Stabiliteitsonderzoek

Memo

Mei 1964

Stabiliteitsonderzoek

ir. J. D. Janssen.

Inleiding.

Aan de hand van Stoker's boek "Non-linear vibrations" onderzoeken we de stabiliteit van evenwichtsstanden onder bepaalde voorwaarden. Met name wordt nagegaan wanneer een slinger in zijn bovenste stand een stabiele evenwichtsstand inneemt als op het ophangpunt een periodieke kracht in de richting van het zwaartekrachtsveld wordt uitgeoefend.

Floquet theorie

Beschouw

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)\, w = 0$$

$p(z)$ en $q(z)$ zijn reguliere periodieke functies van z (regulier in een strook rond de reële as) met de reële periode Ω.

Er bestaan in het algemeen voor een lineaire, homogene differentiaalvergelijking (v.d. tweede orde) twee lineair onafhankelijke basisfuncties $w_1(z)$ en $w_2(z)$, zodat iedere oplossing van de d.v. te schrijven is als

$$w(z) = c_1 w_1 + c_2 w_2$$

Stelling: De noodzakelijke en voldoende voorwaarde, waaraan twee basisfuncties moeten voldoen is:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

<u>Bewijs</u>:

voldoende voorwaarde: Stel $c_1 w_1 + c_2 w_2 = 0$ (w_1 en w_2 afh.)
dan is ook $c_1 w_1' + c_2 w_2' = 0$, dus $\Delta(z) = 0$.
Noodzakelijk:

als $\Delta(z) = w_1 w_2' - w_2 w_1' = 0$, dan geldt
(integreren)

$\log \dfrac{w_1}{w_2} = \text{const.}$, dus w_1 en w_2 afhankelijk

<u>Stelling 2</u>.

Als $\Delta(z) = 0$ voor $z = z_0$, dan $\Delta(z) \equiv 0$.

<u>Bewijs</u>:

$$\frac{d}{dz}\Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1'' & w_2'' \end{vmatrix}$$

Uit d.v. : $w_i'' = -p\, w_i' - q\, w_i$

Dus $$\frac{d}{dz}\Delta = -p\,\Delta \longrightarrow \underline{\underline{\Delta(z) = \Delta_0\, e^{-\int_{z_0}^{z} p(\xi)\, d\xi}}}$$

($\int_{z_0}^{z} p(\xi)\, d\xi$ blijft eindig, omdat $p(\xi)$ regulier is).

Als $p(z+\Omega) = p(z)$
$q(z+\Omega) = q(z)$
dan vormen, behalve $w_1(z)$ en $w_2(z)$ ook $w_1(z+\Omega)$ en $w_2(z+\Omega)$ een basis, want $w_i(z+\Omega)$ voldoet aan d.v. en $\Delta(z+\Omega) \neq 0$.

We kunnen schrijven:

$$W_1(z) = w_1(z+\Omega) = a_{11}\, w_1(z) + a_{12}\, w_2(z)$$
$$W_2(z) = w_2(z+\Omega) = a_{21}\, w_1(z) + a_{22}\, w_2(z)$$

$$\Delta(z+\Omega) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta(z) \qquad \text{, dus} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wellicht bestaan er oplossingen, waarvoor geldt:

$$w(z+\Omega) = W(z) = \sigma\, w(z) \qquad (\sigma = \text{const.})$$

(eigenfuncties!)
De eigenwaarden σ volgen uit:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Deze vierkantsvergelijking in σ heeft twee wortels ongelijk aan nul omdat $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Noem deze wortels

σ_1 en σ_2. (behoeven niet reeel te zijn)

a) $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Er bestaan twee lineair-onafhankelijke oplossingen

$$\left\| \begin{array}{l} w_1(z) = e^{\alpha_1 z} \varphi_1(z) \\ w_2(z) = e^{\alpha_2 z} \varphi_2(z) \end{array} \right.$$

met $\varphi_i(z+\Omega) = \varphi_i$. (zie bewijs)

en $e^{\alpha_i \Omega} = \sigma_i$

bewijs:

Er geldt: $w_1(z+\Omega) = \sigma_1 w_1(z) = e^{\alpha_1 \Omega} w_1(z)$

Door te stellen $w_1(z) = e^{\alpha_1 z}\varphi_1(z)$

$w_1(z+\Omega) = e^{\alpha_1(z+\Omega)}\varphi_1(z+\Omega)$

dus $e^{\alpha_1(z+\Omega)}\varphi_1(z+\Omega) = e^{\alpha_1\Omega} e^{\alpha_1 z}\varphi_1(z)$

zien we dat

$$\varphi_1(z+\Omega) = \varphi_1(z).$$

<u>Opm.</u>

Als $\sigma_i = 1$, geldt $w_i(z+\Omega) = w_i(z)$

dus $w_i(z)$ heeft periode Ω.

Dan geldt:

$$e^{\alpha_i \Omega} = 1 \qquad \alpha_i \Omega = 2k\pi i \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Als $\sigma_i = -1$ of $\alpha_i \Omega = i(\pi + 2k\pi)$

geldt: $w_i(z+\Omega) = -w_i(z)$

dus

$$w_i(z+2\Omega) = -w_i(z+\Omega) = w_i(z)$$

$w_i(z)$ heeft periode 2Ω

b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

In elk geval bestaat er één eigenfunctie $w_1(z)$

En geldt dus:

$$W_1(z) = c\,w_1(z) = \sigma\,w_1(z)$$
$$W_2(z) = a\,w_1(z) + b\,w_2(z) = \sigma\,W_2(z)$$

of
$$\begin{vmatrix} c-\sigma & 0 \\ a & b-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 - (c+b)\sigma + bc = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{c+b \pm \sqrt{(c+b)^2 - 4bc}}{2}$$

Uit het gestelde volgt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \rightarrow c = b$

en $\sigma_{1,2} = c$

dus:

$$W_1(z) = \sigma\,w_1(z)$$
$$W_2(z) = a\,w_1(z) + \sigma\,w_2(z)$$

dus $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{w_2}{w_1} + \dfrac{a}{\sigma}$

Verder is $\dfrac{w_2}{w_1} - \dfrac{a}{\sigma}\dfrac{z}{\Omega}$ een periodieke functie met

periode Ω.

Immers

$$\frac{w_2(z+\Omega)}{w_1(z+\Omega)} - \frac{a}{\sigma}\,\frac{z+\Omega}{\Omega} = \frac{w_2(z)}{w_1(z)} + \cancel{\frac{a}{\sigma}} - \frac{a}{\sigma}\,\frac{z}{\Omega} - \cancel{\frac{a}{\sigma}}$$

dus $\psi(z) = \dfrac{w_2}{w_1} - \dfrac{a}{\sigma}\dfrac{z}{\Omega}$ is periodiek

of $w_2 = w_1\left[\dfrac{a}{\sigma}\dfrac{z}{\Omega} + \psi(z)\right]$

In dit geval geldt dus:

$$\left\|\begin{array}{l} w_1(z) = e^{\alpha z}\,\varphi_1(z) \\ w_2(z) = e^{\alpha z}\left[\dfrac{a z}{\sigma\Omega}\,\varphi_1(z) + \psi_1(z)\right] \end{array}\right.$$

periodiek met Ω.

‖ Wanneer zijn alle oplossingen voor $z > 0$ (z-reëel) begrensd?

$\sigma_1 \neq \sigma_2$ alle oplossingen begrensd als $Re\ \alpha_i \leq 0$

$\sigma_1 = \sigma_2$ " " " $Re\ \alpha < 0$

of $Re\ \alpha = 0$ en $a = 0$

Toepassing Floquet theorie op de Mathieu vergelijking

Mathieu vgl. $w'' + q(z)\,w = 0$ z is reëel

$q(z)$ periodiek

! Kies de basisfuncties w_1 en w_2 zó, dat

$$\left.\begin{array}{ll} w_1(0) = 1 & w_1'(0) = 0 \\ w_2(0) = 0 & w_2'(0) = 0 \end{array}\right\}\ \Delta(0) = 1$$

Karakteristieke vergel. reëel!

$$\sigma^2 - A\sigma + \underline{\underline{1}} = 0$$

of $\begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma \end{vmatrix} = 0$

Verder volgt uit pag. 2 dat voor $p=0$ geldt $\Delta(z)$ is constant voor alle z. Dus $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = \underline{\underline{1}}$

Voor de wortels van deze karakt. vgl. geldt:

$\underline{\underline{\sigma_1 \sigma_2 = 1}}$ (σ_i hoeft niet reëel te zijn).

<u>Opm.</u>:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Stabiliteit als } |\sigma_i| \le 1 \\ \text{Met } \sigma_1\sigma_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |\sigma_1| = |\sigma_2| = 1$$

Het omgekeerde geldt ook als $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Als echter $\sigma_1 = \sigma_2 = \pm 1$ is nog ~~kunnen~~ bewijzen dat a verdwijnt

<u>Voorbeeld</u>: $w'' + (\delta + \varepsilon\, r(z))\, w = 0$

δ, ε parameters.

We weten $\sigma_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - 1}$

$|A| > 2$ instabiel ; $|A| < 2$ stabiel.

De overgang van instabiel in stabiel treedt op voor $A = 2$ en $A = -2$.

Als $A = 2$ dan $\sigma_{1,2} = 1$ periodiek met Ω!

$A = -2$ dan $\sigma_{1,2} = -1$ periodiek met 2Ω.

Mathieu vergelijking

neem $z(z) = \cos z$

$$w'' + (\delta + \varepsilon \cos z)\, w = 0$$

Stel $w(z)$ een oplossing dan is het altijd zo dat

$w(z) \neq w(-z)$ en evenzo $w(z) \neq -w(-z)$. M.a.w.
|| een oplossing is noch even, noch oneven
We kunnen wel bewijzen dat - als $w(z)$ een oplossing is, ook $w(-z)$ een oplossing is. Deze functies zijn basisfuncties.
bewijs: $w''(z) + (\delta + \varepsilon \cos z)\, w = 0$ voor alle z, dus ook voor $z = -z^*$

$$w''(-z^*) + (\delta + \varepsilon \cos(-z^*))\, w(-z^*) = 0$$

of

$$w''(-z) + (\delta + \varepsilon \cos(+z))\, w(-z) = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

Dus: $[\, w(z) + w(-z)\,]$ even oplossing

$[\, w(z) - w(-z)\,]$ oneven oplossing.

Uit de randvoorwaarden van de basisfuncties volgt dat de basisfuncties zo gekozen kunnen worden, dat een functie even en de andere oneven is.

Bij overgang van het stabiel in het instabiel gebied en omgekeerd heeft de oplossing periode 2π of 4π, omdat de $\Omega = 2\pi$

Als de oplossing $w(z)$ periode 2π heeft, kan ze geschreven worden als:

$$w(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$$

Gesubstitueerd in de d.v. levert dit:

$$\begin{cases} \delta a_0 + \frac{\varepsilon}{2} a_1 = 0 \\ (\delta - n^2) a_n + \frac{\varepsilon}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

en $\begin{cases} (\delta-1)\, b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\, b_2 = 0 \\ (\delta - n^2)\, b_n + \frac{\varepsilon}{2}\,(b_{n-1} + b_{n+1}) = 0 \end{cases}$ $\quad n = 2, 3, \ldots$

Stellen we ons tevreden met een eindig aantal termen dan hebben we n homogene lineaire vergelijkingen, waaraan door a_n resp. b_n voldaan moet zijn (niet allemaal nul). Dan moet de coefficienten determinant (symmetrisch, tridiagonaal) nul zijn. De waarden van δ en ε, waarvoor dit gebeurt, zijn benaderingen van de overgangswaarden.

Stoker beweert dat we óf met de vergelijkingen in a_n óf met die in b_n te doen hebben. Als de eerste niet verdwijnende term b.v. een cosinus term is, dan hoeven we alleen naar a_n te kijken. We vragen ons echter af hoe het zit als $a_0 \neq 0$ en $b_1 \neq 0$.

Eenzelfde gedachtengang volgt als de periode der oplossing 4π is.

Zie Stoker fig 4.1 pag 205.

<u>Overgangspunten voor $\varepsilon = 0$</u> $\qquad w'' + \delta w = 0$

Voor $\delta \leq 0$ steeds instabiel, voor $\delta > 0$ steeds stabiel.

Voor de overgangspunten is de periode steeds 2π of 4π

Als de periode 2π is, is de opl. $\begin{cases} \sin nz \\ \cos nz \end{cases}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

dus $\delta^2 = n^2 \qquad (1)$

Als de periode 4π is, geldt $\begin{cases} \sin \frac{2n+1}{2} z \\ \cos \frac{2n+1}{2} z \end{cases}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

dus $\delta^2 = \frac{(2n+1)^2}{4} \qquad (2)$

(1) en (2) tezamen: $\boxed{\delta^2 = \frac{n^2}{4}}$

Stabiliteit van de opl. der Mathieu vergl. voor kleine ε

$$w'' + (\delta + \varepsilon \cos z) w = 0$$

Zoek de grenzen van de stabiliteitsgebieden in de vorm $\delta = \delta(\varepsilon)$.

We weten: $\varepsilon = 0$ $\quad \delta = \frac{n^2}{4}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

corresponderend met de lineair onafhankelijke oplossingen $\sin \frac{n}{2} z$ en $\cos \frac{n}{2} z$ (periode 2π als n = even, 4π als n = oneven).

We stellen

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots \qquad w_i = w_i(z)$$
$$\delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \ldots \qquad \delta_i = \text{const.}$$

w voldoet aan d.v. met periode 2π of 4π, die reduceert tot $\cos \frac{n}{2} z$, $\sin \frac{n}{2} z$ als $\varepsilon \to 0$.

Substitueer in d.v.:

$$(w_0'' + \varepsilon w_1'' + \ldots) + [(\delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \ldots) + \varepsilon \cos z] \cdot [w_0 + \varepsilon w_1 + \ldots) = 0$$

Coefficienten van alle machten van ε zijn nul.

(1) $\quad w_0'' + \delta_0 w_0 = 0$

(2) $\quad w_1'' + \delta_0 w_1 = -\delta_1 w_0 - w_0 \cos z$

(3) $\quad w_2'' + \delta_0 w_2 = -\delta_2 w_0 - \delta_1 w_1 - w_1 \cos z$

We eisen dat alle w_i periode 2π of 4π hebben.
Dan volgt uit (1):

$$\delta_0 = \frac{n^2}{4} \qquad w_0 = \cos \frac{n}{2} z \qquad n = 0, 1, \ldots$$
$$w_0 = \sin \frac{n}{2} z$$

$\boxed{n=0}$ $\quad \delta_0 = 1 \quad w_0 = 1$

Uit (2) volgt dan

$$w_1'' = -\delta_1 - \cos z$$

Wil w_1 periodiek zijn, dan $\underline{\delta_1 = 0}$

oplossing $w_1 = \cos z + \overset{c}{\text{const}}$

Uit (3):

$$w_2'' = -\delta_2 - (\cos z + c)\cos z$$
$$= -\delta_2 - \tfrac{1}{2} - c\cos z - \tfrac{1}{2}\cos 2z$$

dus $\boxed{\delta_2 = -\tfrac{1}{2}}$

In totaal geldt voor $n=0$ $\quad \underline{\delta = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$\boxed{n=1}$ $\quad \delta_0 = \frac{1}{4} \quad w_0 = \cos\frac{z}{2}$ of $w_0 = \sin\frac{z}{2}$

neem $w_0 = \cos\frac{z}{2}$

$$w_1'' + \tfrac{1}{4}w_1 = (-\delta_1 - \cos z)\cos\tfrac{z}{2} = (-\delta_1 - \tfrac{1}{2})\cos\tfrac{z}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{3z}{2}$$

$-\delta_1 - \frac{1}{2} = 0$ anders bevat w_1 een term met $\underline{z}\sin\frac{z}{2}$

dus $\delta_1 = -\frac{1}{2}$.

in totaal $\underline{\delta = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}$

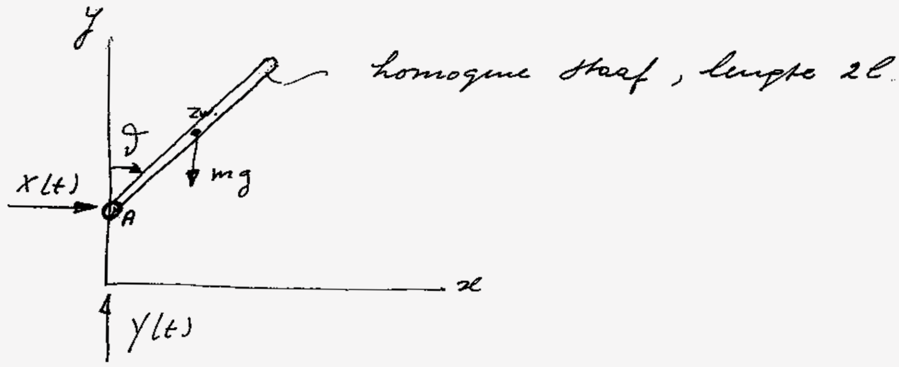
$w_0 = \sin\frac{z}{2}$

$$\underline{\delta = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}.$$

Op dezelfde manier voor $n=2$.

Zie Stoker fig 5.1 pag 212.

<u>Voorbeeld 1</u>



Bewegingsvgl:

Coordinaten van Z.w. zijn x_z, y_z

$$m\ddot{x}_z = X(t)$$
$$m\ddot{y}_z = Y(t) - mg$$

$$J\ddot{\vartheta} = Y(t)\, l \sin\vartheta - X(t)\, l\cos\vartheta$$

Gegeven is $Y(t) = Y_0 \cos\omega t + mg$

We interesseren ons alleen voor kleine ϑ.

$$x_z = l\sin\vartheta$$
$$\dot{x}_z = l\cos\vartheta . \dot{\vartheta}$$
$$\ddot{x}_z = -l\sin\vartheta . (\dot{\vartheta})^2 + l\cos\vartheta . \ddot{\vartheta}$$

Dus

$$J\ddot{\vartheta} = (Y_0\cos\omega t + mg)\, l\sin\vartheta - m[-l\sin\vartheta(\dot{\vartheta})^2 + l\cos\vartheta . \ddot{\vartheta}]\, l\cos\vartheta .$$

Omdat we alleen belangstelling hebben voor $\vartheta \ll 1$, schrijven we de eerste benadering

$$\cancel{J\ddot{\vartheta} = Y_0 l \vartheta \cos\omega t - ml^2\ddot{\vartheta}}$$
$$J\ddot{\vartheta} = (Y_0\cos\omega t + mg)\, l\vartheta - ml^2\ddot{\vartheta}$$

of $(J + ml^2)\ddot{\vartheta} + (-mg - Y_0\cos\omega t)\, l\vartheta = 0$

$J = \frac{1}{3} m l^2$

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} + (-mg - Y_0 \cos\omega t)\, l\vartheta = 0$$

$$\ddot{\vartheta} + \left(-\frac{3}{4}\frac{g}{l} - \frac{3}{4}\frac{Y_0}{ml}\cos\omega t\right)\vartheta = 0$$

Mathieu d.v.

In de praktijk is veel beter realiseerbaar het punt A een harmonische beweging te doen uitvoeren.
Stel de beweging van A

$$y = y_0 \cos\omega t$$

Dan is $\quad y_2 = y + l\cos\vartheta$

$$\dot{y}_2 = \dot{y} - l\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y} - l\cos\vartheta.(\dot{\vartheta})^2 - l\sin\vartheta.\,\ddot{\vartheta}$$

Dus:

$$J\ddot{\vartheta} = (m\ddot{y}_2 + mg)\,l\sin\vartheta - m\ddot{x}_2\;l\cos\vartheta$$

voor $\vartheta \ll 1$, $\quad \ddot{y}_2 = -y_0\,\omega^2\cos\omega t$

$$\ddot{x}_2 = l\ddot{\vartheta}$$

$$J\ddot{\vartheta} = (-m y_0\,\omega^2\cos\omega t + mg)\,l\vartheta - ml^2\ddot{\vartheta} \qquad (1)$$

$$\tfrac{4}{3}\,ml^2\ddot{\vartheta} = (-y_0\,\omega^2\cos\omega t + g)\,ml\vartheta$$

$$\ddot{\vartheta} + \left(-\frac{3}{4}\frac{g}{l} + \frac{3y_0\,\omega^2}{4\,l}\cos\omega t\right)\vartheta = 0$$

Stel $\omega t = z \qquad \ddot{\vartheta} = \dfrac{d^2\vartheta}{dz^2}.\,\omega^2 = \vartheta''\omega^2$

$$\boxed{\vartheta'' + \left(-\frac{3}{4}\frac{g}{l\omega^2} + \frac{3y_0}{4l}\cos z\right)\vartheta = 0}$$

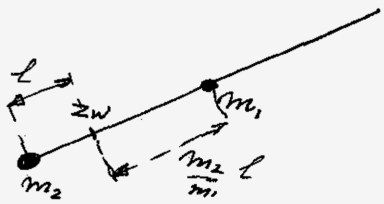
dus $\qquad \delta = -\dfrac{3}{4}\dfrac{g}{l\omega^2} \qquad\qquad \varepsilon = \dfrac{3y_0}{4l}$

Stabiliteit van de benedenste stand van de slinger wordt gevonden door in het bovenstaande g door -g te vervangen. Dus

$$\delta = \frac{3}{4}\frac{g}{l\omega^2} \qquad\qquad \varepsilon = \frac{3}{4}\frac{y_0}{l}$$

Gezocht wordt naar een demonstratiemodel, waarmee door verandering van ω aangetoond kan worden dat de benedenste stand instabiel en de bovenste stand stabiel kan zijn.

In een proefopstelling zal het staafje vastzitten aan een lager. Voor dit geval kunnen we de formule omwerken.



lengte staaf : $2\,\frac{m_1+m_2}{m_1}\,l$

$m = m_1 + m_2$

De formule (1) van de vorige pag. blijft geldig. Voor het traagheidsmoment J t.o.v. het zwaartepunt moeten we schrijven:

$$J = \frac{1}{3} m_1 \left(\frac{m}{m_1}\right)^2 l^2 + m_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 l^2 + m_2 l^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{m^2}{m_1} l^2 + m \frac{m_2}{m_1} l^2$$

Dus:

$$\left(\frac{1}{3} \frac{m^2}{m_1} l^2 + m\frac{m_2}{m_1} l^2 + m l^2\right)\ddot{\vartheta} + \left(-mg + m y_0 \omega^2 \cos\omega t\right) l \vartheta = 0$$

$$\frac{4}{3} \frac{m}{m_1} \ddot{\vartheta} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{y_0 \omega^2}{l} \cos\omega t\right)\vartheta = 0$$

of $$\frac{4}{3} \frac{m}{m_1} \vartheta'' + \left(-\frac{g}{l\omega^2} + \frac{y_0}{l} \cos\omega t\right)\vartheta = 0$$

dus $$\delta = -\frac{3}{4}\frac{m_1}{m}\frac{g}{l\omega^2} \qquad \varepsilon = \frac{3}{4}\frac{m_1}{m}\frac{y_0}{l}$$

of met de lengte van de staaf $2l' = 2\,\frac{m}{m_1}\,l$:

$$\delta = -\frac{3}{4}\frac{g}{l'\omega^2} \qquad \varepsilon = \frac{3}{4}\frac{y_0}{l'}$$

hetgeen te verwachten was.

Heeft de massa m_2 nog een massatraagheidsmoment $I_2 = m_2 i^2$ dan geldt:

$$\delta = - \frac{g}{l\omega^2\left(\frac{4}{3}\frac{m}{m_1} + \frac{i^2}{l^2}\right)} \qquad \varepsilon = \frac{g_0}{l\left(\frac{4}{3}\frac{m}{m_1} + \frac{i^2}{l^2}\right)}$$