

## Stabiliteitsonderzoek

**Citation for published version (APA):**

Janssen, J. D. (1964). *Stabiliteitsonderzoek*. (DCT rapporten; Vol. 1964.037). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1964

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Memo

Mei 1964

Stabiliteitsonderzoek

v. J. D. Janssen.

Inleiding

Aan de hand van Stoker's boek "Nonlinear Vibrations" onderzoeken we de stabiliteit van evenwichtsstanden onder bepaalde voorwaarden. Met name wordt nagegaan wanneer een slinger in zijn evenwichtstand een stabiele evenwichtsstand inneemt als of het ophangpunt een periodieke kracht in de richting van het zwaartekrachtveld wordt uitgeoefend.

Floquet theorie

$$\text{Beschouwt } \frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z) w = 0$$

$p(z)$  en  $q(z)$  zijn reguliere periodieke functies van  $z$  (regulier in een strook rond de reële as) met de reële periode  $\Omega$

Er bestaan in het algemeen <sup>v.d. tweede orde</sup> twee lineaire, onafhankelijke basisfuncties  $w_1(z)$  en  $w_2(z)$ , zodat iedere oplossing van de d.v. te schrijven is als

$$w(z) = c_1 w_1 + c_2 w_2$$

Stelling: De noodzakelijke en voldoende voorwaarde, waaraan

twee basisfuncties moeten voldoen is:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bewijs:

voldovende voorwaarde: Stel  $C_1 w_1 + C_2 w_2 = 0$  ( $w_1$  en  $w_2$  lin. afh.)  
 dan is ook  $C_1 w_1' + C_2 w_2' = 0$ , dus  $\Delta(z) = 0$ .

Noodzakelijk:

als  $\Delta(z) = w_1 w_2' - w_2 w_1' = 0$ , dan geldt

(integreer)

$$\log \frac{w_1}{w_2} = \text{const.}, \text{ dus } w_1 \text{ en } w_2 \text{ afhankelijk}$$

Stelling 2

Als  $\Delta(z) = 0$  voor  $z = z_0$ , dan  $\Delta(z) \equiv 0$ .

Bewijs:

$$\frac{d}{dz} \Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1'' & w_2'' \end{vmatrix}$$

uit d.v.:  $w_i'' = -p w_i' - q w_i$

Dus  $\frac{d}{dz} \Delta = -p \Delta \rightarrow \Delta(z) = \Delta_0 e^{-\int_{z_0}^z p(\xi) d\xi}$

( $\int_{z_0}^z p(\xi) d\xi$  blijft eindig, omdat  $p(\xi)$  regulier is).

Als  $p(z+\Omega) = p(z)$

$q(z+\Omega) = q(z)$

dan vormen, behalve  $w_1(z)$  en  $w_2(z)$  ook  $w_1(z+\Omega)$  en  $w_2(z+\Omega)$  een basis, want  $w_i(z+\Omega)$  voldoet aan d.v. en  $\Delta(z+\Omega) \neq 0$ .

We kunnen schrijven:

$$w_1(z) = w_1(z+\Omega) = a_{11} w_1(z) + a_{12} w_2(z)$$

$$w_2(z) = w_2(z+\Omega) = a_{21} w_1(z) + a_{22} w_2(z)$$

$$\Delta(z+\Omega) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta(z) \quad , \text{ dus } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wellicht bestaan er oplossingen, waarom geldt:

$$w(z+\Omega) = W(z) = \sigma w(z) \quad (\sigma = \text{const.})$$

(eigenfuncties!)

De eigenwaarden  $\sigma$  volgen uit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Deze merkantovergelijking in  $\sigma$  heeft twee wortels ongelijk aan nul omdat  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ . Noem deze wortels

$\sigma_1$  en  $\sigma_2$ . [betreft met reël te zijn]

a)  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Er bestaan twee lineair-onafhankelijke oplossingen

$$\begin{cases} w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \varphi_1(z) \\ w_2(z) = e^{\alpha_2 z} \varphi_2(z) \end{cases}$$

$$\text{met } \varphi_i(z+\Omega) = \varphi_i \quad (\text{zie bewijs}) \\ \text{en } e^{\alpha_i \Omega} = \sigma_i$$

bewijs:

$$\text{Er geldt: } w_1(z+\Omega) = \sigma_1 w_1(z) = e^{\alpha_1 \Omega} w_1(z)$$

$$\text{Doe te stellen } w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \varphi_1(z)$$

$$w_1(z+\Omega) = e^{\alpha_1(z+\Omega)} \varphi_1(z+\Omega)$$

$$\text{dus } e^{\alpha_1(z+\Omega)} \varphi_1(z+\Omega) = e^{\alpha_1 \Omega} e^{\alpha_1 z} \varphi_1(z)$$

men we dat

$$\varphi_1(z+\Omega) = \varphi_1(z).$$

Opmer.

$$\text{Als } \sigma_i = 1 \quad , \text{ geldt } w_i(z+\Omega) = w_i(z)$$

dus  $w_i(z)$  heeft periode  $\Omega$ .

Dan geldt:

$$e^{\alpha_i \Omega} = 1 \quad \alpha_i \Omega = 2k\pi i \quad k=0, 1, \dots$$

Als  $\sigma_i = -1$  of  $\alpha_i \Omega = i(\pi + 2k\pi)$

geldt:  $w_i(z + \Omega) = -w_i(z)$

des

$$w_i(z + 2\Omega) = -w_i(z + \Omega) = w_i(z)$$

$w_i(z)$  heeft periode  $2\Omega$

b)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

In elk geval bestaat er een eigenfunctie  $w_i(z)$

Er geldt dus:

$$W_1(z) = c w_1(z) = \sigma w_1(z)$$

$$W_2(z) = a w_1(z) + b w_2(z) = \sigma W_2(z)$$

$$\text{of } \begin{vmatrix} c - \sigma & 0 \\ a & b - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 - (c + b)\sigma + bc = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{c + b \pm \sqrt{(c + b)^2 - 4bc}}{2}$$

Uit het gestelde volgt  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \rightarrow c = b$

en  $\sigma_{1,2} = c$

dus:

$$W_1(z) = \sigma w_1(z)$$

$$W_2(z) = a w_1(z) + \sigma w_2(z)$$

dus  $\frac{W_2}{W_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{a}{\sigma}$

Verder is  $\frac{w_2}{w_1} - \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega}$  een periodieke functie met

periode  $\Omega$ .

Immers

$$\frac{w_2(z+\Omega)}{w_1(z+\Omega)} - \frac{a}{\sigma} \frac{z+\Omega}{\Omega} = \frac{w_2(z)}{w_1(z)} + \frac{a'}{\sigma} - \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega} - \frac{a}{\sigma}$$

dus  $\psi(z) = \frac{w_2}{w_1} - \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega}$  is periodiek

of  $w_2 = w_1 \left[ \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega} + \psi(z) \right]$

In dit geval geldt dus:

$$\begin{cases} w_1(z) = e^{\alpha z} \varphi_1(z) \\ w_2(z) = e^{\alpha z} \left[ \frac{a}{\sigma} \frac{z}{\Omega} \varphi_1(z) + \psi_1(z) \right] \end{cases}$$

periodiek met  $\Omega$ .

Wanneer zijn alle oplossingen van  $z > 0$   
 ( $\alpha$ -reëel) begrensd?

$\sigma_1 \neq \sigma_2$  alle oplossingen begrensd als  $\text{Re } \alpha_i \leq 0$

$\sigma_1 = \sigma_2$  " " "  $\text{Re } \alpha < 0$   
 of  $\text{Re } \alpha = 0$   
 en  $a = 0$

Toepassing Floquet theorie op de Mathieu vergelijking

Mathieu vgl.

$$w'' + q(z)w = 0$$

$\alpha$  is reëel

$q(z)$  periodiek

! Kies de basisfuncties  $w_1$  en  $w_2$  zo, dat

$$\begin{cases} w_1(0) = 1 & w_1'(0) = 0 \\ w_2(0) = 0 & w_2'(0) = 0 \end{cases} \quad \Delta(0) = 1$$

Karakteristieke vgl.

reëel!

$$\sigma^2 - A\sigma + 1 = 0$$

$$\text{of } \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Verder volgt uit pag. 2 dat voor  $p=0$  geldt  $\Delta(z)$  is constant voor alle  $z$ . Dus  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = 1$

Voor de wortels van deze karakt. vgl. geldt:

$$\underline{\underline{\sigma_1 \sigma_2 = 1}} \quad (\sigma_i \text{ hoeft niet reëel te zijn})$$

Opm:

$$\text{Stabiliteit als } |\sigma_i| \leq 1 \quad \left\{ \Rightarrow |\sigma_1| = |\sigma_2| = 1 \right.$$
  
$$\text{Met } \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

Het omgekeerde geldt ook als  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Als echter  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  is nog ~~een~~ bewijzen dat  $a$  verdwijnt

Voorbeeld:

$$w'' + (\delta + \varepsilon \eta(z)) w = 0$$

$\delta, \varepsilon$  parameters.

Weweten

$$\sigma_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - 1}$$

$|A| > 2$  instabil ;  $|A| < 2$  stabiel.

De overgang van instabil in stabiel heeft op voor  $A=2$  en  $A=-2$ .

Als  $A=2$  dan  $\sigma_{1,2} = 1$  periodiek met  $\Omega$ !

$A=-2$  dan  $\sigma_{1,2} = -1$  periodiek met  $2\Omega$ .

Mathieu vergelijking

neem  $z(z) = \cos z$

$$w'' + (\delta + \epsilon \cos z) w = 0$$

Stel  $w(z)$  een oplossing dan is het altijd zo dat

$w(z) \neq w(-z)$  en zeker  $w(z) \neq -w(-z)$ . M. a. w.

|| een oplossing is noch even, noch oneven

We kunnen wel bewijzen dat - als  $w(z)$  een oplossing is, ook  $w(-z)$  een oplossing is. Deze functies zijn basisfuncties.

bewijs:  $w''(z) + (\delta + \epsilon \cos z) w = 0$  voor alle  $z$ , dus ook voor  $z = -z^*$

$$w''(-z^*) + (\delta + \epsilon \cos(-z^*)) w(-z^*) = 0$$

of

$$w''(-z) + (\delta + \epsilon \cos(+z)) w(-z) = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Dus:  $[w(z) + w(-z)]$  even oplossing

$[w(z) - w(-z)]$  oneven oplossing.

Uit de randvoorwaarden van de basisfuncties volgt dat de basisfuncties zo gekozen kunnen worden, dat een functie even en de andere oneven is.

Bij overgang van het stabiel in het instabiel gebied en omgekeerd heeft de oplossing periode  $2\pi$  of  $4\pi$ , omdat de  $\Omega = 2\pi$

Als de oplossing  $w(z)$  periode  $2\pi$  heeft, kan ze geschreven worden als:

$$w(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n z + b_n \sin n z)$$

Geïnsubstitueerd in de d.v. levert dit:

$$\begin{cases} \delta a_0 + \frac{\epsilon}{2} a_1 = 0 \\ (\delta - n^2) a_n + \frac{\epsilon}{2} (a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$



$$m \left\{ \begin{array}{l} (\delta - 1) b_1 + \frac{\varepsilon}{2} b_2 = 0 \\ (\delta - n^2) b_n + \frac{\varepsilon}{2} (b_{n-1} + b_{n+1}) = 0 \end{array} \right. \quad n = 2, 3, \dots$$

Stellen we ons weder met een eindig aantal termen dan hebben we  $n$  homogene lineaire vergelijkingen, waaraan door  $a_n$  resp.  $b_n$  voldaan moet zijn (niet allemaal nul). Dan moet de coëfficiënten determinant (symmetrisch, tridiaagonaal) nul zijn. De waarden van  $\delta$  en  $\varepsilon$ , waarvoor dit gebeurt, zijn benaderingen van de overgangswaarden.

Stokes bewees dat we óf met de vergelijkingen in  $a_n$  óf met die in  $b_n$  te doen hebben. Als de eerste niet bevredigende termen b.v. een cosinus term is, dan kunnen we alhier naar  $a_n$  te kijken. We vragen ons echter af hoe het zit als  $a_0 \neq 0$  en  $b_1 \neq 0$ .

Eenzelfde gedachtengang volgt als de periode der aflossing  $4\pi$  is.

Zie Stokes fig 4.1 pag 205.

Overgangspunten van  $\varepsilon = 0$

$$w'' + \delta w = 0$$

Van  $\delta \leq 0$  steeds instabil, van  $\delta > 0$  steeds stabil.

Van de overgangspunten is de periode steeds  $2\pi$  of  $4\pi$

Als de periode  $2\pi$  is, is de opl.  $\left\{ \begin{array}{l} \sin n z \\ \cos n z \end{array} \right. \quad n = 0, 1, 2, \dots$

dus  $\delta^2 = n^2 \quad (1)$

Als de periode  $4\pi$  is, geldt  $\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{2n+1}{2} z \\ \cos \frac{2n+1}{2} z \end{array} \right. \quad n = 0, 1, 2, \dots$

dus  $\delta^2 = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad (2)$

(1) en (2) Samen:  $\boxed{\delta^2 = \frac{n^2}{4}}$

Stabiliteit van de opl. der Mathieu vergl. van kleine  $\epsilon$

$$w'' + (\delta + \epsilon \cos z) w = 0$$

Zoek de grenzen van de stabiliteitsgebieden in de vorm  $\delta = \delta(\epsilon)$ .

We weten:  $\epsilon = 0$        $\delta = \frac{n^2}{4}$        $n = 0, 1, 2, \dots$

Corresponderend met de lineair onafhankelijke oplossingen  $\sin \frac{n}{2} z$  en  $\cos \frac{n}{2} z$  (periode  $2\pi$  als  $n = \text{even}$ ,  $4\pi$  als  $n = \text{oneven}$ ).

We stellen

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \dots & w_i &= w_i(z) \\ \delta &= \delta_0 + \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots & \delta_i &= \text{const.} \end{aligned}$$

$w$  voldoet aan d.v. met periode  $2\pi$  of  $4\pi$ , die reduceert tot  $\cos \frac{n}{2} z$ ,  $\sin \frac{n}{2} z$  als  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Substitueer in d.v.:

$$(w_0'' + \epsilon w_1'' + \dots) + [(\delta_0 + \epsilon \delta_1 + \dots) + \epsilon \cos z] \cdot [w_0 + \epsilon w_1 + \dots] = 0$$

Coefficienten van alle machten van  $\epsilon$  zijn nul.

(1)  $w_0'' + \delta_0 w_0 = 0$

(2)  $w_1'' + \delta_0 w_1 = -\delta_1 w_0 - w_0 \cos z$

(3)  $w_2'' + \delta_0 w_2 = -\delta_2 w_0 - \delta_1 w_1 - w_1 \cos z$

We eisen dat alle  $w_i$  periode  $2\pi$  of  $4\pi$  hebben.  
Dan volgt uit (1):

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{n^2}{4} & w_0 &= \cos \frac{n}{2} z & n &= 0, 1, \dots \\ & & w_0 &= \sin \frac{n}{2} z & & \end{aligned}$$

$n=0$

$\delta_0 = 1$

$w_0 = 1$

Uit (2) volgt dat:

$$w_1'' = -\delta_1 - \cos z$$

Wilt  $w_1$  periodiek zijn, dan  $\delta_1 = 0$

oplossing  $w_1 = \cos z + \text{const}$

Uit (3):

$$\begin{aligned} w_2'' &= -\delta_2 - (\cos z + C) \cos z \\ &= -\delta_2 - \frac{1}{2} - C \cos z - \frac{1}{2} \cos 2z \end{aligned}$$

dus  $\delta_2 = -\frac{1}{2}$

In totaal geldt om  $n=0$   $\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$n=1$   $\delta_0 = \frac{1}{4}$   $w_0 = \cos \frac{z}{2}$  of  $w_0 = \sin \frac{z}{2}$

neem  $w_0 = \cos \frac{z}{2}$

$$w_1'' + \frac{1}{4} w_1 = (-\delta_1 - \cos z) \cos \frac{z}{2} = (-\delta_1 - \frac{1}{2}) \cos \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3z}{2}$$

$-\delta_1 - \frac{1}{2} = 0$  anders bevat  $w_1$  een term met  $\pi$  als  $\frac{z}{2}$

dus  $\delta_1 = -\frac{1}{2}$

in totaal  $\delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

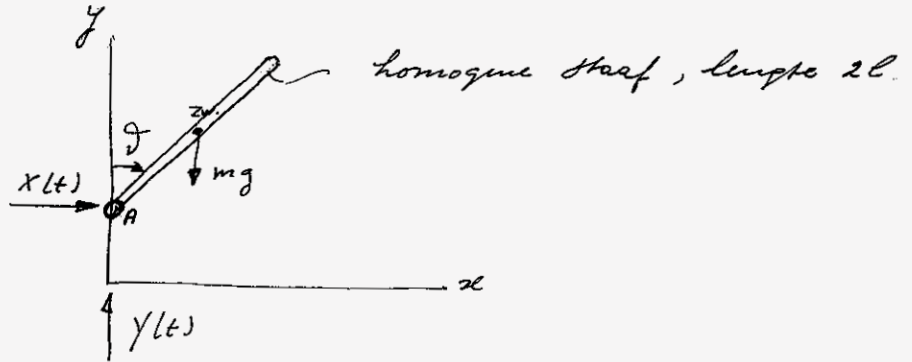
$w_0 = \sin \frac{z}{2}$

$\delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Op dezelfde manier voor  $n=2$ .

Zie Stokes fig 5.1 pag 212.

Voorbeeld 1



Bewegingsvgl:

Coördinaten van Tw. zijn  $x_2, y_2$

$$m \ddot{x}_2 = X(t)$$

$$m \ddot{y}_2 = Y(t) - mg$$

$$y \ddot{\theta} = y(t) l \sin \theta - X(t) l \cos \theta$$

gegeven is  $y(t) = y_0 \cos \omega t + mg$

We interesseren ons alleen voor kleine  $\theta$ .

$$x_2 = l \sin \theta$$

$$\dot{x}_2 = l \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_2 = -l \sin \theta (\dot{\theta})^2 + l \cos \theta \ddot{\theta}$$

Dus 
$$y \ddot{\theta} = (y_0 \cos \omega t + mg) l \sin \theta - m [-l \sin \theta (\dot{\theta})^2 + l \cos \theta \ddot{\theta}] l \cos \theta$$

Omdat we alleen belangstelling hebben voor  $\theta \ll 1$ , schrijven we de eerste benadering

$$y \ddot{\theta} = y_0 l \dot{\theta} \cos \omega t - m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$y \ddot{\theta} = (y_0 \cos \omega t + mg) l \dot{\theta} = m l^2 \dot{\theta}^2$$

of 
$$(J + m l^2) \ddot{\theta} + (-mg - y_0 \cos \omega t) l \dot{\theta} = 0$$

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + (-mg - y_0 \cos \omega t) l \dot{\theta} = 0$$

$$\| \ddot{\theta} + \left( -\frac{3}{4} \frac{g}{l} - \frac{3}{4} \frac{y_0}{m l} \cos \omega t \right) \dot{\theta} = 0$$

In de praktijk is veel beter realiseerbaar het punt A een harmonische beweging te doen uitvoeren.

Stel de beweging van A

$$y = y_0 \cos \omega t$$

Dan is  $y_z = y + l \cos \vartheta$

$$\dot{y}_z = \dot{y} - l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}$$

$$\ddot{y}_z = \ddot{y} - l \cos \vartheta (\dot{\vartheta})^2 - l \sin \vartheta \ddot{\vartheta}$$

Dus:

$$m \ddot{\vartheta} = (m \ddot{y}_z + mg) l \sin \vartheta - m \dot{x}_z^2 l \cos \vartheta$$

voor  $\vartheta \ll 1$ ,  $\ddot{y}_z = -y_0 \omega^2 \cos \omega t$ .

$$\dot{x}_z^2 = l \ddot{\vartheta}$$

$$m \ddot{\vartheta} = (-m y_0 \omega^2 \cos \omega t + mg) l \vartheta - m l^2 \ddot{\vartheta} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} = (-y_0 \omega^2 \cos \omega t + g) m l \vartheta$$

$$\ddot{\vartheta} + \left( -\frac{3}{4} \frac{g}{l} + \frac{3 y_0 \omega^2 \cos \omega t}{4 l} \right) \vartheta = 0$$

Stel  $\omega t = z$   $\ddot{\vartheta} = \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \cdot \omega^2 = \vartheta'' \omega^2$

$$\vartheta'' + \left( -\frac{3}{4} \frac{g}{l \omega^2} + \frac{3 y_0 \cos z}{4 l} \right) \vartheta = 0$$

dus  $\delta = -\frac{3}{4} \frac{g}{l \omega^2}$

$\epsilon = \frac{3 y_0}{4 l}$

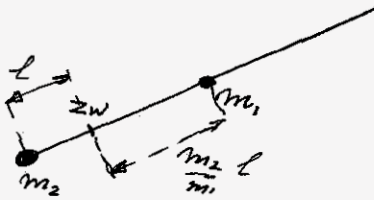
Stabiliteit van de benedenste stand van de slinger wordt gevonden door in het bovenstaande  $g$  door  $-g$  te verwagen. Dus

$\delta = \frac{3}{4} \frac{g}{l \omega^2}$

$\epsilon = \frac{3}{4} \frac{y_0}{l}$

Gevocht wordt na een demonstratiemodel, waarmee door verandering van  $\omega$  aangetoond kan worden dat de benedenste stand instabiel en de bovenste stand stabiel kan zijn.

In een proefopstelling zal het staafje vast zitten aan een lager. Van dit geval kunnen we de formule omwerken.



lengte staaf:  $2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} l$

$m = m_1 + m_2$

De formule (1) van de vorige pag. blijft geldig. Voor de traagheidsmoment  $\mathcal{J}$  t.o.v. het zwaartepunt moeten we schrijven:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{3} m_1 \left[ \frac{m_2}{m_1} \right]^2 l^2 + m_1 \left[ \frac{m_2}{m_1} \right]^2 l^2 + m_2 l^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m^2}{m_1} l^2 + m \frac{m_2}{m_1} l^2$$

Dus:

$$\left( \frac{1}{3} \frac{m^2}{m_1} l^2 + m \frac{m_2}{m_1} l^2 + m l^2 \right) \ddot{\mathcal{J}} + (-mg + m g_0 \omega^2 \cos \omega t) l \mathcal{J} = 0$$

$$\frac{4}{3} \frac{m}{m_1} \ddot{\mathcal{J}} + \left( -\frac{g}{l} + \frac{g_0 \omega^2 \cos \omega t}{l} \right) \mathcal{J} = 0$$

of  $\frac{4}{3} \frac{m}{m_1} \mathcal{J}'' + \left( -\frac{g}{l \omega^2} + \frac{g_0}{l} \cos \omega t \right) \mathcal{J} = 0$

dus  $\delta = -\frac{3}{4} \frac{m_1}{m} \frac{g}{l \omega^2}$

$\epsilon = \frac{3}{4} \frac{m_1}{m} \frac{g_0}{l}$

of met de lengte van de staaf  $2l' = 2 \frac{m}{m_1} l$ :

$\delta = -\frac{3}{4} \frac{g}{l' \omega^2}$

$\epsilon = \frac{3}{4} \frac{g_0}{l'}$

Letten te verwachten was.

Heeft de massa  $m_2$  nog een massa traagheidsmoment

$I_2 = m_2 i^2$  dan geldt.

$$\delta = -\frac{g}{\omega^2 \left( \frac{4}{3} \frac{m}{m_1} + \frac{i^2}{l^2} \right)}$$

$$\Sigma = \frac{g_0}{l \left( \frac{4}{3} \frac{m}{m_1} + \frac{i^2}{l^2} \right)}$$