

Over de definitieverzameling van een voorwaardelijke verwachtingsoperator en de ongelijkheid van Jensen

Citation for published version (APA):

Simons, F. H. (1974). *Over de definitieverzameling van een voorwaardelijke verwachtingsoperator en de ongelijkheid van Jensen*. (Eindhoven University of Technology : Dept of Mathematics : memorandum; Vol. 7405). Technische Hogeschool Eindhoven.

Document status and date:

Gepubliceerd: 01/01/1974

Document Version:

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.tue.nl/taverne

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

openaccess@tue.nl

providing details and we will investigate your claim.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Memorandum 1974-05

maart 1974

OVER DE DEFINITIEVERZAMELING VAN EEN VOORWAARDELIJKE VERWACHTINGSOPERATOR
EN DE ONGELIJKHEID VAN JENSEN

door

F.H. Simons

Technische Hogeschool Eindhoven
Onderafdeling der Wiskunde
Postbus 513, Eindhoven.

Over de definitieverzameling van een voorwaardelijke verwachtingsoperator en de ongelijkheid van Jensen.

In deze notitie staat niets nieuws; er wordt slechts een grote klasse functies aangegeven waarop de voorwaardelijke verwachtingsoperator zinvol gedefinieerd kan worden. Als resultaat vinden we een snelle afleiding van de ongelijkheid van Jensen.

We werken op een kansruimte (X, \mathcal{R}, μ) . Alle beschouwde functies zijn \mathcal{R} -meetbaar, gelijkheden en ongelijkheden tussen functies gelden modulo μ -nulverzamelingen. \mathcal{R}_0 is een deel σ -algebra van \mathcal{R} .

1. Laat \mathcal{M}^+ de verzameling der niet-negatieve uitgebreid reëelwaardige functies zijn. Voor iedere $f \in \mathcal{M}^+$ definieert

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

een (niet noodzakelijk σ -eindige) maat op \mathcal{R} met $\nu \ll \mu$.

Laat ν_0 de beperking van ν tot \mathcal{R}_0 zijn, μ_0 de beperking van μ tot \mathcal{R}_0 , en definieer

$$E_{\mathcal{R}_0} f = \frac{d\nu_0}{d\mu_0}$$

waarin het rechterlid de Radon-Nikodym afgeleide van ν_0 met betrekking tot μ_0 voorstelt. De hier toegepaste vorm van de stelling van Radon-Nikodym is iets algemener dan de gebruikelijke formulering in de leerboeken en kan bijvoorbeeld gevonden worden in H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie (Berlin 1968), stelling 17.8.

Uit deze definitie volgen de volgende eigenschappen:

- i) $E_{\mathcal{R}_0} f$ is \mathcal{R}_0 -meetbaar.
- ii) $E_{\mathcal{R}_0} (f+g) = E_{\mathcal{R}_0} f + E_{\mathcal{R}_0} g$.
- iii) $E_{\mathcal{R}_0} (\alpha f) = \alpha E_{\mathcal{R}_0} f$ mits $\alpha \geq 0$.
- iv) $E_{\mathcal{R}_0} f = f$ als f \mathcal{R}_0 -meetbaar is.
- v) $E_{\mathcal{R}_0} fg = f E_{\mathcal{R}_0} g$ als f \mathcal{R}_0 -meetbaar is.

2. We breiden nu de definitieverzameling van E_{R_0} uit tot de verzameling

$$\mathcal{M}^* = \{f_1 - f_2 \mid f_1 \in \mathcal{M}^+, f_2 \in \mathcal{M}^+, E_{R_0} f_2 < \infty\}.$$

De volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie van \mathcal{M}^* en de eigenschappen van E_{R_0} op \mathcal{M}^+ :

- a) $\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{M}^*$
- b) $f \in \mathcal{M}^*, g \in \mathcal{M}^* \Rightarrow f+g \in \mathcal{M}^*$
- c) $f \in \mathcal{M}^*, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{M}^*$
- d) $f \geq g, g \in \mathcal{M}^* \Rightarrow f \in \mathcal{M}^*$.

Op \mathcal{M}^* definiëren we de voorwaardelijke verwachtingsoperator door

$$E_{R_0}(f_1 - f_2) = E_{R_0} f_1 - E_{R_0} f_2 \quad (f_1 \in \mathcal{M}^+, f_2 \in \mathcal{M}^+, E_{R_0} f_2 < \infty).$$

Deze definitie is onafhankelijk van de gekozen representatie van het element van \mathcal{M}^* . Immers, indien

$$f_1 - f_2 = g_1 - g_2,$$

dan geldt

$$f_1 + g_2 = f_2 + g_1 \in \mathcal{M}^+$$

$$E_{R_0} f_1 + E_{R_0} g_2 = E_{R_0} f_2 + E_{R_0} g_1$$

$$E_{R_0} f_1 - E_{R_0} f_2 = E_{R_0} g_1 - E_{R_0} g_2.$$

Voor functies uit \mathcal{M}^+ valt de nieuwe definitie samen met de oude.

De operator E_{R_0} heeft op \mathcal{M}^* eveneens de eigenschappen i) - iv).

Eigenschap v) krijgt nu iets andere voorwaarden:

v') Als f R_0 -meetbaar is met $|f| < \infty$, en $g \in \mathcal{M}^*$ met $|E_{R_0} g| < \infty$,

dan geldt $fg \in \mathcal{M}^*$ en $E_{R_0} fg = f E_{R_0} g$.

$$3. \quad \mathcal{V}^* = \{f \in \mathcal{M}^* \mid |E_{\mathcal{R}_0} f| < \infty\} .$$

Uit de eigenschappen vermeld in 2. volgt direct dat \mathcal{V} een lineaire ruimte is en de voorwaardelijke verwachtingsoperator $E_{\mathcal{R}_0}$ beperkt tot \mathcal{V} een projectie op de \mathcal{R}_0 -meetbare functies in \mathcal{V} is.

4. Stel φ is een reëelwaardige convexe functie op een open interval I. Er bestaat dan een niet-dalende, dus Borelmeetbare, functie m op I zo dat voor alle x en t in I

$$\varphi(x) \geq \varphi(t) + m(t) (x-t) .$$

Laat nu f een functie zijn uit \mathcal{V} met waardebereik in I. Dan liggen de functiewaarden van $E_{\mathcal{R}_0} f$ ook in I en vinden we na de substitutie $x \rightarrow f$, $t \rightarrow E_{\mathcal{R}_0} f$

$$\varphi(f) \geq \varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) + m(E_{\mathcal{R}_0} f) (f - E_{\mathcal{R}_0} f) .$$

Toepassing van eigenschap v') geeft $m(E_{\mathcal{R}_0} f)(f - E_{\mathcal{R}_0} f) \in \mathcal{V}$ met voorwaardelijke verwachting 0. Daar $\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f)$ \mathcal{R}_0 -meetbaar is en $|\varphi| < \infty$, is ook $\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) \in \mathcal{V}$, dus ligt het rechterlid in \mathcal{V} , dus in \mathcal{M}^* .

Wegens d) is dan $\varphi(f) \in \mathcal{M}^*$, en wegens ii)

$$E_{\mathcal{R}_0} \varphi(f) \geq E_{\mathcal{R}_0} (\varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) + m(E_{\mathcal{R}_0} f)(f - E_{\mathcal{R}_0} f))$$

$$E_{\mathcal{R}_0} \varphi(f) \geq \varphi(E_{\mathcal{R}_0} f) .$$

Dit is de ongelijkheid van Jensen. Deze geldt dus voor iedere convexe functie op een open interval I en iedere $f \in \mathcal{V}$ met waardebereik in I.

5. Neem $\varphi(x) = |x|^p$ met $p \geq 1$.

Dan geldt voor iedere eindigwaardige $f \in \mathcal{V}$

$$E_{\mathcal{R}_0} (|f|^p) \geq |E_{\mathcal{R}_0} f|^p ,$$

dus

$$\int |E_{\mathcal{R}_0} f|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu .$$

Hieruit volgt $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{U}$, en $E_{\mathcal{R}_0} \mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_p$.

In iedere \mathcal{L}_p is $E_{\mathcal{R}_0}$ een projectie op de \mathcal{R}_0 -meetbare functies. Bovendien geldt $\|E_{\mathcal{R}_0}\|_p = 1$.