De stijfheid van een elastische schroefveer tegen verschillende belastingen bij kleine verplaatsingen

De stijfheid van een elastische schroefveer tegen verschillende belastingen bij kleine verplaatsingen.

De elementenmethode, vergeleken met andere methoden.

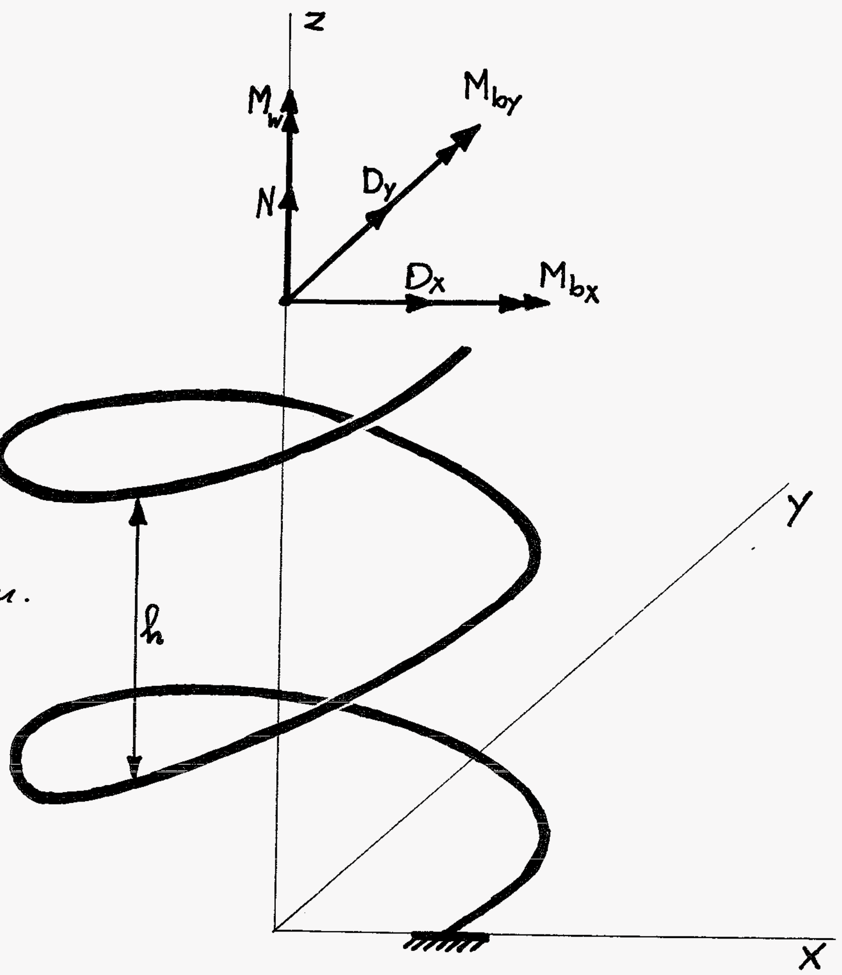
Ir. W.A.M. Brekelmans

Inhoudsopgave

I Inleiding

Beschouwd wordt een schroefveer, waarvan het ene uiteinde ingeklemd en het andere uiteinde belast is. Voorlopig wordt de belasting nog zo algemeen mogelijk gekozen.

n windingen.



De vorm van de draaddoorsnede is willekeurig te kiezen met dien verstande, dat de hoofdtraagheidsassen van deze dwarsdoorsnede samen moeten vallen met de normaal en binormaal, die bij de schroeflijn behoren.

Het aantal windingen n zal vaak geheel worden verondersteld.

De spoed, h, is constant bij een bepaalde veer.

Bij dit onderzoek is tot taak gesteld, het berekenen van de verplaatsingen aan het uiteinde van de schroefveer bij verschillende belastings-combinaties en bij kleine verplaatsingen.

In dit rapport zijn verschillende methoden uitgewerkt:

a) de „exacte" methode;
de totale in de veer opgehoopte elastische energie tengevolge van buiging en wringing van de draad werd berekend, waarmee met behulp van de Wet van Castigliano de verplaatsingen door differentiatie te vinden waren.

b) de „meest bekende" benaderingsmethode;
de veer wordt opgebouwd gedacht uit vlakke windingen met starre tussenstukjes, waardoor de uitdrukking voor de inwendige energie aanzienlijk vereenvoudigt. De verplaatsingen zijn dan weer te vinden met behulp van de Wet van Castigliano.

De resultaten van beide hierboven genoemde methodieken zullen in twee speciale belastingsgevallen met elkaar worden vergeleken. Er zal blijken dat de benaderingsmethode voor gangbare veren in het algemeen goede resultaten geeft voor de verplaatsingen maar dat voor andere veertypen, grote afwijkingen kunnen ontstaan. Getracht werd om met behulp van een (te verwachten) betere benaderingsmethode de exacte resultaten beter te benaderen.

c) de verplaatsingsmethode (elementenmethode):
de veer wordt opgebouwd gedacht uit vlakke stukjes winding met starre tussenstukjes. Voor elk stukje winding wordt de stijfheid bepaald en uitgedrukt in een „stijfheidsmatrix"

De stijfheidsmatrices van alle stukjes (elementen) worden gegroepeerd in een grote stijfheidsmatrix waaruit na inversering de grootte van de gewenste verplaatsingen kan worden verkregen. Het rekentechnische gedeelte bij deze methode wordt uitgevoerd door de rekenmachine

De beschreven methode geeft echter alleen resultaten in concrete gevallen, met het nadeel dat vergelijking met beide eerder genoemde analytische methoden moeilijk is. Verder blijkt dat onder bepaalde omstandigheden de rekennauwkeurigheid van de computer te kort schiet.
Om het vergelijken gemakkelijker te maken en om een uitspraak te kunnen doen over de rekennauwkeurigheid van de computer werd een methode opgezet, die analytisch is, en die precies dezelfde resultaten moet geven als de elementen methode.

d) Semi-elementenmethode

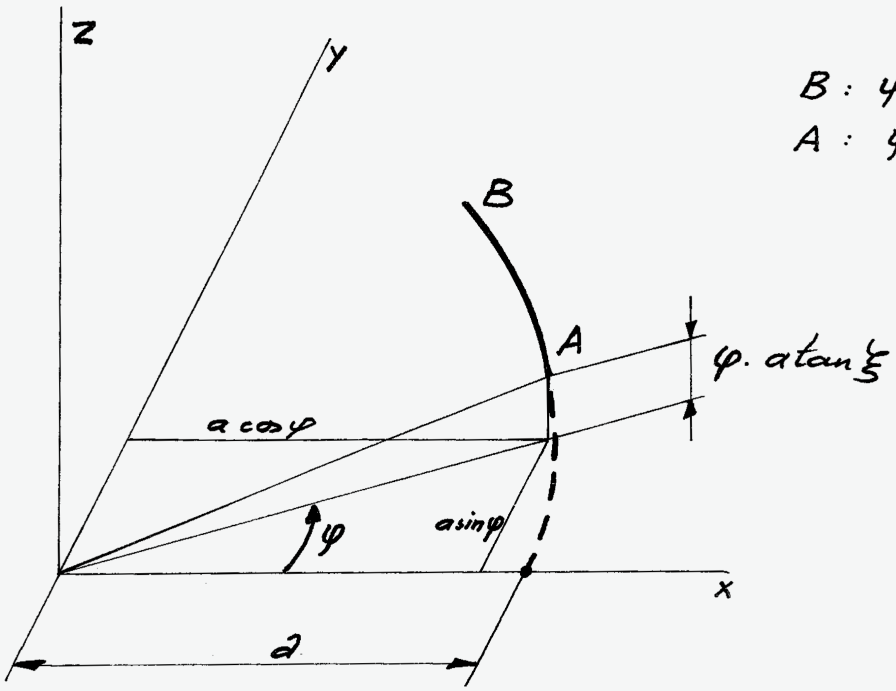
De arbeid in alle elementjes wordt gesommeerd. Met behulp van de wet van Castigliano vinden we de verplaatsingen.

Vergelijking van methode c en methode d geeft een uitspraak over de rekennauwkeurigheid van de computer.
Vergelijking van methode a en methode c/d geeft een uitspraak over de waarde van de elementenmethode toegepast op de schroefveer.
En zal blijken dat de elementenmethode zoals die in dit rapport is uitgewerkt slechts een geringe verbetering geeft ten opzichte van de benaderingsmethode (b). Verfijning van de elementen kan zowel voordelige als nadelige gevolgen hebben en zelfs geen gevolgen hebben.
Het rapport eindigt met de slotconclusies, waarin bovenstaande is gespecificeerd.

II De „exacte" methode

II.1 Geometrische eigenschappen

$B : \varphi = \alpha$
$A : \varphi = \varphi$



Schroeflijn:

$$x = a\cos\varphi$$
$$y = a\sin\varphi$$
$$z = h\cdot\varphi = a\tan\xi\cdot\varphi$$

positieve raaklijnrichting : $(-\cos\xi\sin\varphi,\ \cos\xi\cos\varphi,\ \sin\xi)$
positieve normaalrichting : $(-\cos\varphi,\ -\sin\varphi,\ 0)$
positieve binormaalrichting : $(\sin\xi\sin\varphi,\ -\sin\xi\cos\varphi,\ \cos\xi)$

raaklijn : positieve richting in toenemende φ richting
normaal : positieve richting naar de z-as gericht.
binormaal: positieve richting in positieve z-richting („naar boven toe gericht")

II.2 Snedegrootheden op AB

plaats B

componenten

N_α : kracht in pos. raaklijnrichting
- x : $-N_\alpha \cos\xi \sin\alpha$
- y : $N_\alpha \cos\xi \cos\alpha$
- z : $N_\alpha \sin\xi$

$D_{n\alpha}$: kracht in pos. normaalrichting
- x : $-D_{n\alpha} \cos\alpha$
- y : $-D_{n\alpha} \sin\alpha$
- z : 0

$D_{b\alpha}$: kracht in pos. binormaalrichting
- x : $D_{b\alpha} \sin\xi \sin\alpha$
- y : $-D_{b\alpha} \sin\xi \cos\alpha$
- z : $D_{b\alpha} \cos\xi$

$M_{w\alpha}$: moment om de raaklijn vector in pos. richting
- x : $-M_{w\alpha} \cos\xi \sin\alpha$
- y : $M_{w\alpha} \cos\xi \cos\alpha$
- z : $M_{w\alpha} \sin\xi$

$M_{n\alpha}$ moment om de normaal vector in pos. richting
- x : $-M_{n\alpha} \cos\alpha$
- y : $-M_{n\alpha} \sin\alpha$
- z : 0

$M_{b\alpha}$ moment om de binormaal vector in pos. richting.
- x : $M_{b\alpha} \sin\xi \sin\alpha$
- y : $-M_{b\alpha} \sin\xi \cos\alpha$
- z : $M_{b\alpha} \cos\xi$

<u>plaats A</u>

N_φ : kracht in neg. raaklijnrichting
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & N_\varphi \cos\xi \sin\varphi \\ y & : & -N_\varphi \cos\xi \cos\varphi \\ z & : & -N_\varphi \sin\xi \end{array}$$

$D_{n\varphi}$: kracht in neg. normaalrichting
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & D_{n\varphi} \cos\varphi \\ y & : & D_{n\varphi} \sin\varphi \\ z & : & 0 \end{array}$$

$D_{b\varphi}$: kracht in neg. binormaalrichting
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & -D_{b\varphi} \sin\xi \sin\varphi \\ y & : & D_{b\varphi} \sin\xi \cos\varphi \\ z & : & -D_{b\varphi} \cos\xi \end{array}$$

$M_{w\varphi}$: moment om de raaklijn vector in neg. richting.
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & M_{w\varphi} \cos\xi \sin\varphi \\ y & : & -M_{w\varphi} \cos\xi \cos\varphi \\ z & : & -M_{w\varphi} \sin\xi \end{array}$$

$M_{n\varphi}$ moment om de normaal vector in neg. richting
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & M_{n\varphi} \cos\varphi \\ y & : & M_{n\varphi} \sin\varphi \\ z & : & 0 \end{array}$$

$M_{b\varphi}$ moment om de binormaal vector in neg. richting
$$\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\rangle \begin{array}{lll} x & : & -M_{b\varphi} \sin\xi \sin\varphi \\ y & : & M_{b\varphi} \sin\xi \cos\varphi \\ z & : & -M_{b\varphi} \cos\xi \end{array}$$

II.3 Krachtenevenwicht

$$\text{①}\quad N_\varphi \cos\xi \sin\varphi + D_{n\varphi}\cos\varphi - D_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi - N_\alpha\cos\xi\sin\alpha - D_{n\alpha}\cos\alpha + D_{b\alpha}\sin\xi\sin\alpha = 0$$

$$\text{②}\quad -N_\varphi\cos\xi\cos\varphi + D_{n\varphi}\sin\varphi + D_{b\varphi}\sin\xi\cos\varphi + N_\alpha\cos\xi\cos\alpha - D_{n\alpha}\sin\alpha - D_{b\alpha}\sin\xi\cos\alpha = 0$$

$$\text{③}\quad -N_\varphi\sin\xi + \qquad - D_{b\varphi}\cos\xi + N_\alpha\sin\xi + \qquad + D_{b\alpha}\cos\xi = 0$$

$$\text{①}\rightarrow\ N_\varphi\cos\xi\sin\varphi\cos\varphi + D_{n\varphi}\cos^2\varphi - D_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi - N_\alpha\cos\xi\sin\alpha\cos\varphi - D_{n\alpha}\cos\alpha\cos\varphi + D_{b\alpha}\sin\xi\sin\alpha\cos\varphi = 0$$

$$\text{②}\rightarrow\ -N_\varphi\cos\xi\sin\varphi\cos\varphi + D_{n\varphi}\sin^2\varphi + D_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi + N_\alpha\cos\xi\cos\alpha\sin\varphi - D_{n\alpha}\sin\alpha\sin\varphi - D_{b\alpha}\sin\xi\cos\alpha\sin\varphi = 0$$

$+$

$$D_{n\varphi} = N_\alpha\cos\xi(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi) + D_{n\alpha}(\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi) + D_{b\alpha}\sin\xi(\sin\varphi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\varphi)$$

$$\boxed{D_{n\varphi} = N_\alpha\cos\xi\sin(\alpha-\varphi) + D_{n\alpha}\cos(\alpha-\varphi) - D_{b\alpha}\sin\xi\sin(\alpha-\varphi)}$$

$$\text{①}\rightarrow\ N_\varphi\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + D_{n\varphi}\sin\xi\cos\varphi - D_{b\varphi}\sin^2\xi\sin\varphi - N_\alpha\sin\xi\cos\xi\sin\alpha - D_{n\alpha}\sin\xi\cos\alpha + D_{b\alpha}\sin^2\xi\sin\alpha = 0$$

$$\text{③}\rightarrow\ -N_\varphi\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + \qquad - D_{b\varphi}\cos^2\xi\sin\varphi + N_\alpha\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + \qquad + D_{b\alpha}\cos^2\xi\sin\varphi = 0$$

$+$

$$D_{b\varphi}\sin\varphi = D_{n\varphi}\sin\xi\cos\varphi + N_\alpha\sin\xi\cos\xi(\sin\varphi - \sin\alpha) - D_{n\alpha}\sin\xi\cos\alpha + D_{b\alpha}(\sin^2\xi\sin\alpha + \cos^2\xi\sin\varphi)$$

$$\begin{aligned}
D_{b\varphi}\sin\varphi = {} & N_\alpha\big(\sin\xi\cos\xi\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi) + \sin\xi\cos\xi(\sin\varphi - \sin\alpha)\big) + \\
& + D_{n\alpha}\big(\sin\xi\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi) - \sin\xi\cos\alpha\big) + \\
& + D_{b\alpha}\big(-\sin^2\xi\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi) + \sin^2\xi\sin\alpha + \cos^2\xi\sin\varphi\big) = \\
= {} & N_\alpha\Big(\sin\xi\cos\xi\big[(\sin\alpha\cos^2\varphi - \sin\alpha) + (\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha)\big]\Big) + \\
& + D_{n\alpha}\big(\sin\xi\cos\alpha\cos^2\varphi + \sin\xi\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha - \sin\xi\cos\alpha\big) + \\
& + D_{b\alpha}\big(-\sin^2\xi\sin\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\xi\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\xi\sin\alpha + \cos^2\xi\sin\varphi\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_{b\varphi} = N_\alpha\sin\xi\cos\xi\big[1-\cos(\alpha-\varphi)\big] + D_{n\alpha}\sin\xi\big[\sin(\alpha-\varphi)\big] + D_{b\alpha}\big[\cos^2\xi + \sin^2\xi\cos(\alpha-\varphi)\big]}$$

De gevonden resultaten voor $D_{n\varphi}$ en $D_{b\varphi}$ substitueren we in (3) om een uitdrukking voor N_φ te verkrijgen

$$N_\varphi \sin\xi = -D_{b\varphi}\cos\xi + N_\alpha \sin\xi + D_{b\alpha}\cos\xi$$

$$N_\varphi \sin\xi = N_\alpha\left(\sin\xi\cos^2\xi\left[\cos(\alpha-\varphi)-1\right] + \sin\xi\right) +$$

$$+ D_{n\alpha}\left(-\sin\xi\cos\xi\sin(\alpha-\varphi)\right) +$$

$$+ D_{b\alpha}\left(-\cos^3\xi - \sin^2\xi\cos\xi\cos(\alpha-\varphi) + \cos\xi\right)$$

$$\boxed{N_\varphi = N_\alpha\left[\sin^2\xi + \cos^2\xi\cos(\alpha-\varphi)\right] + D_{n\alpha}\left[-\cos\xi\sin(\alpha-\varphi)\right] + D_{b\alpha}\left[\sin\xi\cos\xi\left(1-\cos(\alpha-\varphi)\right)\right]}$$

II.4 Momentenevenwicht

x - richting

$$M_{w\varphi}\cos\xi\sin\varphi + M_{n\varphi}\cos\varphi - M_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi +$$

$$A\begin{cases} -M_{w\alpha}\cos\xi\sin\alpha - M_{n\alpha}\cos\alpha + M_{b\alpha}\sin\xi\sin\alpha + \\ -a\tan\xi(\alpha-\varphi)(N_\alpha\cos\xi\cos\alpha - D_{n\alpha}\sin\alpha - D_{b\alpha}\sin\xi\cos\alpha) + \\ +(a\sin\alpha - a\sin\varphi)(N_\alpha\sin\xi + D_{b\alpha}\cos\xi) \end{cases} = 0$$

y - richting

$$-M_{w\varphi}\cos\xi\cos\varphi + M_{n\varphi}\sin\varphi + M_{b\varphi}\sin\xi\cos\varphi +$$

$$B\begin{cases} +M_{w\alpha}\cos\xi\cos\alpha - M_{n\alpha}\sin\alpha - M_{b\alpha}\sin\xi\cos\alpha + \\ +a\tan\xi(\alpha-\varphi)(-N_\alpha\cos\xi\sin\alpha - D_{n\alpha}\cos\alpha + D_{b\alpha}\sin\xi\sin\alpha) + \\ +(a\cos\varphi - a\cos\alpha)(N_\alpha\sin\xi + D_{b\alpha}\cos\xi) \end{cases} = 0$$

z - richting

$$-M_{w\varphi}\sin\xi - M_{b\varphi}\cos\xi +$$

$$C\begin{cases} +M_{w\alpha}\sin\xi + M_{b\alpha}\cos\xi + \\ +(a\sin\varphi - a\sin\alpha)(-N_\alpha\cos\xi\sin\alpha - D_{n\alpha}\cos\alpha + D_{b\alpha}\sin\xi\sin\alpha) + \\ -(a\cos\varphi - a\cos\alpha)(N_\alpha\cos\xi\cos\alpha - D_{n\alpha}\sin\alpha - D_{b\alpha}\sin\xi\cos\alpha) \end{cases} = 0$$

Ofwel:

① $M_{w\varphi}\cos\xi\sin\varphi + M_{n\varphi}\cos\varphi - M_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi + A = 0$

② $-M_{w\varphi}\cos\xi\cos\varphi + M_{n\varphi}\sin\varphi + M_{b\varphi}\sin\xi\cos\varphi + B = 0$

③ $-M_{w\varphi}\sin\xi - M_{b\varphi}\cos\xi + C = 0$

$$① \quad M_{w\varphi}\cos\xi\sin\varphi\cos\varphi + M_{n\varphi}\cos^2\varphi - M_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi + A\cos\varphi = 0$$

$$② \quad -M_{w\varphi}\cos\xi\sin\varphi\cos\varphi + M_{n\varphi}\sin^2\varphi + M_{b\varphi}\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi + B\sin\varphi = 0$$

$+$

$$\boxed{M_{n\varphi} = -A\cos\varphi - B\sin\varphi}$$

$$① \quad M_{w\varphi}\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + M_{n\varphi}\sin\xi\cos\varphi - M_{b\varphi}\sin^2\xi\sin\varphi + A\sin\xi = 0$$

$$② \quad -M_{w\varphi}\sin\xi\cos\xi\sin\varphi - M_{b\varphi}\cos^2\xi\sin\varphi + C\cos\xi\sin\varphi = 0$$

$+$

$$M_{n\varphi}\sin\xi\cos\varphi - M_{b\varphi}\sin\varphi + A\sin\xi + C\cos\xi\sin\varphi = 0$$

$$M_{b\varphi}\sin\varphi = -A\sin\xi\cos^2\varphi - B\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi + A\sin\xi + C\cos\xi\sin\varphi$$

$$M_{b\varphi}\sin\varphi = A\sin\xi\sin^2\varphi - B\sin\xi\sin\varphi\cos\varphi + C\cos\xi\sin\varphi$$

$$\boxed{M_{b\varphi} = A\sin\xi\sin\varphi - B\sin\xi\cos\varphi + C\cos\xi}$$

$$③ \quad M_{w\varphi}\sin\xi = -M_{b\varphi}\cos\xi + C$$

$$M_{w\varphi}\sin\xi = -A\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + B\sin\xi\cos\xi\cos\varphi - C\cos^2\xi + C$$

$$\boxed{M_{w\varphi} = -A\cos\xi\sin\varphi + B\cos\xi\cos\varphi + C\sin\xi}$$

We kunnen nu overgaan tot substitutie van A, B en C

$$M_{n\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi \cdot a \tan\xi\,(\alpha-\varphi)\cos\xi\cos\alpha - \cos\varphi\cdot(a\sin\alpha - a\sin\varphi)\sin\xi + \\ \sin\varphi\cdot a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\cos\xi\sin\alpha - \sin\varphi\cdot(a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi \end{array} \right\} N_\alpha +$$

$$+ \left\{ -\cos\varphi\cdot a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\sin\alpha + \sin\varphi\cdot a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\cos\alpha \right\} D_{n\alpha} +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -\cos\varphi\cdot a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\sin\xi\cos\alpha - \cos\varphi\,(a\sin\alpha - a\sin\varphi)\cos\xi + \\ -\sin\varphi\cdot a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\sin\xi\sin\alpha - \sin\varphi\,(a\cos\varphi - a\cos\alpha)\cos\xi \end{array} \right\} D_{b\alpha} +$$

$$+ \left\{ \cos\varphi\cos\xi\sin\alpha - \sin\varphi\cos\xi\cos\alpha \right\} M_{w\alpha} +$$

$$+ \left\{ \cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha \right\} M_{n\alpha} +$$

$$+ \left\{ -\cos\varphi\sin\xi\sin\alpha + \sin\varphi\sin\xi\cos\alpha \right\} M_{b\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{n\varphi} = {} & a\sin\xi\left[(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi) - \sin(\alpha-\varphi)\right] N_\alpha + \\ & + a\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\cdot\left[-\sin(\alpha-\varphi)\right] D_{n\alpha} + \\ & + a\left[-\sin\xi\tan\xi\,(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi) - \cos\xi\sin(\alpha-\varphi)\right] D_{b\alpha} + \\ & + \cos\xi\cdot\sin(\alpha-\varphi)\, M_{w\alpha} + \cos(\alpha-\varphi)\, M_{n\alpha} + \\ & + \sin\xi\left[-\sin(\alpha-\varphi)\right] M_{b\alpha} \end{aligned}}$$

$$M_{b\varphi} = \begin{Bmatrix} -a\tan\xi\sin\xi(\alpha-\varphi)\cos\xi\cos\alpha\sin\varphi + \sin\xi\sin\varphi(a\sin\alpha - a\sin\varphi)\sin\xi + \\ + a\tan\xi\sin\xi(\alpha-\varphi)\cos\xi\sin\alpha\cos\varphi - \sin\xi\cos\varphi(a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi + \\ -\cos\xi(a\sin\varphi - a\sin\alpha)\cos\xi\sin\alpha - \cos\xi(a\cos\varphi - a\cos\alpha)\cos\xi\cos\alpha \end{Bmatrix} N_\alpha +$$

$$+ \begin{Bmatrix} a\tan\xi\sin\xi(\alpha-\varphi)\sin\alpha\sin\varphi + a\tan\xi\sin\xi(\alpha-\varphi)\cos\alpha\cos\varphi + \\ -(a\sin\varphi - a\sin\alpha)\cos\xi\cos\alpha + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\cos\xi\sin\alpha \end{Bmatrix} D_{n\alpha} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} a\tan\xi(\alpha-\varphi)\sin^2\xi\cos\alpha\sin\varphi + (a\sin\alpha - a\sin\varphi)\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + \\ -a\tan\xi(\alpha-\varphi)\sin^2\xi\sin\alpha\cos\varphi - (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi\cos\xi\cos\varphi + \\ + (a\sin\varphi - a\sin\alpha)\sin\xi\cos\xi\sin\alpha + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi\cos\xi\cos\alpha \end{Bmatrix} D_{b\alpha} +$$

$$+ \{ -\sin\xi\cos\xi\sin\varphi\sin\alpha - \sin\xi\cos\xi\cos\varphi\cos\alpha + \sin\xi\cos\xi \} M_{w\alpha} +$$

$$+ \{ -\sin\xi\cos\alpha\sin\varphi + \sin\xi\cos\varphi\sin\alpha \} M_{n\alpha} +$$

$$+ \{ \sin^2\xi\sin\alpha\sin\varphi + \sin^2\xi\cos\alpha\cos\varphi + \cos^2\xi \} M_{b\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{b\varphi} = {} & a\left[\sin^2\xi\{(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi) + \cos(\alpha-\varphi) - 1\} + \cos^2\xi(1-\cos(\alpha-\varphi))\right] N_\alpha + \\ & + a\left[\sin\xi\tan\xi(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi) + \cos\xi\sin(\alpha-\varphi)\right] D_{n\alpha} + \\ & + a\left[\sin^2\xi\tan\xi\{-(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\} + \sin\xi\cos\xi\left(2\cos(\alpha-\varphi) - 2\right)\right] D_{b\alpha} + \\ & + \sin\xi\cos\xi\left[1 - \cos(\alpha-\varphi)\right] M_{w\alpha} + \\ & + \sin\xi\cdot\sin(\alpha-\varphi)\cdot M_{n\alpha} + \\ & + \left[\sin^2\xi\cos(\alpha-\varphi) + \cos^2\xi\right] M_{b\alpha} \end{aligned}}$$

$$M_{W\varphi} = \left\{\begin{array}{l} a\tan\xi(\alpha-\varphi)\cos^2\xi\cos\alpha\sin\varphi - (a\sin\alpha - a\sin\varphi)\sin\xi\cos\xi\sin\varphi + \\ - a\tan\xi(\alpha-\varphi)\cos^2\xi\sin\alpha\cos\varphi + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi\cos\xi\cos\varphi + \\ - (a\sin\varphi - a\sin\alpha)\sin\xi\cos\xi\sin\alpha - (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\xi\cos\xi\cos\alpha \end{array}\right\} N_\alpha +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} - a\tan\xi(\alpha-\varphi)\sin\alpha\cos\xi\sin\varphi - a\tan\xi(\alpha-\varphi)\cos\alpha\cos\xi\cos\varphi + \\ - (a\sin\varphi - a\sin\alpha)\cos\alpha\sin\xi + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin\alpha\sin\xi \end{array}\right\} D_{n\alpha} +$$

$$+\left\{\begin{array}{l} - a\tan\xi(\alpha-\varphi)\sin\xi\cos\xi\cos\alpha\sin\varphi - (a\sin\alpha - a\sin\varphi)\cos^2\xi\sin\varphi + \\ + a\tan\xi(\alpha-\varphi)\sin\xi\cos\xi\sin\alpha\cos\varphi + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\cos^2\xi\cos\varphi + \\ + (a\sin\varphi - a\sin\alpha)\sin^2\xi\sin\alpha + (a\cos\varphi - a\cos\alpha)\sin^2\xi\cos\alpha \end{array}\right\} D_{b\alpha} +$$

$$+\left\{ \cos^2\xi\sin\alpha\sin\varphi + \cos^2\xi\cos\alpha\cos\varphi + \sin^2\xi \right\} M_{w\alpha} +$$

$$+\left\{ \cos\xi\sin\varphi\cos\alpha - \cos\xi\sin\alpha\cos\varphi \right\} M_{n\alpha} +$$

$$+\left\{ -\sin\xi\cos\xi\sin\varphi\sin\alpha - \sin\xi\cos\xi\cos\varphi\cos\alpha + \sin\xi\cos\xi \right\} M_{b\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{W\varphi} = {} & a\sin\xi\cos\xi\left[-(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi) + 2 - 2\cos(\alpha-\varphi)\right] N_\alpha + \\ & + a\sin\xi\left[-(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi) + \sin(\alpha-\varphi)\right] D_{n\alpha} + \\ & + a\left[\sin^2\xi\left\{(\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi) - 1 + \cos(\alpha-\varphi)\right\} + \cos^2\xi\left\{1-\cos(\alpha-\varphi)\right\}\right] D_{b\alpha} + \\ & + \left[\sin^2\xi + \cos^2\xi\cos(\alpha-\varphi)\right] M_{w\alpha} + \\ & + \cos\xi\left[-\sin(\alpha-\varphi)\right] M_{n\alpha} + \\ & + \sin\xi\cos\xi\left[1-\cos(\alpha-\varphi)\right] \end{aligned}}$$

II.5 De elastische vervormingsenergie

We gaan nu de elastische vervormingsenergie bepalen die is opgehoopt in een stukje van de spiraalveer ten gevolge van de uitwendige belasting.

We bekijken het stukje, begrensd door $\varphi = 0$ en $\varphi = \alpha$

We willen de elastische inwendige energie van dit stukje uitdrukken in de medegrootheden op de plaats „α", om dan later „Castigliano" toe te passen.

We verwaarlozen de energie t.g.v. afschuiving door de dwarskrachten en de rek door de normaalkracht.

$$A_{tot} = \frac{1}{2EI_n}\int_s M_{n\varphi}^2\,ds + \frac{1}{2EI_b}\int_s M_{b\varphi}^2\,ds + \frac{1}{2GI_p}\int_s M_{W\varphi}^2\,ds$$

$$ds = d\varphi\sqrt{a^2 + a^2\tan^2\xi} = \frac{a\,d\varphi}{\cos\xi}$$

$$A_{tot} = A_{b_n} + A_{b_b} + A_W$$

$$A_{b_n} = \frac{a}{2EI_n\cos\xi}\int_0^\alpha M_{n\varphi}^2\,d\varphi$$

$$A_{b_b} = \frac{a}{2EI_b\cos\xi}\int_0^\alpha M_{b\varphi}^2\,d\varphi$$

$$A_W = \frac{a}{2GI_p\cos\xi}\int_0^\alpha M_{W\varphi}^2\,d\varphi$$

Om deze arbeiden te bepalen hebben we een aantal integralen nodig, die nu eerst worden berekend.

II.6 Berekening karakteristieke integralen

$$\int_0^\alpha 1\, d\varphi = \alpha$$

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1-\cos\alpha$$

$$\int_0^\alpha \cos(\alpha-\varphi)\, d\varphi = \sin\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\, d\varphi = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\, d\varphi = -1+\cos\alpha+\alpha\sin\alpha$$

$$\int_0^\alpha \sin^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/2\,\alpha - 1/4\sin 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha \cos^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/2\,\alpha + 1/4\sin 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/4 - 1/4\cos 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)\sin^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/8 + 1/4\,\alpha^2 - 1/4\,\alpha\sin 2\alpha - 1/8\cos 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)\cos^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = -1/8 + 1/4\,\alpha^2 + 1/4\,\alpha\sin 2\alpha + 1/8\cos 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\, d\varphi = -1/4\,\alpha\cos 2\alpha + 1/8\sin 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)^2\sin^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/6\,\alpha^3 + 1/8\sin 2\alpha - 1/4\,\alpha^2\sin 2\alpha - 1/4\,\alpha\cos 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)^2\cos^2(\alpha-\varphi)\, d\varphi = 1/6\,\alpha^3 - 1/8\sin 2\alpha + 1/4\,\alpha^2\sin 2\alpha + 1/4\,\alpha\cos 2\alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha-\varphi)^2\sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\, d\varphi = -1/8 + 1/4\,\alpha\sin 2\alpha + 1/8\cos 2\alpha - 1/4\,\alpha^2\cos 2\alpha$$

II.7 Berekening van de inwendige energie

De gedeelten van de inwendige energie :

A_{bn} , A_{bb} en A_w

worden geschreven in de volgende vorm:

$$A = \text{const} * \left[N_\alpha, D_{n\alpha}, D_{b\alpha}, M_{w\alpha}, M_{n\alpha}, M_{b\alpha}\right]^* \left[\quad Q \quad \right] * \begin{bmatrix} N_\alpha \\ D_{n\alpha} \\ D_{b\alpha} \\ M_{w\alpha} \\ M_{n\alpha} \\ M_{b\alpha} \end{bmatrix}$$

Hierin is Q een symmetrische (6 × 6) matrix; waarvan slechts de rechterbovenhelft zal worden neergeschreven.

Deze schrijfwijze is overzichtelijk en maakt later het differentiëren eenvoudig.

$$\left\{N_\alpha, D_{n\alpha}, D_{b\alpha}, M_{w\alpha}, M_{n\alpha}, M_{b\alpha}\right\} *$$

$a^2\sin^2\xi * \left[\tfrac{1}{6}\alpha^3+\tfrac{1}{2}\alpha + -\tfrac{5}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{3}{4}\alpha\cos 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$	$a^2\sin\xi\tan\xi * \left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\alpha^2 + -\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha + -\tfrac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha^2\cos 2\alpha\right]$	$a^2\sin^2\xi\tan\xi * \left[-\tfrac{1}{6}\alpha^3+\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha\right] + a^2\sin\xi\cos\xi * \left[\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin\xi\cos\xi * \left[-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{3}{8}\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin\xi * \left[-\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{4}\alpha^2 + +\tfrac{3}{8}\cos 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi * \left[\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$
	$a^2\tan^2\xi * \left[\tfrac{1}{6}\alpha^3+\tfrac{1}{8}\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$	$a^2\sin\xi\tan^2\xi * \left[-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{8}\cos 2\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^2\cos 2\alpha\right] + a^2\sin\xi * \left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\alpha^2 + -\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha - \tfrac{1}{8}\cos 2\alpha\right]$	$a\sin\xi * \left[-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}\alpha^2 + +\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{8}\cos 2\alpha\right]$	$a\tan\xi * \left[-\tfrac{1}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin\xi\tan\xi * \left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\alpha^2 + -\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{8}\cos 2\alpha\right]$
		$a^2\sin^2\xi\tan^2\xi * \left[\tfrac{1}{6}\alpha^3-\tfrac{1}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha+\tfrac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right] + a^2\cos^2\xi\left[\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right] + a^2\sin^2\xi\left[\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi * \left[-\tfrac{1}{8}\sin 2\alpha + +\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right] + a\cos^2\xi * \left[-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$	$a\sin\xi\tan\xi * \left[\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{4}\alpha^2-\tfrac{1}{8}\cos 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right] + a\cos\xi * \left[-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi\tan\xi * \left[\tfrac{1}{8}\sin 2\alpha + -\tfrac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right] + a\sin\xi\cos\xi * \left[\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$
			$\cos^2\xi * \left[\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$	$\cos\xi * \left[\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$	$\sin\xi\cos\xi * \left[-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$
				$\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha$	$\sin\xi * \left[-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$
					$\sin^2\xi\left[\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$

$$* \begin{Bmatrix} N_\alpha \\ D_{n\alpha} \\ D_{b\alpha} \\ M_{w\alpha} \\ M_{n\alpha} \\ M_{b\alpha} \end{Bmatrix}$$

$$A_{b_n} = \frac{a}{2EI_n\cos\xi} *$$

$$\left[N_\alpha, D_{n_\alpha}, D_{b_\alpha}, M_{W_\alpha}, M_{n_\alpha}, M_{b_\alpha}\right] *$$

$$A_{b_b} = \frac{a}{2EI_b \cos\xi} *$$

$a^2\sin^4\xi *$ $[\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha-4\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha+$ $+\frac{5}{8}\sin2\alpha-\frac{3}{4}\alpha\cos2\alpha-\frac{1}{4}\alpha^2\sin2\alpha]$ $a^2\cos^4\xi *$ $[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin2\alpha]$ $a^2\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[-3\alpha+6\sin\alpha-\frac{3}{4}\sin2\alpha+$ $-2\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos2\alpha]$	$a^2\sin^3\xi\tan\xi *$ $[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\alpha^2-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha+$ $+\frac{1}{4}\cos2\alpha+\frac{1}{2}\alpha\sin2\alpha+$ $-\frac{1}{4}\alpha^2\cos2\alpha]+$ $a^2\cos^3\xi *$ $[\frac{3}{4}-\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos2\alpha]+$ $a^2\sin^2\xi\cos\xi *$ $[-\frac{3}{2}+2\cos\alpha+\alpha\sin\alpha+$ $-\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin2\alpha]$	$a^2\sin^4\xi\tan\xi *$ $[-\frac{1}{6}\alpha^3+\sin\alpha-\alpha\cos\alpha+$ $-\frac{1}{4}\sin2\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos2\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2\sin2\alpha]$ $a^2\sin\xi\cos^3\xi *$ $[-3\alpha+4\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin2\alpha]$ $a^2\sin^3\xi\cos\xi *$ $[3\alpha-7\sin\alpha+3\alpha\cos\alpha+$ $+\frac{7}{8}\sin2\alpha-\frac{3}{4}\alpha\cos2\alpha]$	$a\sin^3\xi\cos\xi *$ $[-\frac{3}{2}\alpha+3\sin\alpha-\frac{3}{8}\sin2\alpha+$ $-\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]+$ $a\sin\xi\cos^3\xi *$ $[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin2\alpha]$	$a\sin^3\xi *$ $[-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2+\cos\alpha+$ $-\frac{3}{8}\cos2\alpha-\frac{1}{4}\alpha\sin2\alpha]$ $a\sin\xi\cos^2\xi *$ $[\frac{3}{4}-\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos2\alpha]$	$a\sin^4\xi *$ $[\frac{1}{2}\alpha-\sin\alpha+\frac{3}{8}\sin2\alpha+$ $-\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]$ $a\cos^4\xi *$ $[\alpha-\sin\alpha]$ $a\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[-\frac{3}{2}\alpha+3\sin\alpha$ $-\alpha\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha]$	N_α
	$a^2\sin^2\xi\tan^2\xi *$ $[\frac{1}{6}\alpha^3-\frac{1}{8}\sin2\alpha+\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha+$ $+\frac{1}{4}\alpha^2\sin2\alpha]$ $a^2\cos^2\xi *$ $[\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha]$ $a^2\sin^2\xi *$ $[\frac{1}{4}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos2\alpha]$	$a^2\sin^3\xi\tan^2\xi *$ $[\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\alpha\sin2\alpha-\frac{1}{8}\cos2\alpha+$ $+\frac{1}{4}\alpha^2\cos2\alpha]+$ $a^2\sin\xi\cos^2\xi *$ $[-\frac{3}{2}+2\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha]+$ $a^2\sin^3\xi *$ $[\frac{13}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2-2\cos\alpha+$ $-2\alpha\sin\alpha+\frac{3}{8}\cos2\alpha+\frac{3}{4}\alpha\sin2\alpha]$	$a\sin^3\xi *$ $[-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\alpha^2+\cos\alpha+$ $+\alpha\sin\alpha-\frac{1}{8}\cos2\alpha+$ $-\frac{1}{4}\alpha\sin2\alpha]+$ $a\sin\xi\cos^2\xi *$ $[\frac{3}{4}-\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos2\alpha]$	$a\sin^2\xi\tan\xi *$ $[\frac{1}{8}\sin2\alpha-\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]$ $a\sin\xi\cos\xi *$ $[\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha]$	$a\sin^3\xi\tan\xi *$ $[-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha\sin2\alpha+$ $+\frac{1}{8}\cos2\alpha]+$ $a\cos^3\xi *$ $[1-\cos\alpha]+$ $a\sin^2\xi\cos\xi *$ $[-\frac{3}{4}+\cos\alpha+\alpha\sin\alpha+$ $-\frac{1}{4}\cos2\alpha]$	D_{n_α}
		$a^2\sin^4\xi\tan^2\xi *$ $[\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{8}\sin2\alpha+$ $-\frac{1}{4}\alpha^2\sin2\alpha-\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]$ $a^2\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[6\alpha-8\sin\alpha+\sin2\alpha]$ $a^2\sin^4\xi *$ $[4\sin\alpha-4\alpha\cos\alpha+$ $-\frac{1}{2}\sin2\alpha+\alpha\cos2\alpha]$	$a\sin^4\xi *$ $[-\sin\alpha+\alpha\cos\alpha+$ $+\frac{1}{8}\sin2\alpha-\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]$ $a\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[-3\alpha+4\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin2\alpha]$	$a\sin^3\xi\tan\xi *$ $[-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha\sin2\alpha+$ $+\frac{1}{8}\cos2\alpha]+$ $a\sin^2\xi\cos\xi *$ $[-\frac{3}{2}+2\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha]$	$a\sin^4\xi\tan\xi *$ $[-\frac{1}{8}\sin2\alpha+\frac{1}{4}\alpha\cos2\alpha]$ $a\sin\xi\cos^3\xi *$ $[-2\alpha+2\sin\alpha]$ $a\sin^3\xi\cos\xi *$ $[\alpha-3\sin\alpha+$ $+\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha]$	D_{b_α}
			$\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin2\alpha]$	$\sin^2\xi\cos\xi *$ $[\frac{3}{4}-\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos2\alpha]$	$\sin^3\xi\cos\xi *$ $[-\frac{1}{2}\alpha+\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha]$ $\sin\xi\cos^3\xi *$ $[\alpha-\sin\alpha]$	M_{W_α}
				$\sin^2\xi *$ $[\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha]$	$\sin^3\xi *$ $[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos2\alpha]+$ $\sin\xi\cos^2\xi *$ $[1-\cos\alpha]$	M_{n_α}
					$\sin^4\xi *$ $[\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin2\alpha]+$ $\cos^4\xi *$ $[\alpha]+$ $\sin^2\xi\cos^2\xi *$ $[2\sin\alpha]$	M_{b_α}

$*$

$$A_w = \frac{a}{2 G I_p \cos\xi} * \left[N_\alpha, D_{n\alpha}, D_{b\alpha}, M_{w\alpha}, M_{n\alpha}, M_{b\alpha}\right] *$$

	$a^2\sin^2\xi\cos^2\xi * \left[\frac{1}{6}\alpha^3+6\alpha-12\sin\alpha+ +4\alpha\cos\alpha+\frac{13}{8}\sin 2\alpha+ -\frac{5}{4}\alpha\cos 2\alpha + -\frac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$	$a^2\sin^2\xi\cos\xi * \left[\frac{1}{4}\alpha^2+3-4\cos\alpha+ -2\alpha\sin\alpha+\cos 2\alpha+ +\alpha\sin 2\alpha + -\frac{1}{4}\alpha^2\cos 2\alpha\right]$	$a^2\sin^3\xi\cos\xi * \left[-\frac{1}{6}\alpha^3-3\alpha+7\sin\alpha-3\alpha\cos\alpha+ -\sin 2\alpha+\alpha\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$ $a^2\sin\xi\cos^3\xi * \left[3\alpha-5\sin\alpha+\alpha\cos\alpha+ +\frac{5}{8}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^3\xi\cos\xi * \left[2\alpha-3\sin\alpha+\alpha\cos\alpha\right]$ $a\sin\xi\cos^3\xi * \left[-\alpha+2\sin\alpha+ -\frac{5}{8}\sin 2\alpha+ +\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin\xi\cos^2\xi * \left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2+2\cos\alpha+ -\frac{5}{8}\cos 2\alpha + -\frac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi\cos^2\xi * \left[3\alpha-5\sin\alpha+\alpha\cos\alpha+ +\frac{5}{8}\sin 2\alpha + -\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$
		$a^2\sin^2\xi * \left[\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha-\frac{5}{8}\sin 2\alpha+ +\frac{3}{4}\alpha\cos 2\alpha + +\frac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$	$a^2\sin^3\xi * \left[-\frac{11}{8}+2\cos\alpha+ +\alpha\sin\alpha-\frac{5}{8}\cos 2\alpha+ -\frac{3}{4}\alpha\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\alpha^2\cos 2\alpha\right]$ $a^2\sin\xi\cos^2\xi * \left[\frac{13}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2-2\cos\alpha + -\alpha\sin\alpha+\frac{3}{8}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$	$a\sin^3\xi * \left[2-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha\right]+$ $a\sin\xi\cos^2\xi * \left[\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{3}{8}\cos 2\alpha+ -\frac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$	$a\sin\xi\cos\xi * \left[-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{8}\sin 2\alpha+ -\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi\cos\xi * \left[\frac{13}{8}+\frac{1}{4}\alpha^2-2\cos\alpha+ -\alpha\sin\alpha+\frac{3}{8}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$
			$a^2\sin^4\xi * \left[\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha-4\sin\alpha+2\alpha\cos\alpha+ +\frac{5}{8}\sin 2\alpha-\frac{3}{4}\alpha\cos 2\alpha-\frac{1}{4}\alpha^2\sin 2\alpha\right]$ $a^2\cos^4\xi * \left[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]+$ $a^2\cos^2\xi\sin^2\xi * \left[-3\alpha+6\sin\alpha-\frac{3}{4}\sin 2\alpha+ -2\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^4\xi * \left[-\alpha+2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha\right]$ $a\cos^4\xi * \left[-\frac{1}{2}\alpha+\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$ $a\sin^2\xi\cos^2\xi * \left[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{3}{8}\sin 2\alpha+ -\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^2\xi\cos\xi * \left[\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\alpha^2-\cos\alpha+ +\frac{3}{8}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\alpha\sin 2\alpha\right]$ $a\cos^3\xi * \left[-\frac{3}{4}+\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$	$a\sin^3\xi\cos\xi * \left[-\frac{3}{2}\alpha+3\sin\alpha-\alpha\cos\alpha -\frac{3}{8}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\alpha\cos 2\alpha\right]$ $a\sin\xi\cos^3\xi * \left[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+ +\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$
				$\sin^4\xi * \left[\alpha\right]$ $\cos^4\xi * \left[\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$ $\sin^2\xi\cos^2\xi * \left[2\sin\alpha\right]$	$\sin^2\xi\cos\xi * \left[-1+\cos\alpha\right]+$ $\cos^3\xi * \left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$	$\sin^3\xi\cos\xi * \left[\alpha-\sin\alpha\right]+$ $\sin\xi\cos^3\xi * \left[-\frac{1}{2}\alpha+\sin\alpha+ -\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$
					$\cos^2\xi * \left[\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$	$\sin\xi\cos^2\xi * \left[-\frac{3}{4}+\cos\alpha-\frac{1}{4}\cos 2\alpha\right]$
						$\sin^2\xi\cos^2\xi * \left[\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+ +\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]$

$*$

$$\begin{bmatrix} N_\alpha \\ D_{n\alpha} \\ D_{b\alpha} \\ M_{w\alpha} \\ M_{n\alpha} \\ M_{b\alpha} \end{bmatrix}$$

8 De verplaatsingen van punt B

u_α : verplaatsing in raaklijnrichting:

$$u_\alpha = \frac{\partial A}{\partial N_\alpha} \quad \text{componenten} \begin{cases} x : -u_\alpha \cos\xi \sin\alpha \\ y : u_\alpha \cos\xi \cos\alpha \\ z : u_\alpha \sin\xi \end{cases}$$

v_α : verplaatsing in normaalrichting:

$$v_\alpha = \frac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}} \quad \text{componenten} \begin{cases} x : -v_\alpha \cos\alpha \\ y : -v_\alpha \sin\alpha \\ z : 0 \end{cases}$$

w_α : verplaatsing in binormaalrichting:

$$w_\alpha = \frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}} \quad \text{componenten} \begin{cases} x : w_\alpha \sin\xi \sin\alpha \\ y : -w_\alpha \sin\xi \cos\alpha \\ z : w_\alpha \cos\xi \end{cases}$$

Totale verplaatsing in x richting:

$$X = -\frac{\partial A}{\partial N_\alpha} \cos\xi \sin\alpha - \frac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}} \cos\alpha + \frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}} \sin\xi \sin\alpha$$

Totale verplaatsing in y richting

$$\Gamma = \frac{\partial A}{\partial N_\alpha} \cos\xi \cos\alpha - \frac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}} \sin\alpha - \frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}} \sin\xi \cos\alpha$$

Totale verplaatsing in z-richting

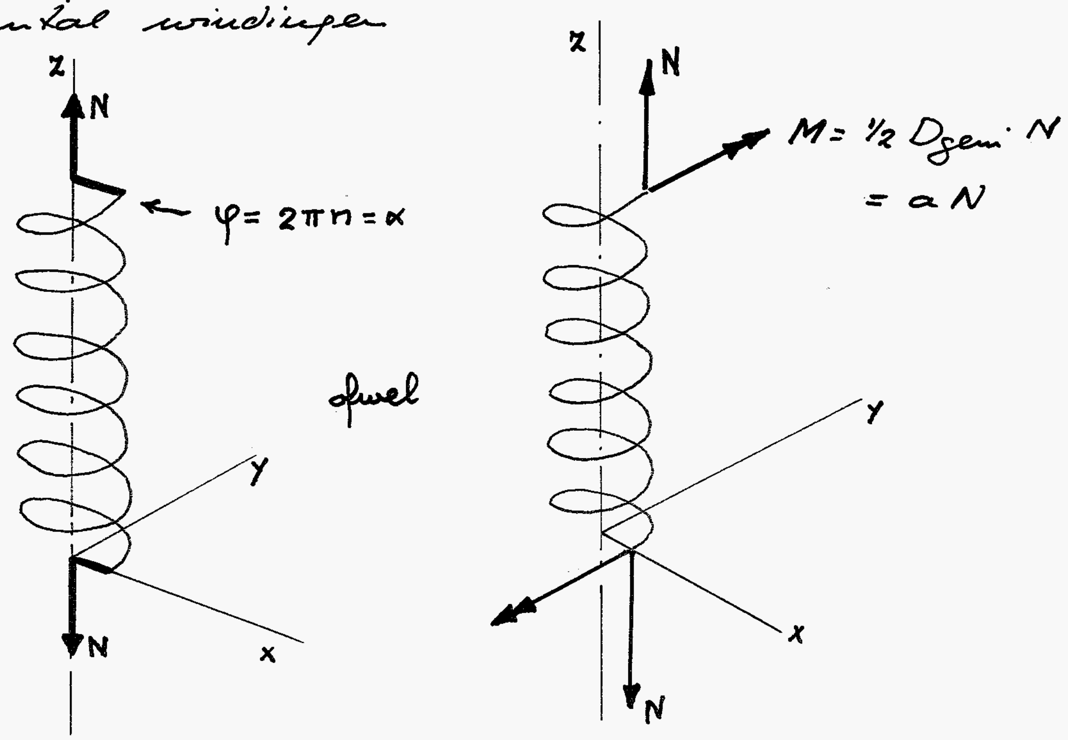
$$Z = \frac{\partial A}{\partial N_\alpha} \sin\xi + \frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}} \cos\xi$$

De hoekverdraaiingen zijn op analoge wijze te vinden maar op dit ogenblik zijn die minder interessant voor ons, omdat we ons tot verplaatsingen willen beperken.

II.9 De theorie toegepast op twee speciale belastingsgevallen

A Centraal op trek belaste veer.

We beperken ons tot een veer met een geheel aantal windingen



$$N_\alpha = N \sin\xi$$

$$D_{b\alpha} = N \cos\xi$$

$$D_{n\alpha} = 0$$

$$M_{w\alpha} = aN\cos\xi$$

$$M_{b\alpha} = -aN\sin\xi$$

$$M_{n\alpha} = 0$$

We willen de uitrekking van de veer weten, dus: Z

$$Z = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial N_\alpha}}_{\substack{\mathfrak{z}_1 \quad \mathfrak{z}_2 \quad \mathfrak{z}_3 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ A_{bn} \quad A_{bb} \quad A_w}} \sin\xi + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}}}_{\substack{\mathfrak{Z}_1 \quad \mathfrak{Z}_2 \quad \mathfrak{Z}_3 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ A_{bn} \quad A_{bb} \quad A_w}} \cos\xi$$

$\mathcal{Z}_1$

$$\frac{\partial A_{bn}}{\partial N_\alpha} = \frac{a}{EI_n \cos\xi} * \left\{ \begin{aligned} &\left[a^2 \sin^2\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \pi n + \tfrac{3}{2}\pi n\right)\right] N_\alpha \; + \\ &\left[a^2 \sin^2\xi \tan\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n\right) + a^2 \sin\xi \cos\xi \left(\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] D_{b\alpha} \; + \\ &\left[a \sin\xi \cos\xi \left(-\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] M_{w\alpha} \; + \\ &\left[a \sin^2\xi \left(\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] M_{b\alpha} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_n \cos\xi} \cdot \Big[\sin^3\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{5}{2}\pi n - \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right) + \sin\xi \cos^2\xi \left(\tfrac{3}{2}\pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right) \Big]$$

$$= 0$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{Z}_1 = 0$$

$\mathfrak{Z}_1$

$$\frac{\partial A_{bn}}{\partial D_{b\alpha}} = \frac{a}{EI_n \cos\xi} * \left\{ \begin{aligned} &\left[a^2 \sin^2\xi \tan\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n\right) + a^2 \sin\xi \cos\xi \left(\tfrac{3}{2}\pi n\right)\right] N_\alpha \; + \\ &\left[a^2 \sin^2\xi \tan^2\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a^2 \cos^2\xi (\pi n) + a^2 \sin^2\xi (-\pi n)\right] D_{b\alpha} \; + \\ &\left[a \sin^2\xi \left(\tfrac{1}{2}\pi n\right) + a \cos^2\xi (-\pi n)\right] M_{w\alpha} \; + \\ &\left[a \sin^2\xi \tan\xi \left(-\tfrac{1}{2}\pi n\right) + a \sin\xi \cos\xi (\pi n)\right] M_{b\alpha} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_n \cos\xi} \cdot \Big[\sin\xi \tan\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n + \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + \sin^2\xi \cos\xi \left(\tfrac{3}{2}\pi n - \pi n + \tfrac{1}{2}\pi n - \pi n\right) + \cos^3\xi \left(\pi n - \pi n\right) \Big]$$

$$= 0$$

$$\longrightarrow \quad \mathfrak{Z}_1 = 0$$

Dus:

$$\boxed{\mathcal{Z}_1 + \mathfrak{Z}_1 = 0}$$

$\mathfrak{z}_2$

$$\frac{\partial A_{bb}}{\partial N_\alpha} = \frac{a}{EI_b \cos\xi} * \begin{cases} \left[a^2 \sin^4\xi\left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + 3\pi n + 4\pi n - \tfrac{9}{2}\pi n\right) + a^2\cos^4\xi(3\pi n) + a^2\sin^2\xi\cos^2\xi(-6\pi n - 4\pi n + \pi n)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2\sin^4\xi\tan\xi\left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 2\pi n + \pi n\right) + a^2\sin\xi\cos^3\xi(-6\pi n) + a^2\sin^3\xi\cos\xi\left(6\pi n + 6\pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a\sin^3\xi\cos\xi\left(-3\pi n - 2\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a\sin\xi\cos^2\xi(3\pi n)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a\sin^4\xi\left(\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a\cos^4\xi(2\pi n) + a\sin^2\xi\cos^2\xi(-3\pi n - 2\pi n)\right] M_{b\alpha} \end{cases}$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_b\cos\xi}\Big[\sin^5\xi\left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{11}{2}\pi n - \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right) +$$
$$+ \cos^4\xi\sin\xi\left(3\pi n - 6\pi n + 3\pi n - 2\pi n\right) +$$
$$+ \sin^3\xi\cos^2\xi\left(-9\pi n + \tfrac{21}{2}\pi n - \tfrac{9}{2}\pi n + 5\pi n\right)\Big]$$

$$\longrightarrow \mathfrak{z}_2 = \frac{a^3 N}{EI_b}\cdot\frac{2\sin^6\xi - \cos^4\xi\sin^2\xi + \sin^4\xi\cos^2\xi}{\cos\xi}\cdot 2\pi n$$

$\mathfrak{Z}_2$

$$\frac{\partial A_{bb}}{\partial D_{b\alpha}} = \frac{a}{EI_b\cos\xi} * \begin{cases} \left[a^2\sin^4\xi\tan\xi\left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 2\pi n + \pi n\right) + a^2\sin\xi\cos^3\xi(-6\pi n) + \right. \\ \left. \qquad + a^2\sin^3\xi\cos\xi\left(6\pi n + 6\pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2\sin^4\xi\tan^2\xi\left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a^2\sin^2\xi\cos^2\xi(12\pi n) + a^2\sin^4\xi(-8\pi n + 2\pi n)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a\sin^4\xi\left(2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a\sin^2\xi\cos^2\xi(-6\pi n)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a\sin^4\xi\tan\xi\left(\tfrac{1}{2}\pi n\right) + a\sin\xi\cos^3\xi(-4\pi n) + a\sin^3\xi\cos\xi(2\pi n + 2\pi n)\right] M_{b\alpha} \end{cases}$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_b\cos\xi}\Big[\sin^5\xi\tan\xi\left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \pi n + \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \tfrac{1}{2}\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right) +$$
$$+ \sin^2\xi\cos^3\xi\left(-6\pi n + 12\pi n - 6\pi n + 4\pi n\right) +$$
$$+ \sin^4\xi\cos\xi\left(\tfrac{21}{2}\pi n - 6\pi n + \tfrac{3}{2}\pi n - 4\pi n\right)\Big]$$

$$\longrightarrow \mathfrak{Z}_2 = \frac{a^3 N}{EI_b}\cdot\frac{-\sin^6\xi + 2\sin^2\xi\cos^4\xi + \sin^4\xi\cos^2\xi}{\cos\xi}\cdot 2\pi n$$

$$\boxed{\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{Z}_2 = \frac{a^3 N}{EI_b}\cdot\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\cdot 2\pi n}$$

$\mathfrak{Z}_3$

$$\frac{\partial A_w}{\partial N_\alpha} = \frac{a}{G I_p \cos\xi} * \begin{cases} \left[a^2 \sin^2\xi \cos^2\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + 12\pi n + 8\pi n - \tfrac{5}{2}\pi n\right)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2 \sin^3\xi \cos\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 6\pi n + 2\pi n - 6\pi n\right) + a^2 \sin\xi \cos^3\xi \left(6\pi n + 2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a \sin^3\xi \cos\xi \left(4\pi n + 2\pi n\right) + a \sin\xi \cos^3\xi \left(-2\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a \sin^2\xi \cos^2\xi \left(6\pi n + 2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] M_{b\alpha} \end{cases}$$

$$= \frac{a^3 N}{G I_p \cos\xi} \left[\sin^3\xi \cos^2\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{35}{2}\pi n - \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 10\pi n + 6\pi n - \tfrac{15}{2}\pi n\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\xi \cos^4\xi \left(\tfrac{15}{2}\pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right)\right]$$

$$\rightarrow \mathfrak{Z}_3 = \frac{a^3 N}{G I_p} \left(3 \sin^4\xi \cos\xi + 3 \sin^2\xi \cos^3\xi\right) \cdot 2\pi n$$

$\mathfrak{D}_3$

$$\frac{\partial A_w}{\partial D_{b\alpha}} = \frac{a}{G I_p \cos\xi} * \begin{cases} \left[a^2 \sin^3\xi \cos\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 6\pi n - 6\pi n + 2\pi n\right) + a^2 \sin\xi \cos^3\xi \left(6\pi n + 2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2 \sin^4\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + 3\pi n + 4\pi n - \tfrac{3}{2}\pi n\right) + a^2 \cos^4\xi \left(3\pi n\right) + \right. \\ \qquad \left. + a^2 \cos^2\xi \sin^2\xi \left(-6\pi n - 4\pi n + \pi n\right)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a \sin^4\xi \left(-2\pi n - 2\pi n\right) + a \cos^4\xi \left(-\pi n\right) + a \sin^2\xi \cos^2\xi \left(3\pi n - \tfrac{1}{2}\pi n\right)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a \sin^3\xi \cos\xi \left(-3\pi n - 2\pi n + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a \sin\xi \cos^3\xi \left(3\pi n\right)\right] M_{b\alpha} \end{cases}$$

$$= \frac{a^3 N}{G I_p \cos\xi} \left[\sin^4\xi \cos\xi \left(-\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - 10\pi n + \tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n - 4\pi n + \tfrac{9}{2}\pi n\right) + \right.$$
$$+ \sin^2\xi \cos^3\xi \left(\tfrac{15}{2}\pi n - 9\pi n + \tfrac{5}{2}\pi n - 3\pi n\right) +$$
$$\left. + \cos^5\xi \left(3\pi n - \pi n\right)\right]$$

$$\rightarrow \mathfrak{D}_3 = \frac{a^3 N}{G I_p} \left(-2 \sin^4\xi \cos\xi - \sin^2\xi \cos^3\xi + \cos^5\xi\right) \cdot 2\pi n$$

$$\boxed{\mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{D}_3 = \frac{a^3 N}{G I_p} \cdot \cos\xi \cdot 2\pi n}$$

Voor de totale verplaatsing in z-richting: Z vinden we:

$$Z = z_1 + \mathfrak{z}_1 + z_2 + \mathfrak{z}_2 + z_3 + \mathfrak{z}_3$$

$$Z = \frac{a^3 N}{E I_b} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\cos \xi} \cdot 2\pi n + \frac{a^3 N}{G I_p} \cdot \cos \xi \cdot 2\pi n$$

$$\boxed{\frac{Z}{N} = a^3 \left\{ \frac{1}{E I_b} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\cos \xi} + \frac{1}{G I_p} \cos \xi \right\} \cdot 2\pi n}$$

Voor de meest voorkomende schroefveren geldt dat de hoek ξ klein is.

$$\tan \xi = \frac{\text{spoed}}{2\pi \cdot a}$$

Dit betekent dat de eerste term: $\frac{1}{E I_b} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\cos \xi}$ slechts een geringe bijdrage zal leveren bij de uitkomst van Z/N

Voor een ronde draaddoorsnede met draaddikte d geldt verder:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$I_b = \frac{\pi}{64} d^4$$

n: aantal windingen van de veer.

Behalve de uitrekking van de veer, willen we ook de verplaatsingen in x en y-richting weten.

De uitdrukking $\dfrac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}}$ is in dit verband interessant.

$$\underbrace{\dfrac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}}}_{\underset{\substack{\uparrow \\ A_{bn}}}{\mathcal{L}_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ A_{bb}}}{\mathcal{L}_2} + \underset{\substack{\uparrow \\ A_{w}}}{\mathcal{L}_3}}$$

$\mathcal{L}_1$

$$\frac{\partial A_{bn}}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{EI_n \cos\xi} * \left\{ \begin{array}{l} \left[a^2 \sin\xi \tan\xi \left(1/4 + \pi^2 n^2 - 1/4 + \pi^2 n^2\right)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2 \sin\xi \tan^2\xi \left(-\pi^2 n^2\right) + a^2 \sin\xi \left(\pi^2 n^2\right)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a \sin\xi \left(-\pi^2 n^2\right)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a \sin\xi \tan\xi \left(\pi^2 n^2\right)\right] M_{b\alpha} \end{array} \right.$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_n \cos\xi} \Big[\sin^2\xi \tan\xi \left(2\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2 - \pi^2 n^2\right) + $$
$$+ \sin\xi \cos\xi \left(\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2\right) \Big] = 0$$

$\mathcal{L}_1 = 0$

$\mathcal{L}_2$

$$\frac{\partial A_{bb}}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{EI_b \cos\xi} * \left\{ \begin{array}{l} \left[a^2 \sin^3\xi \tan\xi \left(\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2\right) + a^2 \cos^3\xi (0) + a^2 \sin^2\xi \cos\xi (0)\right] N_\alpha + \\ \left[a^2 \sin^3\xi \tan^2\xi \left(\pi^2 n^2\right) + a^2 \sin\xi \cos^2\xi (0) + a^2 \sin^3\xi \left(\pi^2 n^2\right)\right] D_{b\alpha} + \\ \left[a \sin^3\xi \left(-\pi^2 n^2\right) + a \sin\xi \cos^2\xi (0)\right] M_{w\alpha} + \\ \left[a \sin^3\xi \tan\xi \left(\pi^2 n^2\right) + a \cos^3\xi (0) + a \sin^2\xi \cos\xi (0)\right] M_{b\alpha} \end{array} \right.$$

$$= \frac{a^3 N}{EI_b \cos\xi} \left[\sin^4\xi \tan\xi \left(\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2\right) + \sin^3\xi \cos\xi \left(\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2\right) \right] = 0$$

$\mathcal{L}_2 = 0$

$\mathcal{L}_3$

$$\frac{\partial A_W}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{\delta I_p \cos\xi} * \begin{cases} [a^2 \sin^2\xi \cos\xi (\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2)] N_\alpha + \\ [a^2 \sin^3\xi (\pi^2 n^2) + a^2 \sin\xi \cos^2\xi (\pi^2 n^2)] D_{b\alpha} + \\ [a \sin^3\xi (0) + a \sin\xi \cos^2\xi (-\pi^2 n^2)] M_{w\alpha} + \\ [a \sin^2\xi \cos\xi (\pi^2 n^2)] M_{b\alpha} \end{cases}$$

$$= \frac{a^3 N}{\delta I_p \cos\xi} \left[\sin^3\xi \cos\xi (\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2) + \sin\xi \cos^3\xi (\pi^2 n^2 - \pi^2 n^2) \right] = 0$$

$$\mathcal{L}_3 = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = 0$$

Verder hebben we nodig:

$$\frac{\partial A}{\partial N_\alpha} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{\sin\xi} \quad \text{en} \quad \frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}} = \frac{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3}{\cos\xi}$$

De verplaatsing in x-richting: $\mathcal{X}$ wordt:

$$\mathcal{X} = -\frac{\cos\xi}{\sin\xi} \cdot \sin\alpha \cdot \underbrace{(Z_1 + Z_2 + Z_3)}_{0} + \frac{\sin\xi}{\cos\xi} \sin\alpha \underbrace{(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3)}_{0}$$

$$\longrightarrow \boxed{\mathcal{X} = 0}$$

(dit wil nog niet zeggen dat de afstand a (= straal van de cilinder waarop men de windingen gewonden kan denken) niet verandert. De as van de veer kan namelijk best evenwijdig zijn verschoven)

De verplaatsing in y-richting Γ wordt:

$$\Gamma = + \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\cos\alpha\,(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) - \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\alpha\,(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)$$

ofwel

$$\Gamma = \left(\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\gamma_2 - \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\vartheta_2\right) + \left(\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\gamma_3 - \frac{\sin\xi}{\cos\xi}\vartheta_3\right)$$

$$\Gamma = \frac{a^3N}{EI_b}\left[2\sin^5\xi - \cos^4\xi\sin\xi + \sin^3\xi\cos^2\xi + \frac{\sin^7\xi - 2\sin^3\xi\cos^4\xi - \sin^5\xi\cos^2\xi}{\cos^2\xi}\right]2\pi n +$$

$$+ \frac{a^3N}{\varrho I_p}\left[3\sin^3\xi\cos^2\xi + 3\sin\xi\cos^4\xi + 2\sin^5\xi + \sin^3\xi\cos^2\xi - \cos^4\xi\sin\xi\right]2\pi n$$

$$\Gamma = \frac{a^3N}{EI_b}\cdot 2\pi n\cdot \sin\xi(\tan^2\xi - 1) + \frac{a^3N}{\varrho I_p}\,2\pi n\cdot 2\sin\xi$$

$$\boxed{\frac{\Gamma}{N} = a^3\sin\xi\left(\frac{1}{EI_b}(\tan^2\xi-1) + \frac{1}{\varrho I_p}\cdot 2\right)\cdot 2\pi n}$$

Resumerend geldt voor de centraal op trek belaste veer:

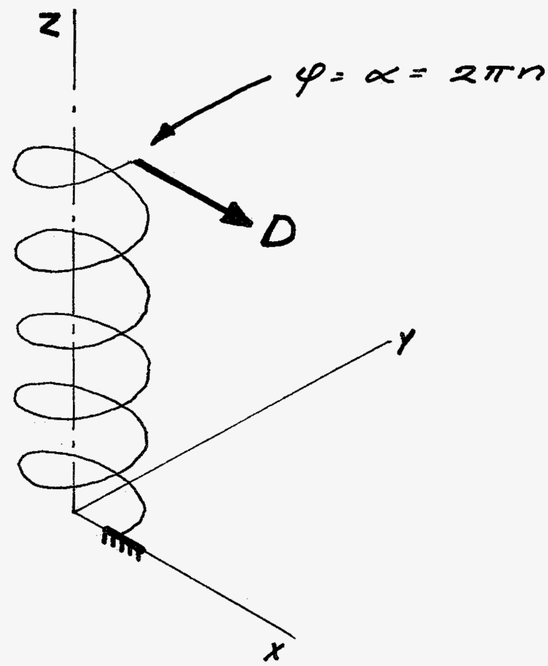
$$\frac{X}{N} = 0$$

$$\frac{\Gamma}{N} = a^3\sin\xi\left\{\frac{1}{EI_b}(\tan^2\xi-1) + \frac{1}{\varrho I_p}\cdot 2\right\}2\pi n$$

$$\frac{Z}{N} = a^3\left\{\frac{1}{EI_b}\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi} + \frac{1}{\varrho I_p}\cos\xi\right\}\cdot 2\pi n$$

B Door dwarskracht belaste veer.

We beperken ons tot een veer met een geheel aantal windingen.



$N_\alpha = 0$

$D_{b\alpha} = 0$

$D_{n\alpha} = -D$

$M_{w\alpha} = 0$

$M_{b\alpha} = 0$

$M_{n\alpha} = 0$

We willen de verplaatsing weten van het uiteinde in de richting van de kracht, dus in x-richting.

$$\chi = \underbrace{- \frac{\partial A}{\partial D_{n\alpha}}}_{\varkappa_1 \; \varkappa_2 \; \varkappa_3}$$

$$\begin{array}{ccc} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{bn} & A_{bb} & A_w \end{array}$$

$$\varkappa_1 \qquad \frac{\partial A_{bn}}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{EI_n \cos\xi} \cdot a^2 \tan^2\xi * \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \tfrac{1}{2}\pi n\right) \cdot D_{n\alpha}$$

$$\varkappa_1 = \frac{a^3 D}{EI_n} \cdot \frac{\sin^2\xi}{\cos^3\xi} \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \tfrac{1}{2}\pi n\right)$$

$$\varkappa_2 \qquad \frac{\partial A_{bb}}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{EI_b \cos\xi} \cdot \Big[a^2 \sin^2\xi \tan^2\xi \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + a^2 \cos^2\xi \,(\pi n) + a^2 \sin^2\xi \,(-\pi n) \Big] D_{n\alpha}$$

$$\varkappa_2 = \frac{a^3 D}{EI_b} \cdot \left\{ \frac{\sin^4\xi}{\cos^3\xi} \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + \cos\xi\,(\pi n) + \frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}(-\pi n) \right\}$$

$$\varkappa_3 \qquad \frac{\partial A_w}{\partial D_{n\alpha}} = \frac{a}{\mathcal{G} I_p \cos\xi} \cdot a^2 \sin^2\xi * \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \pi n + \tfrac{3}{2}\pi n\right) \cdot D_{n\alpha}$$

$$\varkappa_3 = \frac{a^3 D}{\mathcal{G} I_p} \cdot \frac{\sin^2\xi}{\cos\xi} \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{5}{2}\pi n\right)$$

$$\chi = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3$$

$$\boxed{\begin{aligned}\chi = a^3 D \Big[& \frac{1}{EI_n} \cdot \frac{\sin^2\xi}{\cos^3\xi} \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 - \tfrac{1}{2}\pi n\right) + \\ & + \frac{1}{EI_b} \cdot \left\{ \frac{\sin^4\xi}{\cos^3\xi}\left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{1}{2}\pi n\right) + \cos\xi(\pi n) + \frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}(-\pi n) \right\} + \\ & + \frac{1}{\mathcal{G} I_p} \cdot \frac{\sin^2\xi}{\cos\xi} \left(\tfrac{4}{3}\pi^3 n^3 + \tfrac{5}{2}\pi n\right) \Big]\end{aligned}}$$

Voor kleine waarden van ξ geldt:

$$\chi = a^3 D \cdot \frac{\pi \cdot n \cdot \cos\xi}{EI_b} \approx a^3 D \, \frac{\pi n}{EI_b}$$

Voor de verplaatsingen in y- en z-richting, resp. Γ en Z hebben we nog nodig:

$$\underbrace{\frac{\partial A}{\partial N_\alpha}}_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \quad \text{en} \quad \underbrace{\frac{\partial A}{\partial D_{b\alpha}}}_{\delta_1+\delta_2+\delta_3}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{bn} & A_{bb} & A_W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A_{bn} & A_{bb} & A_W \end{array}$$

$$\gamma_1 = \frac{a}{EI_n \cos\zeta}\left\{a^2 \sin\zeta \tan\zeta(\pi^2n^2+\pi^2n^2)\right\}\cdot(-D) = -\frac{a^3D}{EI_n}\cdot\tan^2\zeta\cdot 2\pi^2n^2$$

$$\gamma_2 = \frac{a}{EI_b\cos\zeta}\left\{a^2(0)\right\} = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{a}{\rho I_p \cos\zeta}\left\{a^2\sin^2\zeta\cos\zeta(0)\right\} = 0$$

$$\delta_1 = \frac{a}{EI_n\cos\zeta}\left\{a^2\sin\zeta\tan^2\zeta(-\pi^2n^2)+a^2\sin\zeta(\pi^2n^2)\right\}\cdot(-D) =$$

$$= -\frac{a^3D}{EI_n}(\tan^3\zeta-\tan\zeta)\,\pi^2n^2$$

$$\delta_2 = \frac{a}{EI_b\cos\zeta}\cdot\left\{a^2\sin^3\zeta\tan^2\zeta(\pi^2n^2)+a^2\sin^3\zeta(\pi^2n^2)\right\}(-D) =$$

$$= -\frac{a^3D}{EI_b}\cdot\tan^3\zeta\cdot\pi^2n^2$$

$$\delta_3 = \frac{a}{\rho I_p\cos\zeta}\left\{a^2\sin^3\zeta(\pi^2n^2)+a^2\sin\zeta\cos^2\zeta(\pi^2n^2)\right\}(-D) =$$

$$= -\frac{a^3D}{\rho I_p}\tan\zeta\cdot\pi^2n^2$$

De verplaatsingen Γ en Z zijn nu met behulp van de formules op blz 22 te bepalen

$$\Gamma = \gamma_1 \cos\zeta - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\sin\zeta =$$

$$= \frac{a^3 D}{EI_n}\left(-2\pi^2 n^2 \tan^2\zeta \cos\zeta + (\tan^2\zeta \sin\zeta - \tan\zeta \sin\zeta)\pi^2 n^2\right) +$$

$$+ \frac{a^3 D}{EI_b}\tan^3\zeta \sin\zeta\, \pi^2 n^2 + \frac{a^3 D}{\rho I_p}\tan\zeta \sin\zeta\, \pi^2 n^2$$

$$\boxed{\frac{\Gamma}{D} = a^3 \pi^2 n^2 \tan\zeta \sin\zeta \left[\frac{1}{EI_n}(\tan^2\zeta - 3) + \frac{1}{EI_b}\tan^2\zeta + \frac{1}{\rho I_p}\right]}$$

$$Z = \gamma_1 \sin\zeta + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\cos\zeta =$$

$$= \frac{a^3 D}{EI_n}\left(-2\pi^2 n^2 \tan^2\zeta \sin\zeta - (\tan^3\zeta \cos\zeta - \tan\zeta \cos\zeta)\pi^2 n^2\right) +$$

$$- \frac{a^3 D}{EI_b}\tan^3\zeta \cos\zeta\, \pi^2 n^2 - \frac{a^3 D}{\rho I_p}\tan\zeta \cos\zeta\, \pi^2 n^2$$

$$\boxed{\frac{Z}{D} = a^3 \pi^2 n^2 \sin\zeta \left[\frac{1}{EI_n}(1 - 3\tan^2\zeta) - \frac{1}{EI_b}\tan^2\zeta - \frac{1}{\rho I_p}\right]}$$

Résumerend geldt voor de door een dwarskracht belaste veer:

$$\frac{X}{D} = a^3 \pi n \left[\frac{1}{EI_n}\cdot\frac{\sin^2\zeta}{\cos^3\zeta}\left(\tfrac{4}{3}\pi^2 n^2 - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI_b}\left\{\frac{\sin^4\zeta}{\cos^3\zeta}\left(\tfrac{4}{3}\pi^2 n^2 + \tfrac{1}{2}\right) + \cos\zeta - \frac{\sin^2\zeta}{\cos\zeta}\right\} + \right.$$

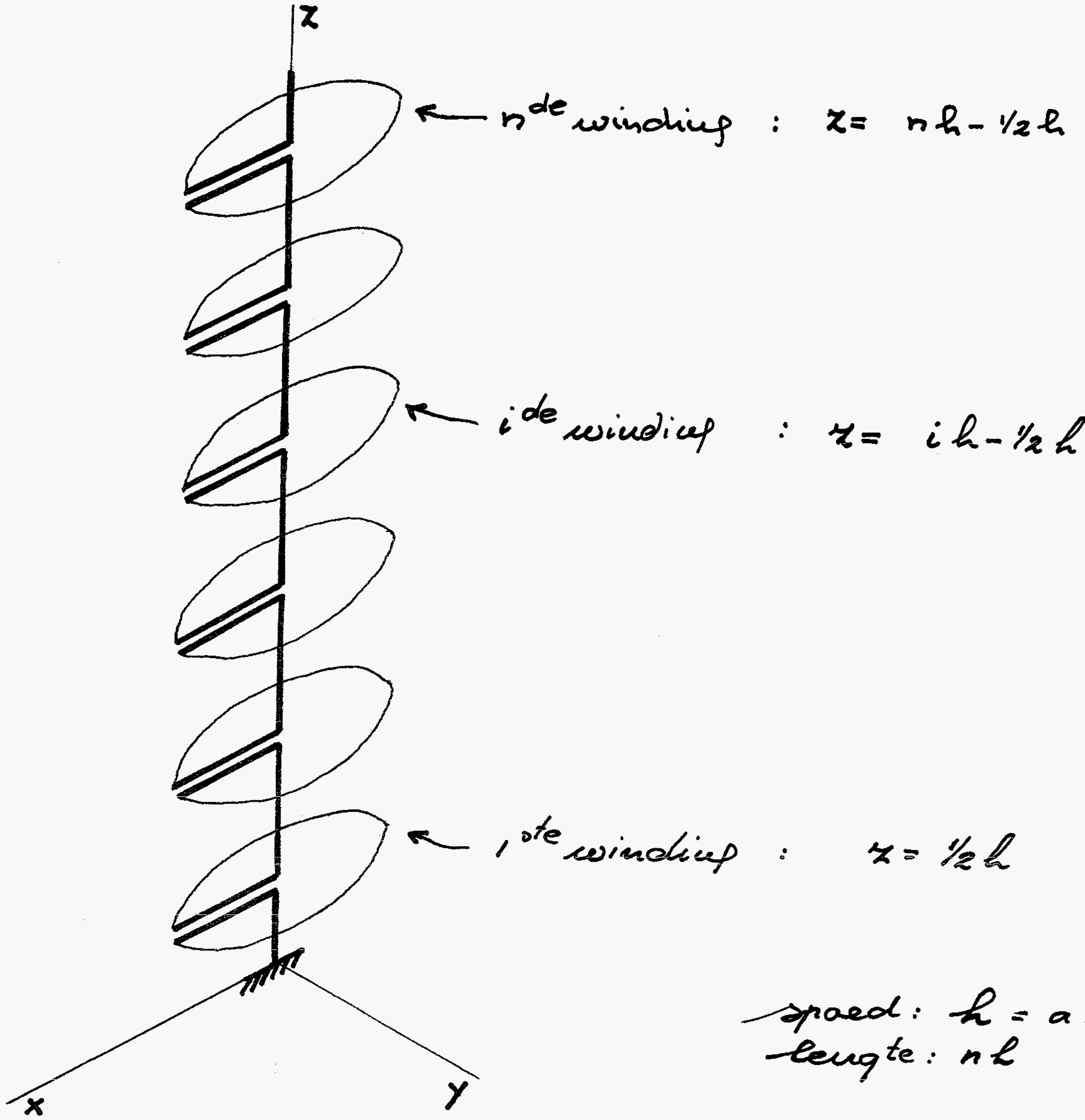
$$\left. + \frac{1}{\rho I_p}\frac{\sin^2\zeta}{\cos\zeta}\left(\tfrac{4}{3}\pi^2 n^2 + \tfrac{5}{2}\right)\right]$$

$$\frac{\Gamma}{D} = a^3 \pi^2 n^2 \tan\zeta \sin\zeta \left[\frac{1}{EI_n}(\tan^2\zeta - 3) + \frac{1}{EI_b}\tan^2\zeta + \frac{1}{\rho I_p}\right]$$

$$\frac{Z}{D} = a^3 \pi^2 n^2 \sin\zeta \left[\frac{1}{EI_n}(1 - 3\tan^2\zeta) - \frac{1}{EI_b}\tan^2\zeta - \frac{1}{\rho I_p}\right]$$

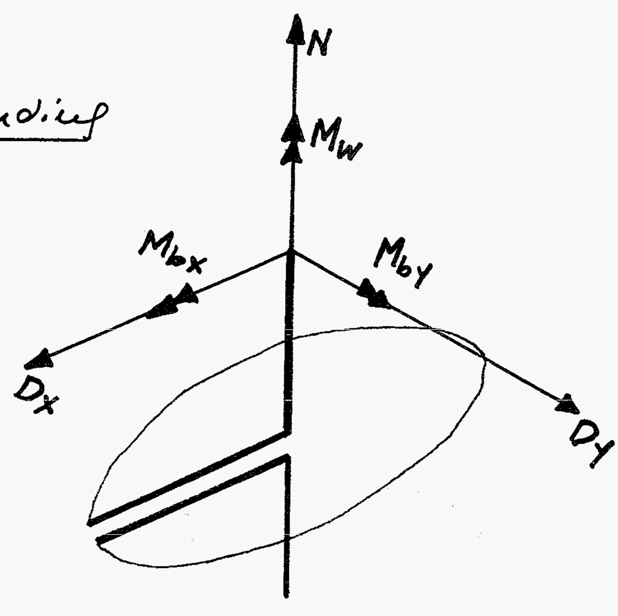
III. Een benaderingsmethode

Beschouw de veer als een lichaam met vlakke windingen en ertussen starre tussenstukjes.

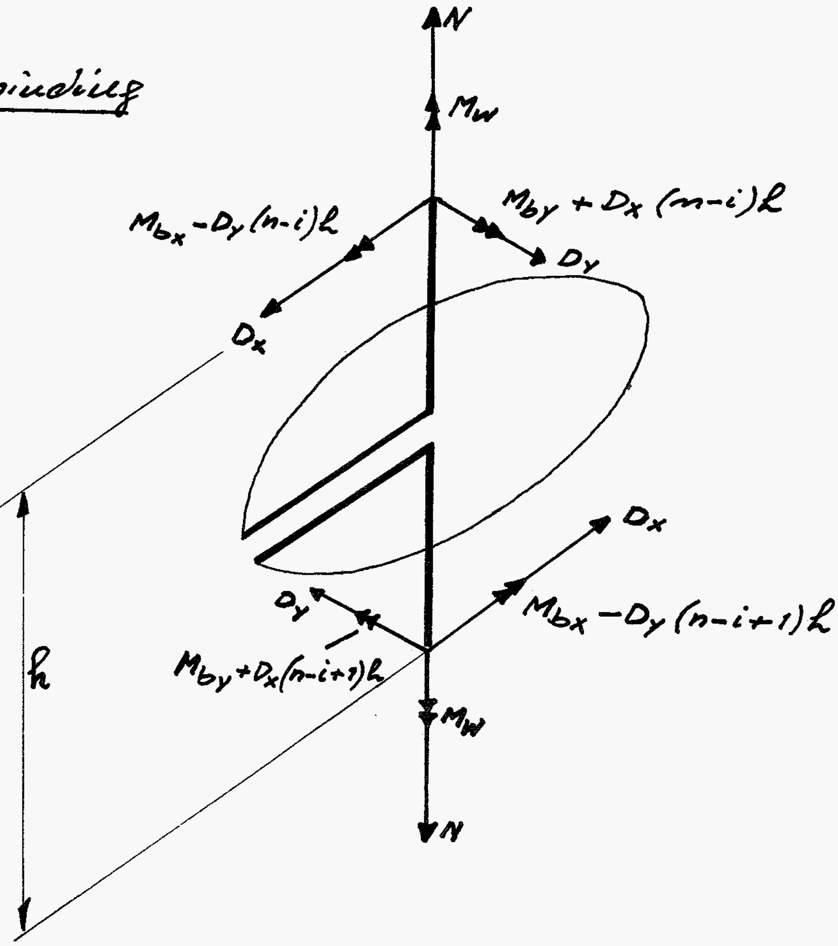


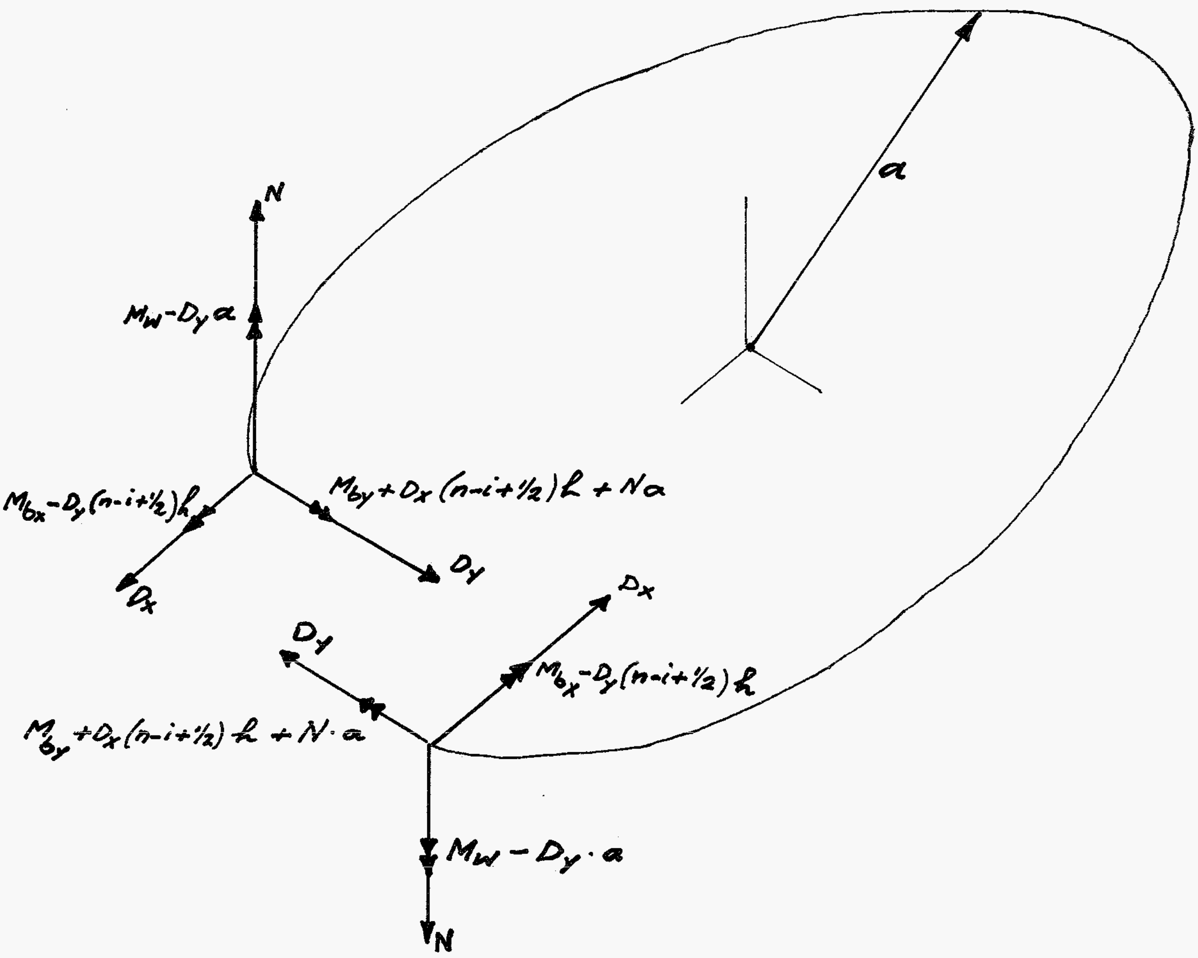
spoed: $h = a \tan\xi$
lengte: nh

n^{de} winding

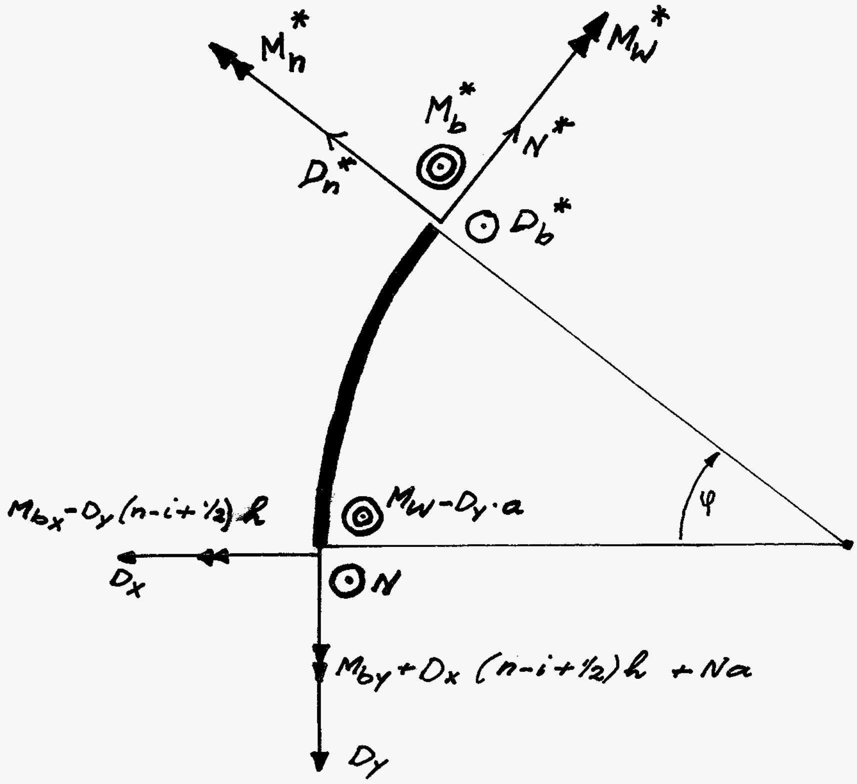


i^de^ winding


N
M_w
$M_{bx} - D_y(n-i)h$
$M_{by} + D_x(n-i)h$
D_y
D_x
D_x
D_y
$M_{bx} - D_y(n-i+1)h$
$M_{by} + D_x(n-i+1)h$
h
M_w
N


a
N
$M_w - D_y a$
$M_{bx} - D_y(n-i+1/2)h$
$M_{by} + D_x(n-i+1/2)h + Na$
D_x
D_y
D_x
D_y
$M_{bx} - D_y(n-i+1/2)h$
$M_{by} + D_x(n-i+1/2)h + N \cdot a$
$M_w - D_y \cdot a$
N

Stukje „$a\varphi$" uit de i^{de} winding



Het evenwicht levert:

$$M_n^* + \left(M_{bx} - D_y(n-i+½)\right)\cos\varphi - \left\{M_{by} + D_x(n-i+½)h + Na\right\}\sin\varphi + Na\sin\varphi = 0$$

$$M_n^* = \left\{M_{by} + D_x(n-i+½)h\right\}\sin\varphi - \left\{M_{bx} - D_y(n-i+½)h\right\}\cos\varphi$$

$$M_w^* - \left(M_{bx} - D_y(n-i+½)h\right)\sin\varphi - \left(M_{by} + D_x(n-i+½)h + Na\right)\cos\varphi - Na(1-\cos\varphi) = 0$$

$$M_w^* = \left\{M_{bx} - D_y(n-i+½)h\right\}\sin\varphi + \left\{M_{by} + D_x(n-i+½)h\right\}\cos\varphi + Na$$

$$M_b^* + M_w - D_y \cdot a - D_x \cdot a\sin\varphi + D_y a(1-\cos\varphi) = 0$$

$$M_b^* = -M_w + D_x \cdot a\sin\varphi + D_y \cdot a\cos\varphi$$

De inwendige energie in de i^{de} winding.

tgv M_n^* :

$$A_{n_i} = \frac{a\pi}{2EI_n}\left[\left\{M_{by} + D_x(n-i+1/2)l\right\}^2 + \left\{M_{bx} - D_y(n-i+1/2)l\right\}^2\right]$$

tgv M_w^*

$$A_{w_i} = \frac{a\pi}{2 g I_p}\left[\left\{M_{bx} - D_y(n-i+1/2)l\right\}^2 + \left\{M_{by} + D_x(n-i+1/2)l\right\}^2 + 2N^2a^2\right]$$

tgv M_b^*

$$A_{b_i} = \frac{a\pi}{2EI_b}\left[2M_w^2 + a^2D_x^2 + a^2D_y^2\right]$$

De totale inwendige energie in de veer:

$$\boxed{A = \frac{a\pi}{2}\left(\frac{1}{EI_n} + \frac{1}{gI_p}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[M_{bx} - D_y(n-i+1/2)l\right]^2 + \left[M_{by} + D_x(n-i+1/2)l\right]^2\right\}\right] + \frac{a^3\pi}{gI_p}\cdot n\cdot N^2 + \frac{a\pi n}{2EI_b}\left[2M_w^2 + a^2D_x^2 + a^2D_y^2\right]}$$

Door toepassing van de stelling van Castigliano kunnen weer de verplaatsingen gevonden worden.

We doen dit voor de twee, reeds eerder uitgewerkte voorbeelden.

A Centraal op trek belaste veer

$N = N$

$D_x = D_y = M_{bx} = M_{by} = M_w = 0$

$$Z = \frac{\partial A}{\partial N} = N \cdot \frac{a^3 \pi}{G I_p} \cdot n \cdot 2 = \frac{a^3 \cdot 2\pi n}{G I_p} \cdot N$$

$$X = \frac{\partial A}{\partial D_x} = 0$$

$$\Gamma = \frac{\partial A}{\partial D_y} = 0$$

want D_x en D_y zijn in de uitdrukking voor de inwendige energie nergens aan N gekoppeld.

Resulterend geldt voor de centraal op trek belaste veer:

$$\boxed{\frac{X}{N} = 0 \qquad \frac{\Gamma}{N} = 0 \qquad \frac{Z}{N} = \frac{a^3 2\pi n}{G I_p}}$$

B Door dwarskracht belaste veer

$$D_x = D$$

$$D_y = N = M_{bx} = M_{by} = M_W = 0$$

$$\chi = \frac{\partial A}{\partial D_x} = \frac{a\pi}{2}\left(\frac{1}{EI_n} + \frac{1}{\rho I_p}\right)\sum_{i=1}^{n} 2(n-i+1/2)^2 h^2 D_x + \frac{a^3\pi n}{EI_b} D_x =$$

$$= \left\{4\pi^3 \tan^2\xi \left(\frac{1}{EI_n} + \frac{1}{\rho I_p}\right)\sum_{i=1}^{n}(n-i+1/2)^2 + \frac{\pi n}{EI_b}\right\} a^3 D$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1/2)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(n^2+i^2+1/4-2ni-i+n\right) =$$

$$= n^3+n^2+1/4\,n + \sum_{i=1}^{n} i^2 - (2n+1)\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= n^3+n^2+1/4\,n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= n^3+n^2+1/4\,n - 1/3(n^2+n)(2n+1) = 1/3\,n^3 - 1/12\,n$$

$$\boxed{\chi = \left[4\pi^3 \tan^2\xi\left(\frac{1}{EI_n} + \frac{1}{\rho I_p}\right)\left(1/3\,n^3 - 1/12\,n\right) + \frac{\pi n}{EI_b}\right] a^3 D}$$

Voor kleine ξ geldt: $\chi \approx a^3 D \dfrac{\pi n}{EI_b}$

$$\Gamma = \frac{\partial A}{\partial D_y} = 0$$

$$\mathcal{Z} = \frac{\partial A}{\partial N} = 0$$

In de formule voor de inwendige arbeid zijn N en D_y nergens aan D_x gekoppeld.

Resumerend geldt voor de door een dwarskracht belaste veer:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathcal{X}}{D} &= a^3 \pi n \left\{ \tan^2 \xi \left(\frac{1}{EI_n} + \frac{1}{\beta I_p} \right) \left(\tfrac{1}{3} n^2 - \tfrac{1}{12} \right) + \frac{1}{EI_b} \right\} \\ \frac{\Gamma}{D} &= 0 \\ \frac{\mathcal{Z}}{D} &= 0 \end{aligned}}$$

IV Vergelijking van beide methodes

De resultaten van de „exacte" methode en de benaderingsmethode zullen met elkaar worden vergeleken voor de uitgewerkte gevallen.

A Centraal op trek belaste veer

$\frac{X}{N}$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{X}{N}\right)_{exact} &= 0\\ \left(\frac{X}{N}\right)_{ben.} &= 0\end{aligned}\right\}\text{ gelijke resultaten voor } \frac{X}{N}$$

$\frac{\Gamma}{N}$

$$\left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{exact} = \frac{a^3\,2\pi n}{GI_p}\left\{\sin\xi\left[2+\frac{GI_p}{EI_b}\left(\tan^2\xi-1\right)\right]\right\}$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{2\pi n\, a^3}{GI_p}$$

ε

$\frac{GI_p}{EI_b}$ \ ξ	0°	5°	10°	15°	20°	30°	45°
0,4	0,0000	0,1398	0,2799	0,4215	0,5653	0,8667	1,4142
0,6	0,0000	0,1225	0,2463	0,3735	0,5060	0,8000	1,4142
0,7	0,0000	0,1138	0,2295	0,3494	0,4763	0,7667	1,4142
0,8	0,0000	0,1052	0,2126	0,3254	0,4467	0,7333	1,4142
0,9	0,0000	0,0965	0,1958	0,3014	0,4170	0,7000	1,4142
1,0	0,0000	0,0879	0,1790	0,2774	0,3873	0,6667	1,4142
1,1	0,0000	0,0792	0,1622	0,2534	0,3576	0,6333	1,4142
1,2	0,0000	0,0706	0,1454	0,2293	0,3280	0,6000	1,4142

De waarden voor $\frac{G I_p}{E I_b}$ zoals die in de tabel op de vorige bladzijde voorkomen beginnen bij 0,4 en zijn rondom 0,8 gekozen om de volgende overweging:

$$I_p > I_b$$

$$G I_p > G I_b \approx 0{,}4\, E I_b \longrightarrow \frac{G I_p}{E I_b} > 0{,}4$$

Voor een cirkelvormige draaddoorsnede, die het meest voorkomt, en voor $\nu = 0{,}3$ geldt:

$$\frac{G I_p}{E I_b} = \frac{\frac{E}{2(1+0.3)} \cdot 2 I_b}{E \cdot I_b} = \frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}8$$

De benaderingsmethode gaf als resultaat:

$$\left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{ben} = 0$$

Bij een normaalvoorkomende schroefveer:

- cirkelvormige draaddoorsnede
- $\nu = 0{,}3$
- kleine waarde van ξ (bv $5°$)

zien we dat ε ongeveer 0,1 bedraagt.

Kijkend naar de resultaten, die voor Z worden gevonden zien we dat dan ongeveer geldt:

$$\left(\frac{\Gamma}{Z}\right)_{ex} = 0{,}1$$

terwijl de benaderingsmethode 0 als resultaat geeft.
Dit is dus een onvolkomenheid van de benaderingsmethode.

$\frac{Z}{N}$

$$\left(\frac{Z}{N}\right)_{exact} = \frac{2\pi n a^3}{GI_p}\left\{\cos\xi + \frac{GI_p}{EI_n}\,\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\right\} = \alpha \cdot \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$$

$$\left(\frac{Z}{N}\right)_{ben} = \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$$

α

$\frac{GI_p}{EI_b}$ \ ξ	0°	5°	10°	15°	20°	30°	45°
0,4	1,0000	0,9993	0,9970	0,9936	0,9895	0,9815	0,9899
0,6	1,0000	1,0008	1,0032	1,0075	1,0144	1,0392	1,1314
0,7	1,0000	1,0015	1,0062	1,0144	1,0268	1,0681	1,2021
0,8	1,0000	1,0023	1,0093	1,0214	1,0393	1,0969	1,2728
0,9	1,0000	1,0031	1,0123	1,0283	1,0517	1,1258	1,3435
1,0	1,0000	1,0038	1,0154	1,0352	1,0642	1,1547	1,4142
1,1	1,0000	1,0046	1,0185	1,0421	1,0766	1,1835	1,4849
1,2	1,0000	1,0054	1,0215	1,0491	1,0891	1,2124	1,5556

Voor normaal voorkomende schroefveren wijkt de waarde van α slechts zeer weinig af van 1. Dit betekent dat de benaderingstheorie voor de uitrekking van normaal voorkomende veren, die centraal op trek zijn belast een voldoende nauwkeurig resultaat geeft.

B Door dwarskracht belaste veer

Beschouwing van de resultaten voor $\frac{X}{D}$, $\frac{\Gamma}{D}$ en $\frac{Z}{D}$ op blz 34 en blz 41 leert ons dat het een onbegonnen werk is om deze resultaten even algemeen als bij de centraal op trek belaste veer te vergelijken, omdat het aantal vrijheidsgraden groter is.
We moeten ons beperken tot een „speciaal" geval nl:

ronde draaddoorsnede.
$\nu = 0{,}3$

$\frac{X}{D}$

$$\left(\frac{X}{D}\right)_{ex} = \frac{a^3\pi n}{EI_b}\left[\frac{EI_b}{EI_n}\cdot\frac{\sin^2\xi}{\cos^3\xi}\left(\frac{4}{3}\pi^2n^2-\frac{1}{2}\right)+\left\{\frac{\sin^4\xi}{\cos^3\xi}\left(\frac{4}{3}\pi^2n^2+\frac{1}{2}\right)+\cos\xi-\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{EI_b}{\rho I_p}\;\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\left(\frac{4}{3}\pi^2n^2+\frac{5}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{a^3\pi n}{EI_b}\left[\frac{4}{3}\pi^2n^2\cdot\frac{\sin^2\xi+\sin^4\xi}{\cos^3\xi}-\frac{3}{2}\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}+\cos\xi+1{,}3\cdot\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\left(\frac{4}{3}\pi^2n^2+\frac{5}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{a^3\pi n}{EI_b}\underbrace{\left[\cos\xi+\frac{4}{3}\pi^2n^2\cdot\frac{\sin^2\xi+\sin^4\xi+1{,}3\sin^2\xi\cos^2\xi}{\cos^3\xi}+\frac{7}{4}\frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}\right]}_{\beta_{ex}}=$$

$$=\beta_{ex}\frac{a^3\pi n}{EI_b}$$

$$\left(\frac{X}{D}\right)_{ben}=\frac{a^3\pi n}{EI_b}\left[1+\tan^2\xi\left(\frac{EI_b}{EI_n}+\frac{EI_b}{\rho I_p}\right)\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{12}\right)4\pi^2\right]$$

$$=\frac{a^3\pi n}{EI_b}\underbrace{\left[1+\;2{,}3\cdot\tan^2\xi\cdot\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{12}\right)4\pi^2\right]}_{\beta_{ben}}=$$

$$=\beta_{ben}\cdot\frac{a^3\pi n}{EI_b}$$

$$\frac{\beta_{ex.}}{\beta_{ben.}}$$

n \ ξ	0°	5°	10°	15°	20°	30°	45°
1	1,0000 / 1,0000	1.2421 / 1,1738	1,9896 / 1,6841	3,3176 / 2,6291	5,3585 / 4,0007	12,6413 / 8,5662	41,9993 / 23,6987
2	1,0000 / 1.0000	1.9397 / 1,8689	4.8432 / 4,4203	10,0088 / 9,1455	17,9613 / 16,0375	46,4517 / 38,8312	162,1635 / 114,4937
4	1,0000 / 1.0000	4,7302 / 4,6495	16,2576 / 15,3654	36,7735 / 32,2110	68,3728 / 64,1573	181,6934 / 159,8912	642,8206 / 477,6737
8	1,0000 / 1,0000	15.8920 / 15,7717	61.9155 / 59,1459	143,8323 / 139,4732	270,0187 / 256,6368	722,6598 / 644,1311	2562,4487 / 1930,3937
12	1,0000 / 1,0000	34,4950 / 34,3087	138,0118 / 132,1132	322.2635 / 313,2434	606,0951 / 577,4359	1624,2706 / 1451,1977	5769,8289 / 4351,5935
20	1.0000 / 1,0000	94,0246 / 93,6271	381,5202 / 365,6087	893,2436 / 869,3082	1681,5397 / 1603,9930	4509,4252 / 4033,8106	16023,8456 / 12099,4332
30	1,0000 / 1,0000	210,2933 / 209,4834	857,1226 / 821,6546	2008,4390 / 1955,3723	3782.0174 / 3608,9873	10144.4927 / 9077,9764	36051,2220 / 27231,9325
40	1,0000 / 1,0000	373,0696 / 371,6822	1522,9659 / 1460,1189	3569,7125 / 3475,8621	6722,6862 / 6415,9794	18033,5872 / 16139,8085	64089,5488 / 48417,4315
60	1,0000 / 1,0000	838,1446 / 835,1074	3425,3753 / 3284,3025	8030,4941 / 7820,1185	15124,5970 / 14435,9568	40573,8572 / 36316,4717	144199,0542 / 108947,4287
100	1,0000 / 1,0000	2326,3846 / 2318,0681	9513,0854 / 9121,6900	22304,9952 / 21721,7390	42010,7115 / 40099,8845	112702,7212 / 100881,7939	400549,4715 / 302643,4198

Voor schroefveren met een kleine waarde van ξ en meerdere windingen zien we dat de benaderingsmethode heel goed aansluit bij de exacte methode.
Deze conclusie is echter slechts betrokken op veren met ronde draaddoorsnede en $\nu = 0,3$, maar is waarschijnlijk toch wel te generaliseren.
In hoeverre dit geldt zal niet verder worden nagegaan.

$$\frac{\Gamma}{D}$$

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{ex} = \frac{a^3\pi n}{EI_b}\left\{\pi n \tan\xi \sin\xi\left[\tan^2\xi + \frac{EI_b}{EI_n}(\tan^2\xi - 3) + \frac{EI_b}{\beta EI_p}\right]\right\}$$

$$= \frac{a^3\pi n}{EI_b}\cdot\left\{\pi n \tan\xi\sin\xi \cdot \left[\tan^2\xi + \tan^2\xi - 3 + 1{,}3\right]\right\}$$

$$= \frac{a^3\pi n}{EI_b}\underbrace{\left\{\pi n\left(2\tan^3\xi\sin\xi - 1{,}7\cdot\tan\xi\sin\xi\right)\right\}}_{(\delta_\Gamma)_{ex}}$$

ξ	$0°$	$5°$	$10°$	$15°$	$20°$	$30°$	$45°$
δ_Γ/n	0,0000	-0,0404	-0,1575	-0,3390	-0,5612	-0,9370	0.6664

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{ben} = 0$$

Voor een ordinaire veer: $\left.\begin{array}{l}\xi = 5° \\ n = 20 \text{ windingen}\end{array}\right\}$

geldt: $(\delta_\Gamma)_{ex} = -20\cdot 0{,}0404 = -0{,}8080$

$$\left(\frac{\Gamma}{\chi}\right)_{ex} = \frac{(\delta_\Gamma)_{ex}}{\beta_{ex}} = \frac{-0{,}8080}{94{,}0246} \approx -1/100$$

De verplaatsing Γ is slechts een fractie van de verplaatsing χ.
De benaderingsmethode gaf evenwel $\Gamma = 0$ als resultaat.
Deze onvolkomenheid zal echter geen afbreuk doen aan de waarde van de gevolgde benaderingsmethode, wanneer deze wordt toegepast op gangbare schroefveren.

$\frac{Z}{D}$

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{ex} = \frac{a^3\pi n}{EI_b}\left\{\pi n \sin\xi\left[-\tan^2\xi - \frac{EI_b}{8I_p} + \frac{EI_b}{EI_n}\left(1-3\tan^2\xi\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{a^3\pi n}{EI_b}\left\{\underbrace{\pi n\left(-0{,}3 - 4\tan^2\xi\right)\sin\xi}_{(\delta_Z)_{ex}}\right\}$$

ξ	0°	5°	10°	15°	20°	30°	45°
δ_Z/n	0,0000	-0,0906	-0,2314	-0,4773	-0,8917	-2,5659	-9,5518

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{ben} = 0$$

Voor dezelfde ordinaire veer als op de vorige blz geldt:

$$(\delta_Z)_{ex} = -20 \cdot 0{,}0906 = -1{,}8120$$

$$\left(\frac{Z}{X}\right)_{ex} = \frac{(\delta_Z)_{ex}}{\beta_{ex}} = \frac{-1{,}8120}{94{,}0246} \approx \frac{-1}{50}$$

Ook deze verplaatsing (Z) is klein ten opzichte van Γ en we vinden het resultaat van de benaderingsmethode voor gangbare schroefveren voldoende nauwkeurig.

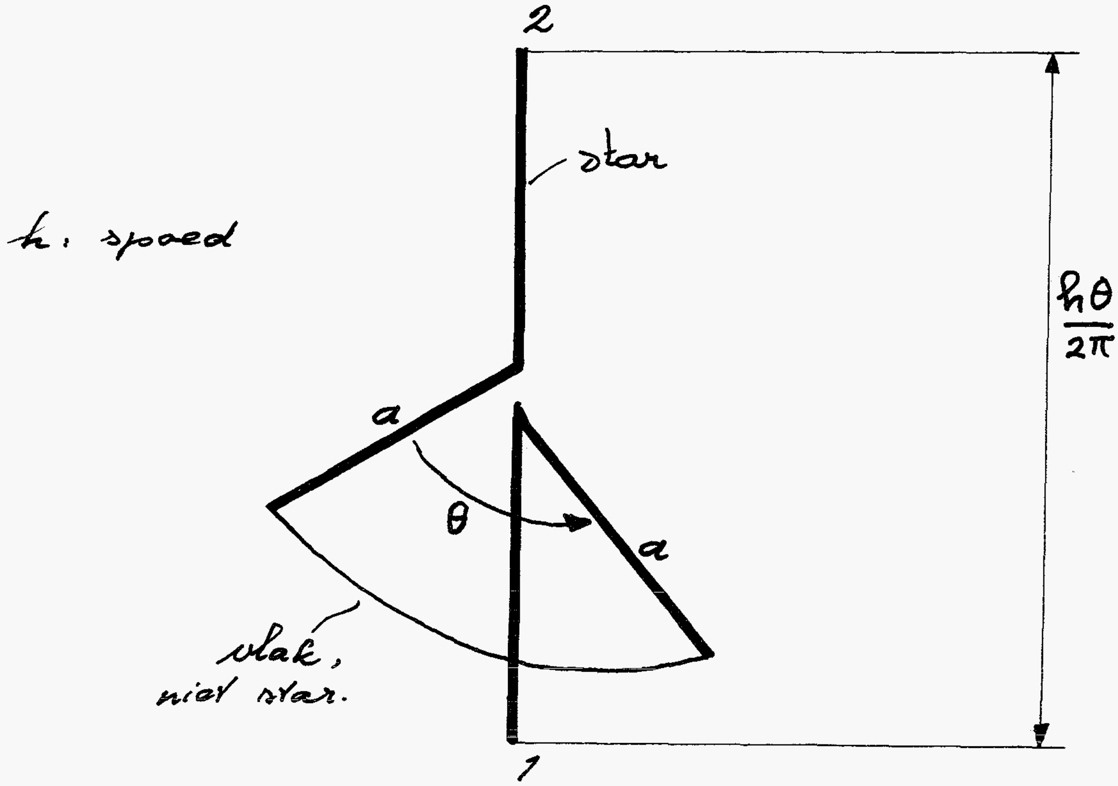
Samenvatting

Voor gangbare schroefveren geeft de benaderingsmethode goede resultaten in de beschouwde belastingsgevallen met uitzondering van de waarde Γ/N in belastingsgeval A.

Voor minder gangbare schroefveren kan de benaderingsmethode grote afwijkingen geven

V De verplaatsingsmethode (elementenmethode)

We verdelen de veer in elementen van de hieronder getekende vorm:



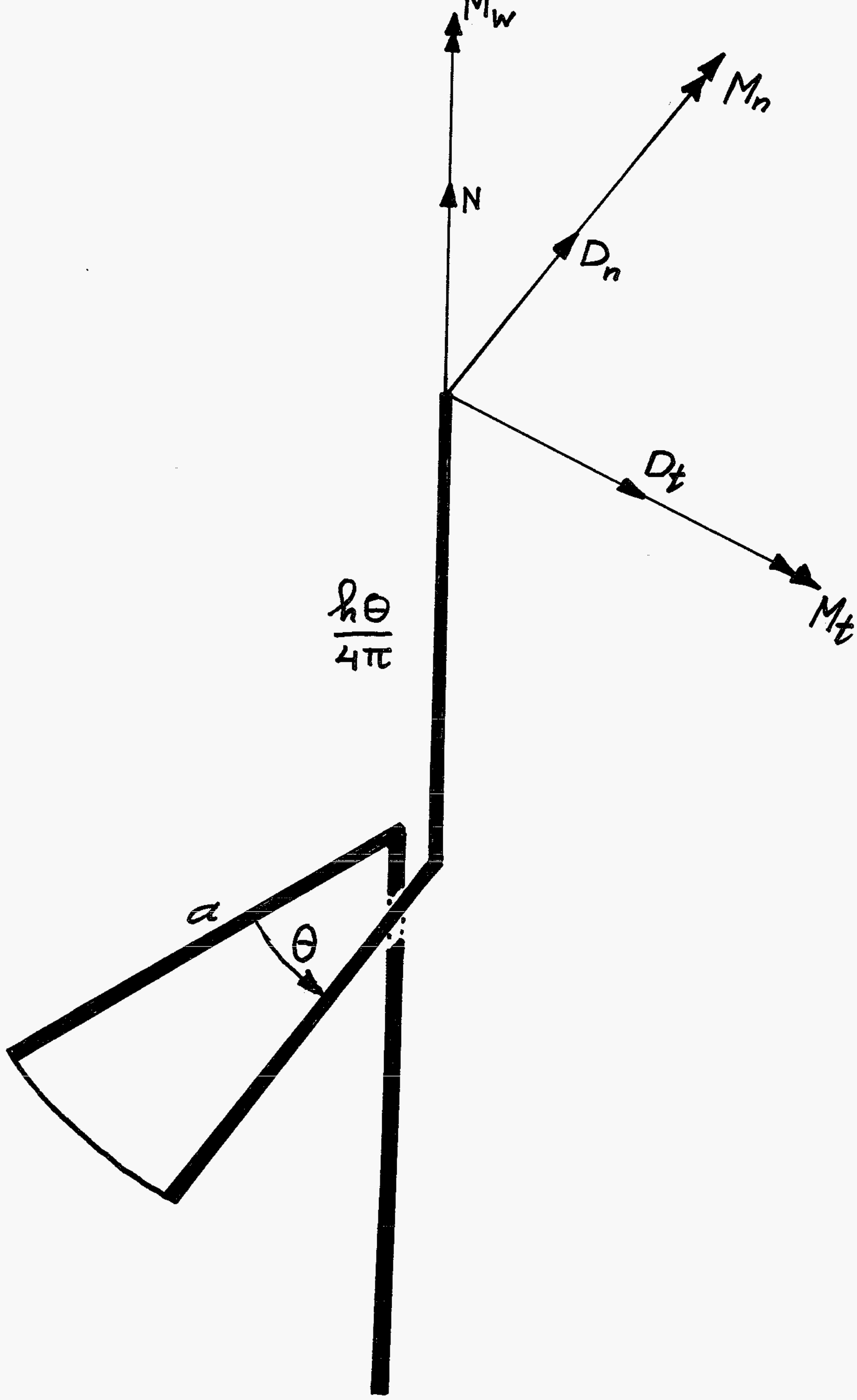
We willen weten de inwendige arbeid in dit elementje, als functie van de verplaatsingen en hoekverdraaiingen ter plaatse van 1 en 2

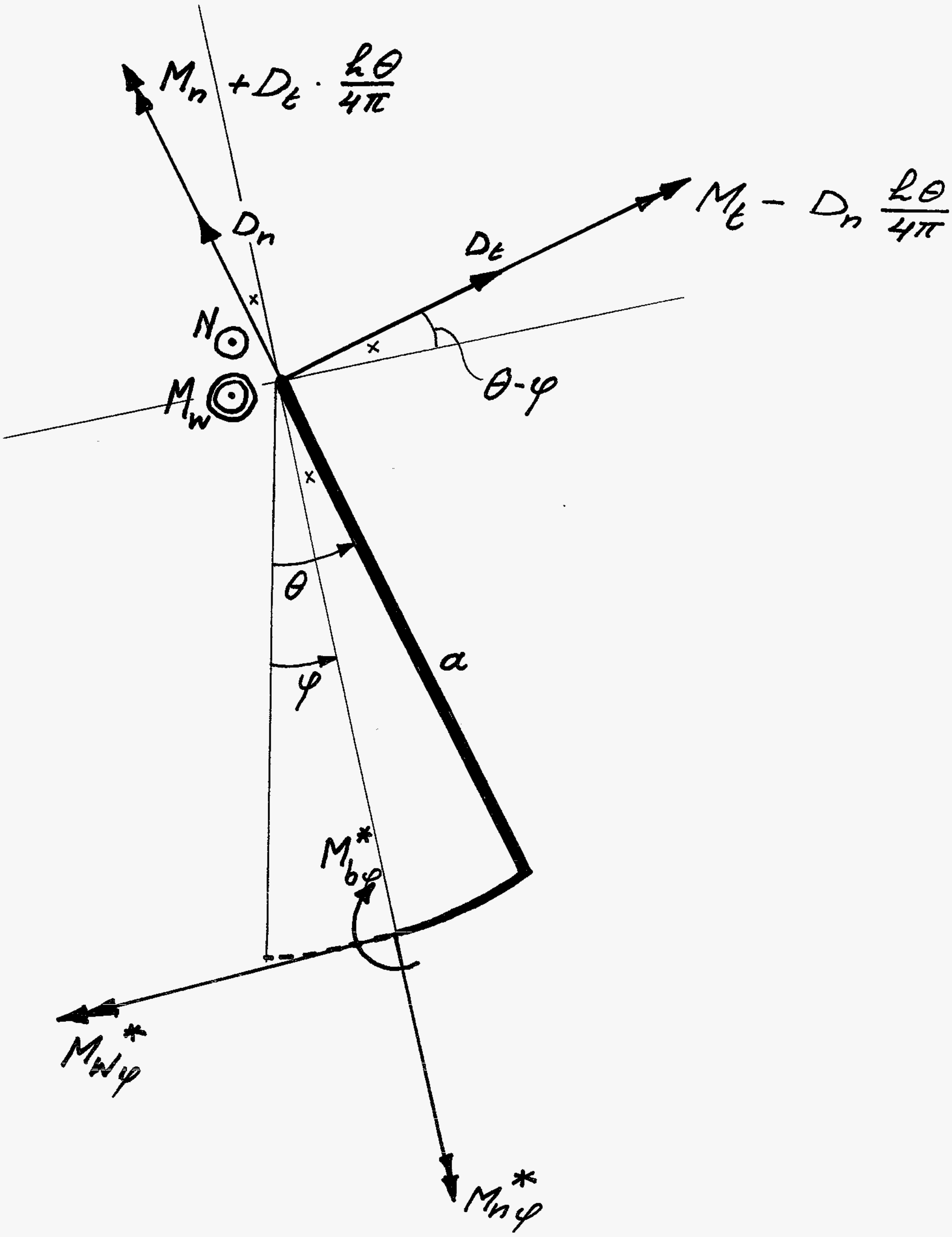
$$A = \tfrac{1}{2}\, u'\, Q\, u$$

Hiertoe berekenen we eerst de arbeid A als functie van de snedegrootheden in punt 2, waarbij we alleen de arbeid meenemen, tgv buigings en wringings.

$$A = \tfrac{1}{2}\, f_2'\, Z\, f_2$$

De snedegrootheden op plaats 2.





Momentenevenwicht levert:

$$M^*_{w\varphi} = \left(M_t - D_n \frac{h\theta}{4\pi}\right)\cos(\theta-\varphi) - \left(M_n + D_t \frac{h\theta}{4\pi}\right)\sin(\theta-\varphi) + N\cdot a$$

$$M^*_{n\varphi} = \left(M_t - D_n \frac{h\theta}{4\pi}\right)\sin(\theta-\varphi) + \left(M_n + D_t \frac{h\theta}{4\pi}\right)\cos(\theta-\varphi)$$

$$M^*_{b\varphi} = M_w + D_n\cdot a \sin(\theta-\varphi) - D_t \cdot a \cos(\theta-\varphi)$$

$$A_W = \frac{1}{2\varrho I_p} \cdot \int_0^\theta (M^*_{W\varphi})^2 a \, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2\varrho I_p} \cdot \Big[\left(M_t - D_n \frac{h\theta}{4\pi}\right)^2 (1/2\theta + 1/4 \sin 2\theta) +$$
$$\left(M_n + D_t \frac{h\theta}{4\pi}\right)^2 (1/2\theta - 1/4 \sin 2\theta) + N^2 a^2 \theta +$$
$$-2\left(M_t - D_n \frac{h\theta}{4\pi}\right)\left(M_n + D_t \frac{h\theta}{4\pi}\right)(1/4 - 1/4 \cos 2\theta) +$$
$$+2 Na \left(M_t - D_n \frac{h\theta}{4\pi}\right) \sin\theta +$$
$$-2 Na \left(M_n + D_t \frac{h\theta}{4\pi}\right)(1 - \cos\theta) \Big]$$

$$A_W = 1/2 \, f_2' \, Z_W \, f_2$$

$$f_2' = (N, D_n, D_t, M_W, M_n, M_t)$$

$$Z_W = \begin{bmatrix} a^2\theta & -a\frac{h\theta}{4\pi}\sin\theta & -a\frac{h\theta}{4\pi}(1-\cos\theta) & 0 & -a(1-\cos\theta) & a\sin\theta \\ -a\frac{h\theta}{4\pi}\cdot\sin\theta & \frac{h^2\theta^2}{16\pi^2}(1/2\theta+1/4\sin 2\theta) & \frac{h^2\theta^2}{16\pi^2}(1/4-1/4\cos 2\theta) & 0 & \frac{h\theta}{4\pi}(1/4-1/4\cos 2\theta) & -\frac{h\theta}{4\pi}(1/2\theta+1/4\sin 2\theta) \\ -a\frac{h\theta}{4\pi}(1-\cos\theta) & \frac{h^2\theta^2}{16\pi^2}(1/4-1/4\cos 2\theta) & \frac{h^2\theta^2}{16\pi^2}\cdot(1/2\theta-1/4\sin 2\theta) & 0 & \frac{h\theta}{4\pi}(1/2\theta-1/4\sin 2\theta) & -\frac{h\theta}{4\pi}(1/4-1/4\cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a(1-\cos\theta) & \frac{h\theta}{4\pi}(1/4-1/4\cos 2\theta) & \frac{h\theta}{4\pi}(1/2\theta-1/4\sin 2\theta) & 0 & 1/2\theta-1/4\sin 2\theta & -1/4+1/4\cos 2\theta \\ a\sin\theta & -\frac{h\theta}{4\pi}(1/2\theta+1/4\sin 2\theta) & -\frac{h\theta}{4\pi}(1/4-1/4\cos 2\theta) & 0 & -1/4+1/4\cos 2\theta & 1/2\theta+1/4\sin 2\theta \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{\varrho I_p}$$

$$A_n = \frac{1}{2EI_n} \int_0^{\Theta} (M^*_{n\varphi})^2 \, a \, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2EI_n} \Big[\left(M_t - D_n \frac{h\Theta}{4\pi}\right)^2 (1/2\,\Theta - 1/4 \sin 2\Theta) +$$

$$\left(M_n + D_t \frac{h\Theta}{4\pi}\right)^2 (1/2\,\Theta + 1/4 \sin 2\Theta) +$$

$$+ 2 \left(M_t - D_n \frac{h\Theta}{4\pi}\right)\left(M_n + D_t \frac{h\Theta}{4\pi}\right) (1/4 - 1/4 \cos 2\Theta) \Big]$$

$$A_n = 1/2 \, f_2' \; Z_n \; f_2$$

$$f_2' = (N, D_n, D_t, M_\omega, M_n, M_t)$$

$$Z_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2\Theta^2}{16\pi^2}(1/2\Theta - 1/4\sin 2\Theta) & -\frac{h^2\Theta^2}{16\pi^2}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) & 0 & -\frac{h\Theta}{4\pi}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) & -\frac{h\Theta}{4\pi}(1/2\Theta - 1/4\sin 2\Theta) \\ 0 & -\frac{h^2\Theta^2}{16\pi^2}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) & \frac{h^2\Theta^2}{16\pi^2}(1/2\Theta + 1/4\sin 2\Theta) & 0 & \frac{h\Theta}{4\pi}(1/2\Theta + 1/4\sin 2\Theta) & \frac{h\Theta}{4\pi}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h\Theta}{4\pi}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) & \frac{h\Theta}{4\pi}(1/2\Theta + 1/4\sin 2\Theta) & 0 & 1/2\Theta + 1/4\sin 2\Theta & 1/4 - 1/4\cos 2\Theta \\ 0 & -\frac{h\Theta}{4\pi}(1/2\Theta - 1/4\sin 2\Theta) & \frac{h\Theta}{4\pi}(1/4 - 1/4\cos 2\Theta) & 0 & 1/4 - 1/4\cos 2\Theta & 1/2\Theta - 1/4\sin 2\Theta \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{EI_n}$$

$$A_b = \frac{1}{2EI_b} \int_0^{\theta} \left(M_{b\varphi}^{*}\right)^2 a\,d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2EI_b} \Big[M_w^2\theta + D_n^2 a^2 (1/2\,\theta - 1/4 \sin 2\theta) + D_t^2 a^2 (1/2\,\theta + 1/4 \sin 2\theta) +$$

$$+ 2\,a M_w D_n (1-\cos\theta) - 2a M_w D_t \sin\theta +$$

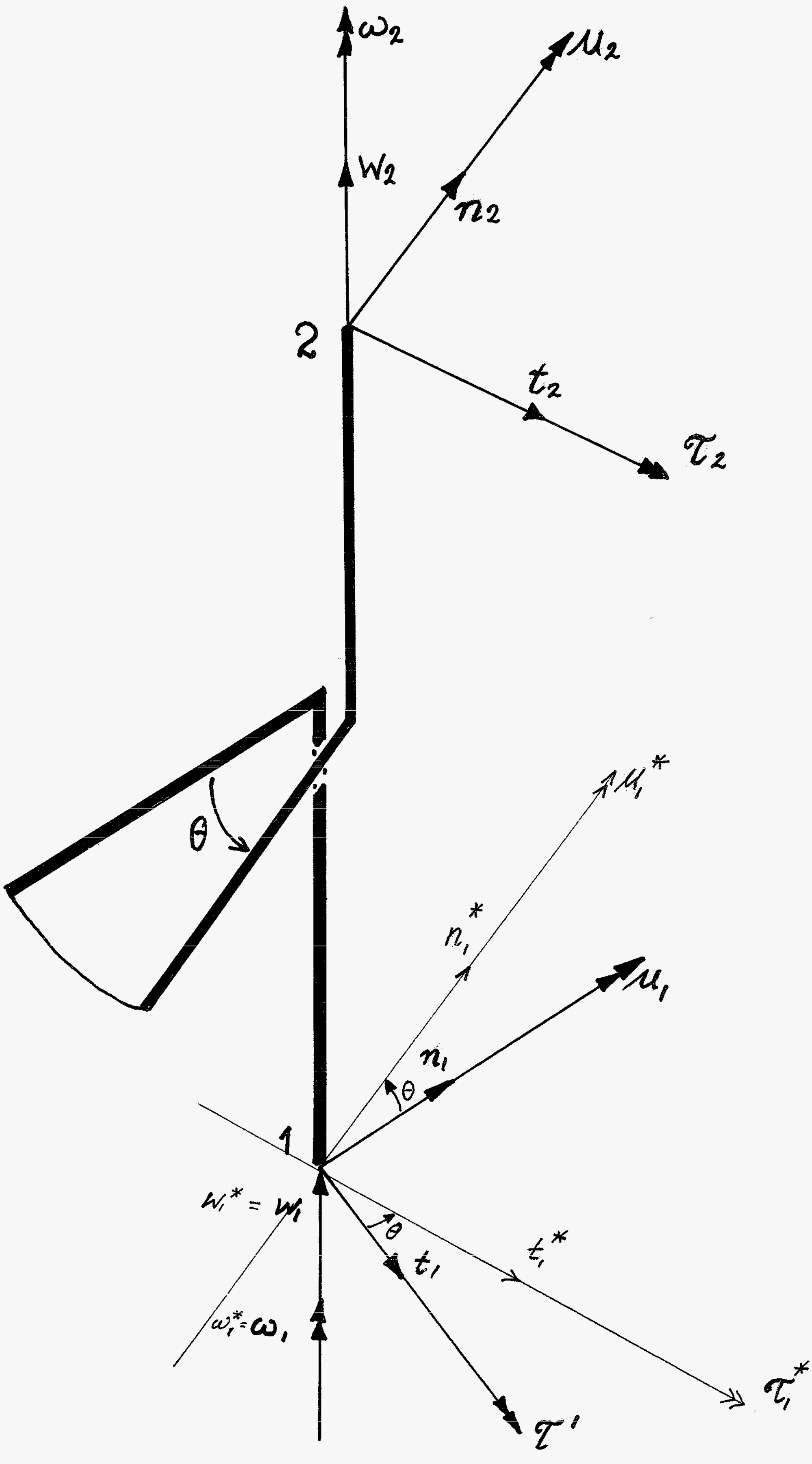
$$- 2a^2 D_n D_t (1/4 - 1/4 \cos 2\theta) \Big]$$

$$A_b = 1/2\, f_2' \, Z_b \, f_2$$

$$f_2' = [N,\ D_n,\ D_t,\ M_w,\ M_n,\ M_t]$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1/2\,\theta - 1/4\sin 2\theta) & -a^2(1/4 - 1/4\cos 2\theta) & a(1-\cos\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(1/4 - 1/4\cos 2\theta) & a^2(1/2\,\theta + 1/4\sin 2\theta) & -a\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & a(1-\cos\theta) & -a\sin\theta & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{EI_b}$$

De verplaatsingen en hoekverdraaiingen



De verplaatsingen en hoekverdraaiingen van punt 1 schrijven we nu in het coördinatenstelsel dat bij punt 2 is aangenomen.

$$\left.\begin{aligned} t_1^* &= t_1 \cos\theta + n_1 \sin\theta \\ n_1^* &= -t_1 \sin\theta + n_1 \cos\theta \\ w_1^* &= w_1 \end{aligned}\right\} \text{verplaatsingen.}$$

<u>Onder voorwaarde dat de hoekverdraaiingen klein blijven</u> geldt hiervoor een soortgelijke relatie :

$$\left.\begin{aligned} \tau_1^* &= \tau_1 \cos\theta + \mu_1 \sin\theta \\ \mu_1^* &= -\tau_1 \sin\theta + \mu_1 \cos\theta \\ \omega_1^* &= \omega_1 \end{aligned}\right\} \text{verdraaiingen}$$

We kunnen nu de verplaatsingen en hoekverdraaiingen van punt 2, uitdrukken in de verplaatsingen en hoekverdraaiingen van punt 1 (beweging als star lichaam), gesommeerd met de gevolgen van vervormingen, die gevonden kunnen worden mbv de Wet van Castigliano.

Weer eisen we, dat hoekverdraaiingen klein zijn.

$$n_2 = n_1^* - \tau_1^* \frac{h\theta}{2\pi} + \frac{\partial A}{\partial D_n} =$$

$$= n_1 \cos\theta - t_1 \sin\theta - \mu_1 \frac{h\theta}{2\pi} \sin\theta - \tau_1 \frac{h\theta}{2\pi} \cos\theta + \frac{\partial A}{\partial D_n}$$

$$t_2 = t_1^* + \mu_1^* \frac{h\theta}{2\pi} + \frac{\partial A}{\partial D_t} =$$

$$= n_1 \sin\theta + t_1 \cos\theta + \mu_1 \frac{h\theta}{2\pi} \cos\theta - \tau_1 \frac{h\theta}{2\pi} \sin\theta + \frac{\partial A}{\partial D_t}$$

$$w_2 = w_1^* + \frac{\partial A}{\partial N} =$$

$$= w_1 + \frac{\partial A}{\partial N}$$

$$\mu_2 = \mu_1^* + \frac{\partial A}{\partial M_n} =$$

$$= \mu_1 \cos\theta - \tau_1 \sin\theta + \frac{\partial A}{\partial M_n}$$

$$\tau_2 = \tau_1^* + \frac{\partial A}{\partial M_t} =$$

$$= \mu_1 \sin\theta + \tau_1 \cos\theta + \frac{\partial A}{\partial M_t}$$

$$\omega_2 = \omega_1^* + \frac{\partial A}{\partial M_w} =$$

$$= \omega_1 + \frac{\partial A}{\partial M_w}$$

De verplaatsingen en hoekverdraaiingen op plaats 2 zijn nu uitgedrukt in deze grootheden op plaats 1 en vervormingsgrootheden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W_2 - W_1 \\ n_2 - n_1\cos\theta + t_1\sin\theta + \mu_1 \frac{h\theta}{2\pi}\sin\theta + \tau_1 \frac{h\theta}{2\pi}\cos\theta \\ t_2 - n_1\sin\theta - t_1\cos\theta - \mu_1 \frac{h\theta}{2\pi}\cos\theta + \tau_1 \frac{h\theta}{2\pi}\sin\theta \\ \omega_2 - \omega_1 \\ \mu_2 - \mu_1\cos\theta + \tau_1\sin\theta \\ \tau_2 - \mu_1\sin\theta - \tau_1\cos\theta \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} \\ Z \\ \parallel \\ Z_W + Z_n + Z_b \\ \\ \end{bmatrix} * \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ D_n \\ D_t \\ M_W \\ M_n \\ M_t \end{bmatrix}}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\, k' \, Z \, k$$

$$v = Z\, k \quad \rightarrow \quad k = Z^{-1} v$$

$$k' = (Z^{-1} \cdot v)' =$$

$$= v' \, Z'^{-1} = v' Z^{-1}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\, v' Z^{-1} \cdot Z \cdot Z^{-1}\, v =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, v' \, Z^{-1} \, v$$

Definitie: $\quad v = L\, u$

met $u' = (n,\ t,\ w,\ u,\ \tau,\ \omega,\ n_2\ \ t_2\ \ w_2\ \ u_2\ \ \tau_2\ \ \omega_2)$

$$L = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\cos\theta & \sin\theta & 0 & \frac{h\theta}{2\pi}\sin\theta & \frac{h\theta}{2\pi}\cos\theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\theta & -\cos\theta & 0 & -\frac{h\theta}{2\pi}\cos\theta & \frac{h\theta}{2\pi}\sin\theta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

$$v = L \cdot u \quad \longrightarrow \quad \acute{v} = (Lu)' = \acute{u}\, \acute{L}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\, \acute{u}\, \acute{L}\, Z^{-1} L\, u = \tfrac{1}{2}\, \acute{u}\, Q\, u$$

met $Q = \acute{L}\, Z^{-1} L$

↑
(12 * 12) matrix, <u>de stijfheidsmatrix</u>.
voor een element.

Het principe van minimale potentiële energie passen we nu toe op een veer:

aantal windingen : n
verdeeld in elementen, aantal e $\Big\}$ $\theta = \frac{2\pi n}{e}$
ene uiteinde : ingeklemd.
andere uiteinde : vrij, maar door uitwendige krachten en momenten belast.

$$U = \tfrac{1}{2}\, \acute{u}_t\, Q_t\, u_t - \acute{u}_t\, f_t$$

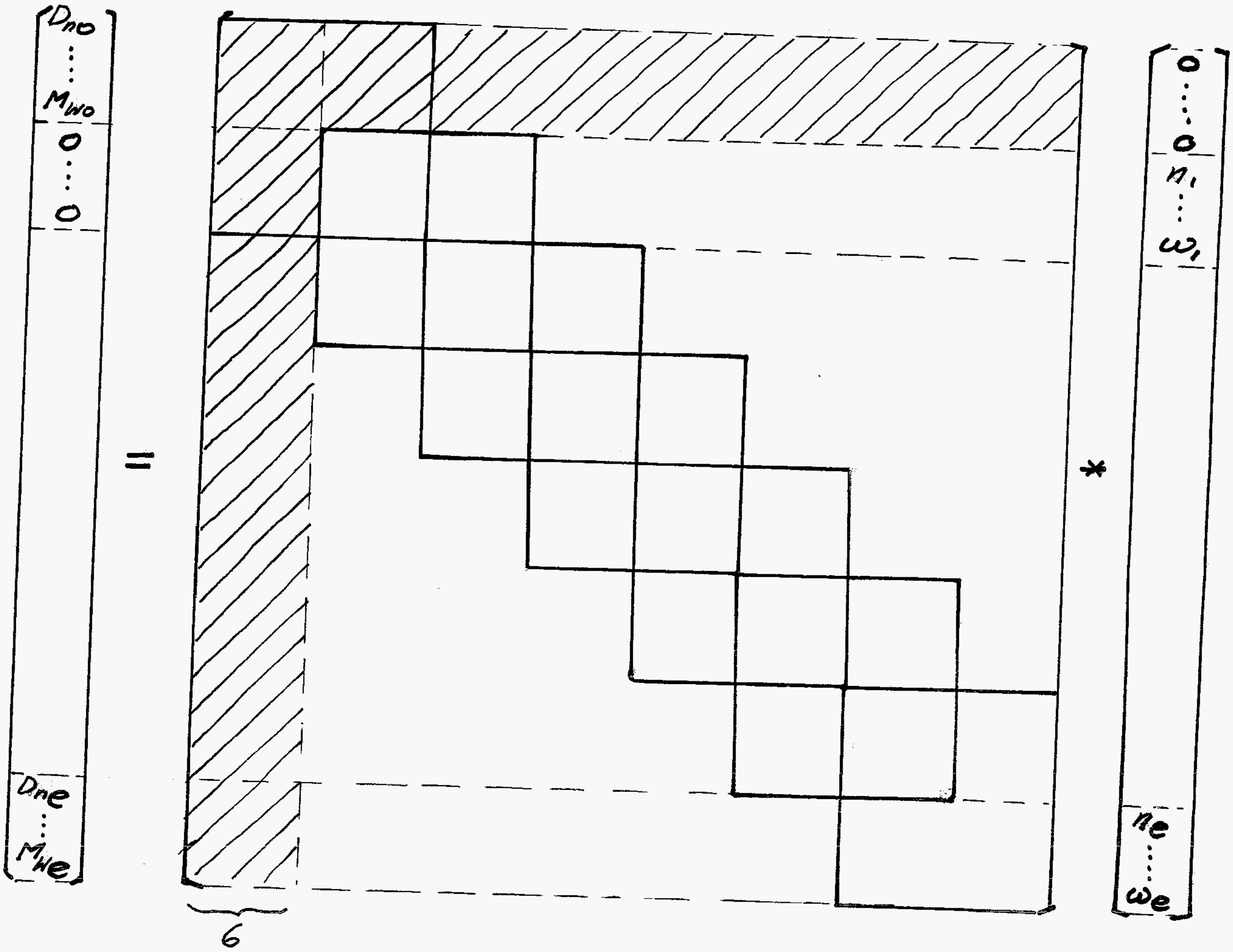
$$\acute{u}_t = (\underbrace{n_0 \cdots\cdots \omega_0}_{0}, n_1 \cdots \omega_1, n_2 \cdots\cdots \omega_2, \cdots\cdots\cdots\cdots n_e \cdots \omega_e)$$

Q_t : totale stijfheidsmatrix

$$\acute{f}_t = (\underbrace{D_{n0} \cdots\cdots M_{W0}}_{\substack{\text{onbekend} \\ \neq 0}}, \underbrace{D_{n1} \cdots M_{W1}, D_{n2} \cdots M_{W2}, \cdots\cdots\cdots D_{ne-1} \cdots M_{We-1}}_{0}, \underbrace{D_{ne} \cdots M_{We}}_{\text{bekend}})$$

$$\delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad f_t = Q_t\, u_t$$

De matrix Q_f is opgebouwd uit (12×12) matrices, de stijfheidsmatrices, van elk element, die er allen identiek uitzien.



Omdat we niet geïnteresseerd zijn in de reactiegrootheden bij de inklemming kunnen we de eerste 6 rijen en kolommen van de Q_f-matrix weglaten; dit is ook nodig om de beweging als star lichaam te verhinderen. Q_f^* resteert. De arcering in Q_f geeft dit aan.

Het overgebleven deel moet worden geïnverteerd:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ \omega_1 \\ \vdots \\ n_e \\ \vdots \\ \omega_e \end{bmatrix} = \left(Q_f^*\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_{ne} \\ \vdots \\ M_{we} \end{bmatrix}$$

Het computerprogramma.

a) inlezen eigenschappen veer en aantal elementen

- n, aantal windingen
- e, aantal elementen
- a, straal van de dwarsdoorsnede
- h, spoed van de veer
- G, glijdingsmodulus
- I_p, " polair traagheidsmoment
- E, elasticiteitsmodulus
- I_n, opp. traagheidsmoment tov normaal
- I_b, opp. traagheidsmoment tov binormaal

b) inlezen van de belastingsvector:

D_{ne} ...... M_{We}

c) berekening v/d elementen van Z_W, vorming v/d matrix Z_W
" " " " Z_n, " " " Z_n
" " " " Z_b, " " " Z_b

d) berekening van Z

e) inverteren van Z

f) berekening v/d elementen van L, vorming v/d matrix L

g) berekening Q $(12 * 12)$

h) vormen van Q_t^* $(6e * 6e)$

i) inverteren van Q_t^*

j) berekening van de verplaatsingen $n_1 \ldots \ldots w_e$

k) uitvoeren $n_e \ldots w_e$

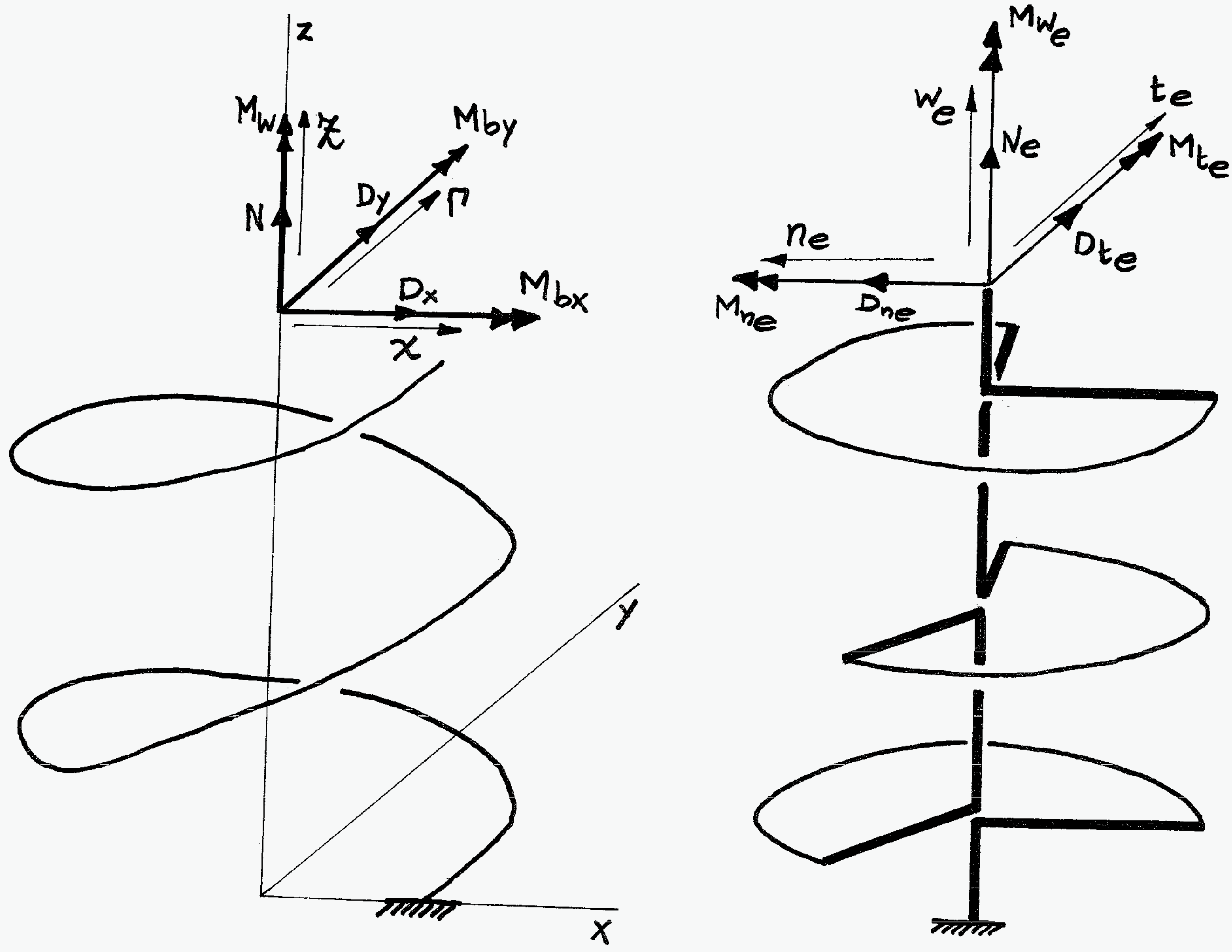
```
Lalgol 05063461 Brekelmans
begin comment prog.nr. 05063461, Ir. W.A.M. Brekelmans.
           elementenmethode(verplaatsingsmethode, toegepast op een schroefveer. volgorde invoergegevens:
      e: aantal elementen.
      n: aantal windingen van de veer.
      a: straal van de dwarsdoorsnede in mm.
      h: spoed van de veer in mm.
      G: glijdingsmodulus in N/mm ↑ 2.
      E: elasticiteitsmodulus in N/mm ↑ 2.
      Ip: polair traagheidsmoment van de draaddoorsnede in mm ↑ 4.
      In: traagheidsmoment t.o.v. de normaal in mm ↑ 4.
      Ib: traagheidsmoment t.o.v. de binormaal in mm ↑ 4.
      Dn: dwarskracht in de richting van de normaal bij het uiteinde in N.
      Dt: dwarskracht in de richting van de raaklijn bij het uiteinde in N.
      N: normaalkracht langs de hartlijn van de veer in N.
      Mn: moment om de normaal bij het uiteinde in Nmm.
      Mt: moment om de raaklijn bij het uiteinde in Nmm.
      Mw: wringend moment in Nmm;
  integer e;
      e := read;
  VAR:  PRINTTEXT(⋞aantal gebruikte elementen, e:⋟); ABSFIXT(3, 0, e); NLCR; NLCR;
      begin
         integer n, i, j, k, m;
            real pi, t, a, ast, act, ps2t, ms2t, c2t, h, t1, t2, a2, G, E, Ip, In, Ib, cp, cn, cb, eps;
         integer array p[1 : 6];
         array Z[1 : 6, 1 : 6], L[1 : 6, 1 : 12], Q[1 : 12, 1 : 12], Qt[1 : (6 × e), 0 : 11], ft[1 : (6 × e)];
         boolean interchange;
         library INPROD, CROUTDECOMPOSITION, CROUTINVERSE;

procedure URM(A, r0, r, k0, k); value r0, r, k0, k; integer r0, r, k0, k; array A;
begin comment Uitvoer Real Matrix, voor nadere gegevens zie: Toelichting op WE-procedures;
      integer m, n, i, j, l;
      m := (k - k0 + 1) ÷ 10; m := if k - k0 + 1 = 10 × m  then m else m + 1;
      for n := 0 step 1 until m - 1 do
```

```
    begin NLCR; SPACE(2); for l := 10 × n + k0, l + 1 while l ≤ k0 − 1 + 10 × (n + 1) ∧ l ≤ k do
          begin SPACE(8); ABSFIXT(3, 0, l) end; NLCR;
          for i := r0 step 1 until r do
          begin NLCR; ABSFIXT(3, 0, i); SPACE(2);
                for j := 10 × n + k0 step 1 until l−1 do
                begin integer n; real x; x:= abs(A[i,j]);
                      if x < ⏨−100 ∨ x ≥ ⏨99 then n := (if x = 0 then 1 else 3) else
                      if x < ⏨−10  ∨ x ≥ ⏨9  then n := 2 else n := 1;
                      FLOT(5,n,A[i,j]); SPACE(3−n)
                end
          end; CARRIAGE(5)
    end
end URM;

   procedure CHOLBD(n, m, dec, a, b, fail);
   value n, m, dec; integer n, m, dec; array a, b; label fail;
   begin integer k, m1, i, j;
         m1 := m;
         if dec = 0 ∨ dec = 2 ∨ dec = 4 ∨ dec = 6 then
            for k := 1 step 1 until n do
            begin if a[k, 0] < 0 then goto fail;
                  a[k, 0] := sqrt(a[k, 0]);
                  if m > n − k then m1 := n − k;
                  for i := 1 step 1 until m1 do a[k, i] := a[k, i]/a[k, 0];
                  for i := m1 + 1 step 1 until m do a[k, i] := 0;
                  for j := 1 step 1 until m1 do for i := 0 step 1 until m1−j do a[k + j, i] := a[k + j, i] − a[k,j] × a[k, j + i]
            end k;
        m1 := m;
        if dec = 0 ∨ dec = 1 ∨ dec = 4 ∨ dec = 5 then
           for k := 1 step 1 until n do
           begin b[k] := b[k]/a[k, 0];
                 if m > n − k then m1 := n − k;
                 for j := 1 step 1 until m1 do b[k + j] := b[k + j] − a[k, j] × b[k]
           end k;
        m1 := m;
        if dec < 4 then
           for k := n step − 1 until 1 do
           begin b[k] := b[k]/a[k, 0];
                 if k < m + 1 then m1 := k − 1;
                 for j := 1 step 1 until m1 do b[k − j] := b[k − j] − a[k − j, j] × b[k]
           end k
   end CHOLBD;
```

```
interchange := true; eps := ₁₀-12; pi := 4 × arctan(1);
n := read; PRINTTEXT(⟨aantal windingen n=⟩); ABSFIXT(3, 0, n); NLCR;
a := read; PRINTTEXT(⟨straal dwarsdoorsnede a=⟩); ABSFIXT(3, 1, a); PRINTTEXT(⟨mm⟩); NLCR;
h := read; PRINTTEXT(⟨spoed h=⟩); ABSFIXT(3, 1, h); PRINTTEXT(⟨mm⟩); NLCR;
   G := read; PRINTTEXT(⟨glijdingsmodulus G=⟩); FLOT(3, 1, G); PRINTTEXT(⟨N/mm ↑ 2⟩); NLCR;
E := read; PRINTTEXT(⟨elasticiteitsmodulus E=⟩); FLOT(3, 1, E); PRINTTEXT(⟨N/mm ↑ 2⟩); NLCR;
Ip := read; PRINTTEXT(⟨Ip=⟩); ABSFIXT(4, 4, Ip); PRINTTEXT(⟨mm ↑ 4⟩); NLCR;
In := read; PRINTTEXT(⟨In=⟩); ABSFIXT(4, 4, In); PRINTTEXT(⟨mm ↑ 4⟩); NLCR;
Ib := read; PRINTTEXT(⟨Ib=⟩); ABSFIXT(4, 4, Ib); PRINTTEXT(⟨mm ↑ 4⟩); NLCR; CARRIAGE(5);
t := 2 × pi × n/e;
ast := a × sin(t); act := a × (1 - cos(t));
ps2t := 0.5 × t + 0.25 × sin(2 × t); ms2t := t - ps2t; c2t := 0.25 - 0.25 × cos(2 × t);
t1 := 0.25 × h × t/pi; t2 := t1 × t1; a2 := a × a;
cp := a/(G × Ip); cn := a/(E × In); cb := a/(E × Ib);
Z[1, 1] := a2 × t × cp;
Z[1, 2] := -t1 × ast × cp;
Z[1, 3] := -t1 × act × cp;
Z[1, 5] := -act × cp;
Z[1, 6] := ast × cp;
Z[2, 2] := t2 × (ps2t × cp + ms2t × cn) + a2 × ms2t × cb;
Z[2, 3] := c2t × (t2 × (cp - cn) - a2 × cb);
Z[2, 4] := act × cb;
Z[2, 5] := t1 × c2t × (cp - cn);
Z[2, 6] := -t1 × (ps2t × cp + ms2t × cn);
Z[3, 3] := t2 × (ms2t × cp + ps2t × cn) + a2 × ps2t × cb;
Z[3, 4] := -ast × cb;
Z[3, 5] := t1 × (ms2t × cp + ps2t × cn);
Z[3, 6] := t1 × c2t × (cn - cp);
Z[4, 4] := t × cb;
Z[5, 5] := ms2t × cp + ps2t × cn;
Z[5, 6] := c2t × (cn - cp);
Z[6, 6] := ps2t × cp + ms2t × cn;
Z[1, 4] := Z[4, 5] := Z[4, 6] := 0;
for i := 1 step 1 until 6 do for j := i + 1 step 1 until 6 do Z[j, i] := Z[i, j];
CROUTDECOMPOSITION(6, Z, Z, p, interchange, eps, singular);
CROUTINVERSE(6, Z, p, Z);
for i := 1 step 1 until 6 do for j := 1 step 1 until 12 do L[i, j] := 0;
L[1, 3] := L[4, 6] := -1; L[1, 9] := L[2, 7] := L[3, 8] := L[4, 12] := L[5, 10] := L[6, 11] := 1;
L[2, 1] := L[3, 2] := L[5, 4] := L[6, 5] := -cos(t);
L[2, 2] := L[5, 5] := ast/a; L[3, 1] := L[6, 4] := -L[5, 5];
L[2, 4] := L[3, 5] := 2 × t1 × L[2, 2];
L[2, 5] := -2 × t1 × L[2, 1]; L[3, 4] := -L[2, 5];
```

```
        for i := 1 step 1 until 12 do for j := i step 1 until 12 do
        begin Q[i, j] := 0;
              for k := 1 step 1 until 6 do for m := 1 step 1 until 6 do
                                     Q[i, j] := Q[j, i] := Q[i, j] + Z[k, m] × L[k, i] × L[m, j];
        end;
        URM(Q, 1, 12, 1, 12); NEW PAGE;
        for i := 1 step 1 until 6 × (e - 1) do ft[i] := 0;
        for i := 1 step 1 until 6 do ft[6 × (e - 1) + i] := read;
        PRINTTEXT(⟨Dn=⟩); FIXT(4, 0, ft[6 × (e - 1) + 1]); PRINTTEXT(⟨N⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨Dt=⟩); FIXT(4, 0, ft[6 × (e - 1) + 2]); PRINTTEXT(⟨N⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨N=⟩); FIXT(4, 0, ft[6 × (e - 1) + 3]); PRINTTEXT(⟨N⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨Mn=⟩); FIXT(5, 0, ft[6 × (e - 1) + 4]); PRINTTEXT(⟨Nmm⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨Mt=⟩); FIXT(5, 0, ft[6 × (e - 1) + 5]); PRINTTEXT(⟨Nmm⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨Mw=⟩); FIXT(5, 0, ft[6 × (e - 1) + 6]); PRINTTEXT(⟨Nmm⟩); NLCR;
        CARRIAGE(5);
        for i := 1 step 1 until 6 × e do for j := 0 step 1 until 11 do Qt[i, j] := 0;
        for i := 1 step 1 until 6 do
        begin for j := i step 1 until 6 do Qt[i, j - i] := Q[i, j] + Q[i + 6, j + 6];
              for j := 7 step 1 until 12 do Qt[i, j - i] := Q[i, j];
        end;
for k := 1 step 1 until (e - 2) do
        for i := 1 step 1 until 6 do
        for j := i step 1 until 12 do Qt[i + 6 × k, j - i] := Qt[i, j - i];
        for i := 7 step 1 until 12 do
        for j := i step 1 until 12 do Qt[6 × (e - 2) + i, j - i] := Q[i, j];
        CHOLBD(6 × e, 11, 0, Qt, ft, fail);
        PRINTTEXT(⟨ne=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 1]); PRINTTEXT(⟨mm⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨te=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 2]); PRINTTEXT(⟨mm⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨we=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 3]); PRINTTEXT(⟨mm⟩); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨mue=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 4]); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨taue=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 5]); NLCR;
        PRINTTEXT(⟨ome=⟩); FLOT(5, 2, ft[6 × (e - 1) + 6]); NLCR; NLCR;NEW PAGE ; goto END;
singular:   PRINTTEXT(⟨Z is singulier⟩);
fail:             PRINTTEXT(⟨Qt is singulier⟩);
END:

      end;
          e:=read; if  e=0  then  goto FIN  else  goto  VAR ;
 FIN:
end;
progend
```

Hoe zijn de krachten/momenten en de verplaatsingen van de tot nu toe beschreven methoden met elkaar te vergelijken? Aan de hand van onderstaande tekeningen wordt dit wel duidelijk gemaakt.



$$D_x = -D_{ne}$$
$$D_y = D_{te}$$
$$N = N_e$$
$$M_{bx} = -M_{ne}$$
$$M_{by} = M_{te}$$
$$M_w = M_{we}$$
$$\mathcal{X} = -n_e$$
$$\Gamma = t_e$$
$$\mathcal{Z} = w_e$$

VI Semi-elementenmethode

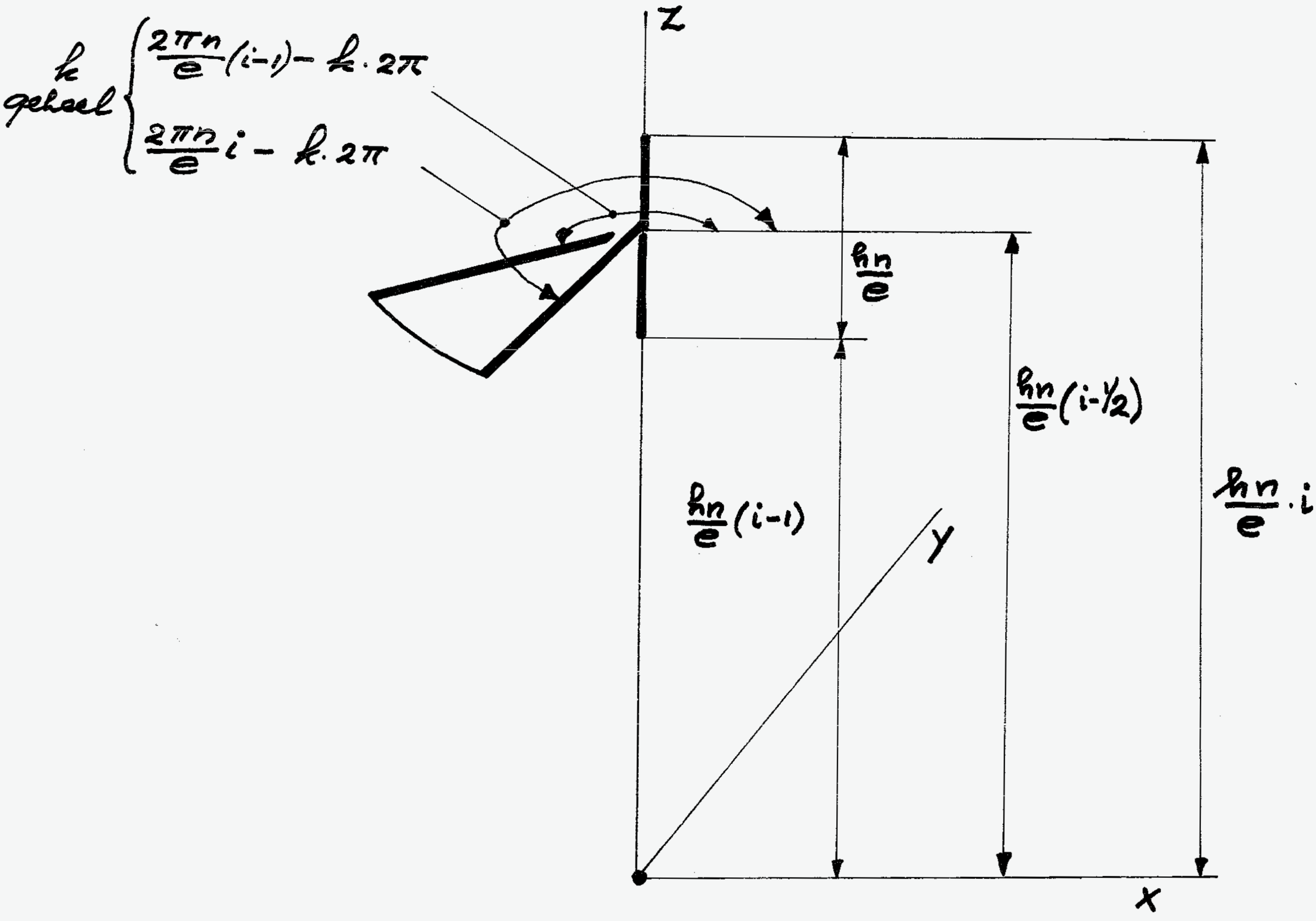
Qua opzet is deze methode identiek aan de in het vorige hoofdstuk behandelde elementenmethode (vandaar de naam: Semi-elementen methode).
De uitwerking is echter heel anders.
Beide methoden moeten evenwel dezelfde resultaten opleveren.

De schroefveer wordt weer vervangen door een aantal vlakke staafjes winding met starre tussenstukjes aan elkaar verbonden

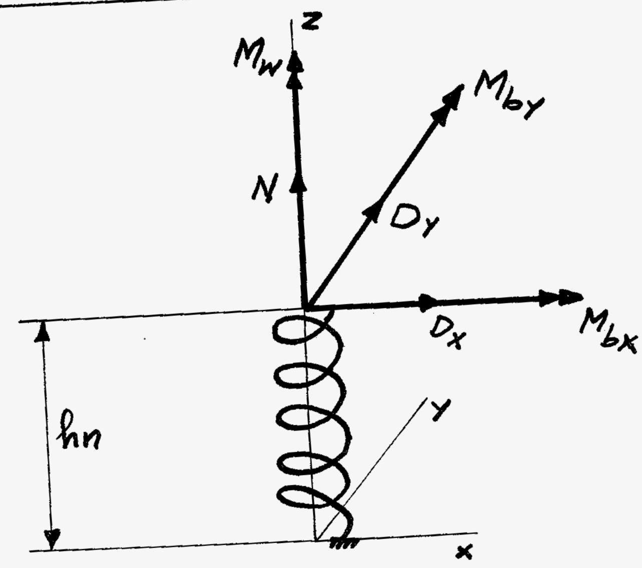
spoed van de veer h
aantal windingen n } totale lengte hn

aantal elementjes: e

Positie van het i^de^ elementje

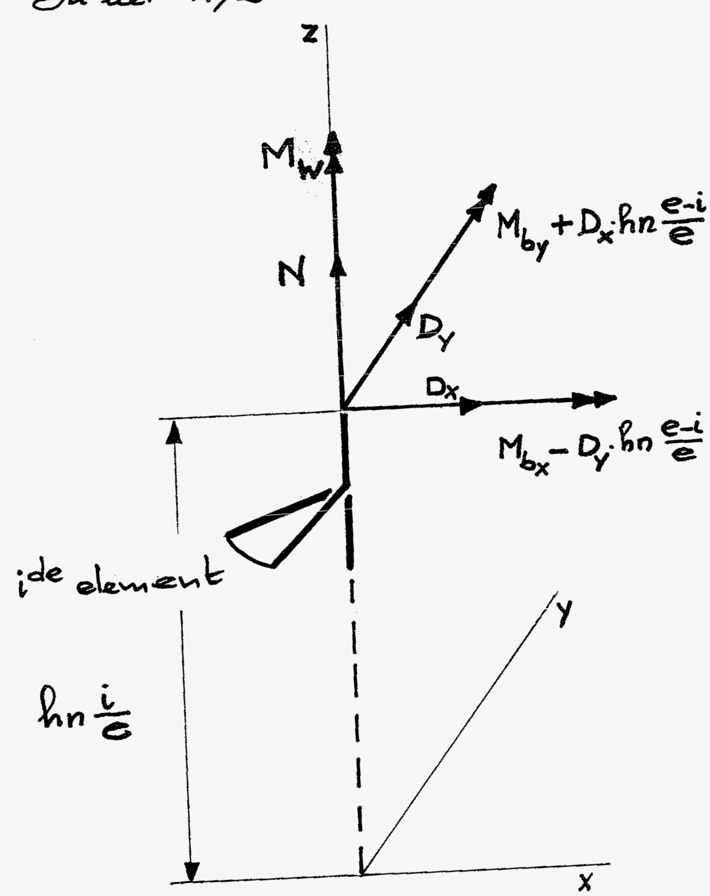


Krachten en momenten op de schroefveer.

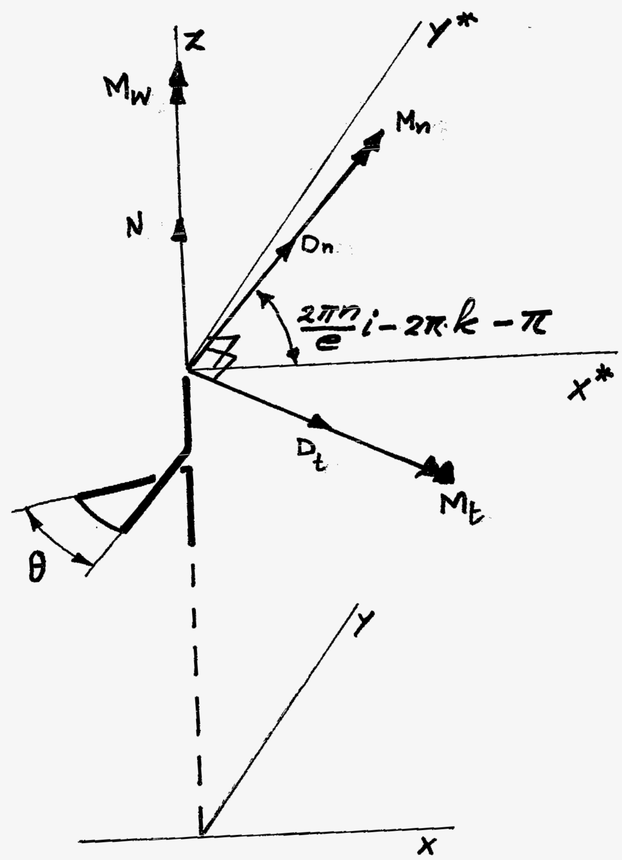


Krachten en momenten op het i^{de} elementje

In het xyz assenstelsel



In het gewenste locale assenstelsel.



k: geheel

$$\frac{2\pi n}{e}=\theta$$

We gaan nu de grootheden behorende bij het gewenste locale assenstelsel uitdrukken in de grootheden die behoren bij het XYZ-assenstelsel.

$$N = N$$

$$D_n = D_x \cos\left(\frac{2\pi n}{e} i - 2\pi k - \pi\right) + D_y \sin\left(\frac{2\pi n}{e} i - 2\pi k - \pi\right) =$$

$$= -D_x \cos i\theta - D_y \sin i\theta$$

$$D_t = D_x \sin\left(\frac{2\pi n}{e} i - 2\pi k - \pi\right) - D_y \cos\left(\frac{2\pi n}{e} i - 2\pi k - \pi\right) =$$

$$= -D_x \sin i\theta + D_y \cos i\theta$$

$$M_W = M_W$$

$$M_n = -\left(M_{bx} - D_y \cdot hn \frac{e-i}{e}\right) \cos i\theta - \left(M_{by} + D_x\, hn \frac{e-i}{e}\right) \sin i\theta$$

$$M_t = -\left(M_{bx} - D_y\, hn \frac{e-i}{e}\right) \sin i\theta + \left(M_{by} + D_x\, hn \frac{e-i}{e}\right) \cos i\theta$$

ofwel in matrix vorm:

$$\begin{bmatrix} N \\ D_n \\ D_t \\ M_W \\ M_n \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos i\theta & -\sin i\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin i\theta & \cos i\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -hn\frac{e-i}{e}\sin i\theta & hn\frac{e-i}{e}\cos i\theta & 0 & -\cos i\theta & -\sin i\theta \\ 0 & hn\frac{e-i}{e}\cos i\theta & hn\frac{e-i}{e}\sin i\theta & 0 & -\sin i\theta & \cos i\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N \\ D_x \\ D_y \\ M_W \\ M_{bx} \\ M_{by} \end{bmatrix}$$

$$f_i = \Lambda_i * p$$

In het vorige hoofdstuk, op blz 52, 53 en 54 staan de formules voor de inwendige energie in een elementje.

Voor het i^{de} elementje geldt:

$$A_i = \tfrac{1}{2} f_i' (Z_W + Z_n + Z_b) f_i$$

ofwel:

$$A_i = \tfrac{1}{2} p' \Lambda_i' (Z_W + Z_n + Z_b) \Lambda_i p$$

De totale in de veer opgehoopte energie is dan:

$$A_{tot} = \tfrac{1}{2} p' \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{e} \Lambda_i' (Z_W + Z_n + Z_b) \Lambda_i \right\}}_{U} p$$

$$A_{tot} = \tfrac{1}{2} p' U p = \tfrac{1}{2} p_\ell U_{\ell k} p_k$$

(sommatie conventie van Einstein)

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial A_{tot}}{\partial D_x} = \frac{\partial A_{tot}}{\partial P_2} = U_{2k} P_k \\ \Gamma &= \frac{\partial A_{tot}}{\partial D_Y} = \frac{\partial A_{tot}}{\partial P_3} = U_{3k} P_k \\ Z &= \frac{\partial A_{tot}}{\partial N} = \frac{\partial A_{tot}}{\partial P_1} = U_{1k} P_k \end{aligned}\right\} \text{Wet van Castigliano}$$

Voordat belastingsgeval A en B met deze methode uitgewerkt kunnen worden, moeten we eerst de som van een aantal rijen berekenen, die in die uitwerking voor zullen komen.

1) $$\sum_{k=1}^{N} \sin k\varphi = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2i}\left(e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{N} e^{ik\varphi} = e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + e^{3i\varphi} + \ldots\ldots\ldots + e^{Ni\varphi} =$$
$$= e^{i\varphi}\left(1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots\ldots + e^{(N-1)i\varphi}\right)$$

Meetkundige reeks:
$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots + r^n$$
$$rS = 0 + r + r^2 + r^3 + \qquad + r^n + r^{n+1}$$
$$\rightarrow S - rS = 1 - r^{n+1} \rightarrow S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} e^{ik\varphi} &= e^{i\varphi} \cdot \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \\ \sum_{k=1}^{N} e^{-ik\varphi} &= e^{-i\varphi} \cdot \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \end{aligned}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin k\varphi = \frac{1}{2i}\left\{e^{i\varphi}\frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} - e^{-i\varphi}\frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{e^{1/2 i\varphi}\frac{1 - e^{iN\varphi}}{e^{-1/2 i\varphi} - e^{1/2 i\varphi}} + e^{-1/2 i\varphi}\frac{1 - e^{-iN\varphi}}{-e^{1/2 i\varphi} + e^{-1/2 i\varphi}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\frac{e^{1/2 i\varphi} - e^{i(N+1/2)\varphi} + e^{-1/2 i\varphi} - e^{-i(N+1/2)\varphi}}{e^{-1/2 i\varphi} - e^{1/2 i\varphi}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\frac{2\cos 1/2\varphi - 2\cos(N + 1/2)\varphi}{-2i\,(\sin 1/2\varphi)}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sin k\varphi = 1/2\ \frac{\cos 1/2\varphi - \cos(N + 1/2)\varphi}{\sin 1/2\varphi}$$

2) $$\sum_{k=1}^{N} \cos k\varphi = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2}\left(e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ e^{i\varphi}\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}} + e^{-i\varphi}\frac{1-e^{-iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi} - e^{i(N+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\varphi} + e^{-i(N+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{-\frac{1}{2}i\varphi} - e^{\frac{1}{2}i\varphi}} \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{2i \sin \tfrac{1}{2}\varphi - 2i \sin (N+\tfrac{1}{2})\varphi}{-2i \sin \tfrac{1}{2}\varphi} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \cos k\varphi = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin \tfrac{1}{2}\varphi - \sin (N+\tfrac{1}{2})\varphi}{\sin \tfrac{1}{2}\varphi}$$

3) $$\sum_{k=1}^{N} k \sin k\varphi = \sum_{k=1}^{N} -\frac{d}{d\varphi}\cos k\varphi = -\frac{d}{d\varphi}\sum_{k=1}^{N} \cos k\varphi =$$

$$\frac{\left\{\tfrac{1}{2}\cos \tfrac{1}{2}\varphi - (N+\tfrac{1}{2})\cos (N+\tfrac{1}{2})\varphi\right\} 2\sin \tfrac{1}{2}\varphi - \cos \tfrac{1}{2}\varphi \left\{\sin \tfrac{1}{2}\varphi - \sin (N+\tfrac{1}{2})\varphi\right\}}{4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}$$

4) $$\sum_{k=1}^{N} k \cos k\varphi = \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{d\varphi}\sin k\varphi = \frac{d}{d\varphi}\sum_{k=1}^{N} \sin k\varphi =$$

$$\frac{\left\{-\tfrac{1}{2}\sin \tfrac{1}{2}\varphi + (N+\tfrac{1}{2})\sin (N+\tfrac{1}{2})\varphi\right\} 2\sin \tfrac{1}{2}\varphi - \cos \tfrac{1}{2}\varphi \left\{\cos \tfrac{1}{2}\varphi - \cos (N+\tfrac{1}{2})\varphi\right\}}{4 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi}$$

We gaan nu de waarden substitueren die N en φ aannemen:

$$N = e$$
$$\varphi = \frac{2\pi n}{e} = \theta$$
$$(k = i)$$

① $$\sum_{i=1}^{e} \sin i\cdot\frac{2\pi n}{e} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\pi n}{e} - \cos\left(2\pi n + \frac{\pi n}{e}\right)}{\sin\frac{\pi n}{e}} =$$

als $\frac{n}{e}$ geheel is : 0

als $\frac{n}{e}$ niet geheel is : 0 $\Big\} \rightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{e} \sin i\,\frac{2\pi n}{e} = 0}$$

② $$\sum_{i=1}^{e} \cos i\,\frac{2\pi n}{e} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\pi n}{e} - \sin\left(e+\tfrac{1}{2}\right)\frac{2\pi n}{e}}{\sin\frac{\pi n}{e}}$$

als $\frac{n}{e}$ geheel is : e

als $\frac{n}{e}$ niet geheel is : 0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{e} \cos i\,\frac{2\pi n}{e} = \begin{cases} 0 & \text{als } n/e \text{ niet geheel is.} \\ e & \text{als } n/e \text{ geheel is.} \end{cases}}$$

③ $$\sum_{i=1}^{e} i \sin i\,\frac{2\pi n}{e} = \frac{\left\{\tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi n}{e} - \left(e+\tfrac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi n}{e}\right\} 2\sin\frac{\pi n}{e} - \cos\frac{\pi n}{e}\left\{\sin\frac{\pi n}{e} - \sin\frac{\pi n}{e}\right\}}{4\sin^2\frac{\pi n}{e}} =$$

$$= \frac{-e\cos\frac{\pi n}{e}\cdot 2\sin\frac{\pi n}{e}}{4\sin^2\frac{\pi n}{e}} = \frac{-e}{2\tan\frac{\pi n}{e}}$$ (als $\frac{n}{e}$ niet geheel is)

als $\frac{n}{e}$ geheel is : 0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{e} \cos i\,\frac{2\pi n}{e} = \begin{cases} \dfrac{-e}{2\tan\frac{\pi n}{e}} & \text{als } n/e \text{ niet geheel is.} \\ 0 & \text{als } n/e \text{ geheel is.} \end{cases}}$$

④ $$\sum_{i=1}^{e} i\cos i\,\frac{2\pi n}{e} = \frac{\left\{-\tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{e} + \left(e+\tfrac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{e}\right\} 2\sin\frac{\pi n}{e} - \cos\frac{\pi n}{e}\left(\cos\frac{\pi n}{e} - \cos\frac{\pi n}{e}\right)}{4\sin^2\frac{\pi n}{e}} =$$

$= \frac{e}{2}$ als n/e niet geheel is.

als n/e geheel is : $1+2+3+\cdots+e = \frac{(e+1)e}{2}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{e} i\cos i\,\frac{2\pi n}{e} = \begin{cases} e/2 & \text{als } n/e \text{ niet geheel is} \\ \dfrac{(e+1)e}{2} & \text{als } n/e \text{ geheel is} \end{cases}}$$

A **Centraal op trek belaste veer**

χ

$$\frac{\chi}{N} = U_{21}$$

$$U_{21} = \Sigma_{i=1}^{e} \; (\Lambda_i)_{s2} \; (Z_W + Z_n + Z_b)_{st} \; (\Lambda_i)_{t1}$$

(sommeren over s en t
Einstein conventie)

$$U_{21} = \sum_{i=1}^{e} \; (\Lambda_i)_{s2} \; (Z_w + Z_n + Z_b)_{s1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{e} \Big[-\cos i\theta \, (Z_w + Z_n + Z_b)_{21} + \\ - \sin i\theta \, (Z_w + Z_n + Z_b)_{31} + \\ - h n \frac{e-i}{e} \sin i\theta \, (Z_w + Z_n + Z_b)_{51} + \\ + h n \frac{e-i}{e} \cos i\theta \, (Z_w + Z_n + Z_b)_{61} \Big] =$$

$$= \frac{a}{\rho I_p} \sum_{i=1}^{e} \Big[\cos i\theta \cdot a \frac{h\theta}{4\pi} \sin\theta + \sin i\theta \, a \frac{h\theta}{4\pi} (1-\cos\theta) + \\ + h n \frac{e-i}{e} \sin i\theta \cdot a(1-\cos\theta) + h n \frac{e-i}{e} \cos i\theta \cdot a \sin\theta \Big] =$$

$$= \frac{a^2 h n}{\rho I_p} \sum_{i=1}^{e} \Big\{ \frac{2e+1-2i}{2e} \cos i\theta \sin\theta + \frac{2e+1-2i}{2e} \sin i\theta \, (1-\cos\theta) \Big\}$$

$\frac{n}{e}$ **geheel**

$$\frac{\chi}{N} = \frac{a^2 h n}{\rho I_p} \Big\{ \frac{2e+1}{2e} \cdot e \cdot \sin \frac{2\pi n}{e} + \frac{2e+1}{2e} \cdot 0 \cdot (1-\cos\theta) + \\ - \frac{2}{2e} \frac{(e+1)e}{2} \sin \frac{2\pi n}{e} - \frac{2}{2e} \cdot 0 \cdot (1-\cos\theta) \Big\}$$

$$= 0$$

$\frac{n}{e}$ **niet geheel**

$$\frac{\chi}{N} = \frac{a^2 h n}{\rho I_p} \Big\{ \frac{2e+1}{2e} \cdot 0 \cdot \sin \frac{2\pi n}{e} + \frac{2e+1}{2e} \cdot 0 \cdot (1-\cos\theta) + \\ - \frac{2}{2e} \cdot \frac{e}{2} \cdot \sin \frac{2\pi n}{e} + \frac{2}{2e} \cdot \frac{e}{\tan \frac{\pi n}{e}} (1-\cos\theta) \Big\} =$$

$$= \frac{a^2 h n}{\rho I_p} \Big\{ - \frac{\sin \frac{2\pi n}{e}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{2\pi n}{e}}{2 \tan \frac{\pi n}{e}} \Big\} =$$

$$= \frac{2\pi n a^3}{\rho I_p} \cdot \tan \xi \cdot 0 = 0$$

Γ

$$\frac{\Gamma}{N} = u_{31} = \sum_{i=1}^{e} (\Lambda_i)_{s3} \, (Z_w + Z_n + Z_b)_{st} \, \underbrace{(\Lambda_i)_{t1}}_{\text{alleen ongelijk aan nul voor } t=1}$$

$$u_{31} = \sum_{i=1}^{e} (\Lambda_i)_{s3} \, (Z_W + Z_n + Z_b)_{s1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{e} \Big\{ -\sin i\theta \; Z_{w21} + \cos i\theta \; Z_{w31} + \ln \tfrac{e-i}{e} \cos i\theta \; Z_{w51} + \ln \tfrac{e-i}{e} \sin i\theta \, Z_{w61} \Big\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{e} \Big\{ \sin i\theta \cdot a \tfrac{\ln\theta}{4\pi} \sin\theta - \cos i\theta \cdot a \tfrac{\ln\theta}{4\pi} (1-\cos\theta) + - \ln \tfrac{e-i}{e} \cos i\theta \cdot a(1-\cos\theta) + \ln \tfrac{e-i}{e} \sin i\theta \sin\theta \Big\}$$

$$= \frac{a^2 \ln}{\rho I_p} \sum_{i=1}^{e} \Big\{ \frac{2e+1-2i}{2e} \sin i\theta \sin\theta - \frac{2e+1-2i}{2e} \cos i\theta \, (1-\cos\theta) \Big\}$$

$\frac{n}{e}$ geheel $\longrightarrow$ $\frac{\Gamma}{N} = 0$

$\frac{n}{e}$ niet geheel

$$\frac{\Gamma}{N} = \frac{a^2 \ln}{\rho I_p} \Big\{ -\frac{2}{2e} \cdot \frac{-e}{2\tan\frac{\pi n}{e}} \sin \frac{2\pi n}{e} + \frac{2}{2e} \cdot \frac{e}{2} \cdot (1-\cos\theta) \Big\} =$$

$$= \frac{a^2 \ln}{\rho I_p} \Big\{ \frac{\sin \frac{2\pi n}{e}}{2\tan\frac{\pi n}{e}} + \tfrac{1}{2} \big(1 - \cos \tfrac{2\pi n}{e}\big) \Big\} =$$

$$= \frac{a^2 \ln}{\rho I_p} \Big\{ \frac{2 \sin\frac{\pi n}{e} \cos\frac{\pi n}{e}}{2 \tan \pi n/e} + \tfrac{1}{2}\big(1 - 1 + 2\sin^2 \tfrac{\pi n}{e}\big) \Big\} =$$

$$= \frac{a^2 \ln}{\rho I_p} \Big(\cos^2 \tfrac{\pi n}{e} + \sin^2 \tfrac{\pi n}{e} \Big) =$$

$$= \frac{2\pi n a^3}{\rho I_p} \cdot \tan \xi$$

Z

$$\frac{Z}{N} = u_{11} = \sum_{i=1}^{e} (\Lambda_i)_{s1} (Z_w + Z_n + Z_b)_{st} \, (\Lambda_i)_{t1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{e} (Z_w + Z_n + Z_b)_{11} = \sum_{i=1}^{e} Z_{w11} =$$

$$= e \cdot Z_{w11} = e \cdot \theta \cdot \frac{a^3}{\rho I_p} = \frac{2\pi n a^3}{\rho I_p}$$

Resulterend geldt voor de centraal op trek belaste veer:

$$\frac{X}{N} = 0 \quad \text{onafhankelijk van de waarde van } e$$

$$\frac{\Gamma}{N} = \begin{cases} 0 & \text{als } n/e \text{ geheel is} \\ \dfrac{2\pi n a^3}{G I_p} \cdot \tan\xi & \text{als } n/e \text{ niet geheel is.} \end{cases}$$

$$\frac{Z}{N} = \frac{2\pi n a^3}{G I_p} \quad \text{onafhankelijk van } e$$

B Door dwarskracht belaste veer

Met de hier beschreven methode is het berekenen van de verplaatsingen bij het belastingsgeval B dusdanig omvangrijk, dat er in het kader van dit rapport van af is gezien. De elementenmethode voor belastingsgeval B kan dan ook slechts met de exacte methode worden vergeleken in concrete gevallen.

Aangenomen zal worden dat ook voor de elementenmethode onderstaande geldt, om vergelijking te vereenvoudigen.

Bij ronde draaddoorsnede, $\nu = 0,3$ →

$$\left(\frac{X}{D}\right)_{el} = \beta_{el} \cdot \frac{a^3 \pi n}{E I_b}$$

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{el} = (\delta_\Gamma)_{el} \; \frac{a^3 \pi n}{E I_b}$$

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{el} = (\delta_Z)_{el} \; \frac{a^3 \pi n}{E I_b}$$

met $\beta_{el} = \beta_{el}(n, \xi)$, $\frac{(\delta_\Gamma)_{el}}{n}$ en $\frac{(\delta_Z)_{el}}{n}$ functies van ξ

VII De rekennauwkeurigheid van de rekenmachine

Er kan alleen een mededeling omtrent deze nauwkeurigheid worden gedaan op grond van de resultaten, die bij belastingsgeval A zijn verkregen.

Vergelijking van deze resultaten leidt tot de volgende conclusie:

Bij x elementen per winding worden de resultaten verkregen in y significante cijfers.

x	y
1	–
2	13
4	9
6	7
8	6
12	5
18	4
24	3
36	2
48	1 à 2

Bij 72 en meer elementen per winding werden geen resultaten meer verkregen omdat de totale stijfheidsmatrix numeriek singulier zou worden.

Voor de rekennauwkeurigheid is het waarschijnlijk belangrijk dat e/n binnen bepaalde grenzen blijft: bijv. $e/n < 20$

Het totaal aantal elementen schijnt eveneens belangrijk te zijn. Precies aangeven welke rol de waarde van e speelt bij de rekenonnauwkeurigheden is echter onmogelijk.

VIII Vergelijking van de elementenmethode met de „exacte" en de benaderings- methode

Vergelijking van deze resultaten geeft aanleiding tot conclusies wat betreft:

a) waarde van de op deze wijze toegepaste elementenmethode

b) correctheid van alle uitgevoerde berekeningen bij de elementenmethode. De resultaten van de benaderingsmethode en die van de elementenmethode voor $e = n$, moeten identiek zijn omdat de achtergronden van beide methodes gelijk zijn, maar slechts de uitwerking verschillend is.

Vergelijking kan weer slechts geschieden aan de hand van de twee behandelde belastingsgevallen.

A Centraal op trek belaste veer.

$\mathcal{X}$

$$\left(\frac{\mathcal{X}}{N}\right)_{el} = \left(\frac{\mathcal{X}}{N}\right)_{ex} = \left(\frac{\mathcal{X}}{N}\right)_{ben} = 0$$

Γ

$$\left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{ex} = \varepsilon \cdot \frac{2\pi n a^3}{\varrho I_p}$$ (zie blz 42)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{ben} &= 0 \\ \left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{el\ \frac{n}{e}\ \text{geheel}} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ m.a.w. klopt.

$$\left(\frac{\Gamma}{N}\right)_{el\ \frac{n}{e}\ \text{niet geheel}} = \tan\xi \cdot \frac{2\pi n a^3}{\varrho I_p}$$

ξ	$0°$	$5°$	$10°$	$15°$	$20°$	$30°$	$45°$
$\tan \xi$	0,0000	0,0875	0,1763	0,2679	0,3640	0,5774	1,0000

Voor normale veren : $\frac{GI_p}{EI_b} \approx 0.8$, $\xi \approx 5°$
wijkt de elementenmethode ca 20% af van de exacte methode. Wat Γ betreft zijn de resultaten van de elementenmethode nog niet goed, maar wel beter dan die van de benaderingsmethode.

Z $\left(\frac{Z}{N}\right)_{ex} = \alpha \cdot \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$ (zie blz 44)

$\left(\frac{Z}{N}\right)_{ben} = \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$

$\left(\frac{Z}{N}\right)_{el\ \frac{n}{e}\ geheel} = \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$

m.a.w. klopt.

$\left(\frac{Z}{N}\right)_{el\ \frac{n}{e}\ niet\ geheel} = \frac{2\pi n a^3}{GI_p}$

De resultaten van de elementenmethode zijn dus identiek, met die van de benaderingsmethode en voor normaal voorkomende veren dus voldoende nauwkeurig.

Verfijning (meer dan twee elementen per winding) blijkt voor dit belastingsgeval geen enkele invloed te hebben.

B. Door dwarskracht belaste veer.

χ

$$\left(\frac{\chi}{D}\right)_{ex} = \beta_{ex} \cdot \frac{a^3 \pi n}{E I_b} \quad \text{(zie blz 45, 46)}$$

$$\left(\frac{\chi}{D}\right)_{ben} = \beta_{ben} \cdot \frac{a^3 \pi n}{E I_b} \quad \text{(zie blz 45, 46)}$$

$$\left(\frac{\chi}{D}\right)_{el} = \beta_{el} \frac{a^3 \pi n}{E I_b}$$

Bij een veer met ronde draaddoorsnede en $\nu = 0,3$ werden m.b.v. het rekenprogramma een aantal waarden van β_{el} bepaald.

β_{el}

n	e/n \ ξ	0°	5°	15°	30°
1	1	1,0000	1,1738	2,6292	8,5680
	2	1,0000	1,2173	3,0365	10,460
	4	1,0000	1,2281	3,1383	10,933
	8	1,0000	1,2317	3,1722	11,091
4	1	1,0000	4,6498	35,213	159,93
	2	1,0000	4,6932	35,621	161,82
	4	1,0000	4,7041	35,722	162,29
	8	1,0000	4,7077	35,756	162,45
20	1	1,0000	93,635	869,37	4034,7
	2	1,0000	93,678	869,77	4036,6
	4	1,0000	93,689	869,79	4036,6
	8	1,0000	93,634	864,80	4089,9
100	1	1,0000	2318,3	21722	100910
	2	1,0000	2318,0	21687	100270
	4	1,0000	2308,6	20826	83582
	8	1,0000	2200,7	7011,6	*

* Geen resultaat omdat Qf niet geïnverteerd kan worden (numeriek singulier).

De tabel op de vorige bladzijde voor β_{el} wordt vergeleken met de tabel op blz 46 voor β_{ex} en β_{ben}.

<u>Opmerkingen</u> 1) voor $e/n = 1$ geldt : $\beta_{el} \approx \beta_{ben}$

2) er is een goede overeenstemming tussen β_{el} en β_{ex} bij schroefveren met niet te grote spoed.

3) de invloed van verfijning lijkt afhankelijk te zijn van het aantal windingen. Bij een gering aantal windingen wordt het verschil tussen β_{ex} en β_{el} door verfijning kleiner. Bij een groot aantal windingen is dit juist omgekeerd.
Het is mogelijk dat dit veroorzaakt wordt door grotere rekenonnauwkeurigheden bij een groot aantal windingen, ofwel bij een groot aantal elementen.

Γ

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{ex} = \delta_{\Gamma_{ex}} \cdot \frac{a^3\pi n}{EI_b} \quad \text{(zie blz 47)}$$

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{ben} = 0$$

$$\left(\frac{\Gamma}{D}\right)_{el} = \delta_{\Gamma_{el}} \cdot \frac{a^3\pi n}{EI_b}$$

- voor $\frac{e}{n} = 1$ geldt $\delta_{\Gamma_{el}} \approx 0$, afgezien van waarschijnlijk numerieke onnauwkeurigheden.
- voor $\frac{e}{n} = 2$ geldt hetzelfde.
- voor $\frac{e}{n} = 4$ en $e/n = 8$ worden duidelijk van nul verschillende waarden gevonden, het is alleen de vraag welke waarde we aan deze getallen, die in de tabellen op de volgende bladzijde zijn weergegeven, mogen toekennen.

$\frac{\delta r_{el}}{n}$ voor $\frac{e}{n} = 4$

n \ ξ	0°	5°	15°	30°
1	0,00000	0,00722	0,06764	0,31421
4	0,00000	0,00722	0,06764	0,31420
20	0,00000	0,00722	0,06786	0,31562
100	0,00000	0,00572	−0,38099	4,69770

$\frac{\delta r_{el}}{n}$ voor $\frac{e}{n} = 8$

n \ ξ	0°	5°	15°	30°
1	0,00000	0,00722	0,06764	0,31421
4	0,00000	0,00722	0,06763	0,31420
20	0,00000	0,00741	0,06555	0,30652
100	0,00000	0,03918	1,07840	*

Vergelijking van deze resultaten met die op blz 47 laat zien dat er geen enkele overeenkomst is. Dit kan echter niet alleen het gevolg zijn van numerieke onnauwkeurigheden; we hoeven slechts de waarde van $\delta r_{el}/n$ voor $n = 1$, 4 en 20 te vergelijken om dit te zien.
Andere mogelijkheden zijn:
1) De elementenmethode geeft voor $\frac{r}{D}$ principieel andere resultaten dan de exacte methode.
2) Bij een van beide methoden is een fout gemaakt in opzet of uitwerking.

(Z)

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{ex} = \frac{a^3\pi n}{EI_b} \cdot \delta_{Z\,ex}$$ (zie blz 48)

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{ben} = 0$$

$$\left(\frac{Z}{D}\right)_{el} = \frac{a^3\pi n}{EI_b} \cdot \delta_{Z\,el}$$

Het is te bewijzen dat $\delta_{Z\,el}$ nul moet zijn omdat $(X/N)_{el}$ nul was.

$$\left(\frac{X}{N}\right)_{el} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial A}{\partial D_x}\right)_{N\neq 0} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{D_x = D} = \left(\frac{Z}{D}\right)_{el}$$

andere krachten en mom. nul   andere krachten en mom. nul

[Ditzelfde geldt niet voor de exacte methode omdat daarbij : X : verplaatsing uiteinde veer in x-richting (einde v/d laatste winding)
N : centrale trekkracht (langs as v/d veer)

$$\left(\frac{X}{N}\right)_{ex} \neq \frac{1}{N}\left(\frac{\partial A}{\partial D_x}\right)_{N\neq 0}$$ andere krachten en momenten wel nul]

Afgezien van numerieke onnauwkeurigheden zijn de resultaten van de rekenmachine hiermee in overeenstemming. Deze onnauwkeurigheden zijn groter naarmate de spoed en het aantal windingen groter wordt.

IX Slotconclusies.

De gevolgde methoden zijn vergeleken in twee belastingsgevallen
a) centraal op trek belaste veer
b) door dwarskracht belaste veer

ad a) (χ) De exacte methode, de benaderingsmethode en de elementenmethode geven hetzelfde resultaat.

(Γ) Voor $\frac{e}{n} = 1$ geeft de elementenmethode hetzelfde resultaat als de benaderingsmethode, enigzins afwijkend van de exacte methode.
Voor $e/n > 1$ geeft de elementenmethode iets beter bij de exacte methode aansluitende resultaten, vooral voor veren met kleine spoed. Verfijning van de elementen blijkt zinloos te zijn.

(Z) De benaderingsmethode en de elementenmethode geven dezelfde resultaten, onafhankelijk van de waarde van e/n. Voor normale veren zijn deze resultaten vrijwel gelijk aan de resultaten van de exacte methode.

ad b) (χ) Er blijkt een goede overeenstemming te zijn tussen de resultaten van de exacte en de benaderingsmethode, vooral voor normaal voorkomende veren. Ook de resultaten van de elementenmethode zijn hiermee in overeenstemming. De verschillen van de resultaten van de elementenmethode en de exacte methode kunnen door verfijning van de elementen zowel groter dan kleiner worden, afhankelijk van de waarde van n en van ξ.

(Γ) De resultaten van de elementenmethode sluiten minstens even slecht aan bij die van de exacte methode als de resultaten van de benaderingsmethode.
Voor normaal voorkomende veren is de waarde van Γ echter zo klein dat de genoemde discrepanties onbelangrijk zijn.

(Z) De elementenmethode geeft dezelfde resultaten als de benaderingsmethode. Het verschil met de exacte methode is voor normale veren niet belangrijk.

Een extra optredende moeilijkheid was het optreden van rekenonnauwkeurigheden bij de verwerking van het rekenprogramma door de computer, hetgeen afbreuk doet aan de betrouwbaarheid van de verkregen resultaten.

Als conclusie kan dus volgen:

1 Voor normaal voorkomende schroefveren geven zowel de hier gebruikte benaderingsmethode, als de elementenmethode resultaten, die redelijk met de resultaten van de exacte methode in overeenstemming zijn. Wegens zijn eenvoudigheid geniet de benaderingsmethode de voorkeur.

2 Voor buitengewone schroefveren blijft de exacte methode noodzakelijk.

Eindhoven, 26 juni 1969

W.A.M. BREKELMANS