Korte samenvatting van de mogelijkheden van DYNAN

WE-72-18

KORTE SAMENVATTING VAN DE MOGELIJKHEDEN

VAN DYNAN

F.E. Veldpaus

~~MWE 72-5~~

Symbolenlijst

A. In DYNAN gehanteerde symbolen:

K : stijfheidsmatrix

M : massamatrix

C : dempingsmatrix

Q : verplaatsingsvektor. In theoretische beschouwingen wordt q gehanteerd in plaats van Q.

R : krachtvektor

U : bovendriehoeksmatrix (dus: U[i,j]=0 als i>j)

X : matrix van eigenvektoren; de i^e-kolom van X komt overeen met de i^e eigenvektor

E : vektor van eigenwaarden. In theoretische beschouwingen wordt Λ gehanteerd in plaats van E; Λ is een diagonaalmatrix (Λ[i,j]=0 als i≠j; Λ[i,i]=E[i])

De letter L, gevolgd door een symbool betekent label; zo is LX de label van de matrix van eigenvektoren.

B. In DYNAN gehanteerde indices:

R : reëel

C : komplex

M : master

D : afhankelijk (dependent)

P : voorgeschreven (prescribed)

U : niet voorgeschreven (unconstrained)

E : elastisch systeem (systeem na eliminatie van bewegingen als star lichaam)

S : aanduiding voor bewegingen als star lichaam (rigid body modes)

C; Notaties en afspraken

1. Een matrix A met n rijen en m kolommen wordt aangeduid met A, (n*m).
2. De komponent op de i^e-rij en de j^e-kolom van een matrix A wordt aangeduid met a_{ij} of A[i,j]. De matrix met deze komponenten zal ook wel worden aangegeven met $[a_{ij}]$, dus: $A \equiv [a_{ij}]$.
3. Een matrix, die is gepartitioneerd in deelmatrices, wordt hypermatrix genoemd. Voorbeeld:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad A, (n*m); \quad A_{ij}, (n_i*m_j)$$

Dan zal A ook wel worden aangeduid met: $A = [A_{ij}]$

4. Een diagonaalmatrix D, (n n) met termen d_1, d_2,....d_n op de hoofddiagonaal wordt aangegeven met $D = \lceil d_i \rfloor$, dus:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & d_n \end{bmatrix} = \lceil d_i \rfloor \ ;$$

5. Transponeren en inverteren worden aangegeven met bovenindex t respektievelijk "bovenindex" -1.

6. Transponeren van een matrix met komplexe komponenten wordt aangeduid met het symbool *. Zij $C=A+i.B$ (C,(n*m); A,(n*m); B,(n*m); A en B reëel) dan geldt: $C^* = A^t - i.B^t$. Een komplexe matrix is hermetisch als $C = C^*_i$ voor een dergelijke matrix moet dus gelden: $A = A^t$, $B = -B^t$.
Hieruit volgt o.a. dat de komponenten op de hoofddiagonaal van een hermitische matrix reëel zullen zijn.

7. Tenzij anders vermeld wordt zullen vektoren steeds kolomvektoren zijn.

8. De kongruentie-transformatie van een matrix A, (n) in een matrix C,(n*n) is gedefinieerd door:

$$C = B^t.A.B$$

waarbij B,(n*n) regulier moet zijn.

9. De simulariteits-transformatie van een matrix A,(n n) in een matrix C,(n n) is gedefinieerd door:

$$C = B^{-1}AB$$

waarbij B,(n*n) uiteraard regulier moet zijn.

10. Een orthonormale (transformatie-)matrix Q,(n*n) is een matrix die voldoet aan:

$$Q^t.Q = Q.Q^t = I$$

waarbij I,(n*n) de eenheidsdiagonaalmatrix is.

Klassieke eigenwaarde probleem (special eigenvalue problem)

Zij gegeven een vierkante matrix A van orde n*n. Gevraagd de waarden van waarvoor:

$$Ax = \lambda x$$

een niet-triviale oplossing ($x \neq 0$) heeft.

Wij zullen veronderstellen dat A reëel en symmetrisch is (dus $A^t = A^* = A$). Dan kan worden aangetoond dat er n waarden van bestaan waarvoor Ax = x een oplossing $x \neq 0$ heeft. Deze waarden zijn reëel en worden genummerd op zodanige wijze dat $\lambda_i \geq \lambda_j$ als $i<j$, dus:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots \geq \lambda_n$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ worden eigenwaarden van de matrix A genoemd. De bijbehorende oplossingen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zijn de eigenvektoren van deze matrix. Voor de met λ_i korresponderende eigenvektor, x_i, zal dus gelden:

$$Ax_i = \lambda_i . x_i \qquad (x_i \neq 0)$$

Wij bergen deze eigenvektoren kolomsgewijze op in een matrix X, (n*n) die - uiteraard - de matrix van eigenvektoren genoemd zal worden:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots\ldots x_n \end{bmatrix}$$

Als de eigenvektoren verschillend zijn dan zijn de bijbehorende eigenvektoren orthogonaal, dus:

$$\underline{\text{als}} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j) \quad \underline{\text{dan}} \quad x_i^t . x_j = 0$$

Omdat A symmetrisch is zijn ook de eigenvektoren alle reëel.

Als niet alle eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ verschillend zijn dan kan, door gebruik te maken van $A = A^t$, worden bewezen dat er een set van n eigenvektoren bestaat die orthogonaal is, dus:

$\underline{\text{als}}$ $\lambda_i = \lambda_j$ $(i \neq j)$ $\underline{\text{dan}}$ kunnen de eigenvektoren x_i

en x_j zodanig gekozen worden, dat: $x_i^t . x_j = 0$

Het bewijs van deze bewering is eenvoudig te leveren.

De eigenvektoren zijn, op een konstante faktor na, eenduidig bepaald. Immers, als x_i een eigenvektor is dan is ook $\alpha_i . x_i$ ($_i \neq 0$) een eigenvektor. Hiervan wordt gebruik gemaakt om deze vektoren op lengte 1 te normeren, zodat zal gelden:

$$x_i^t . x_i = 1$$

Zorgen wij er bovendien voor dat de eigenvektoren orthogonaal zijn, dan kunnen wij schrijven:

$$x_i^t . x_j = \delta_{ij} \qquad (\delta_{ij}\text{:Kronecker delta})$$

De matrix van eigenvektoren, X, is dan orthonormaal, dus:

$$X^t.X = X.X^t = I$$

Bovendien zal gelden:

$$X^t AX = \Lambda$$

waarbij Λ,(n*n)een diagonaalmatrix is waarvan de komponenten op de hoofddiagonaal gelijk zijn aan λ_i, dus:

$$\Lambda = \lceil \lambda_i \rfloor$$

Dit laatste resultaat kan met:

$$Ax_i = \lambda_i.x_i \qquad x_j^t Ax_i = \lambda_i.x_j^t.x_i = \lambda_i.\delta_{ij}$$

eenvoudig worden aangetoond.
Het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen $Ax = \lambda x$ kan nu worden getransformeerd naar een stelsel van de vorm $X^t AX = \Lambda$. Een alternatieve formulering voor het oorspronkelijke eigenwaardeprobleem is dus: zoek die orthonormale matrix X,(n*n) die voldoet aan $X^t AX = \lceil \lambda_i \rfloor$.

<u>Algemene eigenwaarde probleem</u> (general eigenvalue problem)

Wij beschouwen het volgende eigenwaardeprobleem:

$$Ax = \lambda.B.x$$

waarbij de matrices A en B voldoen aan:

$$A,(n*n); \quad A = A^t; \quad x^t Ax \geqslant 0 \quad \text{voor alle } x \neq 0$$

$$B,(n*n); \quad B = B^t; \quad x^t Bx > 0 \quad \text{voor alle } x \neq 0$$

Deze eisen houden dus onder andere in dat A en B semi-positief definiete, respektievelijk positief definiete matrices moeten zijn.
Het gegeven probleem kan eenvoudig worden getransformeerd in een eigenwaardeprobleem van de vorm $Dx = \lambda x$ door $Ax = \lambda Bx$ vóór te vermenigvuldigen met B^{-1}.
Deze werkwijze is echter ongeschikt omdat de matrix $D = B^{-1}A$ niet symmetrisch zal zijn. Wij zullen hier dan ook een andere methode volgen.
Omdat B positief definiet is kan deze matrix met de methode volgens Choleski worden gesplitst in het produkt $R^t.R$, waarbij R een (rechtsboven)driehoeksmatrix is met positieve getallen op de hoofddiagonaal, dus:

$$B = R^t.R; \quad R[i,j] = 0 \text{ als } i>j; \quad R[i,i]>0$$

Stellen wij nu:

$$y = R.x$$

en vermenigvuldigen wij $Ax = \lambda Bx$ vóór met R^{-t} dan ontstaat:

$$R^{-t}.A.R^{-1}.(Rx) = \lambda.R^{-t}.(R^t.Rx) = \lambda.(Rx)$$

en dus:

$$D.y = \lambda y$$

waarbij de matrix D voldoet aan:

$$D,(n*n); \quad D = R^{-t}.A.R^{-1}; \quad D = D^t$$

Op de geschetste wijze kan het <u>algemene</u> eigenwaarde probleem Ax = Bx worden overgevoerd in het klassieke eigenwaarde probleem $D.y = \lambda.y$ met symmetrische matrix D.

De eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ van $Dy = \lambda y$ zijn gelijk aan die van het oorspronkelijke probleem, terwijl de eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots x_n$ van $Ax = \lambda Bx$ met:

$$x_i = R^{-1}.y_i$$

bepaald kunnen worden uit de eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots y_n$ van $Dy = \lambda.y$.

Omdat D symmetrisch is zullen alle eigenwaarden λ_i en eigenvektoren y_i (en dus ook de eigenvektoren x_i) reëel zijn. Daar A semi-positief definiet en B positief definiet is volgt dat D, evenals A, semi-positief definiet is. Daaruit kan worden afgeleid dat alle eigenwaarden positief zijn, dus:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_n > 0$$

Definiëren wij weer de diagonaalmatrix $\Lambda = \lceil \lambda_i \rfloor$ en de matrix van eigenvektoren $Y = [y_1 \; y_2 \; y_3 \ldots y_n]$ dan kunnen wij het eigenwaardeprobleem ook schrijven in de volgende vorm:

$$D.Y = Y.\Lambda$$

en dus:

$$Y^{-1}.D.Y = \Lambda$$

$Y^{-1}.D.Y$ vormt een simulariteitstransformatie van D. In het algemeen geldt dat de eigenwaarden van een probleem niet veranderen als op dat probleem een dergelijke transformatie wordt losgelaten!

De eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kunnen onderling loodrecht gekozen worden. In het algemeen worden zij bovendien genormeerd op lengte 1, dus:

$$y_i^t.y_j = \delta_{ij}$$

Y is dan orthonormaal. Voor de matrix X van de eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots x_n$ van het oorspronkelijke probleem zal gelden:

$$X = R^{-1}Y$$

en met $Y^t.Y = I$ volgt:

$$X^t.R^t.R.X = I \Rightarrow X^t.B.X = I$$

In woorden: de eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots x_n$ zijn genormeerd met de matrix B als kern.

Wij vermelden nog dat het oorspronkelijke eigenwaardeprobleem met $A.X = B.X.\Lambda$ en met $X^t.B.X = I$ kan worden overgevoerd in:

$$X^tAX =$$

Een aantal van de hiervoor gegeven resultaten zijn ook geldig als D een hermitische matrix is (dus als $D^* = D$). Voor nadere informatie hierover zij verwezen naar de betreffende ISD-rapporten en de overige literatuur op dit gebied.

Het uitgangspunt bij de beschouwingen wordt gevormd door een stelsel lineaire, inhomogene, tweede orde differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm:

$$\overline{M}.\ddot{\overline{q}} + \overline{C}.\dot{\overline{q}} + \overline{K}.\overline{q} = \overline{R}(t)$$

Als wij ons beperken tot de analyse van het dynamische gedrag van mechanische konstrukties kunnen de in dit stelsel optredende grootheden op de volgende wijze geïnterpreteerd worden:

$\overline{q}$: tijdsafhankelijke verplaatsingsvektor van de konstruktie
$\overline{R}$: tijdsafhankelijke belastingsvektor van de konstruktie
$\overline{M}$: massamatrix van de konstruktie
$\overline{C}$: dempingsmatrix van de konstruktie
$\overline{K}$: stijfheidsmatrix van de konstruktie

Tenzij anders vermeld zullen wij steeds veronderstellen dat de matrices $\overline{M}$, $\overline{C}$ en $\overline{K}$ symmetrische matrices van orde n*n zijn. Op fysische gronden volgt bovendien dat $\overline{M}$ en $\overline{K}$ minstens semi-positief definiet zijn, dus:

$$\begin{array}{llll} \overline{M},(n*n); & \overline{M}^t = M \; ; & x^t.\overline{M}.x \geq 0 & \text{voor alle } x,(n*1) \\ \overline{C},(n*n); & \overline{C}^t = \overline{C} & & \\ \overline{K},(n*n); & \overline{K}^t = \overline{K} \; ; & x^t.\overline{K}.x \geq 0 & \text{voor alle } x,(n*1) \end{array}$$

De verplaatsingsvektor $\overline{q}$ wordt gepartitioneerd in een drietal deelvektoren $\overline{q}_m$, $\overline{q}_d$ en $\overline{q}_p$:

$$\overline{q}^t = \left[\overline{q}_m^{\,t} \quad \overline{q}_d^{\,t} \quad \overline{q}_p^{\,t} \right]$$

waarbij aan deze deelvektoren de volgende betekenis wordt gehecht:

$\overline{q}_m$: vektor van master degrees of freedom
$\overline{q}_d$: vektor van de afhankelijke vrijheidsgraden (dependent degrees of freedom)
$\overline{q}_p$: vektor van de voorgeschreven vrijheidsgraden ongelijk aan nul (prescribed degrees of freedom)

De fysische interpretatie van $\overline{q}_m$ en $\overline{q}_d$ zal in het volgende duidelijk worden.

Indien wij de vektor $\overline{R}$ en de matrices $\overline{M}$, $\overline{C}$ en $\overline{K}$ op overeenkomstige wijze partitioneren dan kunnen wij in plaats van (1) ook schrijven:

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_{mm} & \overline{M}_{md} & \overline{M}_{mp} \\ \overline{M}_{dm} & \overline{M}_{dd} & \overline{M}_{dp} \\ \overline{M}_{pm} & \overline{M}_{pd} & \overline{M}_{pp} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \ddot{\overline{q}}_m \\ \ddot{\overline{q}}_d \\ \ddot{\overline{q}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{C}_{mm} & \overline{C}_{md} & \overline{C}_{mp} \\ \overline{C}_{dm} & \overline{C}_{dd} & \overline{C}_{dp} \\ \overline{C}_{pm} & \overline{C}_{pd} & \overline{C}_{pp} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dot{\overline{q}}_m \\ \dot{\overline{q}}_d \\ \dot{\overline{q}}_p \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{mm} & \overline{K}_{md} & \overline{K}_{mp} \\ \overline{K}_{dm} & \overline{K}_{dd} & \overline{K}_{dp} \\ \overline{K}_{pm} & \overline{K}_{pd} & \overline{K}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{q}_m \\ \overline{q}_d \\ \overline{q}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R}_m \\ \overline{R}_d \\ \overline{R}_p \end{bmatrix}$$

Als bekenden treden hierin de krachtvektoren $\overline{R}_m$ en $\overline{R}_d$ en de verplaatsingsvektoren $\overline{q}_p$, $\dot{\overline{q}}_p$ en $\ddot{\overline{q}}_p$ op. De komponenten van $\overline{R}_p$, $\overline{q}_m$ en $\overline{q}_d$ zijn onbekende, te bepalen funkties van de tijd. Stellen wij het aantal komponenten van $\overline{q}_m$, $\overline{q}_d$ en $\overline{q}_p$ gelijk aan respektievelijk n_m, n_d en n_p dan is het totaal aantal onbekende verplaatsingsgrootheden dus gelijk aan $n_u = n_m + n_d$.

Meestal zal n_u zo groot zijn dat het om praktische redenen (rekentijd en eventueel ook numerieke stabiliteit van het oplossingsproces!) niet mogelijk is een exakte oplossing te bepalen. Wij zullen hier een benadeirngsmethode schetsen waarmee het mogelijk is om - op een praktisch bruikbare manier - een benaderingsoplossing van (4) te berekenen. Het kernpunt van die methode is dat het aantal relevante vergelijkingen in (4) drastisch wordt gereduceerd door de vektor $\overline{q}_d$ te "elimineren". Daarbij kunnen een aantal werkwijzen gekozen worden. Wij beperken ons hier echter tot de Guyan-reduktie (ook wel statische kondensatie genoemd), omdat dit de werkwijze is die in DYNAN gehanteerd wordt.

Uit het stelsel differentiaalvergelijkingen in gepartitioneerde vorm volgt:

$$\overline{M}_{dm}.\ddot{\overline{q}}_m + \overline{M}_{dd}.\ddot{\overline{q}}_d + \overline{M}_{dp}.\ddot{\overline{q}}_p + \overline{C}_{dm}.\dot{\overline{q}}_m + \overline{C}_{dd}.\dot{\overline{q}}_d + \overline{C}_{dp}.\dot{\overline{q}}_p + \\ + \overline{K}_{dm}.\overline{q}_m + \overline{K}_{dd}.\overline{q}_d + \overline{K}_{dp}.\overline{q}_p = \overline{R}_d(t)$$

Veronderstellen wij dat de invloed van de traagheidskrachten en de dempingskrachten veel kleiner is dan de invloed van $\overline{K}_{dm}.\overline{q}_m$, $\overline{K}_{dp}.\overline{q}_p$ en $K_{dd}.q_d$ dan kan (5) worden vereenvoudigd tot:

$$\overline{K}_{dm}.\overline{q}_m + \overline{K}_{dd}.\overline{q}_d + \overline{K}_{dp}.\overline{q}_p = \overline{R}_d(t)$$

Wij eisen bovendien dat beweging als star lichaam van de konstruktie (of van een gedeelte van de konstruktie) onmogelijk is als $\overline{q}_m$ en $\overline{q}_p$ gelijk zijn aan nul. De matrix $\overline{K}_{dd}$, $(n_d * n_d)$ is dan positief definiet. Het zal duidelijk zijn dat wij door een geschikte keuze van de afhankelijke vrijheidsgraden altijd aan deze eis kunnen voldoen. Omdat $\overline{K}_{dd}$ positief definiet is zal deze matrix zeker regulier zijn, zodat uit (6) de vektor $\overline{q}_d$ kan worden opgelost:

$$\overline{q}_d = -(\overline{K}_{dd})^{-1}.\overline{K}_{dm}.\overline{q}_m - (K_{dd})^{-1}.\overline{K}_{dp}.\overline{q}_p + (\overline{K}_{dd})^{-1}.\overline{R}_d$$

Hiermee kan het aantal onbekenden in (4) worden gereduceerd van $n_u = n_m + n_d$ tot n_m.

Het is hier weinig zinvol om dit verder uit te werken omdat bij het reduktieproces, dat in DYNAN gevolgd wordt, nog een aantal extra veronderstellingen gemaakt worden. Daar wordt namelijk aangenomen dat zowel de matrix $\overline{K}_{dp}$, die statisch de afhankelijke verplaatsingen $\overline{q}_d$ koppelt aan de voorgeschreven verplaatsingen $\overline{q}_p$, als de belastingsvektor $\overline{R}_d$ gelijk zijn aan nul. Vergelijking (6) gaat dan over in:

$$\overline{q}_d = -(\overline{K}_{dd})^{-1}.\overline{K}_{dm}.\overline{q}_m$$

Deze werkwijze heeft grote konsequenties voor de keuze van de afhankelijke vrijheidsgraden. Allereerst volgt uit $\overline{R}_d=0$ dat iedere onbekende vrijheidsgraad waarop een niet te verwaarlozen voorgeschreven belasting werkt, master gekozen moet worden. Uit $\overline{K}_{dp}=0$ volgt bovendien dat van een element, waarvan één der vrijheidsgraden een voorgeschreven waarde ongelijk aan nul heeft, alle overige (onbekende) vrijheidsgraden master gedeklareerd moeten worden. Deze beperking is iets scherper dan in werkelijkheid nodig is; geëist moet worden dat iedere onbekende vrijheidsgraad, die in de stijfheidsmatrix $\overline{K}$ gekoppeld is met een voorgeschreven vrijheidsgraad ($\neq 0$) een master degree of freedom is. In de DYNAN User's Reference Manual worden deze eisen als volgt omschreven (zie User's Manual, uitgave 1971, pag. 2.1.4):

b. "concentrated excitation forces may only act on master degrees of freedom"
c. "time-dependent prescribed deflections may only be coupled to master degrees of freedom"

De genoemde beperkingen kunnen in een aantal situaties van zeer groot belang zijn, bijv. als het aantal uitwendig belaste knooppunten erg groot is (denk aan een tijdsafhankelijke druk op een plaat of schaal) of als in een groot aantal knooppunten een vrijheidsgraad is voorgeschreven als funktie van de tijd. Het aantal master degrees of freedom, n_m, kan dan erg groot worden en de dynamische berekeningen zullen zeer veel rekentijd gaan vergen. Het is ons niet duidelijk geworden waarom het ISD deze beperkingen in DYNAN heeft ingebouwd. Op een desbetreffende vraag gaf Brönlund, de leider van de DYNAN-groep binnen het ISD, het nogal onbevredigende antwoord: "Wij hebben er gewoon niet aan gedacht om een andere werkwijze te volgen". Hij liet wel doorschemeren erg geïnteresseerd te zijn in andere, meer algemeen bruikbare werkwijzen waarin deze beperkingen niet zouden voorkomen.

Wij zullen ons nu verder beperkèn tot de werkwijze die in DYNAN gevolgd is.
Met:

$$T_2 = -(K_{dd})^{-1}.K_{dm}$$

kan voor $\overline{q}_d$ geschreven worden:

$$\overline{q}_d = T_2.q_m$$

Substitueren wij dit resultaat in (4) dan volgt na enig rekenwerk:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mp} \\ M_{pm} & M_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{mm} & C_{mp} \\ C_{pm} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_m \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mp} \\ K_{pm} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_m \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m \\ R_p \end{bmatrix}$$

waarbij de optredende matrices en vektoren worden gegeven door:

$$M_{mm} = M_{mm}^{\ t} = \overline{M}_{mm} + T_2'.\overline{M}_{dm} + \overline{M}_{md}.T_2' + T_2'\overline{M}_{dd}.T_2$$

$$M_{mp} = M_{pm}^{t} = \overline{M}_{mp} + T_2'.\overline{M}_{dp}$$

$$M_{pp} = M_{pp}^{\ t} = \overline{M}_{pp}$$

$$C_{mm} = C_{mm}^{\ t} = \overline{C}_{mm} + T_2'.\overline{C}_{dm} + \overline{C}_{md}.T_2' + T_2'.\overline{C}_{dd}.T_2$$

$$C_{mp} = C_{pm}^{\ t} = \overline{C}_{mp} + T_2'.\overline{C}_{md}$$

$$C_{pp} = C_{pp}^{\ t} = \overline{C}_{pp}$$

$$K_{mm} = K_{mm}^{\ t} = \overline{K}_{mm} - \overline{K}_{md}.(\overline{K}_{ff})^{-1}.\overline{K}_{dm}$$

$$K_{mp} = K_{pm}^{\ t} = \overline{K}_{mp}$$

$$K_{pp} = K_{pp}^{\ t} = \overline{K}_{pp}$$

$$q_m = \overline{q}_m; \quad q_p = \overline{q}_p$$

$$R_m = \overline{R}_m; \quad R_p = \overline{R}_p$$

Als de konstruktie of een gedeelte van de konstruktie als star lichaam kan bewegen zal de matrix K_{mm} singulier zijn. Nemen wij aan dat het aantal rigid body modes n_s bedraagt dan zal de rang van K_{mm} niet gelijk zijn aan n_m maar aan $n_e=n_m-n_s$. Wij noemen n_e het aantal elastic modes. Wij veronderstellen dat de rigid body modes en de elastic modes worden beschreven door de komponenten van de vektoren $q_s,(n_s*1)$ respektievelijk $q_e,(n_e*1)$. De komponenten van deze vektoren zullen wij ook wel aanduiden met de namen rigid body degrees of freedom en elastic degrees of freedom.

De vektor van master degrees of freedom, q_m, kan geschreven worden als een lineaire kombinatie van q_e en q_s:

$$q_m = \begin{bmatrix} S_e & X_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_e \\ q_s \end{bmatrix} \equiv S. \begin{bmatrix} q_e \\ q_s \end{bmatrix} = S_e.q_e + X_s.q_s \tag{16}$$

waarbij $S = \begin{bmatrix} S_e & X_s \end{bmatrix}$ de rigid body transformatiematrix is.
Wij wijzen erop dat de komponenten van q_s door de gebruiker zelf bepaald worden; deze moet namelijk inlezen welke bewegingen als star lichaam op kunnen treden. De komponenten van q_s zullen dan ook een fysisch te interpreteren betekenis hebben (zie bijv. DYNAN U.R.M., pag. 2.2.10). Dit laatste is in het algemeen niet het geval voor de komponenten van q_e.

De matrix X_3 kan eenvoudig bepaald worden uit het gegeven dat de komponenten van de vektor $X_s.q_s$ gelijk zijn aan de verplaatsingen die optreden bij een willekeurige, door q_s gekarakteriseerde beweging als star lichaam. Het zal duidelijk zijn dat voor de berekening van X_s de knooppuntskoördinaten nodig zijn.
Er geldt:

$$K_{mm}.X_s = 0$$

Het bewijs hiervan is eenvoudig. Immers, uit (10) volgt voor het statische geval:

$$K_{mm}.X_s.q_s + K_{mm}.S_e.q_e = R_m - K_{mp}.q_p \tag{17}$$

Beschouwen wij nu bewegingen als star lichaam (dus $q_s \neq 0$; $q_e = 0$; $k_m = 0$; $q_p = 0$) dan volgt direkt:

$$K_{mm}.X_s.q_s = 0 \quad \text{voor alle } q_s$$

en dus $$K_{mm}.X_s = 0$$

S_e kan niet eenduidig bepaald worden uit (16). Wij eisen nu dat deze matrix voldoet aan:

$$S_e^t.M.X_s = 0 \tag{18}$$

Ook dan is S_e echter nog niet eenduidig vastgelegd. Van de nog resterende vrijheid in de keuze van deze matrix maken wij gebruik door te eisen:

$$S_e^t.S_e = I \tag{19}$$

Volgens het ISD kan nu bewezen worden dat S_e wel eenduidig is.

Wij kunnen nu van (16) gebruik maken om het stelsel vergelijkingen (10) te transformeren. Daartoe schrijven wij eerst (10) in een iets andere vorm:

$$M_{mm}.\ddot{q}_m + C_{mm}.\dot{q}_m + K_{mm}.q_m = R_m - M_{mp}.\ddot{q}_p - C_{mp}.\dot{q}_p - K_{mp}.q_p \tag{20}$$

$$R_p = M_{pm}.\ddot{q}_m + C_{pm}.\dot{q}_m + K_{pm}.q_m + M_{pp}.\ddot{q}_p + C_{pp}.\dot{q}_p + K_{pp}.q_p \tag{21}$$

Het stelsel vergelijkingen (21) is voor ons op dit ogenblik nauwelijks interessant; wij zuller er alleen gebruik van maken om de krachten te berekenen die nodig zijn om de voorgeschreven verplaatsingen te realiseren. Stellen wij het rechterlid in stelsel (20) gelijk aan P(t), dus:

$$P(t) = R_m(t) - M_{mp}.\ddot{q}_p - C_{mp}.\dot{q}_p - K_{mp}.q_p, \tag{22}$$

dan kunnen wij met (16) het relevante stelsel vergelijkingen (20) overvoeren in:

$$S^t.M_{mm}.S.\begin{bmatrix}\ddot{q}_e\\ \ddot{q}_s\end{bmatrix} + S^t.C_{mm}.S.\begin{bmatrix}\dot{q}_e\\ \dot{q}_s\end{bmatrix} + S^t.K_{mm}.S.\begin{bmatrix}q_e\\ q_s\end{bmatrix} = S^t.P$$

Op grond van de eigenschappen (17), (18) en (19) van de deelmatrices X_s en S_e hebben de matrices $S^t.M_{mm}.S$ en $S^t.K_{mm}.S$ een eenvoudige vorm. Er geldt:

$$S^t.M_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.M_{mm}.S_e & S_e^t.M_{mm}.X_s \\ X_s^t.M_{mm}.S_e & X_s^t.M_{mm}.X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_e^t.M_{mm}.S_e & \\ 0 & X_s^t.M_{mm}.X_s \end{bmatrix}$$

$$S^t.K_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.K_{mm}.S_e & S_e^t.K_{mm}.X_s \\ X_s^t.K_{mm}.S_e & X_s^t.K_{mm}.X_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_e^t.K_{mm}.S_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jammer genoeg geldt - in het algemeen - een dergelijk resultaat niet voor $S^t.C_{mm}.S$. Daarvoor volgt:

$$S^t.C_{mm}.S = \begin{bmatrix} S_e^t.C_{mm}.S_e & S_e^t.C_{mm}.X_s \\ X_s^t.C_{mm}.S_e & X_s^t.C_{mm}.X_s \end{bmatrix}$$

Wij voeren nu een aantal - erg voor de hand liggende - afkortingen in en stellen:

$$\begin{aligned} &K_{ee} = S_e^t.K_{mm}.S_e \\ &M_{ee} = S_e^t.M_{mm}.S_e \;;\; M_{ss} = X_s^t.M_{mm}.X_s \\ &C_{ee} = S_e^t.C_{mm}.S_e \;;\; C_{ss} = X_s^t.C_{mm}.X_s \;;\; C_{es} = S_e^t.C_{mm}.S_e \\ &R_e = S_e^t.P \;;\; R_s = X_s^t.P \end{aligned} \tag{23}$$

Hiermee kunnen wij in plaats van (21) ook schrijven:

$$\begin{bmatrix} M_{ee} & 0 \\ 0 & M_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_e \\ \ddot{q}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ee} & C_{es} \\ C_{se} & C_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_e \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ee} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_e \\ q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e \\ R_s \end{bmatrix} \tag{24}$$

Uit (24) blijkt dat de vergelijkingen voor q_e en q_s dan en slechts dan ontkoppeld zijn als $C_{es} = C_{se}^t$ een nulmatrix is. Dit zal in het algemeen niet het geval zijn. Het is misschien mogelijk om de matrix S_e zodanig te kiezen dat $S_e^t.C_{mm}.S_e = 0$ en $S_e^t.M_{mm}.S_e = 0$ maar niet meer $S_e^t.S_e = I$. Het ISD heeft daarvoor op dit moment in ieder geval nog geen bruikbare methode ontwikkeld. Voor willekeurige, symmetrische dempingsmatrices C_{mm} kunnen op dit moment met DYNAN dan ook alleen de komplexe eigenwaarden en eigenvektoren worden berekend. Het is (nog) niet mogelijk responsieberekeningen uit te voeren; bij de nu bekende methoden zou dit soort berekeningen namelijk zeer veel rekentijd vergen. Voor een beschrijving van de in DYNAN aanwezige faciliteiten voor het rekenen met willekeurige, symmetrische dempingsmatrices verwijzen wij naar de Lecture Notes en de DYNAN U.R.M. pag. 2.2.21 t/m 2.2.31.

Wij zullen ons nu verder beperken tot het geval dat de demping <u>proportioneel</u> is d.w.z. dat de dempingsmatrix C_{mm} een lineaire kombinatie is van de stijfheidsmatrix K_{mm} en de massamatrix M_{mm}:

$$C_{mm} = \alpha.K_{mm} + \beta.M_{mm} \tag{25}$$

waarbij α en β reële konstanten zijn. Voor de deelmatrices C_{ee}, C_{ss} en C_{se} geldt in dit geval:

$$C_{ee} = S_e^t.(\alpha.K_{mm} + \beta.M_{mm}).S_e = \alpha.K_{ee} + \beta.M_{ee}$$

$$C_{ss} = X_s^t.(\alpha.K_{mm} + \beta.M_{mm}).X_s = \beta.M_{ss}$$

$$C_{se} = C_{es}^t = X_s^t(\alpha.K_{mm} + \beta.M_{mm}).S_e = 0$$

Door substitutie hiervan in (24) volgt dat voor proportionele demping de differentiaalvergelijkingen in q_e ontkoppeld zijn van die in q_s:

$$M_{ee}.\ddot{q}_e + (\alpha.K_{ee} + \beta.M_{ee}).\dot{q}_e + K_{ee}.q_e = R_e \tag{26}$$

$$M_{ss}.\ddot{q}_s + \beta.M_{ss}.\dot{q}_s = R_s \tag{27}$$

Wij hebben ons tot nu toe nog niet bekommerd om de beginkondities die bij de gegeven differentiaalvergelijkingen behoren. In DYNAN kunnen alleen beginkondities voor de master degrees of freedom in rekening worden gebracht. Deze kondities zullen van de volgende vorm zijn:

$$q_m(t=t_o) = q_{mo} \quad ; \quad \dot{q}_m(t=t_o) = \dot{q}_{mo}$$

Voor berekeningen met de stelsels vergelijkingen (26) en (27) moeten deze beginvoorwaarden worden getransformeerd naar kondities in de vektoren q_e en q_s. Omdat de matrix $S = |S_e \quad X_s|$ regulier is zal daarvoor gelden:

$$\begin{bmatrix} q_{eo} \\ q_{so} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_e(t=t_o) \\ q_s(t=t_o) \end{bmatrix} = S^{-1}.q_{mo} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_{eo} \\ \dot{q}_{so} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_e(t=t_o) \\ \dot{q}_s(t=t_o) \end{bmatrix} = S^{-1}.\dot{q}_{mo} \qquad (28)$$

Voor de berekening van de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen voor q_e bepalen wij eerst (een aantal van) de (laagste) eigenwaarden en bijbehorende eigenvektoren van het algemene eigenwaardeprobleem:

$$M_{ee}.x = \lambda.K_{ee}.x \qquad (29)$$

dat met $q_e = x.e^{ut}$ en $\lambda = \frac{1}{u^2}$ direkt is af te leiden uit:

$$M_{ee}.\ddot{q}_e + K_{ee}.q_e = 0$$

Omdat de bewegingen als star lichaam zijn geëlimineerd zal K_{ee} positief definiet zijn terwijl M_{ee} minstens semi-positief definiet is. Daar K_{ee} en M_{ee} bovendien symmetrisch zijn zullen alle eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{ne}$ positief zijn. Wij nummeren zodanig dat $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{ne}$ 0. De bijbehorende eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots x_{ne}$ bergen wij op in de matrix X; wij mogen eisen dat X voldoet aan:

$$X^t.K_{ee}.X = I \qquad (30)$$

Op grond van (29) geldt dan ook:

$$X^t.M_{ee}.X = \Lambda = \lceil \lambda_i \rfloor \qquad (31)$$

Stellen wij nu:

$$q_e = X.\eta(t) = \sum_{i=1}^{n_e} x_i.\eta_i(t), \qquad (32)$$

waarbij η de vektor der gegeneraliseerde (of natuurlijke) coördinaten is, dan kan het stelsel vergelijkingen voor q_e door voorvermenigvuldiging met X^t en substitutie van (32) worden overgevoerd in:

$$\Lambda.\ddot{\eta} + (\alpha.I + \beta.\Lambda).\dot{\eta} + \eta = X^t.R_e = F \qquad (33)$$

Dit is een stelsel van n_e ongekoppelde differentiaalvergelijkingen van de vorm:

$$\lambda_i.\ddot{\eta}_i + (\alpha+\beta.\lambda_i).\dot{\eta}_i + \eta_i = F_i(t) \tag{34}$$

In het algemeen zijn slechts een zeer beperkt aantal van de (eerste) komponenten van de vektor η van belang voor een (min of meer) nauwkeurige beschrijving van het dynamische gedrag van de konstruktie. Stel dat dit aantal gelijk is aan n_x. Als n_x kleiner is dan n_e zullen wij slechts de eerste n_x komponenten van η berekenen. Eenvoudig kan worden aangetoond dat dan voor de hierboven aangegeven transformatie alleen de eerste n_x eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\lambda_{nx}$ en eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots x_{nx}$ nodig zijn. Bij de oplossing van het eigenwaardeprobleem (29) beperken wij ons dan uiteraard tot de berekening van deze grootheden. De vektor q_e wordt dan niet bepaald uit (32) maar uit:

$$q_e = \sum_{i=1}^{n_x} x_i.\eta_i(t) \tag{35}$$

Bij deze werkwijze doet zich echter een kleine komplikatie voor. Immers, om vergelijking (34) te kunnen oplossen voor $i=1,2,\ldots,n_x$ moeten de beginkondities $\eta_{io}=\eta_i(t=t_o)$ en $\dot{\eta}_{io}=\dot{\eta}_i(t=t_o)$ bekend zijn. Als $n_x=n_e$ kunnen deze kondities met $\eta=X^{-1}.q_e$ eenvoudig bepaald worden uit de beginvoorwaarden voor q_e en $\dot{q}_e$. Als $n_x<n_e$ is X^{-1} echter niet bekend omdat niet alle kolommen van X (d.w.z. niet alle eigenvektoren)bekend zijn. Wij kunnen dan echter gebruik maken van de uit (30) en (31) af te leiden gelijkheden:

$$X^{-1} = X^t.K_{ee}; \quad X^{-1} = \Lambda^{-1}.X^t.M_{ee}$$

Volgens de DYNAN U.R.M. (pag. 2.2.33) kan worden aangetoond dat de uit:

$$\eta_o = \eta(t=t_o) = X^t.K_{ee}.q_{eo}$$

$$\dot{\eta}_o = \dot{\eta}(t=t_o) = \Lambda^{-1}.M_{ee}.\dot{q}_{eo}$$

berekende randkondities voor $\eta(t)$ en $\dot{\eta}(t)$ de best mogelijke kondities zijn voor het geval dat in de berekeningen slechts een beperkte aantal komponenten van in rekening worden gebracht.

De oplossing van de differentiaalvergelijkingen (34) voor η_i $(i=1,2,\ldots,n_x)$ wordt, evenals de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen (27) voor de rigid body degrees of freedom q_s, in het algemeen bepaald met een numerieke integratieprocedure; voor een beschrijving van de gebruikte procedure verwijzen wij naar de Lecture Notes. Indien echter alle komponenten van R_e en van

R_s een harmonische funktie zijn van de tijd wordt een methode gevolgd waarin optimaal gebruik wordt gemaakt van de eigenschappen van deze funkties. Het lijkt niet zinvol deze werkwijze hier verder te bespreken.

Zodra de interessante komponenten van η en de komponenten van q_s bepaald zijn als funktie van de tijd, kunnen $\dot{q}_m$, q_m en $\ddot{q}_m$ eenvoudig berekend worden. Desgewenst kan daarna de vektor R_p (van de krachten die nodig zijn om de voorgeschreven verplaatsingen q_p te realiseren) worden bepaald.
Er zijn nog enkele belangrijke, invoerbeperkende faciliteiten in het DYNAN programmasysteem ingebouwd die nog niet ter sprake zijn gekomen en die samenhangen met het inlezen van de krachtvektoren R_e en R_s als funktie van de tijd t. Volgens (23) worden deze vektoren met:

$$R_e = S_e^t.P; \quad R_s = X_s^t.P$$

afgeleid uit de vektor P = P(t) die is gedefinieerd door:

$$P = R_m - M_{mp}.\ddot{q}_p - C_{mp}.\dot{q}_p - K_{mp}.q_p$$

Veelal zullen de van nul verschillende komponenten van R_m kunnen worden afgeleid van een zeer beperkt aantal (stel nj) funkties van de tijd t:

$$R_m(t) = A_F.F(t)$$

waarbij $R_m,(n_m*1)$; $A_F,(n_m*n_f)$ en $F,(n_j*1)$. Meestal zal nj veel kleiner zijn dan n_m. Het is duidelijk dat het vastleggen van de j_f komponenten van F = F(t) dan veel minder werk zal zijn dan het vastleggen van de n_m komponenten van R_m. De hoeveelheid invoer kan verder drastisch worden beperkt doordat het mogelijk is de komponenten van F zowel numeriek als in funktie-vorm in te voeren.

Voor de voorgeschreven verplaatsingen q_p is een soortgelijke faciliteit aanwezig:

$$q_p(t) = A_G.G(t)$$

waarbij $q_p,(n_p\ 1)$; $A_G,(n_p\ n_g)$ en $G,(n_g\ 1)$. Veelal zal gelden $n_g \ll n_p$. Ook de komponenten van G = G(t) kunnen zowel numeriek als in funktievorm worden ingelezen.
De voordelen van deze invoerbeperkende faciliteiten worden voor een niet onbelangrijk gedeelte teniet gedaan door de eis dat A_G en A_F boolean matrices moeten zijn. Het is ons volslagen onduidelijk waarom deze beperking is ingebouwd. Op een desbetreffende vraag is ons door Brönlund verzekerd dat deze beperking op korte termijn zal worden opgeheven.