

Stochastische benadering van de optimalisering van verspanende bewerking

Citation for published version (APA):

Woerkum, van, J. T. J. (1975). *Stochastische benadering van de optimalisering van verspanende bewerking*. (TH Eindhoven. Afd. Werktuigbouwkunde, Laboratorium voor mechanische technologie en werkplaatstechniek : WT rapporten; Vol. WT0368). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1975

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.



technische hogeschool eindhoven
vakgroep produktietechnologie

blz. van ^{WT} blz.
rapport nr. 0368

rapport van de sectie: NuBe

codering:

titel:
Stochastische benadering van de optimalisering
van verspanende bewerkingen.

trefwoord:

auteur(s):
J.T.J. v. Woerkum

sectieleider: Ir. R. Gerritzen

hoogleraar: Prof.Dr.Ir. A.C.H. van der Wolf

samenvatting

prognose

datum:
19.12.75

aantal blz.

**geschikt voor
publicatie in:**

Symbolen en definities

A_e	werkelijke opp. van de spaandoorsnede	mm^2
a	snedediepte	mm
b_e	equivalente spaanbreedte	mm.
c_0	machine- en mantarief	gulden/min
c_t	beitelkosten per snijkant	gulden
D	diameter werkstuk	m
E	elasticiteitsmodulus	kgf/m^2
F	snijkracht	kgf
F_{\max}	maximale toelaatbare snijkracht	kgf
f_{\max}	maximale toelaatbare uitbuiging van het werkstuk	m
h_e	equivalente spaandikte	mm
$h_{e\min}$	minimale toelaatbare h_e	mm
$h_{e\max}$	maximale toelaatbare h_e	mm
h_{\max}	maximale diepte van het ruwheidsprofiel	mm
h_{\lim}	toelaatbare h_{\max}	mm
K	kosten per produkt	gulden
L	te verspanen werkstuklengte	m
L_1	lengte van het uitstekend werkstukmateriaal	m
P	geconsumeerde vermogen	kgfm
P_{\max}	maximale motorvermogen	kgfm
p	kans, waarschijnlijkheid	-
r_e	neusradius	mm
s	aanzet	mm/omw
s_{\min}	minimale toelaatbare aanzet	mm/omw
s_{\max}	maximale toelaatbare aanzet	mm/omw
T	beitellevensduur, standtijd (per snijkant)	min
t_m	verspaningstijd per produkt	min
t_e	gereedchapswisseltijd	min
t_p	steltijd per produkt	min
$u(p)$	integratiegrens (zie (2.27))	-
v	snijnsnelheid	m/s
v_{\min}	minimale toelaatbare snijnsnelheid	m/s
v_{\max}	maximale toelaatbare snijnsnelheid	m/s
XB	slijtage criterium	-

δ	spaanslankheid	-
δ_{\max}	maximale toelaatbare spaanslankheid	-
η	mechanisch rendement	-
χ	snijkantshoek	o
χ'	hulpsnijkantshoek	o

$\tilde{\cdot}$: teken dat aangeeft dat een variabele stochastisch is,

$\bar{\cdot} = E(\tilde{\cdot})$: verwachtingswaarde van ($\tilde{\cdot}$)

$\sigma^2(\tilde{\cdot}) = E[(\tilde{\cdot}) - (\bar{\cdot})]^2$: variantie van ($\tilde{\cdot}$)

$P(\cdot)$: de kans dat (\cdot)

\underline{x} : kolomvektor

\underline{x}^T : rijvektor

Inhoudsopgave

Symbolen en definities

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1 Inleiding

1.1. Optimalisering van de verspanende bewerking.	1
1.2. Doel van het onderzoek.	1
1.3. Indeling van het verslag	2

Hoofdstuk 2

Stochastische behandelwijze van het optimaliseringsprobleem

2.1. Modelaanname	3
2.2. De bijvoorwaarden in het draaiproces	4
2.2.1. Opsomming der bijvoorwaarden	4
2.2.2. Opmerkingen over de bijvoorwaarden	5
2.2.3. Deterministische bijvoorwaarden	6
2.3. Stochastische behandeling van de bijvoorwaarden.	8
2.3.1. Kansbegrenzungen	8
2.3.2. Omzetting van kansbegrenzungen in deterministische bijvoorwaarden	8
2.3.3. Toepassing op de bijvoorwaarden	10
2.3.4. De resulterende bijvoorwaarden	12
2.4. De kostenfunctie in het draaiproces	13
2.5. De rekenprocedure	16
2.6. Opmerking	16

Hoofdstuk 3

Optimalisering met het equivalente verspaningsmodel

3.1. Omtrent de modelaanname.	18
3.2. Het equivalente verspaningsmodel	18
3.3. Benaderingsformules voor de equivalente grootheden	19
3.4. De equivalente bijvoorwaarden en de kostenfunctie	20
3.5. Stochastische behandeling van de equivalente bijvoorwaarden	21
3.5.1. De bijvoorwaarden	21
3.5.2. De kostenfunctie	22
3.6. Conclusie	23

<u>Hoofdstuk 4</u>	24
Bepaling van de coëfficiënten	
4.1. Regressie	24
4.2. Lineaire regressie; de kleinste kwadratenmethode; de parameters	24
4.2.1. Enkelvoudige lineaire regressie	24
4.2.2. Meervoudige lineaire regressie	25
4.3. Schatting van de parameters aan de hand van een eindig aantal realisaties	27
4.3.1. Inleiding	27
4.3.2. Het proces	28
4.3.3. Het model	28
4.3.4. Enkele notaties	29
4.3.5. Formule voor de schatters	30
4.4. Verwachtingswaarde, varianties en covarianties van de schatters	31
4.4.1. De verwachtingswaarde	31
4.4.2. De variantie-covariantie-matrix	32
4.5. Schatting van de procesvariantie	33
4.6. Het model als voorspeller	35
4.7. De betrouwbaarheidsgrenzen van de voorspelling	36
4.8. Resumé	38
4.9. Onderzoek naar de korrektheid van de aannamen	39
4.9.1. Modelaanname	39
4.9.2. Relatie tussen residuën en storingen	40
4.9.3. Aannamen omtrent de storingen	41
4.10 Toepasbaarheid van de regressietechniek in het optimaliseringsprobleem	43
4.11 Toepassing op de standtijd	47
4.12 Toepassing op de snijkracht	51

Hoofdstuk 5

Optimalisering van het verspaningsproces	53
--	----

Appendix I, II, III, IV

Geraadpleegde literatuur

Hoofdstuk 1 INLEIDING

1.1. Optimalisering van de verspanende bewerking.

De bepaling van de optimale verspaningskondities is een belangrijk economisch aspect bij verspanende processen. Daarom zijn dan ook reeds vele publikaties over dit onderwerp verschenen. Een daarin veel gehanteerde methode voor deze optimalisering is als volgt te formuleren: minimaliseer een kostenfunctie onder de bijvoorwaarden, die opgelegd worden door de machine, ^{het} gereedschap en ^{het} werkstuk.

Nu is het bekend, dat aan verschillende variabelen in het verspaningsproces een toevalselement toegekend moet worden, m.a.w. we hebben te maken met grootheden die onder schijnbaar dezelfde kondities verschillende waarden aannemen. Typische voorbeelden hiervan zijn de beetellevensduur (standtijd) en de snijkracht. Deze variabelen worden in optimaliseringsproblemen echter meestal als deterministisch beschouwd, wat zoals zal blijken konsekwenties heeft voor de gevonden optimale verspaningskondities.

1.2. Doel van het onderzoek.

Gezocht is naar een methode om, rekeninghoudend met het stochastisch karakter van verschillende variabelen in bijvoorwaarden en kostenfunctie, optimale verspaningskondities te bepalen.

Aan deze optimale verspaningskondities stellen we de eisen, dat met vooraf bepaalde waarschijnlijkheid aan de bijvoorwaarden voldaan wordt én dat het gevonden optimum in de kostenfunctie eveneens met vooraf bepaalde waarschijnlijkheid de werkelijke kosten bij deze verspaningskondities geeft. Naast het voordeel dat deze methode in de praktijk met betrekking tot de produktiebeheersing meer bruikbare resultaten zal geven, laat zij ook zien, hoe al dan niet stochastische beschouwing van invloed is op de optimaliseringsresultaten. We beperken ons hier tot de draaibewerking bij een gegeven snediediepte. Aanzet en snijsnelheid zijn de onafhankelijke variabelen.

V

1.3. Indeling van het verslag

In hoofdstuk 2 wordt behandeld hoe, met behulp van een aangenomen model voor de standtijd en de snijkracht, een wiskundige formulering voor het gestelde probleem gegeven kan worden. Tevens wordt aandacht besteed aan de BEATHE-procedure MINIFUN, die gebruikt zal worden voor de oplossing van het probleem.

In hoofdstuk 3 worden de mogelijkheden onderzocht genoemde optimalisering te verwezenlijken met gebruik van het in de verspaningsleer bekende equivalente model.

In hoofdstuk 4 worden de coëfficiënten (de parameters) in het aangenomen model voor standtijd en snijkracht bepaald. De regressie-analyse wordt uitgebreid onder de loupe genomen, waarbij zal blijken dat de modelaannee in hoofdstuk 2 gewijzigd dient te worden.

In hoofdstuk 5 tenslotte zullen de resultaten uit hoofdstuk 4 in het ontwikkelde rekenprogramma ingevoerd worden om de gewenste optimalisering uit te voeren.

↑ naar woord!

Hoofdstuk 2 Stochastische behandelwijze van het optimaliseringsprobleem.

2.1. Modelaanname

Bij optimalisering van het draaiproces zijn belangrijke grootheden de standtijd T en de hoofdsnijkracht F . Door de complexiteit van het verspaningsmechanisme aan de beitelpunt zijn geen bruikbare uit de theorie afgeleide formules voor T en F voorhanden. Daarom zijn we aangewezen op empirische formules; op modellen. Veel gebruikt zijn:

$$T = 10^{a_1} v^{a_2} s^{a_3} XB^{a_4} \quad (2.1) \quad \checkmark$$

$$\text{en } F = 10^{a_5} v^{a_6} s^{a_7} a^{a_8} \quad (2.2)$$

waarin v = snijsnelheid $[m/s]$
 s = aanzet $[mm/omw]$
 a = snedediepte $[mm]$
 XB = slijtagekriterium

De exponenten worden bepaald uit experimenten.

Door reeds vooraf een waarde voor het slijtagekriterium V_B te kiezen en doordat wij ons beperken tot één snedediepte gaan (2.1) en (2.2) over in

$$T = 10^{a_1} v^{a_2} s^{a_3} \quad (2.3)$$

$$F = 10^{a_5} v^{a_6} s^{a_7} \quad (2.4)$$

Bij de bepaling van de exponenten in (2.4) moet men er rekening mee houden dat (2.4) gedurende het gehele slijtage-traject van 0 tot XB geldigheid moet hebben.

Wij brengen nu het toevalselement in T en F voor rekening van deze exponenten m.a.w. we voeren de stochastische exponenten $\tilde{\alpha}$ in. We nemen voorlopig aan dat deze $\tilde{\alpha}$'s normaalverdeelde, onafhankelijke variabelen zijn, waarvan de verwachtingswaarden $E(\tilde{\alpha})$ en de varianties $\sigma^2(\tilde{\alpha})$ bekend zijn. Op deze aannamen komen wij uitvoerig terug in hoofdstuk 4. Het voorlopig gehanteerde model voor T wordt nu:

$$T = 10^{\tilde{\alpha}_1} v^{\tilde{\alpha}_2} s^{\tilde{\alpha}_3} \quad (2.5)$$

en voor F:

$$F = 10^{\tilde{\alpha}_5} v^{\tilde{\alpha}_6} s^{\tilde{\alpha}_7} \quad (2.6)$$

2.2. De bijvoorwaarden in het draaiproces.

2.2.1. Opsomming der bijvoorwaarden.

We wijzen er nogmaals op dat we ons bepalen tot één snedediepte. De volgende bijvoorwaarden kunnen onderscheiden worden:

A. Bijvoorwaarden opgelegd door beitelspecificaties.

- a $v \leq v_{\max}$
- b $v \geq v_{\min}$
- c $s \leq s_{\max}$
- d $s \geq s_{\min}$

Hierdoor wordt het toepassingsgebied van het beitelmateriaal vastgelegd.

B. Bijvoorwaarden opgelegd door de machine.

- e $F \leq F_{\max}$

De snijkracht moet kleiner dan een bepaalde waarde blijven om geen al te grote vormafwijkingen in de machine te veroorzaken, die de werkstukgeometrie beïnvloeden.

- f $P \leq P_{\max}$

in functie van

Het vermogen nodig voor verspaning kan het maximale motorvermogen niet overschrijden.

- g een stabiliteitskriterium.

Het gebied waarbinnen de verspaning stabiel is, wordt bepaald door het optreden van chatter, adhesie en opbouwsnijkant, kortom verschijnselen met een toevalselement. We nemen uit lit.1 de empirische formule

$$s.v \tilde{\alpha}_{11} \geq 10 \tilde{\alpha}_{12} \quad (2.7)$$

√√

en nemen aan dat deze althans om een en ander te demonstreren voldoet. Hierin zijn $\tilde{\alpha}_{11}$ en $\tilde{\alpha}_{12}$ normaal verdeeld en onafhankelijk verondersteld. Hun deterministische tegenhangers noemen we resp. a_{11} en a_{12} .

Een ander stabiliteitskriterium kan zijn, dat de spaanslankheid δ een bepaalde maximumwaarde niet mag overschrijden, zoals dit ook in MITURN gehanteerd wordt.

C. Bijvoorwaarden opgelegd door werkstukspecificatie.

h een ruweidskriterium

De maximale diepte van het ruweidprofiel, van het bewerkte vlak, die gerelateerd kan worden aan de aanzet, mag een gegeven waarde h_{lim} niet overschrijden.

$$h_{max} \leq h_{lim}$$

2.2.2. Opmerkingen over de bijvoorwaarden.

Ad A:

Aangenomen is dat de hier genoemde uiterste waarden van snijsnelheid en aanzet binnen het bereik van de op de machine beschikbare snijsnelheden en aanzetten. Zonodig dienen v_{max} , v_{min} , s_{max} en s_{min} aan de machine aangepast te worden.

Ad e:

Bij slanke werkstukken dient de maximum snijkraft F_{max} bepaald te worden door de toelaatbare uitbuiging van het werkstuk. Naar Brewer(lit.3) geldt voor een slank werkstuk bij een uitgangsvorm met lengte L_1 [m] en diameter D [m].

$$F_{max} = \frac{2 \pi \cdot E D^4}{3 L_1^3} \cdot f_{max} \quad (2.8)$$

waarin f_{max} = toelaatbare uitbuiging [m]

E = elasticiteitsmodulus van het
werkstukmateriaal [kgf.m⁻²]

Ad f:

Voor het vermogen schrijven we:

$$P = F \cdot v / \eta \quad (2.9)$$

waarin η het mechanisch rendement van het gereedschapswerktuig is. In het algemeen zal η , bij gebruik van wisselwielen of

tandwielkast een functie van de snijsnelheid zijn, dus

$\eta = \eta(v)$. We beschouwen echter η als konstante.

Ad h:

Voor de maximale diepte van het ruwheidsprofiel, schrijven we

$$h_{\max} = s^2 / 8r_e \quad (2.10)$$

waarin r_e de neusradius van de beitel is. Deze relatie is echter alleen exakt voor 'kleine' aanzet s en geeft alleen wanneer hoge eisen aan het bewerkte vlak gesteld worden, dus bij kleine h_{\lim} , de werkelijke waarde van de grootste profieldiepte.

2.2.3. Deterministische bijvoorwaarden.

Bij deterministische behandeling van de bijvoorwaarden, zien deze er na logaritmische transformatie als volgt uit:

$$\underline{a} \quad g_1 = \log v_{\max} - x_1 \geq 0 \quad (2.11)$$

$$\underline{b} \quad g_2 = x_1 - \log v_{\min} \geq 0 \quad (2.12)$$

$$\underline{c} \quad g_3 = \log s_{\max} - x_2 \geq 0 \quad (2.13)$$

$$\underline{d} \quad g_4 = x_2 - \log s_{\min} \geq 0 \quad (2.14)$$

$$\underline{e} \quad g_5 = \log F_{\max} - a_5 - a_6 x_1 - a_7 x_2 \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\underline{f} \quad g_6 = \log \eta \cdot P_{\max} - a_5 - (a_6 + 1) x_1 - a_7 x_2 \geq 0 \quad (2.16)$$

$$\underline{g} \quad g_7 = -a_{12} + a_{11} x_1 + x_2 \geq 0 \quad (2.17)$$

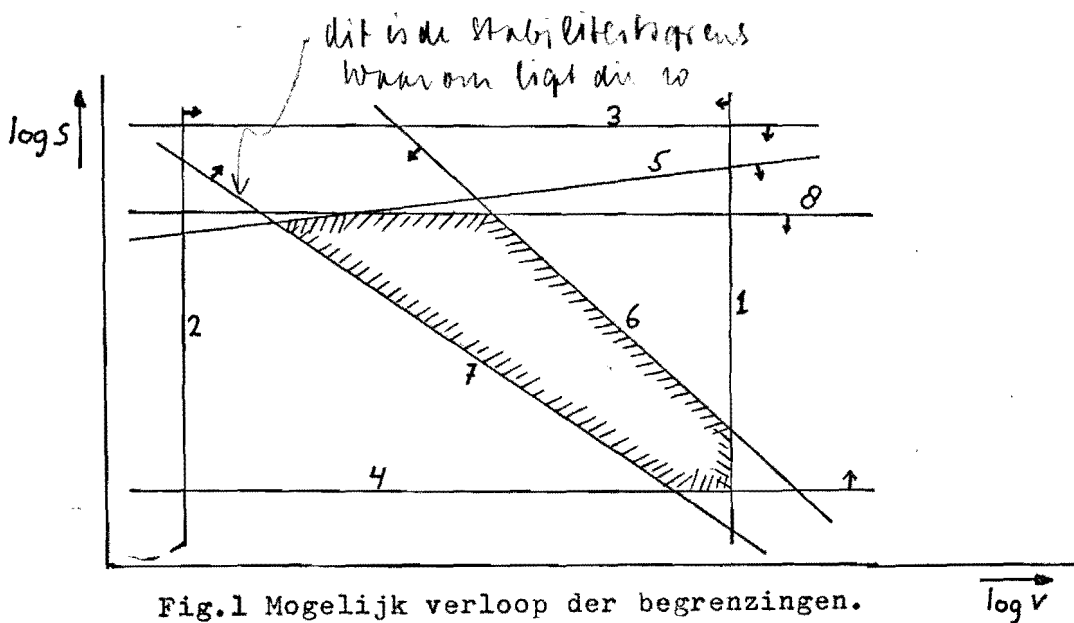
$$\underline{h} \quad g_8 = \log h_{\lim} - 2x_2 + \log 8r_e \geq 0 \quad (2.18)$$

waarin: $x_1 = \log v$

$x_2 = \log s$

In fig. 1 zijn de begrenzingen van deze bijvoorwaarden geschetst. De nummering komt overeen met ~~die~~ van (2.11) t/m (2.18)

de g-indexen



We zien dat bijvoorwaarden g_5 , g_6 en g_7 coëfficiënten a bevatten. Deze zullen we nu vervangen door de stochastische coëfficiënten $\tilde{\alpha}$:

$$g_5 = \log F_{\max} - \tilde{\alpha}_5 - \tilde{\alpha}_6 x_1 - \tilde{\alpha}_7 x_2 \geq 0$$

$$g_6 = \log \eta_{\max}^P - \tilde{\alpha}_5 - (\tilde{\alpha}_6 + 1) x_1 - \tilde{\alpha}_7 x_2 \geq 0$$

$$g_7 = -\tilde{\alpha}_{12} + \tilde{\alpha}_{11} x_1 + x_2 \geq 0$$

2.3. Stochastische behandeling van de bijvoorwaarden.

2.3.1. Kansbegrenzungen

We kunnen ons de bijvoorwaarden g_5 , g_6 en g_7 voorstellen als stochastische ongelijkheden. In formule:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \geq \tilde{d} \quad (2.19)$$

waarin \tilde{c}_j en \tilde{d} normaal verdeelde onafhankelijke variabelen zijn met verwachtingswaarden \bar{c}_j en \bar{d} en varianties $\sigma^2(\tilde{c}_j)$ en $\sigma^2(\tilde{d})$.

B.v. g_6 :

$$\begin{array}{lll} \tilde{c}_1 = -(\tilde{\alpha}_{6+1}) & \bar{c}_1 = -(\bar{\alpha}_{6+1}) & \sigma^2(\tilde{c}_1) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_6) \\ \tilde{c}_2 = -\tilde{\alpha}_7 & \bar{c}_2 = -\bar{\alpha}_7 & \sigma^2(\tilde{c}_2) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_7) \\ \tilde{d} = \tilde{\alpha}_5 - \log \eta^{P_{\max}} & \bar{d} = \bar{\alpha}_5 - \log \eta^{P_{\max}} & \sigma^2(\tilde{d}) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_5) \end{array}$$

De ruimte x_1, \dots, x_n , waarin (2.19) geldt ligt door het stochastische karakter van \tilde{c}_j en \tilde{d} niet eenduidig vast. We zijn nu geïnteresseerd in de ruimte x_1, \dots, x_n , waarin geldt dat met een kans, groter dan p , aan bovenstaande stochastische ongelijkheid voldaan wordt. Voor deze ruimte moet dus gelden:

$$P \left(\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \geq \tilde{d} \right) \geq p \quad (2.20)$$

Naar analogie met de engelse benaming "chance-constraint", noemen we (2.20) een kansbegrenzing. Deze kansbegrenzing is dus die ruimte x_1, \dots, x_n , waarin de kans groter dan of gelijk aan p is, dat aan de ongelijkheid

$$\sum \tilde{c}_j x_j \geq \tilde{d}$$

voldaan wordt.

2.3.2. Omzetting van kansbegrenzungen in deterministische bijvoorwaarden.

Wij voeren een nieuwe stochastische variabele \tilde{y} in:

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j - \tilde{d} \quad (2.21)$$

Uit (2.21) volgt dat \tilde{y} normaal verdeeld is. De verwachtingswaarde van \tilde{y} is:

$$\bar{y} = \sum \bar{c}_j x_j - \bar{d} \quad (2.22)$$

Daar \tilde{c}_j ($j=1, \dots, n$) en $\tilde{\alpha}$ onafhankelijk zijn, is de variantie van \tilde{y} :

$$\sigma^2(\tilde{y}) = \sum_{j=1}^n \sigma^2(\tilde{c}_j) \cdot x_j^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}) \quad (2.23)$$

De kansbegrenzing wordt nu:

$$\boxed{P(\tilde{y} \geq 0) \geq p} \quad (2.24)$$

We beschouwen nu eerst het linkerlid $P(\tilde{y} \geq 0)$. We normeren \tilde{y} als volgt:

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{y} - \bar{y}}{\sigma(\tilde{y})} \quad (2.25)$$

Nu is \tilde{u} normaal verdeeld met verwachtingswaarde 0 en variantie 1, zodat geldt:

$$P(\tilde{y} \geq 0) = P\left[\tilde{u} \geq \frac{-\bar{y}}{\sigma(\tilde{y})}\right] = \int_{\frac{-\bar{y}}{\sigma(\tilde{y})}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cdot dt \quad (2.26)$$

Voor het rechterlid p geldt:

$$p = \int_{-u(p)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cdot dt \quad (2.27)$$

Deze $u(p)$ kan voor gegeven p opgezocht worden in tabel 1.1 in het Statistisch Compendium (lit.4), wanneer men bedenkt dat de integraal in (2.27) hetzelfde resultaat geeft als de integraal van $-\infty$ tot $+u(p)$.

(2.26) en (2.27) in (2.24) geeft:

$$\frac{-\bar{y}}{\sigma(\tilde{y})} \leq -u(p)$$

$$\text{of } \bar{y} - u(p) \cdot \sigma(\tilde{y}) \geq 0 \quad (2.28)$$

Met (2.22) en (2.23) wordt dit:

$$\sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j - \bar{d} - u(p) \cdot \left[\sum_{j=1}^n \sigma^2(\tilde{c}_j) \cdot x_j^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (2.29)$$

Deze niet lineaire deterministische begrenzing is equivalent aan de kansbegrenzing.

2.3.3. Toepassing op de bijvoorwaarden.

We passen (2.29) toe op de snijskrachtsbegrenzing:

$$\log F_{\max} - \tilde{\alpha}_5 - \tilde{\alpha}_6 x_1 - \tilde{\alpha}_7 x_2 \geq 0$$

Stel $\tilde{c}_1 = -\tilde{\alpha}_6$, $\tilde{c}_2 = -\tilde{\alpha}_7$, $\tilde{d} = \tilde{\alpha}_5 - \log F_{\max}$

Zodat: $\bar{c}_1 = -\bar{\alpha}_6$, $\bar{c}_2 = -\bar{\alpha}_7$, $\bar{d} = \bar{\alpha}_5 - \log F_{\max}$

en: $\sigma^2(\tilde{c}_1) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_6)$, $\sigma^2(\tilde{c}_2) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_7)$, $\sigma^2(\tilde{d}) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_5)$

(2.29) levert:

$$\log F_{\max} - \bar{\alpha}_5 - \bar{\alpha}_6 x_1 - \bar{\alpha}_7 x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_6) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_7) x_2^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_5) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Toepassing op de vermogensbegrenzing:

$$\log \eta^P_{\max} - \bar{\alpha}_5 - (\bar{\alpha}_6 + 1) x_1 - \bar{\alpha}_7 x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_6) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_7) x_2^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_5) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Toepassing op de stabiliteitsbegrenzing:

$$-\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11} x_1 + x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_{11}) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_{12}) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Deze begrenzingen zijn geplot in fig. 2 voor enkele waarden van p (50%, 75%, 90%, 95% en 99%).

In appendix I zijn de bijbehorende numerieke waarden gegeven.

Om de berekeningen in het rekenprogramma te vereenvoudigen

definiëren we nu: $x_1 = \log v$

$$x_2 = \log(100s)$$

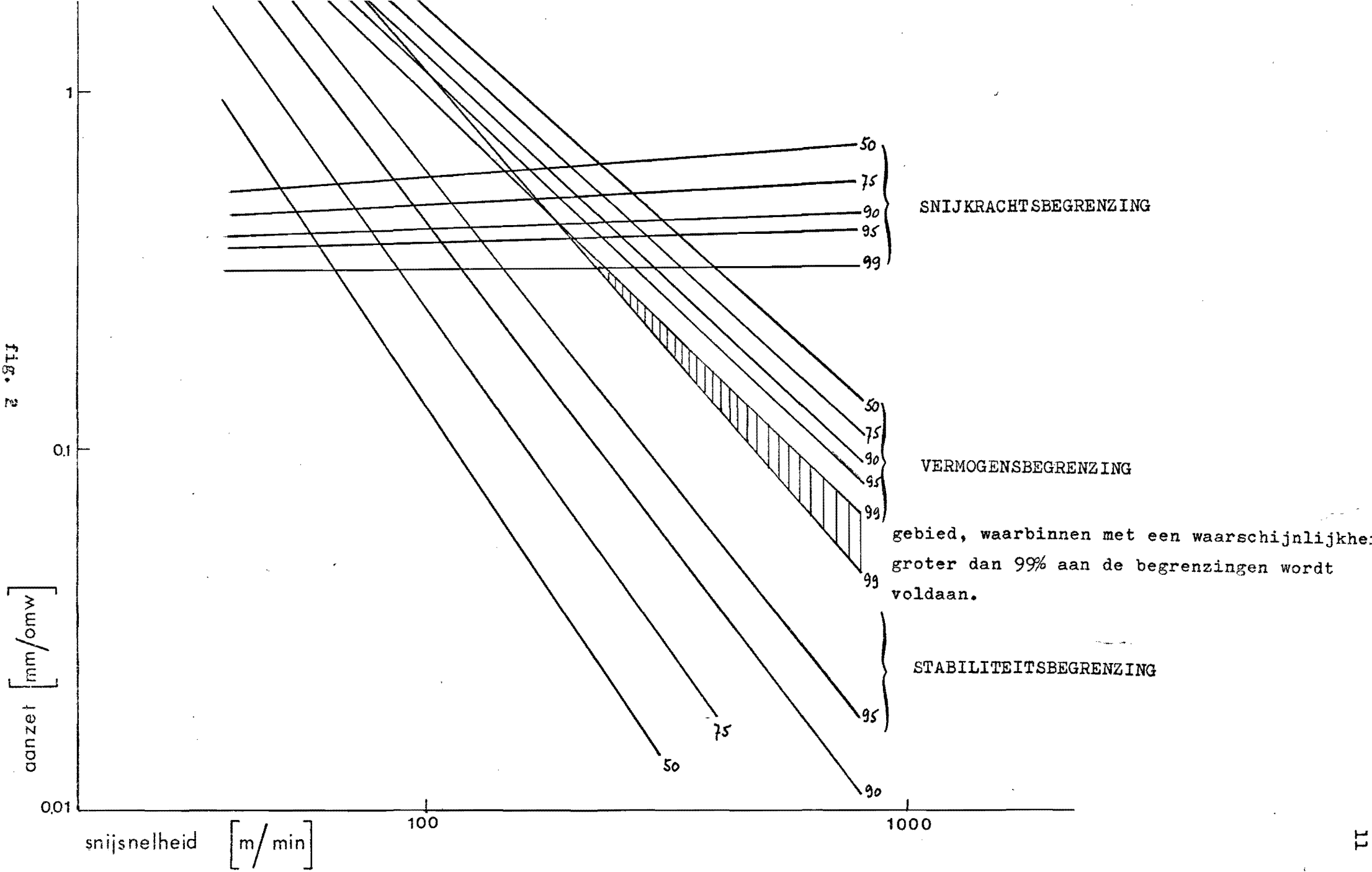
zodat zowel x_1 als x_2 positieve waarden aan zullen nemen, daar we de snijsnelheid v en de aanzet s groter dan resp. 1m/s en 0.01mm/omw. zullen houden.

(2.6) wordt dan:

$$F = 10^{\tilde{\alpha}_9} v^{\tilde{\alpha}_6} (100s)^{\tilde{\alpha}_7}$$

waarin: $\tilde{\alpha}_9 = \tilde{\alpha}_5 - 2\tilde{\alpha}_7$

fig. 2



2.3.4. De resulterende bijvoorwaarden.

$$g_1 = \log v_{\max} - x_1 \geq 0 \quad (2.31)$$

$$g_2 = x_1 - \log v_{\min} \geq 0 \quad (2.32)$$

$$g_3 = \log(100s_{\max}) - x_2 \geq 0 \quad (2.33)$$

$$g_4 = x_2 - \log(100s_{\min}) \geq 0 \quad (2.34)$$

$$g_5 = \log F_{\max} - \bar{\alpha}_9 - \bar{\alpha}_6 x_1 - \bar{\alpha}_7 x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_6) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_7) x_2^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_9) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (2.35)$$

$$g_6 = \log \eta^P_{\max} - \bar{\alpha}_9 - (\bar{\alpha}_6 + 1)x_1 - \bar{\alpha}_7 x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_6) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_7) x_2^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_9) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (2.36)$$

$$g_7 = -\bar{\alpha}_{12} - 2 + \bar{\alpha}_{11} x_1 + x_2 - u(p) \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_{11}) x_1^2 + \sigma^2(\alpha_{12}) \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (2.37)$$

$$g_8 = \log h_{\lim} - 2(x_2 - 2) + \log 8r_e \geq 0 \quad (2.38) \quad \left. \vphantom{g_8} \right\} V$$

waarin: $x_1 = \log v$
 $x_2 = \log(100s)$

Uiteraard hoeft p in g_5 , g_6 en g_7 niet dezelfde waarde te hebben. Men kan p beschouwen als een maat voor het risico dat we bij een bijvoorwaarde willen nemen.

2.4. De kostenfunctie in het draaiproces.

Voor de kostenfunctie nemen we de kosten per produkt. Deze worden gegeven als som van resp. de machinekosten, de gereedschapswisselkosten, gereedschapskosten, en steltijdskosten per produkt:

$$K = c_0 t_m + (c_0 t_e + c_t) t_m / T + c_0 t_p \quad (2.39)$$

K = kosten per produkt	[gulden]
c_0 = machine- én mantarief	[gulden/min]
t_m = verspaningstijd per produkt	[min]
t_e = gereedschapswisseltijd	[min]
c_t = beitelkosten per snijkant	[gulden]
T = standtijd van de beitel	[min]
t_p = steltijd per produkt	[min]

In (2.39) zijn t_m en T variabelen; c_0 , c_t , t_e en t_p konstanten. De verspaningstijd t_m is:

$$t_m = \frac{1000 \pi \cdot DL}{60v \cdot s} \quad (2.40)$$

D = diameter werkstuk	[m]
L = te verspanen werkstuklengte	[m]
v = snijsnelheid	[m/s]
s = aanzet	[mm/omw]

De standtijd T is (met (2.5)):

$$T = 10^{\tilde{\alpha}_1} v^{\tilde{\alpha}_2} (100s)^{\tilde{\alpha}_3} \quad (2.41)$$

waarin $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1 - 2\tilde{\alpha}_3$

Om een indruk te krijgen van het verloop van deze kostenfunctie (2.39), zijn in fig. 3 isokostenkurves in het log v-log(100s)-vlak geschetst. Daarbij zijn de exponenten in (2.41) beschouwd als deterministisch (a_{10} , a_2 en a_3).

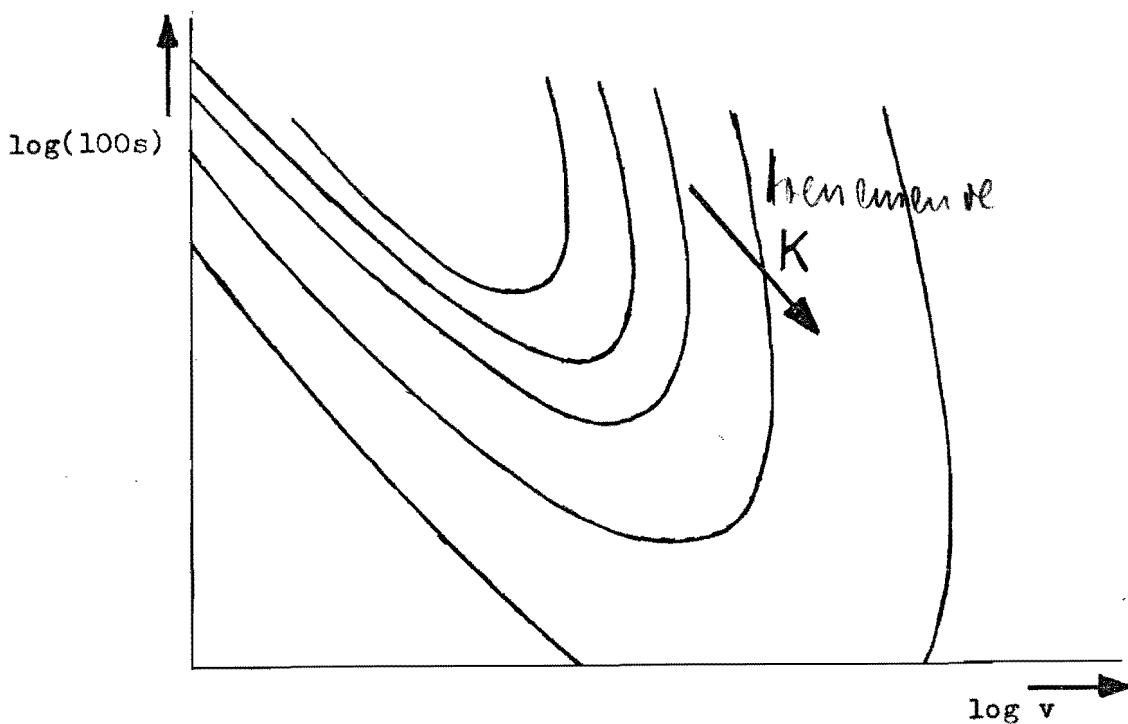


fig.3 Isokostenkurves

Daar T echter een stochastische variabele is, is ook K stochastisch m.a.w. de produktkosten zijn niet volledig bepaald door v en s . In plaats van T uit (2.41) vullen we de ondergrens van het eenzijdige $p\%$ -betrouwbaarheidsinterval van T , te noemen T_{100-p} , in (2.39) in.

$$(2.41) \text{ wordt: } \log T = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\alpha}_3 x_2 \quad (2.42)$$

$$\overline{\log T} = \overline{\alpha}_{10} + \overline{\alpha}_2 x_1 + \overline{\alpha}_3 x_2 \quad (2.43)$$

$$\sigma^2(\log T) = \sigma^2(\tilde{\alpha}_{10}) + \sigma^2(\tilde{\alpha}_2) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_3) x_2^2 \quad (2.44)$$

Daar $\tilde{\alpha}_{10}$, $\tilde{\alpha}_2$ en $\tilde{\alpha}_3$ normaal verdeeld verondersteld zijn, is ook $\log T$ normaal verdeeld, zodat geldt:

$$(\log T)_{100-p} = \overline{\log T} - u(p) \cdot \sigma(\log T) \quad (2.45)$$

Hoewel de verdeling van T niet normaal is, kunnen we toch de ondergrens van het $p\%$ -betrouwbaarheidsinterval geven:

$$T_{100-p} = 10^{\overline{\log T} - u(p) \cdot \sigma(\log T)}$$

ofwel:

$$T_{100-p} = 10^{\left\{ \overline{\alpha}_{10} + \overline{\alpha}_2 x_1 + \overline{\alpha}_3 x_2 - u(p) \cdot \left[\sigma^2(\tilde{\alpha}_2) x_1^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_3) x_2^2 + \sigma^2(\tilde{\alpha}_{10}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (2.46)$$

(2.39) wordt dan met (2.40):

$$K = \frac{1000\pi DL}{60 \cdot 10^{x_1 + x_2 - 2}} \left[c_0 + \frac{1}{T_{100-p}} (c_0 t_e + c_t) \right] + c_0 t_p \quad (2.47)$$

met T_{100-p} als in (2.46).

We minimaliseren K in (2.47) naar x_1 en x_2 (onder bijvoorwaarden). Dit levert T_{100-p}^0 , K^0 , x_1^0 en x_2^0 .

Voor dit optimum geldt met een waarschijnlijkheid van p % dat de werkelijke standtijd groter is dan T_{100-p}^0 en dat dus de werkelijke kosten kleiner zijn dan K^0 .

Standtijd en levensduur zijn begrippen die vaak verwisseld worden. In het voorafgaande wordt onder standtijd steeds de levensduur verstaan. De standtijd (de tijd na welke we de beitel vervangen) nemen we nu ter grootte T_{100-p}^0 .

De kans dat de beitel reeds vóór het einde der standtijd versleten is, is dus $(100-p)$ %.

De werkelijke kosten worden bij deze standtijd eenduidig bepaald door K^0 , zijnde het minimum van K in (2.47).

Richtlijnen om tot een optimale keuze van p te komen, worden gegeven in hoofdstuk 4.

2.5. De rekenprocedure

Optimalisering van het verspaningsproces is nu herleid tot het volgende probleem:

Minimaliseer de niet-lineaire kostenfunctie (2.47) onder de lineaire bijvoorwaarden (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) en (2.38) én onder de niet-lineaire bijvoorwaarden (2.35), (2.36) en (2.37).

We maken voor de oplossing van dit probleem gebruik van de BEATHE-procedure MINIFUN (minimization of functions), een procedure voor oplossing van niet-lineaire optimaliseringsproblemen met en zonder bijvoorwaarden.

Het probleem met bijvoorwaarden wordt opgelost door 'sequential unconstrained minimization' van een zogenaamde penalty-functie (SUMT). Daartoe staan een nulde-orde, een eerste-orde en een tweede-orde methode ter beschikking, die resp. geen, de eerste, de eerste en de tweede afgeleiden van bijvoorwaarden en kostenfunctie vereisen.

Wij kiezen voor de eerste-orde methode. 

Voor een uitvoerige beschrijving van MINIFUN wordt verwezen naar lit.5.

V

2.6. Opmerking

Naast de reeds genoemde bijvoorwaarden, kunnen nog andere bijvoorwaarden ingevoerd worden. Wij geven twee voorbeelden:

a. Een bijvoorwaarde van technologische aard.

Wanneer in de toekomst een theoretische of een empirische formule voor handen komt, die kan fungeren als begrenzing van het gebied, waarbinnen de spaan een gewenste vorm heeft, kan deze als stochastische begrenzing in het programma ingepast worden.

b. Een bijvoorwaarde van organisatorische aard.

Stel men wil in een produktiestraat met één beitel N werkstukken maken, dan de beitel vervangen en met de nieuwe weer N werkstukken maken enz.

Er kan dan de bijvoorwaarde $P(T \geq N \cdot t_m) \geq p$ ingevoerd worden.

De kosten per produkt worden dan gegeven door

$K = c_{0m}t_m + (c_{0e}t_e + c_t)/N + c_{0p}t_p$. De kostenfunctie is dus deterministisch.

Het gevonden optimum geeft de minimale produktkosten bij bewerking van N produkten per beitel, onder de voorwaarde, dat met een waarschijnlijkheid p de beitel niet versleten zal zijn, voordat deze N werkstukken allen bewerkt zijn.

Hoofdstuk 3 Optimalisering met het equivalente verspaningsmodel.

3.1. Omtrent de modelaanname

Het in 2.1. aangenomen model heeft als groot bezwaar, dat het, na bepaling van de exponenten, slechts toepasbaar is bij één beitelgeometrie, bij één werkstukmateriaal en bij één beitel-materiaal.

Aangezien het bepalen van de verwachtingswaarde en variantie van deze exponenten een kostbare en tijdrovende zaak is, is gezocht naar formules waarin zoveel mogelijk geometrische parameters samengevat zijn en waarin de exponenten slechts materiaal afhankelijk zijn. De exponenten behoeven dan voor één beitelwerkstuk-kombinatie maar één keer bepaald te worden en de formules zijn dan met deze exponenten voor elke willekeurige beitelgeometrie toepasbaar.

Men heeft deze formules gevonden in het equivalente model. In dit hoofdstuk zal onderzocht worden hoe optimalisering volgens voorgaande theorie uitgevoerd kan worden met gebruik van het equivalente model.

3.2. Het equivalente verspaningsmodel.

In dit model verstaat men onder de equivalente spaanbreedte b_e de totale actieve lengte van de snijkant van de beitel. De equivalente spaandikte h_e is het werkelijke oppervlak van de onvervormde spaandoorsnede A_e gedeeld door de equivalente spaanbreedte.

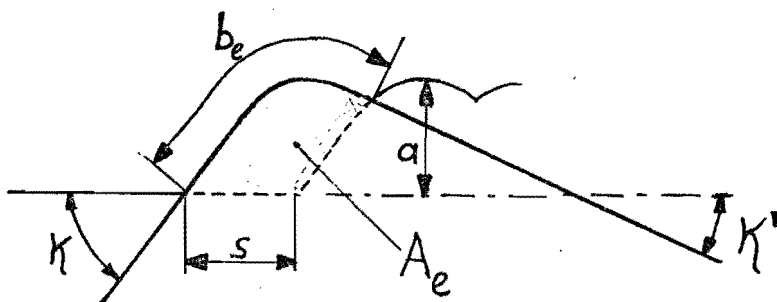


fig. 4 De equivalente snedegrootheden.

Invoering van de begrippen b_e en h_e biedt het voordeel dat de geometrische parameters a , s , r_e , κ en κ' hierin samengevat zijn, zodat formules, die gebaseerd zijn op b_e en h_e , voor snijkracht en levensduur voor elke willekeurige snijgeometrie toepasbaar zijn.

De gereduceerde snijkracht, d.i. de snijkracht per lengte-eenheid van de aktieve snijkant is een lineaire funktie van de equivalente spaandikte. In formule:

$$\frac{F}{b_e} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e, \quad \tilde{\alpha} \text{ en } \tilde{\beta} \text{ stochastisch} \quad (3.1)$$

De formule voor de levensduur:

$$T = 10^{\tilde{\gamma}_1} v^{\tilde{\gamma}_2} h_e^{\tilde{\gamma}_3}, \quad \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \text{ en } \tilde{\gamma}_3 \text{ stochastisch} \quad (3.2)$$

Verwachtingswaarde en variantie van $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ en $\tilde{\gamma}_3$ hoeven voor een beetel-werkstuk-kombinatie slechts éénmaal bepaald te worden.

Voor meer informatie over dit equivalente model, wordt verwezen naar lit.6. Hierin treft men ook de formules voor berekening van h_e , b_e en A_e bij een willekeurige snijgeometrie.

3.3 Benaderingsformules voor de equivalente snedegrootheden.

We beperken ons tot een optimalisering bij een konstante snedediepte a . Verder wordt voor r_e , κ en κ' een vaste waarde genomen.

De equivalente spaandikte h_e , die in dit optimaliseringsprobleem naast v de onafhankelijke variabele wordt, en de equivalente spaanbreedte b_e kunnen nu beschouwd worden als funkties van de aanzet s , m.a.w. $h_e = h_e(s)$ en $b_e = b_e(s)$.

Het gebruik van de exakte formules, zoals die vermeld staan in lit.6, levert de moeilijkheid op, dat s onmogelijk in b_e en h_e uitgedrukt kan worden en dus ook niet b_e in h_e . De bijvoorwaarden en de kostenfunctie kunnen daarom niet als funktie van h_e en v geschreven worden.

Bovendien moet men dan vier geometrische kondities onderscheiden waarbij verschillende formules behoren.

Om deze moeilijkheden te vermijden, gaan we uit van de benaderingsformules:

$$b_e = \frac{a-r_e(1-\cos\kappa)}{\sin\kappa} + \frac{\kappa\pi r_e}{180} + \frac{s}{2} \quad (3.3)$$

$$A_e = a.s \quad (3.4)$$

waarin: $\kappa =$ snijkantshoek $[^\circ]$

De eerste twee termen in (3.3) kunnen we als konstant beschouwen. We stellen daarom:

$$C = \frac{a-r_e(1-\cos\kappa)}{\sin\kappa} + \frac{\kappa\pi r_e}{180} \quad (3.5)$$

De benaderingsformules luiden nu:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_e = C + s/2 \\ A_e = a.s \\ h_e = a.s/(C + s/2) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.6) \\ (3.7) \\ (3.8) \end{array}$$

Uit (3.8) kan afgeleid worden:

$$s = \frac{C.h_e}{a-h_e/2} \quad (3.9)$$

Wanneer een optimale h_e berekend is, kan met deze formule de bijbehorende aanzet s gevonden worden.

3.4 De equivalente bijvoorwaarden en de kostenfunctie.

3.4.1. De bijvoorwaarden

De bijvoorwaarden zien er nu als volgt uit:

De snijsnelheidsbegrenzing

Deze blijft uiteraard ongewijzigd.

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max} \quad (3.10)$$

De aanzetbegrenzing

$$h_{e \min} \leq h_e \leq h_{e \max} \quad (3.11)$$

waarin $h_{e \min}$ en $h_{e \max}$ berekend worden door in (3.8) resp. s_{\min} en s_{\max} in te voeren.

De snijkrachtsbegrenzing

Met $F_c = b_e (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e)$:

$$C \cdot \frac{2a}{2a-h_e} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e) \leq F_{\max} \quad (3.12)$$

De vermogensbegrenzing

Met $P = v \cdot b_e (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e)$

$$C \frac{2a}{2a-h_e} \cdot v \cdot (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e) \leq \eta^P \max \quad (3.13)$$

De stabiliteitsbegrenzing

Gekozen is hier voor een maximaal toelaatbare spaanslankheid δ_{\max}

Met $\delta = a/s \cdot \sin^2 \chi$:

$$h_e \leq \frac{a^2}{\delta_{\max} C \sin^2 \chi + a/2} \quad (3.14)$$

De ruwheidsbegrenzing

Met (3.8) en $s \leq \sqrt{8r_e \cdot h_{\lim}}$:

$$h_e \leq \frac{2a \sqrt{8r_e h_{\lim}}}{2C + \sqrt{8r_e h_{\lim}}} \quad (3.15)$$

3.4.2. De kostenfunctie

We schrijven de kostenfunctie als functie van v en h_e :

$$K = t_m \cdot \left[c_0 + (c_0 t_e + c_t) / T \right] + c_0 t_p \quad (3.16)$$

$$\text{waarin } t_m = \frac{1000 \pi DL}{60v} \left[\frac{2a-h_e}{2Ch_e} \right] \quad (3.17)$$

$$\text{en } T = 10 \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3$$

3.5. Stochastische behandeling van de equivalente bijvoorwaarden.3.5.1. De bijvoorwaarden

Slechts de vermogensbegrenzing en de snijkrachtsbegrenzing bevatten stochastische coëfficiënten.

De vermogensbegrenzing wordt nu als volgt behandeld:

Stel: $f(h_e) = \frac{C \cdot 2a}{2a - h_e}$ en $\tilde{y} = \eta P_{\max}^{-Fv}$

Dan is $\tilde{y} = \eta P_{\max}^{-f(h_e)} \cdot v \cdot (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} h_e)$

zodat $\bar{y} = -f(h_e) \cdot v \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} h_e) + \eta P_{\max}$
 $\sigma^2(\tilde{y}) = f^2(h_e) \cdot v^2 \cdot [\sigma^2(\tilde{\alpha}) + \sigma^2(\tilde{\beta}) h_e^2]$

De kansbegrenzing $P(\tilde{y} \geq 0) \geq p$ is equivalent met $\bar{y} - u(p) \cdot \sigma(\tilde{y}) \geq 0$, zodat de vermogensbegrenzing wordt:

$$-v \cdot f(h_e) \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} h_e) + \eta P_{\max} - u(p) \cdot f(h_e) \cdot v \cdot [\sigma^2(\tilde{\alpha}) + \sigma^2(\tilde{\beta}) h_e^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (3.18)$$

De snijkrachtsbegrenzing wordt analoog behandeld. Dit levert:

$$-f(h_e) \cdot (\bar{\alpha} + \bar{\beta} h_e) + F_{\max} - u(p) \cdot f(h_e) \cdot [\sigma^2(\tilde{\alpha}) + \sigma^2(\tilde{\beta}) h_e^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (3.19)$$

3.5.2. De kostenfunctie

Voor T vullen we ook nu weer de ondergrens van een betrouwbaarheidsinterval voor T in (3.16) in.

$$\overline{\log T} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \log v + \bar{y}_3 \log h_e$$

$$\sigma^2(\log T) = \sigma^2(\tilde{y}_1) + \sigma^2(\tilde{y}_2) \log^2 v + \sigma^2(\tilde{y}_3) \log^2 h_e$$

$$(\log T)_{100-p} = \log T_{100-p} = \overline{\log T} - u(p) \cdot \sigma(\log T)$$

$$T_{100-p} = 10^{\left\{ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \log v + \bar{y}_3 \log h_e - u(p) \cdot [\sigma^2(\tilde{y}_1) + \sigma^2(\tilde{y}_2) \log^2 v + \sigma^2(\tilde{y}_3) \log^2 h_e]^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (3.20)$$

Dus de kostenfunctie wordt:

$$K = \frac{1000 \pi DL}{60v} \cdot \frac{2a - h_e}{2Ch_e} \cdot \left[c_0 + (c_0^t + c_t) \frac{1}{T_{100-p}} \right] + c_0^t p$$

met T_{100-p} als in (3.20)

3.6. Conclusie

De opgezette methode om uitgaande van het equivalente model het draaiproces te optimaliseren, geeft rekentechnisch geen problemen. We hebben hier echter gebruik gemaakt van benaderingsformules voor de snedegrootheden h_e , A_e en b_e . Het verdient aanbeveling, om de invloed van de fout die hierdoor geïntroduceerd wordt te vergelijken met de invloed van het stochastisch karakter van de coëfficiënten in (3.1) en (3.2).

Blijkt de fout t.g.v. de benaderingsformules te verwaarlozen, dan kan met deze methode een draaiproces met willekeurige snijgeometrie en snedediepte geoptimaliseerd worden op de manier zoals in hoofdstuk 2 behandeld is.

Hoofdstuk 4 Bepaling van de coëfficiënten.

4.1. Regressie.

Stel \tilde{x} en \tilde{y} zijn twee stochastische variabelen met gemeenschappelijke continue kansdichtheidsfunctie $f(x,y)$.

Dan is de marginale verdeling van \tilde{x}

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy$$

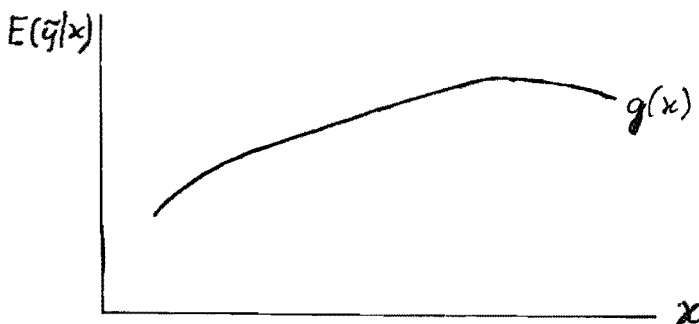
We zijn geïnteresseerd in de verdeling van \tilde{y} onder de voorwaarde dat \tilde{x} een bepaalde waarde x aanneemt, m.a.w. in de voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie $f(\tilde{y}|\tilde{x} = x)$. Er geldt:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad \rightarrow \text{begrijpt de heer niet zonder meer!}$$

De voorwaardelijke verwachtingswaarde van y is nu:

$$E(\tilde{y}|\tilde{x}=x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(x,y)dy}{f_1(x)} = g(x)$$

$g(x)$ wordt de regressie van y op x genoemd.



Begrippen:

- f is een tweedimensionale kansdichtheidsfunctie
- marginale verdeling
- voorwaardelijke kansdichtheidsfunctie
- voorwaardelijke verwachtingswaarde (regressie)

Als de gemeenschappelijke kansverdeling $f(x,y)$ bekend is, kunnen hieruit op bovenbeschreven wijze de verdelingen $f_1(x)$ en $f(y|x)$ en de regressiekromme $g(x)$ bepaald worden.

4.2. Lineaire regressie; de kleinste kwadratenmethode; de parameters.

4.2.1. Enkelvoudige lineaire regressie.

We willen nu in de klasse van de lineaire functies die functie zoeken, die het beste de regressie $g(x)$ benadert.

We stellen:

$$v = b_0 + b_1 x \quad (4.1)$$

waarin b_0 en b_1 nader te bepalen parameters zijn.

Teneinde een zo goed mogelijke benadering van $g(x)$ te verkrijgen, minimaliseren we de verwachtingswaarde van $(\tilde{y}-\tilde{v})^2$ naar de parameters b_0 en b_1 .

$$\text{Dus } \min_{b_0, b_1} E(\tilde{y}-\tilde{v})^2 = \min_{b_0, b_1} E(\tilde{y}-b_0-b_1\tilde{x})^2 \quad (4.2)$$

Deze methode staat bekend als de kleinste kwadratenmethode (eng: least squares method.).

Differentiëren van (4.2) naar b_0 en b_1 en nul stellen van het resultaat levert:

$$-2E[\tilde{y}-b_0-b_1\tilde{x}] = -2[E(\tilde{y})-b_0-b_1E(\tilde{x})] = 0 \quad (4.3)$$

$$-2E[\tilde{x}(\tilde{y}-b_0-b_1\tilde{x})] = -2[E(\tilde{x}\tilde{y})-b_0E(\tilde{x})-b_1E(\tilde{x}^2)] = 0 \quad (4.4)$$

Stel $\mu_x = E(\tilde{x})$, $\mu_y = E(\tilde{y})$
 $\sigma_x^2 = E(\tilde{x}^2) - E^2(\tilde{x})$, $\sigma_{xy}^2 = E(\tilde{x}\tilde{y}) - E(\tilde{x}) \cdot E(\tilde{y})$

(4.3) en (4.4) levert dan:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \mu_y - \mu_x \cdot \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \\ b_1 = \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = \mu_y - \mu_x \cdot \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \\ b_1 = \sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

(4.5) en (4.6) in (4.1) geeft:

$$v = \mu_y - \left[\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \right] \mu_x + \left[\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \right] x$$

Dit is de in de zin van de kleinste kwadraten beste lineaire benadering van $g(x)$.

4.2.2. Meervoudige lineaire regressie.

We breiden het vorige uit naar het meer-dimensionale geval.

Kansdichtheidsfunctie: $f(x_1, x_2, \dots, x_p, y) = f(\underline{x}, y)$

Marginale verdeling van \underline{x} :

$$f_1(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\underline{x}, y) dy$$

Voorwaardelijke verwachtingswaarde van y :

$$E(\tilde{y} | \underline{x}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(\underline{x}, y) dy}{f_1(\underline{x})} = g(\underline{x})$$

Lineaire benadering van de regressie $g(\underline{x})$:

$$v = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p \quad (4.7)$$

We voeren de hulpvariabele x_0 in : $x_0 \equiv 1$

Minimalisering van

$$E(\tilde{y} - \tilde{v})^2 = E(\tilde{y} - b_0 \tilde{x}_0 - b_1 \tilde{x}_1 - \dots - b_p \tilde{x}_p)^2 \quad (4.8)$$

door differentiëren naar resp. b_0, b_1, \dots, b_p en nul stellen levert:

$$\left. \begin{array}{l} b_0 E(\tilde{x}_0^2) + b_1 E(\tilde{x}_0 \tilde{x}_1) + \dots + b_p E(\tilde{x}_0 \tilde{x}_p) = E(\tilde{x}_0 \tilde{y}) \\ \vdots \\ b_0 E(\tilde{x}_p \tilde{x}_0) + b_1 E(\tilde{x}_p \tilde{x}_1) + \dots + b_p E(\tilde{x}_p^2) = E(\tilde{x}_p \tilde{y}) \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

waaruit de parameters b_0, \dots, b_p oplosbaar zijn.

NB Onder lineair wordt hier verstaan: lineair in de parameters.

De variabelen x_i ($i=1, 2, \dots, p$) kunnen een willekeurige functie van elkaar zijn, b.v. als $p = 4$:

$$x_1 = \log t, \quad x_2 = t^3, \quad x_3 = x_1 \cdot x_2, \quad x_4 = x_1 + e^{x_2}.$$

4.3. Schatting van de parameters aan de hand van een eindig aantal realisaties.

4.3.1. Inleiding

Als $f(\underline{x}, y)$ bekend is kunnen alle $E(\cdot)$ -operaties in (4.9) uitgevoerd worden. In de praktijk echter is $f(\underline{x}, y)$ meestal niet bekend en zullen we de parameters moeten schatten aan de hand van een eindig aantal realisaties van $\tilde{\underline{x}}$ en \tilde{y} .

Deze schattingen zullen uiteraard een of andere functie van de realisaties van $\tilde{\underline{x}}$ en \tilde{y} zijn, en worden daarmee ook tot stochastische variabelen met een kansdichtheidsfunctie. De schatters voor de parameters zullen we in het vervolg

$\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p$ noemen, of in vektornotatie $\tilde{\underline{\beta}}$.

De methode, waarop de schatting gebaseerd is, is de volgende:

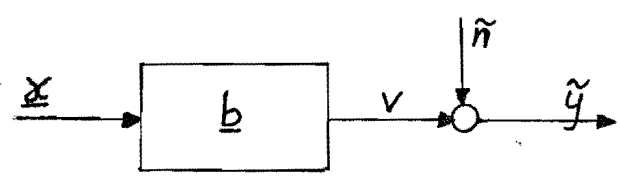
Beschouw de realisaties van $\tilde{\underline{x}}$ en \tilde{y} als realisaties van resp. de ingang en uitgang van een ^{statisch} ~~statisch~~ proces.

Parallel hieraan wordt een model geschakeld, dat een representatie is van het proces. Door minimalisering van de fout in de uitgangen, kunnen we de parameters in het model bepalen, die de schatters zijn van de procesparameters.

We kiezen een model dat lineair-in-de-parameters is en nemen aan dat het een volledige representatie van het proces is.

4.3.2. Het proces

Het proces kan als volgt schematisch voorgesteld worden:



Hierin geldt:

$$v = b_0 x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_p x_p = \underline{x}^T \underline{b} \tag{4.10}$$

$$\tilde{y} = v + \tilde{n}, \quad E(\tilde{n}) = 0 \tag{4.11}$$

We veronderstellen dat x_0, x_1, \dots, x_p niet behept zijn met meetfouten en beschouwen \underline{x} daarom als deterministisch.

De uitgang \tilde{y} bestaat uit een deterministisch deel v , de respons op de ingang \underline{x} , en uit een stochastisch deel \tilde{n} (eng: noise), dat de variatie in \tilde{y} tengevolge van het stochastisch karakter van het proces én tengevolge van meetfouten aan de uitgang vertegenwoordigt.

De vektor \underline{b} bevat de te schatten parameters b_0, b_1, \dots, b_p .

Daar $E(\tilde{n}) = 0$, *Witte ruis!*

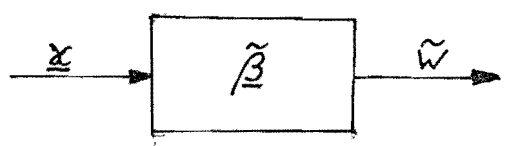
geldt:

$$E(\tilde{y}) = v = \underline{x}^T \underline{b},$$

m.a.w. (4.10) stelt de regressie van y op \underline{x} voor.

4.3.3. Het model

Het model kan als volgt schematisch voorgesteld worden:



Hierin geldt:

$$\tilde{w} = \tilde{\beta}_0 x_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \dots + \tilde{\beta}_p x_p = \underline{x}^T \underline{\tilde{\beta}} \tag{4.12}$$

De vektor $\underline{\tilde{\beta}}$ bevat de schatters $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_p$ voor resp. b_0, b_1, \dots, b_p .

4.3.4. Enkele notaties.

Stel we beschikken over m realisaties (waarnemingen) y van \tilde{y} met de bijbehorende ingangsvektoren \underline{x} .

We kunnen dan noteren:

$$\begin{array}{r}
 x_{01} b_0 + x_{11} b_1 + \dots + x_{p1} b_p + n_1 = y_1 \\
 \vdots \\
 x_{0i} b_0 + x_{1i} b_1 + \dots + x_{pi} b_p + n_i = y_i \\
 \vdots \\
 x_{0m} b_0 + x_{1m} b_1 + \dots + x_{pm} b_p + n_m = y_m
 \end{array} \quad (4.13)$$

waarin n_i een realisatie is van \tilde{n}_i (i=1,2,...,m)
 en y_i een realisatie is van \tilde{y}_i . *kan het waarnemen is ges*

Met

$$X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{p1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0i} & x_{1i} & \dots & x_{pi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0m} & x_{1m} & \dots & x_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\cdot 1}^T \\ \vdots \\ x_{\cdot i}^T \\ \vdots \\ x_{\cdot m}^T \end{bmatrix}, \underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_i \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ en } \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

gaat (4.13) over in:

$$X \underline{b} + \underline{n} = \underline{y} \quad \text{moelijke notatie!} \quad (4.15)$$

We beschouwen \underline{n} als een realisatie van $\tilde{\underline{n}}$
 en \underline{y} als een realisatie van $\tilde{\underline{y}}$.

$\tilde{\underline{n}}$ en $\tilde{\underline{y}}$ zijn dus vektoren met stochastische elementen n_i en y_i (i=1, 2, ..., m). Deze vektoren voldoen aan:

$$X \underline{b} + \tilde{\underline{n}} = \tilde{\underline{y}} \quad (4.16)$$

Voor het model geldt:

$$\left. \begin{aligned} x_{01}\tilde{\beta}_0 + x_{11}\tilde{\beta}_1 + \dots + x_{p1}\tilde{\beta}_p &= \tilde{w}_1 \\ \vdots & \\ x_{0m}\tilde{\beta}_0 + x_{1m}\tilde{\beta}_1 + \dots + x_{pm}\tilde{\beta}_p &= \tilde{w}_m \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

of $X \cdot \tilde{\underline{\beta}} = \tilde{\underline{w}}$ (4.18)

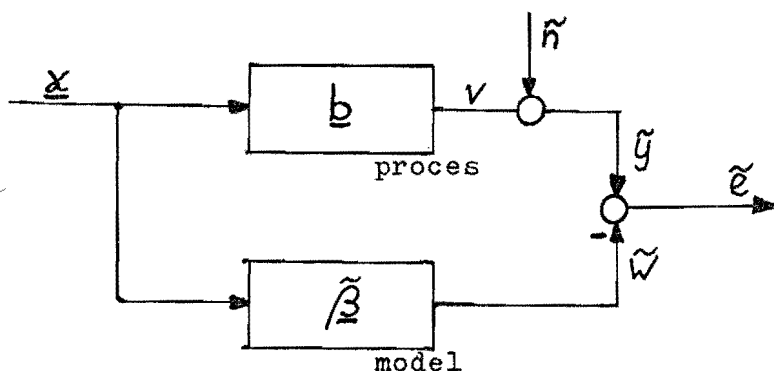
Wanneer we een realisatie $\underline{\beta}$ van $\tilde{\underline{\beta}}$ berekend hebben, geldt daarvoor:

$$X \cdot \underline{\beta} = \underline{w} \quad (4.19)$$

waarin \underline{w} een realisatie van $\tilde{\underline{w}}$ is.

4.3.5. Formule voor de schatters.

We schakelen proces en model parallel.



Het verschil, ook wel de fout genoemd, tussen de procesuitgang \tilde{y} en de modeluitgang \tilde{w} , noemen we het residue \tilde{e} .

Overeenkomstig de methode der kleinste kwadraten wordt nu de verliesfunctie

$$V = \sum_{i=1}^m \tilde{e}_i^2 = \sum_{i=1}^m (\tilde{y}_i - \tilde{w}_i)^2 \quad (4.20)$$

geminimaliseerd naar $\tilde{\underline{\beta}}$.

$$V = \sum_{i=1}^m \tilde{e}_i^2 = \tilde{\underline{e}}^T \tilde{\underline{e}} = (\tilde{\underline{y}} - \tilde{\underline{w}})^T (\tilde{\underline{y}} - \tilde{\underline{w}}) \quad (4.21)$$

Met (4.18):

$$\begin{aligned} V &= (\tilde{\underline{y}} - X\tilde{\underline{\beta}})^T (\tilde{\underline{y}} - X\tilde{\underline{\beta}}) = (\tilde{\underline{y}}^T - \tilde{\underline{\beta}}^T X^T) (\tilde{\underline{y}} - X\tilde{\underline{\beta}}) \\ &= \tilde{\underline{y}}^T \tilde{\underline{y}} - \tilde{\underline{y}}^T X \tilde{\underline{\beta}} - \tilde{\underline{\beta}}^T X^T \tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{\beta}}^T X^T X \tilde{\underline{\beta}} \\ &= \tilde{\underline{y}}^T \tilde{\underline{y}} + \tilde{\underline{\beta}}^T X^T X \tilde{\underline{\beta}} - 2\tilde{\underline{\beta}}^T X^T \tilde{\underline{y}} \end{aligned}$$

Waarom 20' h
moeslijke notatie?

Waarom hier wissel
je hier $\tilde{\underline{\beta}}$ en X ?
Het is wel accoord!

Differentiëren van V naar $\underline{\tilde{\beta}}$ (zie ^{lit. 7} ~~Appendix II~~) en nul stellen van het resultaat levert:

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{\tilde{\beta}}} = 2X^T X \underline{\tilde{\beta}} - 2X^T \underline{y} = \underline{0} \quad \leftarrow$$

of

$$\underline{\tilde{\beta}} = [X^T X]^{-1} \cdot X^T \underline{\tilde{y}} \quad \leftarrow \quad (4.22)$$

$$\text{met } Q = [X^T X]^{-1} \cdot X^T, \quad (4.23)$$

$$\text{gaat (4.22) over in } \underline{\tilde{\beta}} = Q \underline{\tilde{y}} \quad (4.24)$$

(4.24) laat zien dat elk element $\tilde{\beta}_j$ ($j=1,2,\dots,p$) een lineaire combinatie is van de elementen \tilde{y}_i ($i=1,2,\dots,m$).

Daar we beschikken over een realisatie \underline{y} van $\underline{\tilde{y}}$, kunnen we m.b.v. (4.22) een realisatie $\underline{\beta}$ van $\underline{\tilde{\beta}}$ berekenen.

4.4. Verwachtingswaarde, variantie en covariantie van de schatters.

4.4.1. De verwachtingswaarde.

$$\underline{\tilde{\beta}} = [X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{y}} = [X^T X]^{-1} X^T [X \underline{b} + \underline{\tilde{n}}]$$

$$\underline{\tilde{\beta}} = \underline{b} + [X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}} \quad (4.25)$$

$$E(\underline{\tilde{\beta}}) = \underline{b} + E\{[X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}}\}$$

Wanneer ingang X en storing \underline{n} statistisch onafhankelijk zijn, wordt dit:

$$E(\underline{\tilde{\beta}}) = \underline{b} + [X^T X]^{-1} X^T E(\underline{\tilde{n}})$$

Daar reeds aangenomen is in (4.11), dat $E(\underline{\tilde{n}}) = \underline{0}$, geldt ook $E(\underline{\tilde{\beta}}) = \underline{b}$, zodat:

$$\boxed{E(\underline{\tilde{\beta}}) = \underline{b}} \quad (4.26)$$

Dus $\underline{\tilde{\beta}}$ is een zuivere schatter voor \underline{b} .

4.4.2. De variantie-covariantie-matrix.

We zijn geïnteresseerd in de variantie van en de correlatie tussen de elementen van $\underline{\tilde{\beta}}$. We zoeken daarom naar de variantie-covariantie-matrix van $\underline{\tilde{\beta}}$:

$$\text{cov}(\underline{\tilde{\beta}}) = \begin{bmatrix} E(\tilde{\beta}_0 - b_0)^2 & \dots & E(\tilde{\beta}_0 - b_0)(\tilde{\beta}_p - b_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\tilde{\beta}_p - b_p)(\tilde{\beta}_0 - b_0) & \dots & E(\tilde{\beta}_p - b_p)^2 \end{bmatrix} = E\left[\left(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{b}\right)\left(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{b}\right)^T\right] \quad (4.27)$$

Met (4.25) en (4.23):

$$\begin{aligned} E\left[\left(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{b}\right)\left(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{b}\right)^T\right] &= E\left[\left(\underline{b} - Q\underline{\tilde{n}} - \underline{b}\right)\left(\underline{b} - Q\underline{\tilde{n}} - \underline{b}\right)^T\right] \\ &= E\left[\underline{Q}\underline{\tilde{n}}\left(\underline{Q}\underline{\tilde{n}}\right)^T\right] = E\left[\underline{Q}\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T Q^T\right] \end{aligned}$$

Wanneer ingang X en storing \underline{n} statistisch onafhankelijk zijn, geldt dus:

$$\text{cov}(\underline{\tilde{\beta}}) = Q \cdot E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) \cdot Q^T = QNQ^T \quad (4.28)$$

waarin N is de variantie-covariantie-matrix van $\underline{\tilde{n}}$.

$$N = E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) = \begin{bmatrix} E(\tilde{n}_1^2) & \dots & E(\tilde{n}_1 \tilde{n}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\tilde{n}_m \tilde{n}_1) & \dots & E(\tilde{n}_m^2) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

(4.23) in (4.28):

$$\text{cov}(\underline{\tilde{\beta}}) = \left[X^T X\right]^{-1} X^T N X \left[X^T X\right]^{-1} \quad (4.30)$$

Wanneer de variantie-covariantie-matrix van $\underline{\tilde{n}}$ de volgende vorm heeft:

$$N = E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & & & \\ & \sigma^2 & & & \\ & & \sigma^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma^2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}\sigma^2 \quad (4.31)$$

dan gaat (4.30) over in:

$$\text{cov}(\underline{\beta}) = [X^T X]^{-1} X^T X [X^T X]^{-1} \sigma^2$$

$$\boxed{\text{cov}(\underline{\beta}) = [X^T X]^{-1} \sigma^2}$$

(4.32)

We noemen σ^2 in (4.31) de procesvariantie.

4.5. Schatting van de procesvariantie.

In het nu volgende bespreken we een schatter voor de procesvariantie σ^2 voor het geval dat deze niet a-priori bekend is.

Voor de residuevektor geldt:

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{\tilde{y}} - \underline{\tilde{w}} = X\underline{b} + \underline{\tilde{n}} - X\underline{\beta}$$

Met (4.25) wordt dit:

$$\underline{\tilde{e}} = X\underline{b} + \underline{\tilde{n}} - X \left\{ \underline{b} + [X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}} \right\}$$

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{\tilde{n}} - X [X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}} = \left\{ I_m - X [X^T X]^{-1} X^T \right\} \underline{\tilde{n}} \quad (4.33)$$

waarin I_m de $m \times m$ -identiteitsmatrix is.

$$\text{Stel } A = I_m - X [X^T X]^{-1} X^T. \quad (4.34)$$

Dan is A een idempotente matrix, m.a.w. $A^T A = A$ (zie Appendix II).

De verliesfunctie wordt met (4.33) en (4.34):

$$V = \underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}} = (A \underline{\tilde{n}})^T A \underline{\tilde{n}} = \underline{\tilde{n}}^T A^T A \underline{\tilde{n}} = \underline{\tilde{n}}^T A \underline{\tilde{n}} \quad (4.35)$$

en de verwachtingswaarde van V :

$$E(\underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}}) = E(\underline{\tilde{n}}^T A \underline{\tilde{n}})$$

Nu geldt (zie Appendix II):

$$E(\underline{\tilde{n}}^T A \underline{\tilde{n}}) = E \left[\text{tr}(A \underline{\tilde{n}} \underline{\tilde{n}}^T) \right] = \text{tr} \left[E(A \underline{\tilde{n}} \underline{\tilde{n}}^T) \right] \quad (4.36)$$

Dus:

$$E(\underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}}) = \text{tr} \left\{ E \left[\left[I_m - X [X^T X]^{-1} X^T \right] \underline{\tilde{n}} \underline{\tilde{n}}^T \right] \right\}$$

Met de in 4.4. gedane aanname, dat X en $\tilde{\eta}$ statistisch onafhankelijk zijn:

$$E(\tilde{\underline{e}}^T \tilde{\underline{e}}) = \text{tr} \left\{ \left[I_m - X [X^T X]^{-1} X^T \right] E(\tilde{\eta} \tilde{\eta}^T) \right\}$$

wat met aanname (4.31) levert:

$$\begin{aligned} E(\tilde{\underline{e}}^T \tilde{\underline{e}}) &= \text{tr} \left\{ \left[I_m - X [X^T X]^{-1} X^T \right] \cdot \sigma^2 \right\} \\ &= \sigma^2 \left\{ \text{tr} I_m - \text{tr} (X [X^T X]^{-1} X^T) \right\} \\ &= \sigma^2 \left\{ m - \text{tr} (X^T X [X^T X]^{-1}) \right\} \\ &= \sigma^2 \left\{ m - \text{tr} I_{\dim(X^T X)} \right\} = \sigma^2 \{ m - (p+1) \} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{E(\tilde{\underline{e}}^T \tilde{\underline{e}})}{m-p-1} \quad (4.37)$$

Conclusie:

$\tilde{\underline{e}}^T \tilde{\underline{e}} / (m-p-1)$ is een zuivere schatter voor σ^2

Daar we over één realisatie \underline{y} en één realisatie $\underline{\beta}$ beschikken (zie 4.3.4.), hebben we één realisatie \underline{e} van $\tilde{\underline{e}}$ n.l. $\underline{e} = \underline{y} - X \underline{\beta}$.

We schrijven:

$$s^2 = \frac{\underline{e}^T \underline{e}}{m-p-1} \quad (4.38)$$

s^2 is een schatter voor σ^2 !

4.6. Het model als voorspeller.

Wij willen met het model voor een willekeurige gegeven \underline{x} de procesuitgang y gaan voorspellen. Met willekeurig is bedoeld dat \underline{x}^T niet noodzakelijkerwijs in de matrix X voor hoeft te komen.

Van belang is te weten in hoeverre \tilde{y} varieert om zijn voorspelde waarde $\tilde{w} = \underline{x}^T \tilde{\underline{\beta}}$. Daartoe berekenen we de variantie $E (\tilde{y} - \tilde{w})^2$.

Daar geldt:

$$E (\tilde{y}) = v$$

$$\text{en } E (\tilde{w}) = E (\underline{x}^T \tilde{\underline{\beta}}) = \underline{x}^T E (\tilde{\underline{\beta}}) = \underline{x}^T \underline{b} = v,$$

schrijven we:

$$E (\tilde{y} - \tilde{w})^2 = E \{ (\tilde{y} - v) - (\tilde{w} - v) \}^2$$

Op grond van het feit dat \tilde{y} statistisch onafhankelijk is van $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$, waaruit $\tilde{\underline{\beta}}$ bepaald is (zie (4.22)), zijn ook \tilde{y} en \tilde{w} statistisch onafhankelijk van elkaar, zodat geldt:

$$E (\tilde{y} - \tilde{w})^2 = E (\tilde{y} - v)^2 + E (\tilde{w} - v)^2 \quad (4.39)$$

$$E (\tilde{y} - v)^2 = E (\tilde{\epsilon})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} E (\tilde{w} - v)^2 &= E (\underline{x}^T \tilde{\underline{\beta}} - \underline{x}^T \underline{b})^2 = E \{ (\underline{x}^T \tilde{\underline{\beta}} - \underline{x}^T \underline{b}) (\underline{x}^T \tilde{\underline{\beta}} - \underline{x}^T \underline{b})^T \} \\ &= E \left\{ \underline{x}^T (\tilde{\underline{\beta}} - \underline{b}) (\tilde{\underline{\beta}} - \underline{b})^T \underline{x} \right\} \\ &= \underline{x}^T \cdot E \{ (\tilde{\underline{\beta}} - \underline{b}) (\tilde{\underline{\beta}} - \underline{b})^T \} \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot \text{cov} (\tilde{\underline{\beta}}) \cdot \underline{x} \end{aligned}$$

Nu gaat (4.39) over in:

$$E (\tilde{y} - \tilde{w})^2 = \sigma^2 + \underline{x}^T \cdot \text{cov} (\tilde{\underline{\beta}}) \cdot \underline{x} \quad (4.40)$$

of met (4.32)

$$E (\tilde{y} - \tilde{w})^2 = \left\{ \underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1 \right\} \sigma^2 \quad (4.41)$$

Conclusie:

Beschikken we over een realisatie $\underline{\beta}$ en dus voor gegeven \underline{x} over een realisatie w , dan wordt y door w voorspeld met een variantie die gelijk is aan de procesvariantie plus een variantie tengevolge van het schatten van \underline{b} , die in grootte afhankelijk is van \underline{x} .

4.7. De betrouwbaarheidsgrenzen van de voorspelling.

We doen de volgende aanname:

\tilde{n}_i is normaal verdeeld met verwachtingswaarde 0 en variantie σ^2 :

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &\sim N(0, \sigma^2) \quad , \quad i=1,2,\dots,m \\ \text{ofwel } \underline{\tilde{n}} &\sim N(\underline{0}, \underline{I}\sigma^2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dan is \tilde{y}_i normaal verdeeld met verwachting v_i en variantie σ^2 . Daar de elementen $\tilde{\beta}_j$ van $\underline{\tilde{\beta}}$ lineaire combinaties zijn van \tilde{y}_i (zie (4.24)), geldt dat $\tilde{\beta}_j$ normaal verdeeld is met verwachting b_j en een variantie die gegeven wordt door het j-de diagonaal-element van de matrix $[\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \cdot \sigma^2$ (zie 4.4).

\tilde{w} is een lineaire combinatie van $\tilde{\beta}_j$ (n.l. $\tilde{w} = \sum_{j=0}^p x_j \tilde{\beta}_j = \underline{x}^T \underline{\tilde{\beta}}$) en is daarom eveneens normaal verdeeld.

Het is nu mogelijk om uitgaande van een realisatie w het betrouwbaarheidsgebied van \tilde{y} aan te geven. We doen dit als volgt: Noemen we weer

$$\tilde{y} - \tilde{w} = \tilde{e}$$

dan is \tilde{e} normaal verdeeld met verwachting 0 (immers $E(\tilde{y}) = E(\tilde{w}) = v$) en variantie $\left\{ \underline{x}^T [\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \underline{x} + 1 \right\} \cdot \sigma^2$ (zie (4.41)).

We kunnen nu voor een realisatie van \tilde{e} de betrouwbaarheidsgrenzen opstellen, dus ook voor $(y-w)$:

$$-u(\alpha/2) \cdot \sigma \cdot \left\{ \underline{x}^T [\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq y-w \leq u(\alpha/2) \cdot \sigma \cdot \left\{ \underline{x}^T [\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

waarin $u(\alpha/2)$ de integratiegrens is in

$$\int_{-u}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cdot dt = 1-\alpha \quad (\text{zie (2.27)})$$

Beschikken we over een realisatie w dan geldt voor een realisatie y :

$$w - u(\alpha/2) \cdot \sigma \cdot \left\{ \underline{x}^T [\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq y \leq w + u(\alpha/2) \cdot \sigma \cdot \left\{ \underline{x}^T [\underline{X}^T \underline{X}]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.43)$$

Wanneer we σ^2 niet kennen, nemen we daarvoor de schatter s^2 .

De koëfficiënten $u(\alpha/2)$ moeten dan vervangen worden door $t(V, \alpha/2)$.

welke afkomstig is uit een Students-t-verdeling met V vrijheidsgraden (zie lit. 4). V is het aantal vrijheidsgraden waarop de schatting van σ^2 gebaseerd is, dus $V = m - p - 1$.

Het $(100 - \alpha)\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor \tilde{y} :

$$w - t(V, \alpha/2) \cdot s \cdot \left\{ \underline{x} [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq y \leq w + t(V, \alpha/2) \cdot s \cdot \left\{ \underline{x} [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

4.8. Resumé

We zullen nu de aannamen en conclusies kort samenvatten.

Aangenomen is dat het model $\tilde{w} = X\tilde{\beta}$ een volledige representatie is van het proces. Daaruit volgt voor het proces:

$$\tilde{y} = X\underline{b} + \tilde{n} \quad , \quad E(\tilde{n}) = \underline{0}$$

Aannamen omtrent de storingen:

a X en \tilde{n} statistisch onafhankelijk.

b $E(\tilde{n}\tilde{n}^T) = I\sigma^2$

c $\tilde{n} \sim N(\underline{0}, I\sigma^2)$

Met de kleinste kwadratenmethode geldt dan voor modelparameters:

$$E(\tilde{\beta}) = \underline{b} \quad , \quad \tilde{\beta} \text{ normaal verdeeld,}$$

$$\text{cov}(\tilde{\beta}) = [X^T X]^{-1} \sigma^2$$

Voor de modeluitgang \tilde{w} als voorspeller van de procesuitgang \tilde{y} geldt:

$$E(\tilde{w}) = E(\tilde{y})$$

$$E(\tilde{y} - \tilde{w})^2 = \left\{ \underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1 \right\} \sigma^2$$

We verkrijgen een zuivere schatter voor σ^2 :

$$\frac{E(\tilde{e}^T \tilde{e})}{m-p-1} = \int \dots$$

en zijn nu in staat, om bij gegeven \underline{x} de betrouwbaarheidsgrenzen voor een realisatie y te berekenen.

4.9. Onderzoek naar de korrektheid van de aannamen.

4.9.1. Modelaanname

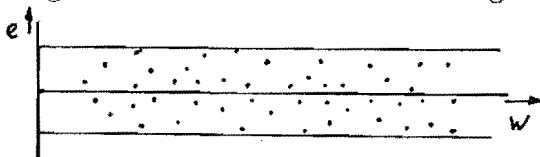
We hebben steeds aangenomen dat het model een volledige representatie van het proces is.

De structuur van het proces is echter zelden a-priori bekend, m.a.w. we weten, niet a-priori, welke ingangsvariabelen en hoeveel parameters in het proces een rol spelen. We beschikken slechts over een eindig aantal waarnemingen van de uitgangsgrootheid met de bijbehorende waarden van die variabelen, waarvan we vermoeden, dat ze als ingangsvariabelen van belang zijn. Wanneer we een model gekozen hebben, dat een goede representatie van het proces beoogt te zijn, zullen we dan ook moeten onderzoeken of dit model voldoet, of "het past op de waarnemingen".

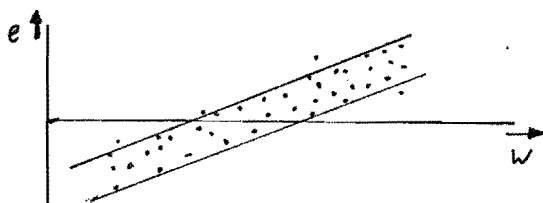
We doen dit d.m.v. een residuënonderzoek. Vanuit een deterministisch gezichtspunt n.l. geven de residuën (in dit geval de elementen van de realisatie e van \tilde{e}) een indicatie, hoe goed de waarnemingen verklaard worden door het model. Immers, het residue is het verschil tussen de waarneming, zijnde de realisatie van de uitgang van het onbekende proces, en de modeluitgang.

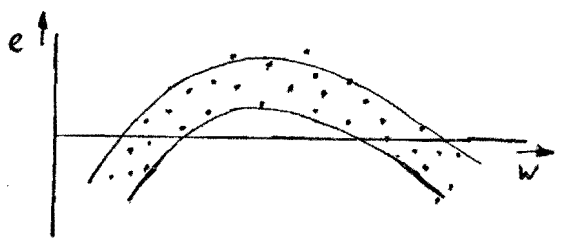
Brengen we de residuën in een grafiek (abcis w_i en ordinaat e_i , $i = 1, 2, \dots, m$) en onderzoeken we die op grote afwijkingen, sprongen en trends, dan krijgen we een goed beeld van de geschiktheid van het model, met name omtrent de gekozen combinatie van ingangsvariabelen.

Het ideale geval ziet er dan als volgt uit:



Mogelijke gevallen, waarbij wijziging van model gewenst is, zijn b.v.:





In praktijk zullen de criteria voor het afwijzen van het model soms, vooral wanneer het aantal waarnemingen niet groot is, niet zo duidelijk zijn. Wij kunnen dan gebruik maken van z.g. significantie-tests (t- en F-tests), die gebaseerd zijn op variantieanalyse. Wij volstaan hier met te verwijzen naar lit. 12 en 16.

4.9.2. Relatie tussen residuën en storingen.

Voor de residue-vektor geldt (zie (4.36)):

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{\tilde{n}} - X[X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}} \tag{4.44}$$

In 4.6. is afgeleid dat onder de aanname $E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) = \underline{I}\sigma^2$ geldt:

$$E(\underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}}) = (m-p-1)\sigma^2$$

Uit (4.44) is gemakkelijk te zien dat

$$E(\underline{\tilde{e}}) = \underline{0}$$

Voor de storingsvektor $\underline{\tilde{n}}$ geldt, wanneer $E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) = \underline{I}\sigma^2$;

$$E(\underline{\tilde{n}}\underline{\tilde{n}}^T) = E(\underline{\tilde{n}}^T \underline{\tilde{n}}) = \sum_{i=1}^m E(\tilde{n}_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sigma^2$$

of $E(\underline{\tilde{n}}^T \underline{\tilde{n}}) = m\sigma^2$

en $E(\underline{\tilde{n}}) = \underline{0}$

dit is het geval als je veel meer waarnemingen in qem hebt dan termen in je reeks!

Als $m \gg p$, dan geldt dus bij benadering:

$$E(\underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}}) = E(\underline{\tilde{n}}^T \underline{\tilde{n}}) = m\sigma^2$$

m.a.w. dan kan de bijdrage $X[X^T X]^{-1} X^T \underline{\tilde{n}}$ van $\underline{\tilde{e}}$ in (4.44) aan de variantiesom $E(\underline{\tilde{e}}^T \underline{\tilde{e}})$ verwaarloosd worden en kunnen we bij benadering stellen:

$$\underline{\tilde{e}} = \underline{\tilde{n}}$$

Daar we beschikken over een realisatie \underline{e} van $\underline{\tilde{e}}$, kunnen we nu nagaan of de gedane aannamen omtrent $\underline{\tilde{n}}$ gerechtvaardigd zijn.

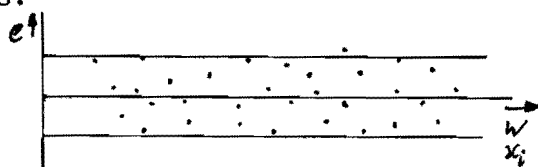
4.9.3. Aannamen omtrent de storingen.

Nadat we onderzocht hebben of het model adequaat is, controleren we de aannamen omtrent de storingen $\tilde{\eta}_i$ ($i=1,2,\dots,m$).

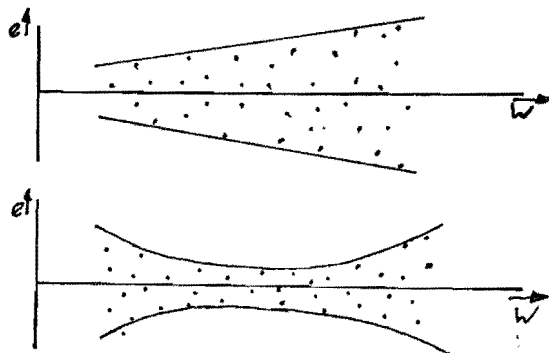
We veronderstellen $m \gg p$, zodat we volgens 4.9.2. in plaats van de storingen $\tilde{\eta}_i$ de residuën $\tilde{\epsilon}_i$ kunnen beschouwen.

Voor de variantie van $\tilde{\eta}_i$ was aangenomen $E(\tilde{\eta}_i)^2 = \sigma^2 = \text{konstant}$ ($i=1,2,\dots,m$).

Uitzetten van de residuën levert voor het geval dat deze aanname juist is:



Hebben we te maken met andere gevallen b.v.



dan zijn we aangewezen op de "weighted-least-squares"-schattingmethode (zie lit. 7 en 12).

Verder is aangenomen dat de storing $\tilde{\eta}_i$ volledig onafhankelijk is van $\tilde{\eta}_j$ ($j \neq i$), van x_1, x_2, \dots, x_p en dus ook van w .

We kunnen dit onderzoeken door e_i uit te zetten tegen resp. $w_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}$ ($i=1,2,\dots,m$) en in deze figuren te zoeken naar patronen, die op afhankelijkheid wijzen (zie lit. 9 en 12).

Wanneer aangetoond is dat de aanname van gelijke variantie en van onafhankelijkheid voor de storing $\tilde{\eta}_i$ gerechtvaardigd is, kunnen we de realisaties e_i van $\tilde{\epsilon}_i$ ($i=1,2,\dots,m$) beschouwen als zijnde m realisaties van één stochastische variabele $\tilde{\epsilon}$,

die verwachtingswaarde 0 en variantie σ^2 heeft. We beschouwen a.h.w. iedere realisatie e_i uit de populatie \tilde{e}_i ($1 \leq i \leq m$) als een realisatie uit de populatie \tilde{e} .

Hierdoor zijn we in staat de aanname van normale verdeling voor de storing \tilde{n} ($\tilde{n} = \tilde{n}_i$ voor willekeurige i ($1 \leq i \leq m$)) te testen.

We kunnen de realisatie e_i in een histogram brengen en kijken hoe goed dit aan de verwachting beantwoordt.

Een andere mogelijkheid is het uitvoeren van een χ^2 -test (zie lit. 14).

Opmerking

In paragraaf 4.9. is getracht enige ordening in het residuën-onderzoek te brengen, waarbij ervan uitgegaan is dat het aantal waarnemingen groot is.

Het zij nogmaals vermeld dat in de praktijk, vooral wanneer het aantal waarnemingen klein is, de criteria tot verwerping van een aanname niet zo duidelijk zijn als hier wordt voorgesteld. De geschetste methode is echter de enige manier om een inzicht te krijgen in de eigenschappen van de storing \tilde{n} .

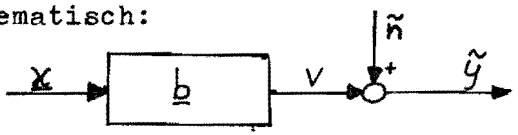
4.10. Toepasbaarheid van de regressietechniek in het optimaliseringsprobleem.

We zullen nu onderzoeken hoe deze theorie gebruikt kan worden in het optimaliseringsprobleem in hoofdstuk 2.

Wanneer een proces beschreven kan worden door:

$$\tilde{y} = \underline{x}^T \underline{b} + n$$

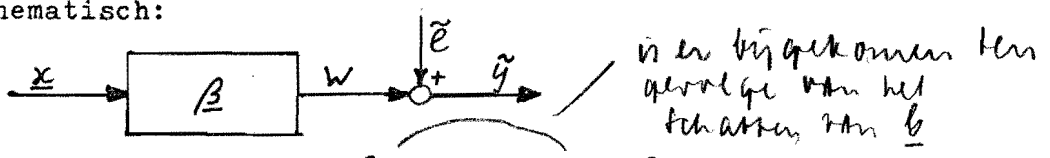
of schematisch:



waarin $\tilde{n} \sim N(0, \sigma^2)$ en \underline{b} onbekend, kunnen we, na kleinste-kwadraten-schatting van \underline{b} , die een realisatie $\underline{\beta}$ oplevert, voor de voorspelling van \tilde{y} een nieuw model invoeren, zoals in 4.5. en 4.7. is afgeleid:

$$\tilde{y} = \underline{x}^T \underline{\beta} + \tilde{e}$$

of schematisch:

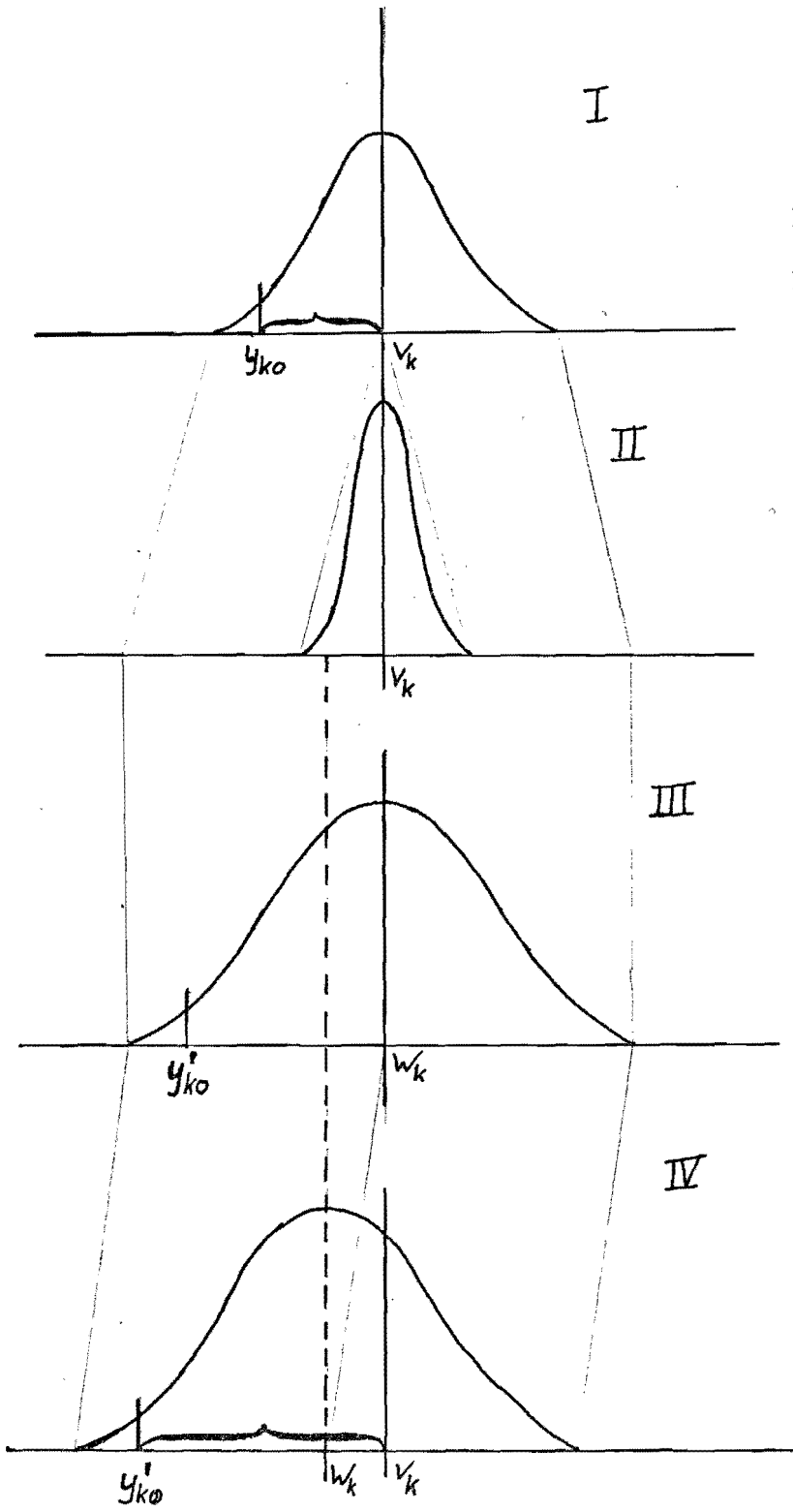


waarin $E(\tilde{e}) = 0$, $E(\tilde{e}^2) = \{ \underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1 \} \sigma^2$ en \tilde{e} normaal verdeeld.

We zien dus dat in dit model \tilde{y} een variantie heeft, bestaande uit de procesvariantie σ^2 en een deel tengevolge van het schatten van \underline{b} , dat afhankelijk is van \underline{x} .

Dit kan aanschouwelijk gemaakt worden in de volgende figuren (zie fig. 5.). We beschouwen de situatie slechts bij één willekeurige \underline{x} , zeg \underline{x}_k .

In I is de verdeling van \tilde{y}_k , rond de verwachtingswaarde v_k gegeven. Na schatting van de parameters \underline{b} vindt men een realisatie w_k uit de populatie \tilde{w}_k in II. Deze populatie wordt gevonden door de parameter-schatting een oneindig aantal malen uit te voeren met dezelfde ingangsmatrix X en een telkens andere realisatie \underline{y} van \tilde{y} . In III ziet men de kansverdeling van \tilde{y}_k , rond de voorspelde waarde w_k , een realisatie uit II. Deze verdeling wordt gevonden door bij deze \underline{x}_k een oneindig aantal malen een realisatie w_k



$$E(\tilde{y}_k) = v_k$$

$$E(\tilde{y}_k - v_k)^2 = \sigma^2$$

$$E(\tilde{w}_k) = v_k$$

$$E(\tilde{w}_k - v_k)^2 = \underline{x}_k^T [X^T X]^{-1} \underline{x}_k \cdot \sigma^2$$

$$E(\tilde{y}_k) = w_k$$

$$E(\tilde{y}_k - w_k)^2 = \left\{ \underline{x}_k^T [X^T X]^{-1} \underline{x}_k + 1 \right\} \cdot \sigma^2$$

fig. 5

te bepalen en daarbij steeds één realisatie y_k van \tilde{y}_k (bij \underline{x}_k) te nemen.

Voor het optimaliseringsprobleem zijn we geïnteresseerd in de ondergrens van een eenzijdig betrouwbaarheidsinterval voor \tilde{y}_k : y_{ko} (zie fig 5-I).

Daar v onbekend is, kunnen we y_{ko} niet berekenen en moeten we y_{ko} benaderen door y'_{ko} (zie fig 5-III).

Stel, we beschikken over een realisatie w_k bij \underline{x}_k (zie fig 5-IV). We zien dat naarmate w_k meer links in de populatie \tilde{w}_k ligt, y'_{ko} meer naar links verschuift.

Daar we in praktijk maar over één realisatie w_k beschikken (we voeren de parameterschatting maar één keer uit), lopen we het risico dat we y_{ko} "systematisch" veel te laag schatten.

Wanneer we dit risico willen verkleinen, moeten we eisen dat de populatie \tilde{w}_k (verdeling II) smaller wordt. Dit heeft een tweeledig effect:

enerzijds wordt de verdeling III daardoor smaller, anderzijds wordt de grootte der verschuiving III→IV kleiner.

We kunnen ook zeggen:

Wanneer de variantie $E(\tilde{w}_k - v_k)^2$ naar nul nadert, nadert verdeling III naar verdeling I en nadert w_k naar v_k .

Conclusie:

Wanneer de variantie $E(\tilde{w}_k - v_k)^2$ verwaarloosbaar is ten opzichte van σ^2 , dan zal y'_{ko} niet noemenswaard van y_{ko} verschillen.

Uit (4.25) volgt voor \tilde{w}_k :

$$\tilde{w}_k = \underline{x}_k^T \tilde{\beta} = \underline{x}_k^T \left\{ \underline{b} + [X^T X]^{-1} X^T \tilde{\underline{n}} \right\}$$

Verder is:

$$v_k = \underline{x}_k^T \underline{b}$$

Zodat geldt:

$$\tilde{w}_k - v_k = \underline{x}_k^T [X^T X]^{-1} X^T \tilde{\underline{n}}$$

Met een soortgelijke redenering als in 4.9.2. kan aangetoond worden dat de eis dat de variantie $E(\tilde{w}_k - v_k)^2$ klein moet

zijn t.o.v. σ^2 overeenkomt met de eis dat m (het aantal waarnemingen waarop de schatting van de parameters gebaseerd is) een orde groter moet zijn dan p (het aantal parameters).

Voor de ondergrens van het eenzijdige $(1-\alpha)100\%$ -betrouwbaarheidsinterval noteren we nu:

$$y_0 = \underline{x}^T \underline{\beta} - u(\alpha) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1} \quad (4.45)$$

Voor het geval dat σ^2 niet a-priori bekend is, vervangen we σ door s en $u(\alpha)$ door $t(\gamma, \alpha)$, met γ als in (4.44):

$$y_0 = \underline{x}^T \underline{\beta} - t(\gamma, \alpha) \cdot s \cdot \sqrt{\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} + 1} \quad (4.46)$$

De bovenvermelde eis, dat m groot moet zijn en dus ook γ , heeft in (4.46) tot gevolg, dat $t(\gamma, \alpha)$ een goede benadering is van $u(\alpha)$, immers $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} t(\gamma, \alpha) = u(\alpha)$.

4.11 Toepassing op de standtijd

We stellen dat de standtijd gegeven wordt door:

$$T = 10^{b_1} v^{b_2} (100s)^{b_3} \cdot 10^{\tilde{n}} \quad (\text{vgl. 2.1.}) \quad (4.47)$$

en noemen $\tilde{y} = \log T$, $x_0 = 1$

$$x_1 = \log v$$

$$x_2 = \log(100s)$$

Na logaritmiseren van (4.47) vinden we het proces:

$$\tilde{y} = b_1 x_0 + b_2 x_1 + b_3 x_2 + \tilde{n} \quad (4.48)$$

zodat het model wordt:

$$\tilde{w} = \tilde{\beta}_1 x_0 + \tilde{\beta}_2 x_1 + \tilde{\beta}_3 x_2 \quad (4.49)$$

We bepalen een realisatie van deze $\tilde{\beta}$'s aan de hand van de waarnemingen uit lit (16).

werkstukmateriaal	: St60
beitelmateriaal	: P20
slijtagekriterium	: $\tan \varphi = 0.16$
aantal waarnemingen m	: 30

Zie voor de waarnemingentabel Appendix III.

Deze tabel wordt gelogarithmiseerd; dit levert matrix X en vektor y .

Met behulp van de THE-standaardprocedure LEAST SQUARES SIMPLE worden hieruit de realisaties van de schatters $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$ bepaald:

$$\tilde{\beta}_1 = 6.8004$$

$$\tilde{\beta}_2 = -5.1183$$

$$\tilde{\beta}_3 = -2.0966$$

en ook s^2 , de schatter voor σ^2 :

$$s^2 = 0.0063$$

zodat $s \approx 0,08$

De residuën worden berekend door de realisaties w_i van de bijbehorende y_i af te trekken:

$$e_i = y_i - \tilde{\beta}_1 x_{i0} - \tilde{\beta}_2 x_{i1} - \tilde{\beta}_3 x_{i2}$$

Berekening van $[X^T X]^{-1} \cdot s^2$ levert de variantie-covariantiematrix van $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ en $\tilde{\beta}_3$:

$$\text{cov}(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} 16.31 & -14.39 & -5.96 \\ -14.39 & 14.44 & 4.75 \\ -5.96 & 4.75 & 2.34 \end{bmatrix} \cdot 0.0063$$

In fig. 5 zijn de residuën e_i ($i=1, \dots, 30$) uitgezet tegen w_i . De lijnen evenwijdig aan de horizontale as ter hoogte 0.16 en -0.16 geven de kritieke waarden van het tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval van \tilde{e}_i :

$$t(\nu, \frac{1}{2}\alpha) \cdot \frac{m}{\nu} \cdot s = t(27, 0.025) \cdot \frac{30}{27} \cdot \sqrt{0.0063} \approx 0.16$$

Deze figuur geeft, op grond van de in 4.9. behandelde onderzoeksmethode, geen aanleiding het model te verwerpen. Ook de aanname $E(\tilde{n}_i)^2 = \sigma^2 = \text{konstant}$ lijkt gerechtvaardigd, evenals de aanname van onafhankelijkheid der storingen \tilde{n}_i .

Het aantal waarnemingen is echter te klein om hieromtrent volledige zekerheid te krijgen.

In fig. 6 zijn de residuën e_i "bijeengeveegd" in een histogram. De aanname $\tilde{n}_i \sim N(0, \sigma^2)$ wordt geenszins tegengesproken. Het aantal waarnemingen is echter te gering om d.m.v. χ^2 -test volstrekte zekerheid te krijgen. ✓

Voor de ondergrens van het eenzijdige $p\%$ -betrouwbaarheidsinterval van T , T_{100-p} , kunnen we nu schrijven:

$$T_{100-p} = 10 \uparrow \left[\beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 - t(27, 100-p) \cdot s \cdot \left\{ 1 + \underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.50)$$

waarin $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} =$

$$16.31 - 2 \cdot 14.39 x_1 + 14.44 x_1^2 - 2 \cdot 5.96 x_2 + 2 \cdot 4.75 x_1 x_2 + 2.34 x_2^2$$

De invloed van $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x}$ komt in hoofdstuk 5 ter sprake.

$$\tan \varphi = 0.16$$

$$m = 30$$

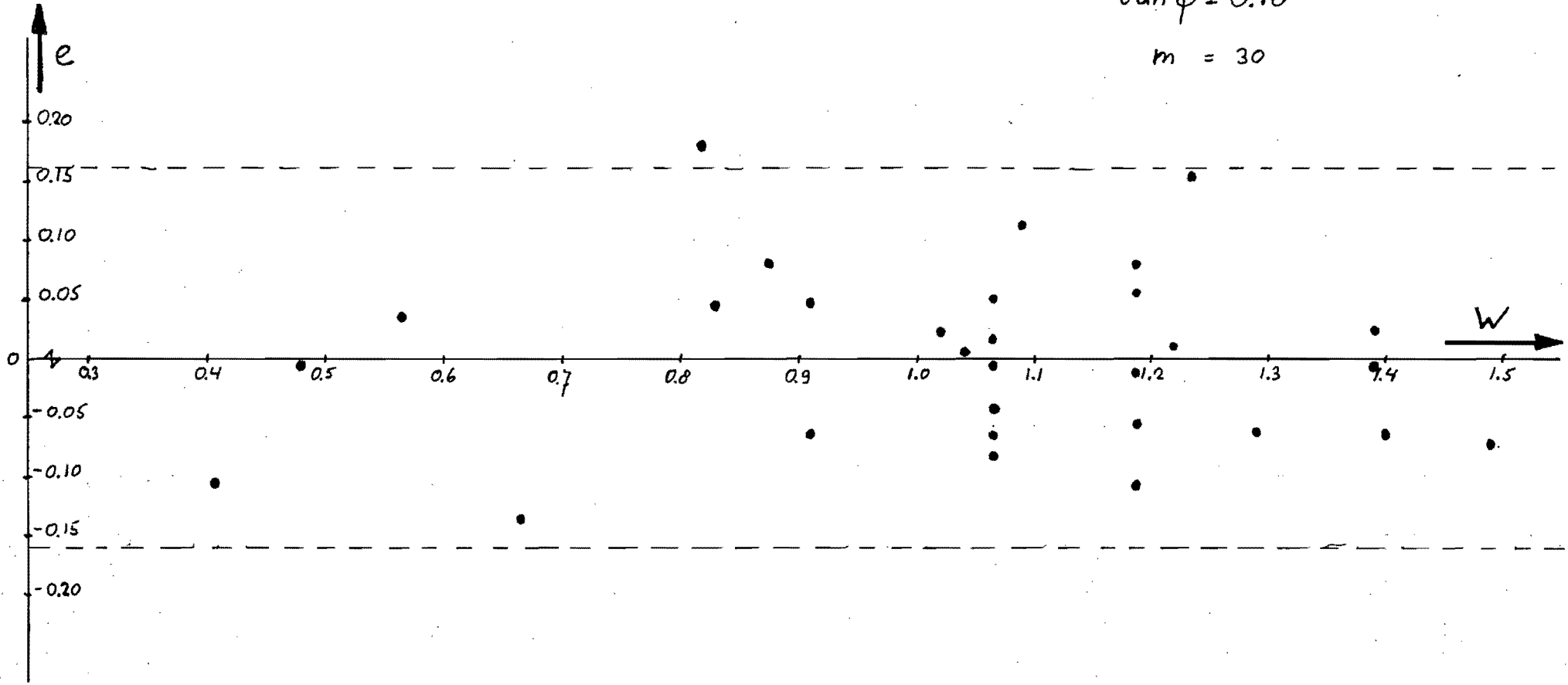


fig. 5

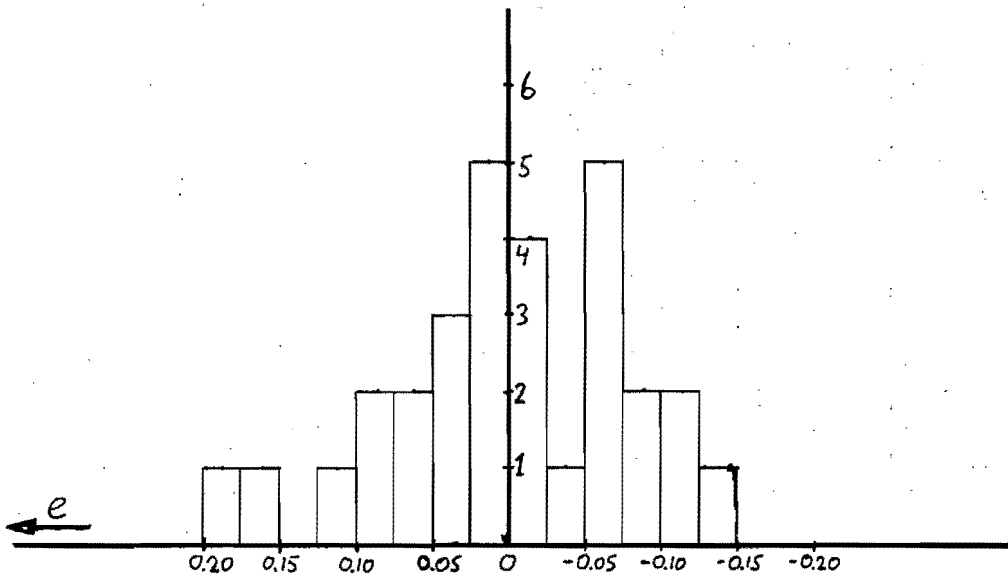


fig. 6 Histogram.

4.12. Toepassing op de snijkracht

We veronderstellen dat de snijkracht gegeven wordt door:

$$F = 10^{b_1} v^{b_2} (100s)^{b_3} 10^{\tilde{n}}$$

Met $\tilde{y} = \log F$ wordt het proces:

$$\tilde{y} = b_1 x_0 + b_2 x_1 + b_3 x_2 + \tilde{n} \quad (4.51)$$

Het model

$$\tilde{w} = \tilde{\beta}_1 x_0 + \tilde{\beta}_2 x_1 + \tilde{\beta}_3 x_2 \quad (4.52)$$

Lit (17), tabel B1, verschaft de waarnemingen.

werkstukmateriaal	: St60
beitelmateriaal	: P20
snijkantshoek	: 0°
vrijloophoek	: 5°
hellingshoek	: 6°
spaanhoek	: 6°
snedediepte a	: 3 mm
snijnsnelheid v	: $1 \leq v \leq 5$ m/s
aanzet s	: $0.1 \leq s \leq 0.8$ mm/omw
aantal waarnemingen m	: 140

Gevonden werd:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.3322 \\ \beta_2 &= -0.08197 \\ \beta_3 &= 0.6719 \\ \text{en } s^2 &= 0.000573 \text{ zodat } s \approx 0,023 \end{aligned}$$

$$\text{en cov}(\underline{\beta}) = \begin{bmatrix} 0.2341 & -0.0790 & -0.1407 \\ -0.0790 & 0.1662 & 0.0169 \\ -0.1407 & 0.0169 & 0.0946 \end{bmatrix} \cdot s^2$$

We zien dat de elementen in deze variantie-covariantiematrix aanmerkelijk kleiner zijn dan bij de standtijd.

Voor de bovengrens van het eenzijdige p%-betrouwbaarheidsinterval van F, F_p , schrijven we:

$$F_p = 10^{\left[\beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 + u(p) \cdot s \left\{ 1 + \underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (4.53)$$

De invloed ^{van} $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x}$ wordt beschouwd in hoofdstuk ~~4~~⁵

Opmerking

Door tijdgebrek is hier het residuënonderzoek slechts summier uitgevoerd. Daaruit is gebleken, dat het model waarschijnlijk beter voldoet, indien een term $\tilde{\beta}_4 x_3$ bijgevoegd wordt in (4.52), waarin $x_3 = x_2^2$.

Wij handhaven in hoofdstuk 4 het model uit (4.52)

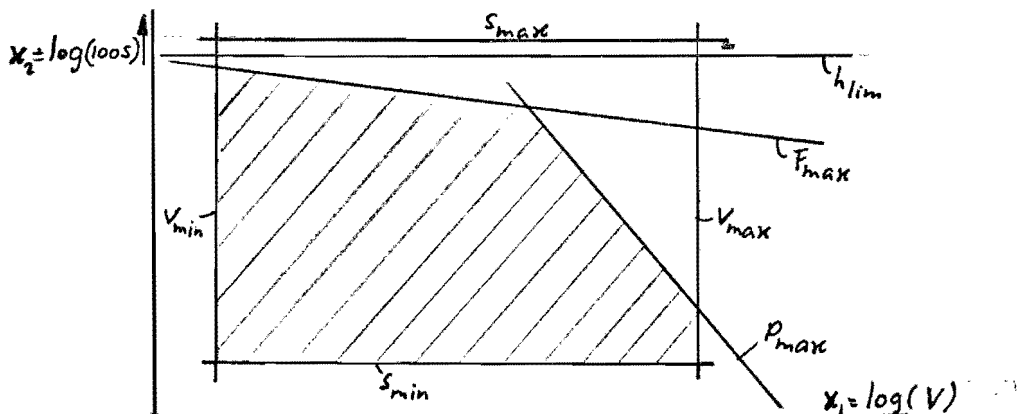
Hoofdstuk 5

Optimalisering van het verspaningsproces.

We zullen nu de optimalisering, die behandeld is in hoofdstuk 2 toepassen met de resultaten, die gevonden zijn in hoofdstuk 4.

We zijn daarbij geïnteresseerd in de manier, waarop de optimale verspaningscondities afhangen van het waarschijnlijkheidsniveau in de begrenzingsen en de kostenfunctie. Ook de rol, die de term $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x}$ hierbij speelt, zullen we onderzoeken.

We zorgen ervoor dat de snijkrachtsbegrenzing en de vermogensbegrenzing, de actieve begrenzingsen vormen, zodat we de invloed van de grootte van het waarschijnlijkheidsniveau p in deze begrenzingsen kunnen onderzoeken, m.a.w. wij kiezen h_{lim} , s_{max} en F_{max} zodanig dat onderstaande situatie optreedt:



Zoals zal blijken, zal het optimum in de produktkosten gevonden worden in het bovengedeelte van het gearceerde gebied. We laten de stabiliteitsbegrenzing achterwege.

We kiezen:

$$s_{max} = 0.7 \text{ mm/omw} \quad s_{min} = 0.1 \text{ mm/omw}$$

$$v_{max} = 5.0 \text{ m/s} \quad v_{min} = 1.0 \text{ m/s}$$

$$F_{max} = 200 \text{ kgf}$$

$$P_{max} = 7500 \text{ Nm/s} \quad \eta = 0.85$$

$$h_{lim} = 0.06 \text{ mm} \quad r_e = 0.8 \text{ mm}$$

De snedediepte wordt 3mm genomen. Bij deze snedediepte zijn de snijkrachtscoëfficiënten bepaald.

Verder kiezen we:

$$\begin{aligned}
 D &= 0.1 \quad \text{m} \\
 L &= 0.25 \quad \text{m} \\
 c_0 &= 0.90 \quad \text{gulden/min} \\
 c_t &= 1.50 \quad \text{gulden /snijkant en } 2.50 \quad \text{gulden/snijkant} \\
 t_e &= 0.5 \quad \text{min} \\
 t_p &= 1.0 \quad \text{min}
 \end{aligned}$$

In appendix IV is het rekenprogramma weergegeven.

Een korte toelichting:

De procedure CONSTRAINT geeft de begrenzingsen ($i=1,2,\dots,7$) en de kostenfunctie ($i=8$).

De procedure DCONSTRAINT geeft de eerste afgeleiden van begrenzingsen en kostenfunctie naar x_1 en x_2 , mits deze niet nul zijn.

De procedure XCOVX berekent, uit de in $XX[j]$ opgeslagen elementen van $[X^T X]^{-1}$, voorgegeven $\underline{x}^T = (x_1, x_2)$ de term $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x}$.

De procedure DLXCOVX en D2XCOVX bepalen de afgeleide van $\underline{x}^T [X^T X]^{-1} \underline{x}$ naar resp. x_1 en x_2 .

Het waarschijnlijkheidsniveau in de snijkracht- en vermogens-
begrenzing noemen we p_1 (zie form.(4.53)), in de ~~kostenfunctie~~ ^{standtijd functie}
 p_2 (zie form.(4.50)).

We houden p_2 op 90% en laten eenvoudigheidshalve de covariantie-
matrix van de standtijdscoëfficiënten achterwege.

Aan p_1 geven we achtereenvolgens de waarde 50%, 75%, 90%, 95%, 99%.

Verwaarlozen we ook de covariantiematrix van de snijkrachts-
coëfficiënten, dan vinden we, voor het geval $c_t=2.50$ gulden/snij-
kant:

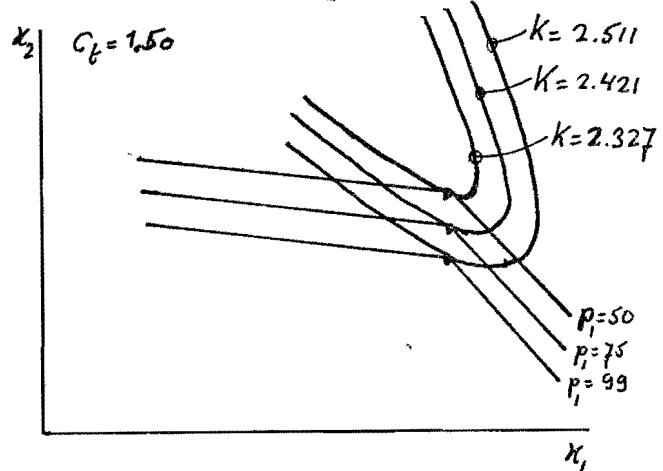
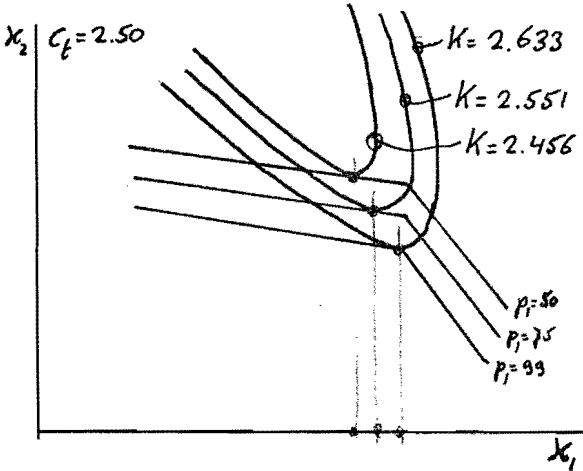
p_1	v(m/s)	s(mm/omw)	kosten p.p. (gulden)	gem.levens- duur (min)	standtijd (min)	machtijd prod(min)	prod.p. beitel
50%	3.022	0.3167	2.456	15.71	12.42	1.37	9.08
75%	3.088	0.3004	2.505	15.71	12.42	1.41	8.80
90%	3.148	0.2865	2.551	15.71	12.42	1.45	8.56
95%	3.185	0.2785	2.579	15.71	12.42	1.48	8.42
99%	3.249	0.2639	2.633	15.88	12.56	1.53	8.22

Voor het geval $c_t = 1.50$ gulden/snijkant vinden we:

p_1	v (m/s)	s (mm/omw)	kosten p.p. (gulden)	gem.levens- duur (min)	standtijd (min)	machtijd prod(min)	prod.p. beitel
50%	3.249	0.3195	2.327	10.63	8.41	1.26	6.67
90%	3.249	0.2876	2.421	13.25	10.48	1.40	7.48
99%	3.249	0.2639	2.511	15.88	12.56	1.53	8.22

We zien in het eerste geval dat wanneer p_1 toeneemt, v toeneemt en s afneemt. In het tweede geval blijft v konstant en neemt s af. De oorzaak hiervan ligt in het verschuiven van de kostenfunctie t.o.v. de begrenzingsen.

De onderstaande schetsen laten dit zien.



Nemen we de covariantiematrix van de snijkrachtskoefficienten in de berekening mee, dan vinden we, in het geval $c_t = 1.50$:

50%	3.249	0.3195	2.327	10.63	8.41	1.26	6.67
90%	3.249	0.2822	2.440	13.79	10.91	1.43	7.64
99%	3.249	0.2552	2.550	17.04	13.48	1.58	8.54

We zien dat de covariantiematrix van de snijkrachtskoefficienten nauwelijks de plaats van het optimum beïnvloed. Dit was te verwachten, daar deze koefficienten bepaald zijn aan de hand van een groot aantal waarnemingen ($m=140$), In het vervolg wordt deze matrix in de begrenzingsen verwaarloosd.

Houden we nu p_1 op 90% en variëren we p_2 , dan vinden we bij verwaarlozing van de covariantiematrix van de standtijdscoëfficiënten:
Voor het geval $c_t=2.50$:

p_2	v(m/s)	s(mm/omw)	kosten p.p. (gulden)	gem.levens- duur (min)	standtijd (min)	machtijd prod(min)	prod.p. beitel
50%	3.249	0.2876	2.472	13.25	13.25	1.40	9.46
75%	3.214	0.2873	2.513	14.06	12.42	1.42	8.76
90%	3.148	0.2865	2.551	15.71	12.42	1.45	8.56
95%	3.109	0.2861	2.574	16.80	12.42	1.47	8.44
99%	3.037	0.2853	2.618	19.04	12.42	1.51	8.22

Voor het geval $c_t=1.50$:

50%	3.249	0.2876	2.367	13.25	13.25	1.40	9.46
75%	3.249	0.2876	2.394	13.25	11.71	1.40	8.36
90%	3.249	0.2876	2.421	13.25	10.48	1.40	7.48
95%	3.249	0.2876	2.439	13.25	9.80	1.40	7.00
99%	3.249	0.2876	2.476	13.25	8.65	1.40	6.17

Wanneer we de covariantiematrix van de standtijdscoëfficiënten in de berekening meenemen:

Voor het geval $c_t=2.50$:

50%	3.249	0.2876	2.472	13.25	13.52	1.40	9.46
75%	3.039	0.2853	2.617	18.98	12.42	1.51	8.23
90%	2.824	0.2827	2.765	28.19	12.42	1.64	7.57
95%	2.697	0.2812	2.864	36.09	12.42	1.73	7.19
99%	2.465	0.2781	3.072	58.43	12.42	1.91	6.51

Voor het geval $c_t=1.50$

50%	3.249	0.2876	2.367	13.25	13.25	1.40	9.46
75%	3.249	0.2876	2.473	13.25	8.73	1.40	6.24
90%	3.060	0.2855	2.605	18.30	8.20	1.50	5.47

We zien dat door variatie van p_2 de kostenfunctie verschuift (in v- en s-richting, maar ook loodrecht daarop). Wanneer we de covariantiematrix meenemen, is de verschuiving aanmerkelijk groter dan bij verwaarlozing ervan.

Het blijkt dat bij $c_t=2.50$ deze matrix de plaats van het optimum sterk beïnvloedt, maar ook de optimale kosten per produkt. In dit geval zijn we gebaat bij een nauwkeurigere bepaling van de standtijdscoëfficiënten, waardoor de elementen van $[X^T X]^{-1}$ kleiner worden.

We merken op dat bij $c_t=2.50$ het "dal" van de kostenfunctie binnen het "werkgebied" ofwel binnen de begrenzingen ligt.

Voor het geval, dat dit "dal" een stuk buiten het werkgebied ligt (d.i. wanneer c_0 groter wordt en/of c_t kleiner, of meer algemeen wanneer $t_e + c_t/c_0$ kleiner wordt), is het snijpunt van de snijkrachtsbegrenzing en de vermogensbegrenzing de plaats van het optimum. Slechts om goed de standtijd te kunnen bepalen, dienen dan de coëfficiënten exakt bekend te zijn.

Dat de covariantiematrix van de standtijdscoëfficiënten zo'n grote invloed heeft, komt omdat we bij de bepaling van deze coëfficiënten slechts over 30 waarnemingen konden beschikken.

Laten we nu eens aannemen dat de standtijdscoëfficiënten exakt bepaald zijn en gegeven worden door $\beta_1=6.8004$, $\beta_2=-5.1183$ en $\beta_3=-2.0966$. We veronderstellen dus dat de elementen van de covariantiematrix nul zijn.

Verder veronderstellen we dat een werkstuk, dat met een versleten beitel bewerkt is, opnieuw bewerkt moet worden tegen bijkomende kosten K_{ad} .

Eenvoudigheishalve stellen we nog dat gedurende de berekende standtijd ten hoogste één werkstuk aldus foutief bewerkt wordt. Wanneer we een groot aantal werkstukken bewerken, zeg N, geldt dan voor de totale kosten

$$K_{tot} = N \cdot K(p) + \frac{N \cdot t_m(p)}{T_{100-p}} \cdot \frac{(100-p)}{100} \cdot K_{ad}, \text{ waarin } \frac{N \cdot t_m(p)}{T_{100-p}} \text{ het}$$

aantal snijkanten, benodigd voor N werkstukken

We willen nu die waarde van p vinden, die K_{tot} minimaliseert.

Wanneer b.v. $c_t = 2.50$, zoeken we daarom naar de kleinste waarde van

$$p = 50\% : N(2.472 + \frac{0.5}{13.25} \cdot K_{\text{ad}} \times 1.40)$$

$$p = 75\% : N(2.513 + \frac{0.25}{13.42} \cdot K_{\text{ad}} \times 1.42)$$

$$p = 90\% : N(2.551 + \frac{0.1}{12.42} \cdot K_{\text{ad}} \times 1.45)$$

$$p = 95\% : N(2.574 + \frac{0.05}{12.42} \cdot K_{\text{ad}} \times 1.47)$$

$$p = 99\% : N(2.618 + \frac{0.01}{12.42} \cdot K_{\text{ad}} \times 1.51)$$

De bijbehorende waarde van p geeft het optimale waarschijnlijkheidsniveau van de kostenfunctie.

Appendix I

Numerieke waarden uit lit. 1:

$$\bar{\alpha}_5 = 2.5729 \quad \sigma(\tilde{\alpha}_5) = 0.0402$$

$$\bar{\alpha}_6 = -0.0827 \quad \sigma(\tilde{\alpha}_6) = 0.0355$$

$$\bar{\alpha}_7 = 0.7692 \quad \sigma(\tilde{\alpha}_7) = 0.0126$$

NB. Hier v in m/min

$$\bar{\alpha}_{11} = 2.0 \quad \sigma(\tilde{\alpha}_{11}) = 0.2$$

$$\bar{\alpha}_{12} = 3.139 \quad \sigma(\tilde{\alpha}_{12}) = 1.015$$

$$F_{\max} = 170 \text{ kgf}$$

$$P_{\max} = 7.5 \text{ kW}$$

$$\eta = 0.85$$

Appendix II

Gegeven A is een vierkante matrix.

Def: Matrix A is idempotent wanneer geldt: $A^T A = A$

$A^2 = A$ is de correcte

Onder $\text{tr}(A)$ of $\text{sp}(A)$ (trace resp. spoor) verstaan we de sommatie van de diagonaaltermen van A .

Zij B eveneens een vierkante matrix, \underline{x} eenkolomvektor en c een skalar, dan geldt o.a.:

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$$

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \text{tr}(A \underline{x} \underline{x}^T)$$

$$\text{tr}(I_m) = m, \text{ als } I_m \text{ de } m \times m \text{-identiteitsmatrix is.}$$

Appendix III

TAN(PHI) = 0.16

WAARNEMINGSTABEL

PROEF	10[-1]	V[M/S]	S[MM/OMW]*100	STANDTIJD[MIN]
1	10.00	3.1717	20.4000	26.0
2	10.00	3.3117	20.4000	24.5
3	10.00	3.5800	20.4000	17.0
4	10.00	2.1183	60.2000	20.5
5	10.00	2.2250	60.2000	17.0
6	10.00	2.4350	60.2000	16.0
7	10.00	2.5433	60.2000	11.0
8	10.00	2.6400	60.2000	7.0
9	10.00	2.7400	60.2000	7.5
10	10.00	2.3317	60.2000	15.0
11	10.00	2.3317	60.2000	18.5
12	10.00	2.3317	60.2000	17.5
13	10.00	2.3317	60.2000	13.5
14	10.00	2.3317	60.2000	12.0
15	10.00	3.8400	20.4000	12.0
16	10.00	3.8400	20.4000	13.0
17	10.00	3.8400	20.4000	11.5
18	10.00	3.8400	20.4000	10.0
19	10.00	3.8400	20.4000	10.0
20	10.00	3.8400	20.4000	10.0
21	10.00	3.3117	20.4000	26.0
22	10.00	3.3117	30.1000	11.0
23	10.00	3.3117	38.2000	10.0
24	10.00	3.3117	44.7000	3.5
25	10.00	3.3117	50.5000	4.0
26	10.00	3.3117	55.6000	3.0
27	10.00	3.3117	60.2000	2.0
28	10.00	3.0300	30.1000	24.5
29	10.00	3.0300	38.2000	11.0
30	10.00	3.0300	44.7000	9.0

DE BETA'S ZIJN :

BETA 1 IS: 6.800386@+00

BETA 2 IS: -5.118257@+00

BETA 3 IS: -2.096622@+00

DE GESCHATTE VARIANTIE IN DE LOG(STANDTIJD): 6.3415804@-03

	2	003:0000:0
'REAL' 'PROCEDURE' D2XCOVX(N,XX,EXACT);		003:0000:0
'VALUE' N;'INTEGER' N;'REAL' 'ARRAY' XX(11);		003:0000:0
'BOOLEAN' EXACT;		003:0000:0
'BEGIN' 'REAL' SOM,A,B,C;		003:0000:0
'IF' EXACT THEN	2	007:0000:0
'BEGIN' A:=X(1); B:=X(2); C:=X(2)**2;		007:0000:2
SOM:=2*XX(4)+2*XX(5)*A+2*XX(6)*B;	3	007:0004:1
'IF' N=10 THEN		007:0009:3
SOM:=SOM+4*XX(7)*B+4*XX(8)*A*B		007:000A:2
+6*XX(9)*C+4*XX(10)*B*C		007:000E:4
'END'		007:0012:5
'ELSE' SOM:=0;	3	007:0014:0
D2XCOVX:=SOM		007:0015:1
'END' D2XCOVX;		007:0015:1
	2	003:0000:0
'PROCEDURE' CONSTRAINT(X,G,I);		003:0000:0
'INTEGER' I;'REAL' G;'ARRAY' X(11);		003:0000:0
'IF' I=1 THEN G:= A1-X(1) 'ELSE'		003:0000:0
'IF' I=2 THEN G:= X(1)-A2 'ELSE'		003:0003:2
'IF' I=3 THEN G:= A3-X(2) 'ELSE'		003:0006:5
'IF' I=4 THEN G:= X(2)-A4 'ELSE'		003:000A:2
'IF' I=5 THEN G:= A5-BET5-BET6*X(1)-BET7*X(2)-BET8*(X(2)**2)		003:000D:5
-UP*S1*SQRT(1+XCOVX(M,XX1,KREX)) 'ELSE'		003:0014:1
'IF' I=6 THEN G:= A6-BET5-(BET6+1)*X(1)-BET7*X(2)-BET8*(X(2)**2)		003:0019:2
-UP*S1*SQRT(1+XCOVX(M,XX1,KREX)) 'ELSE'		003:0020:0
'IF' I=7 THEN G:= A7-2*(X(2)-2)+A71 'ELSE'		003:0025:1
'IF' I=8 THEN		003:002A:1
'BEGIN' STAND:=10**((BET1+BET2*X(1)+BET3*X(2)		003:002B:3
-PSI*S2*SQRT(1+XCOVX(6,XX2,STEX)));	2	003:002E:0
TM:=AB/(10**((X(1)+X(2)-2)));		003:0034:4
G:=CU*TM+TM*COSTPAR/STAND +A81		003:0038:4
'END' CONSTRAINT;		003:003B:3
	2	003:003C:2
'PROCEDURE' DCONSTRAINT(X,DG,I);		003:003C:2
'INTEGER' I;'REAL' 'ARRAY' DG(1),X(11);		003:003C:2
'IF' I=1 THEN DG(1):=-1 'ELSE'		003:003C:2
'IF' I=2 THEN DG(1):=+1 'ELSE'		003:003E:4
'IF' I=3 THEN DG(2):=-1 'ELSE'		003:0041:3
'IF' I=4 THEN DG(2):=+1 'ELSE'		003:0044:3
'IF' I=5 THEN 'BEGIN' HLP:=XCOVX(M,XX1,KREX);		003:0047:2
DG(1):=-BET6-0.5*UP*S1*D1XCOVX(M,XX1,KREX)/SQRT(1+HLP);	2	003:004B:5
DG(2):=-BET7-BET8*2*X(2)		003:0053:0
-0.5*UP*S1*D2XCOVX(M,XX1,KREX)/SQRT(1+HLP)		003:0055:1
'END' 'ELSE'		003:005B:0
'IF' I=6 THEN 'BEGIN' HLP:=XCOVX(M,XX1,KREX);	2	003:005C:1
DG(1):=-((BET6+1)-0.5*UP*S1*D1XCOVX(M,XX1,KREX)/SQRT(1+HLP));	2	003:0060:4
DG(2):=-BET7-BET8*2*X(2)		003:0068:1
-0.5*UP*S1*D2XCOVX(M,XX1,KREX)/SQRT(1+HLP)		003:006A:2
'END' 'ELSE'		003:006F:5
'IF' I=7 THEN DG(2):=-2 'ELSE'	2	003:0071:0
'IF' I=8 THEN 'BEGIN' HLP:=XCOVX(6,XX2,STEX);		003:0074:1
STAND:=10**((BET1+BET2*X(1)+BET3*X(2)	2	003:0078:3
-PSI*S2*SQRT(1+HLP)));		003:007A:3
TM:=AB/(10**((X(1)+X(2)-2)));		003:007F:3
DG(1):=TM*LN10*(-C0+(COSTPAR/STAND)*((-1-BET2)		003:0083:3
+0.5*PSI*S2*D1XCOVX(6,XX2,STEX)/SQRT(1+HLP)));		003:0086:4
DG(2):=TM*LN10*(-C0+(COSTPAR/STAND)*((-1-BET3)		003:008D:3
+0.5*PSI*S2*D2XCOVX(6,XX2,STEX)/SQRT(1+HLP)))		003:0090:4

```

'END' DCONSTRAINT;

'PROCEDURE' NIL; ;
$'INCLUDE' "MINIFUN"

XTYPE[1]:=XTYPE[2]:=2;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'7'DO' GTYPE[J]:=2; GTYPE[8]:=1;
LIN[1]:=LIN[2]:=LIN[3]:=LIN[4]:=LIN[7]:='TRUE';
LIN[5]:=LIN[6]:=LIN[8]:='FALSE';

C0:= 0.90      ;CT:= 1.50      ;% GULDEN/MIN RESP.GULDEN/SNIJKANT;
TE:= 0.50      ;TP:= 1.0      ;% MIN. ;
DIAM:= 0.10    ;LENGTH:= 0.250 ;% M ;
DEPTH:=J       ;% MM ;
SMAX:= 0.7     ;SMIN:= 0.1    ;% MM/OMW ;
VMAX:= 5.0     ;VMIN:= 1.0    ;% M/S ;
FCMAX:= 220    ;PCMAX:= 7500  ;% KGF RESP. NM/S ;
HLIM:=0.06     ;% MM ;
R:= 0.8        ;% MM ;
ETHA:= 0.85    ;LN10:= LN(10);
A1:=LOG(VMAX)  ;A2:=LOG(VMIN)  ;
A3:=LOG(100*SMAX) ;A4:=LOG(100*SMIN) ;
A5:=LOG(FCMAX) ;A6:=LOG(ETHA*PCMAX/9.81);
A7:=LOG(HLIM)  ;A71:=LOG(8*R)  ;
A8:=1000*ARCTAN(1)*4*DIAM*LENGTH/60;
COSTPAR:=C0*TE+CT;
A81:=C0*TP;
M:=6;
READ(IN,/,S1,'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'XX1[J],BET5,BET6,BET7,BET8,
S2,'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'6'DO'XX2[J],BET1,BET2,BET3);
S1:=SQRT(S1); S2:=SQRT(S2);
KREX:='FALSE'; STEX:='FALSE';
'COMMENT' KREX EN STEX HEBBEN BETREKKING OP HET AL OF NIET
MEENEMEN VAN DE COVARIANTIEMATRIX BIJ RESP. DE
SNIJKKRACHT EN DE STANDTIJD ;
'IF'KREX'THEN'
WRITE(OUT,</,"COVARIANTIEMATRIX_V.D._SNIJKKRACHTSCOEFF._MEEGENOMEN">)
'ELSE'WRITE(OUT,</,"COVARIANTIEMATRIX_V.D._SNIJKKRACHTSCOEFF._
VERWAARLOOSD">);
'IF'STEX'THEN'
WRITE(OUT,</,"COVARIANTIEMATRIX_V.D._ STANDTIJDSCOEFF._MEEGENOMEN">)
'ELSE'WRITE(OUT,</,"COVARIANTIEMATRIX_V.D._ STANDTIJDSCOEFF._
VERWAARLOOSD">);
WRITE(OUT,</,"SNIJKKRACHT:",/, "DE_BETA'S_ZIJN:",/,4(E20.4),/,
"DE_VARIANTIE-COVARIANTIE-COEF.:",/,6(E20.4),///,"STANDTIJD:",/,
"DE_BETA'S_ZIJN:",/, 3(E20.4),/," DE_VAR-COVAR-COEF.:",/,
6(E20.4),///>,BET5, BET6,BET7,BET8,
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'6'DO'XX1[J], BET1,BET2,BET3,
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'6'DO'XX2[J]);
'IF'M=10'THEN'
WRITE(OUT,</," SNIJKKRACHTSMODEL_BEVAT_OOK_KWADRATISCHE_TERM">);
WRITE(OUT,<///,"OPTIMALISERING_VAN_PRODUKTIEKOSTEN_PER_PRODUKT",
///,"PROB.LEVEL___SNIJSNELHEID___AANZET___KOSTEN_P.PROD___
GEM.LEVENS-___STANDTIJD___MACH.TIJD___AANTAL_PROD",/,
"___P1_[%]___[M/S]___[MM/OMW]___[GULDEN]___
DUUR_[MIN]___[MIN]___P.PROD.[MIN]___P.BEITEL",///>);

```

2
2

```

003:0095:5
003:0097:4
003:0097:4
003:0097:5
003:0097:5
003:0097:5
003:009A:0
003:009F:5
003:00A4:4
003:00A7:5
003:00A7:5
003:00A7:5
003:00AB:0
003:00AE:3
003:00B2:0
003:00B2:5
003:00B6:3
003:00B9:3
003:00BB:2
003:00BD:3
003:00BF:3
003:00C3:0
003:00C6:0
003:00CA:0
003:00CE:5
003:00D2:2
003:00D6:2
003:00D8:1
003:00D9:3
003:00DA:2
003:00F4:0
003:0106:2
003:0109:2
003:010A:4
003:010A:4
003:010A:4
003:010A:4
003:0108:0
003:010U:2
003:0114:4
003:0119:2
003:0119:4
003:011C:0
003:0122:4
003:0127:2
003:0129:1
003:0129:1
003:0129:1
003:0137:3
003:0143:3
003:0140:5
003:014E:4
003:0155:2
003:0157:1
003:0157:1
003:0157:1
003:0157:1
003:015C:2
003:015C:2

```

P2:=0.90 ;		003:015C:2
'FOR'P1:=0.50 ,0.90 ,0.99'DO'		003:015E:3
'BEGIN'UP:=PROB(P1); PSI:=PROB(P2);		003:0168:3
X(1):=LOG(4); X(2):=LOG(100*0.5);	2	003:0168:5
MINIFUN(X,CONSTRAINT,XTYPE,GTYPE,LIN,1,DCONSTRAINT,NIL,		003:0170:2
1,2,8,@-5,@-5, 10 ,2,CONVERGED,0,100,OUT);		003:0189:4
'IF'CONVERGED=8'THEN'WRITE(OUT,</,"GEEN_CONVERGENTIE">);		003:0190:2
WRITE(OUT,</,IS, F15.3, F12.4, F14.3, F12.2, F13.2, F12.2,		003:0197:5
F13.2,>/, 100*P1, 10**X(1), 10**(X(2)-2),		003:0199:4
TM*(C0+CUSTPAR/STAND)+C0*TP, 10**(BET1+BET2*X(1)		003:01A9:5
+BET3*X(2)), STAND, TM, STAND/TM)		003:01B0:1
'END'		003:01B9:1
'END'.	2	003:01BE:5
	1	003:01C1:3

=====

NUMBER OF ERRORS DETECTED = 0000.
NUMBER OF SEGMENTS = 060. TOTAL SEGMENT SIZE = 003744 WORDS. CORE ESTIMATE = 006489 WORDS. STACK ESTIMATE=000267
PROGRAM SIZE = 000887 CARDS, 008961 SYNTACTIC ITEMS, 000159 DISK SEGMENTS.
PROGRAM FILE NAME: w/NUBE/VANWOERKUM/OPTIMAL.
COMPILATION TIME = 40.953 SECONDS ELAPSED; 19.015 SECONDS PROCESSING; 4.683 SECONDS I/O.

=====

COVARIANTIEMATRIX V.D. SNIJKRACHTSCOEFF. VERWAARLOOSD

COVARIANTIEMATRIX V.D. STANDTIJDSCOEFF. VERWAARLOOSD

SNIJKRACHT:

DE BETA'S ZIJN:

1.3322e+00	-8.1969e-02	6.7189e-01	0.0000e+00		
DE VARIANTIE-COVARIANTIE-COEF.:					
2.3400e-01	-7.9000e-02	1.6620e-01	-1.4065e-01	1.6920e-02	9.4560e-02

STANDTIJD:

DE BETA'S ZIJN:

6.8004e+00	-5.1183e+00	-2.0966e+00			
DE VAR-COVAR-COEF.:					
1.6312e+01	-1.4391e+01	1.4444e+01	-5.9623e+00	4.7494e+00	2.3418e+00

OPTIMALISERING VAN PRODUCTIEKOSTEN PER PRODUKT

PROB.LEVEL P1 [%]	SNIJSNELHEID [M/S]	AANZET [MM/OMW]	KOSTEN P.PROD [GULDEN]	GEM.LEVENS- DUUR [MIN]	STANDTIJD [MIN]	MACH.TIJD P.PROD.[MIN]	AANTAL PROU P.BEITEL
50	2.954	0.3639	2.224	13.18	10.42	1.22	8.56
90	2.954	0.3276	2.320	16.43	12.99	1.35	9.61
99	2.954	0.3006	2.411	19.68	15.56	1.47	10.56

Geraadpleegde literatuur.

- 1- Iwata, Murotsu, Iwatsubo, Fujii
A Probabilistic Approach to the Determination of the
Optimum Cutting Conditions.
Journal of Engineering for Industry
Nov. 1972.
- 2- Bracken and McGormick
Selected Applications of Nonlinear Programming.
John Wiley and Sons New York, London.
- 3- Brewer and Rueda
A Simplified Approach to the Optimum Selection of
Machining Parameters.
Engineers Digest vol. 24, no 9, 1963
- 4- Statistisch Compendium
Prof. Hamaker
Collegediktaat THE
- 5- Beathe procedure MINIFUN, for solving nonlinear
Optimization problems.
RC-Informatie nr. 57 maart 1974
- 6- Bus, Touwen, Veenstra, v.d.Woiff
On the significance of equivalent chip thickness.
WT-Rapport 0241
- 7- P.Eykhoff
System Identification
1974. John Wiley and Sons, London.
- 8- R. Isermann
Parameter-Identifikationsverfahren nr.42
1972. Universität Berlin.

- 9- G.B.Whetherill
Elementary Statistical Methods
1967. Methuen & Co. Ltd - London

- 10- Jerry M. Mendel
Discrete Techniques of Parameter Estimation
Marcel Dekker, INC. New York 1973

- 11- K.J.Aström
Lectures on the Identification Problem - The Least-Squares-Method.
1968, Report 6806, Lund Institute of
Technology.

- 12- N.R.Draper and H.Smith
Applied Regression Analysis
1966. John Wiley and Sons, New York

- 13- Mary Gibbons Natrella
Experimental Statistics
1963. National Bureau of Standards
Handbook 91

- 14- H.Cramér
The Elements of the Probability Theory
John Wiley and Sons, New York

- 15- Lineaire Modellen
Prof. Doornbos
Collegediktaat THE, afd. Wsk.

- 16- WT - Rapport 0046
Bepaling van de snijsnelheidsexponenten p en q
voor hardmetaal gereedschap op staal.

- 17- WT - Rapport 0138
Beitelkrachten bij draaien.