}$	η	n
cm		Hz
+ 0,02	0	0,0
+ 0,1	− 4	17,0
+ 0,2	− 9	18,1
+ 0,5	− 24	19,1
+ 1,0	− 49	20,9
+ 1,6	− 74	24,0

$\bar{x}$	η	n
cm		Hz
− 1,4	+ 71	23,5
− 1,0	+ 51	21,7
− 0,5	+ 26	20,0
− 0,3	+ 16	19,8
− 0,1	+ 6	20,8
− 0,02	+ 2	26,9

Deze punten zijn in grafiek: aangegeven door : Δ. Ze komen goed overeen met de gemeten waarden.

Het gebied $\bar{x} < -0{,}5$ cm is instabiel


GRAFIEK III
RESONANTIEKROMME HARDE VEER
y₀ = 0,02 [cm]
apω = F
ρ = 0,11×10⁻³ [kgf sec/cm]
⊙ : gemeten
Δ : berekend
|x̄| [cm]
2,0
1,5
1,0
0,5
0,1
n [Hz]
10
20
30