Over de definitieverzameling van een voorwaardelijke verwachtingsoperator en de ongelijkheid van Jensen

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1974-05

maart 1974

OVER DE DEFINITIEVERZAMELING VAN EEN VOORWAARDELIJKE VERWACHTINGSOPERATOR EN DE ONGELIJKHEID VAN JENSEN

door

F.H. Simons

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde
Postbus 513, Eindhoven.

Over de definitieverzameling van een voorwaardelijke verwachtingsoperator en de ongelijkheid van Jensen.

In deze notitie staat niets nieuws; er wordt slechts een grote klasse functies aangegeven waarop de voorwaardelijke verwachtingsoperator zinvol gedefinieerd kan worden. Als resultaat vinden we een snelle afleiding van de ongelijkheid van Jensen.

We werken op een kansruimte $(X,\mathcal{A},\mu)$. Alle beschouwde functies zijn $\mathcal{A}$-meetbaar, gelijkheden en ongelijkheden tussen functies gelden modulo μ-nulverzamelingen. $\mathcal{A}_0$ is een deel σ-algebra van $\mathcal{A}$.

1. Laat $\mathcal{M}^+$ de verzameling der niet-negatieve uitgebreid reëelwaardige functies zijn. Voor iedere $f \in \mathcal{M}^+$ definieert

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

een (niet noodzakelijk σ-eindige) maat op $\mathcal{A}$ met $\nu \ll \mu$.
Laat ν_0 de beperking van ν tot $\mathcal{A}_0$ zijn, μ_0 de beperking van μ tot $\mathcal{A}_0$, en definieer

$$E_{\mathcal{A}_0} f = \frac{d\nu_0}{d\mu_0}$$

waarin het rechterlid de Radon-Nikodym afgeleide van ν_0 met betrekking tot μ_0 voorstelt. De hier toegepaste vorm van de stelling van Radon-Nikodym is iets algemener dan de gebruikelijke formulering in de leerboeken en kan bijvoorbeeld gevonden worden in H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie (Berlin 1968), stelling 17.8.

Uit deze definitie volgen de volgende eigenschappen:

i) $E_{\mathcal{A}_0} f$ is $\mathcal{A}_0$-meetbaar.

ii) $E_{\mathcal{A}_0}(f+g) = E_{\mathcal{A}_0} f + E_{\mathcal{A}_0} g$.

iii) $E_{\mathcal{A}_0}(\alpha f) = \alpha E_{\mathcal{A}_0} f$ mits $\alpha \geq 0$.

iv) $E_{\mathcal{A}_0} f = f$ als f $\mathcal{A}_0$-meetbaar is.

v) $E_{\mathcal{A}_0} fg = f E_{\mathcal{A}_0} g$ als f $\mathcal{A}_0$-meetbaar is.

2. We breiden nu de definitieverzameling van $E_{\mathcal{R}_0}$ uit tot de verzameling

$$\mathfrak{M}^* = \{f_1 - f_2 \mid f_1 \in \mathfrak{M}^+,\ f_2 \in \mathfrak{M}^+,\ E_{\mathcal{R}_0} f_2 < \infty\} .$$

De volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie van $\mathfrak{M}^*$ en de eigenschappen van $E_{\mathcal{R}_0}$ op $\mathfrak{M}^+$:

a) $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}^*$

b) $f \in \mathfrak{M}^*,\ g \in \mathfrak{M}^* \Rightarrow f+g \in \mathfrak{M}^*$

c) $f \in \mathfrak{M}^*,\ \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \alpha f \in \mathfrak{M}^*$

d) $f \geq g,\ g \in \mathfrak{M}^* \quad \Rightarrow f \in \mathfrak{M}^*$.

Op $\mathfrak{M}^*$ definieren we de voorwaardelijke verwachtingsoperator door

$$E_{\mathcal{R}_0}(f_1 - f_2) = E_{\mathcal{R}_0} f_1 - E_{\mathcal{R}_0} f_2 \qquad (f_1 \in \mathfrak{M}^+,\ f_2 \in \mathfrak{M}^+,\ E_{\mathcal{R}_0} f_2 < \infty).$$

Deze definitie is onafhankelijk van de gekozen representatie van het element van $\mathfrak{M}^*$. Immers, indien

$$f_1 - f_2 = g_1 - g_2,$$

dan geldt

$$f_1 + g_2 = f_2 + g_1 \in \mathfrak{M}^+$$

$$E_{\mathcal{R}_0} f_1 + E_{\mathcal{R}_0} g_2 = E_{\mathcal{R}_0} f_2 + E_{\mathcal{R}_0} g_1$$

$$E_{\mathcal{R}_0} f_1 - E_{\mathcal{R}_0} f_2 = E_{\mathcal{R}_0} g_1 - E_{\mathcal{R}_0} g_2 .$$

Voor functies uit $\mathfrak{M}^+$ valt de nieuwe definitie samen met de oude.

De operator $E_{\mathcal{R}_0}$ heeft op $\mathfrak{M}^*$ eveneens de eigenschappen i) - iv).

Eigenschap v) krijgt nu iets andere voorwaarden:

v') Als f $\mathcal{R}_0$-meetbaar is met $|f| < \infty$, en $g \in \mathfrak{M}^*$ met $|E_{\mathcal{R}_0} g| < \infty$, dan geldt $fg \in \mathfrak{M}^*$ en $E_{\mathcal{R}_0} fg = f E_{\mathcal{R}_0} g$.

3. $$\mathcal{V} = \{f \in \mathfrak{M}^* \mid |E_{\mathcal{R}_0} f| < \infty\} .$$

Uit de eigenschappen vermeld in 2. volgt direct dat $\mathcal{V}$ een lineaire ruimte is en de voorwaardelijke verwachtingsoperator $E_{\mathcal{R}_0}$ beperkt tot $\mathcal{V}$ een projectie op de $\mathcal{R}_0$-meetbare functies in $\mathcal{V}$ is.

4. Stel φ is een reëelwaardige convexe functie op een open interval I. Er bestaat dan een niet-dalende, dus Borelmeetbare, functie m op I zo dat voor alle x en t in I

$$\varphi(x) \geq \varphi(t) + m(t) \quad (x-t) .$$

Laat nu f een functie zijn uit $\mathcal{V}$ met waardebereik in I. Dan liggen de functiewaarden van $E_{\mathcal{R}_0} f$ ook in I en vinden we na de substitutie $x \to f$, $t \to E_{\mathcal{R}_0} f$

$$\varphi(f) \geq \varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) + m(E_{\mathcal{R}_0} f) \quad (f-E_{\mathcal{R}_0} f) .$$

Toepassing van eigenschap v') geeft $m(E_{\mathcal{R}_0} f)(f-E_{\mathcal{R}_0} f) \in \mathcal{V}$ met voorwaardelijke verwachting 0. Daar $\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f)$ $\mathcal{R}_0$-meetbaar is en $|\varphi| < \infty$, is ook $\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) \in \mathcal{V}$, dus ligt het rechterlid in $\mathcal{V}$, dus in $\mathfrak{M}^*$.
Wegens d) is dan $\varphi(f) \in \mathfrak{M}^*$, en wegens ii)

$$E_{\mathcal{R}_0} \varphi(f) \geq E_{\mathcal{R}_0} (\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) + m(E_{\mathcal{R}_0} f)(f-E_{\mathcal{R}_0} f))$$

$$E_{\mathcal{R}_0} \varphi(f) \geq \varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) .$$

Dit is de ongelijkheid van Jensen. Deze geldt dus voor iedere convexe functie op een open interval I en iedere $f \in \mathcal{V}$ met waardebereik in I.

5. Neem $\varphi(x) = |x|^p$ met $p \geq 1$.
Dan geldt voor iedere eindigwaardige $f \in \mathcal{V}$

$$E_{\mathcal{R}_0}(|f|^p) \geq |E_{\mathcal{R}_0} f|^p ,$$

dus

$$\int |E_{\mathcal{R}_0} f|^p d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu .$$

Hieruit volgt $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{V}$, en $E_{\mathcal{R}_0}\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_p$.

In iedere $\mathcal{L}_p$ is $E_{\mathcal{R}_0}$ een projectie op de $\mathcal{R}_0$-meetbare functies. Bovendien geldt $\| E_{\mathcal{R}_0} \|_p = 1$.