

# Beschrijving van het oppervlak van een drie-dimensionaal lichaam

**Citation for published version (APA):**

Veldpaus, F. E. (1979). *Beschrijving van het oppervlak van een drie-dimensionaal lichaam: enige onderwerpen uit de differentiaalgeometrie.* (DCT rapporten; Vol. 1979.010). Technische Hogeschool Eindhoven.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/1979

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Beschrijving van het oppervlak van een drie-dimensionaal lichaam:  
enige onderwerpen uit de differentiaalgeometrie.

Eindhoven, mei 1979.

*F.E. Veldpaus*

Dr.ir. F.E. Veldpaus  
Vakgroep Technische Mechanica  
T.H. Eindhoven

## Inhoud

1. Inleiding en samenvatting.
2. Parametervoorstelling van een oppervlak.
3. Raakvectoren aan en normaalvector op het oppervlak.
4. Kromming van het oppervlak.
5. Hoofdkrommingslijnen.

## Literatuur

- [1] Haantjes, J., "Inleiding tot de differentiaalmeetkunde", Noordhoff, Groningen, 1954.
- [2] Seidel, J.J., "Tensorrekening", collegedictaat, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1964.
- [3] Wittenburg, J., "Dynamics of Systems of Rigid Bodies", B.G. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [4] v.d. Heiden, A., Sauren, A. en Veldpaus, F., "Basisgebonden en coördinaatvrije schrijfwijze van vectoren en tensoren", intern rapport Vakgroep Technische Mechanica, Technische Hogeschool, Eindhoven.

## 1. Inleiding en samenvatting

Bij vele analyses, waarbij drie-dimensionale lichamen een rol spelen, is het noodzakelijk het buitenoppervlak van die lichamen in mathematische vorm te beschrijven. Voor technische lichamen levert dit meestal geen problemen. Bij biologische lichamen is dit allerminst het geval omdat hun geometrie niet voldoende nauwkeurig beschreven kan worden met "standaardoppervlakken", zoals (delen van) een bol, kegel, cilinder, plat vlak, etc. Vaak kan een acceptabele mathematische beschrijving verkregen worden door de coördinaten van een aantal punten op het oppervlak op te meten en vervolgens met de een of andere aanpassingsroutine de beste benadering uit een gekozen klasse van functies te bepalen. Dit onderwerp wordt hier niet verder uitgewerkt: wij nemen aan dat de bedoelde mathematische beschrijving beschikbaar is.

Het doel van dit rapport is aan te geven hoe bij een gegeven beschrijving van een (gekromd) oppervlak diverse geometrische grootheden zoals raakvlak, normaalvector en krommingen bepaald kunnen worden. Dit onderwerp wordt in vele boeken op het gebied der differentiaalgeometrie uitgebreid besproken (zie bijv. [1] en [2]). Hier worden slechts enige onderwerpen aan de orde gesteld. Daarbij wordt niet zoals gewoonlijk de indexnotatie gehanteerd maar wordt gebruik gemaakt van matrixnotatie (zie bijv. [3] en [4]). Een niet te onderschatten voordeel daarvan is dat de analyses coördinaatvrij kunnen worden opgezet.

In hoofdstuk 2 van dit rapport staat centraal de parametervoorstelling van een gekromd oppervlak. De bepaling van raakvectoren aan en normaalvectoren op dat oppervlak wordt besproken in hoofdstuk 3. In hoofdstuk 4 wordt daarna nagegaan hoe (afgeleiden van) deze vectoren samenhangen met krommingen van het oppervlak, terwijl in hoofdstuk 5 geschetst wordt hoe de zg. hoofdkrommingslijnen bepaald kunnen worden.

## 2. Parametervoorstelling van een oppervlak

Wij beschouwen een drie-dimensionaal lichaam L. Het van belang zijnde gedeelte van het buitenoppervlak van L wordt aangeduid met S. Wij introduceren een vast met L verbonden orthogonaal, rechtsdraaiënd coördinatensysteem (x,y,z) met eenheidsvectoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$  langs respectievelijk de x-, de y- en de z-as. De oorsprong van dit coördinatensysteem wordt 0 genoemd.

De basisvectoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$  vormen een vectorbasis  $\vec{e}$ , die wij in navolging van Wittenburg ([3]) opvatten als een kolommatrix met  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$  als componenten:

$$\vec{e}^T := [\vec{e}_x \quad \vec{e}_y \quad \vec{e}_z] \quad (2.1)$$

Omdat  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$  onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn geldt:

$$\vec{e} \cdot \vec{e}^T = \underline{I} ; \vec{e}^T \vec{e} = \underline{II} \quad (2.2)$$

Hierin is  $\underline{I}$  de eenheidsmatrix van orde  $3 * 3$  terwijl  $\underline{II}$  de eenheidstensor is. Het symbool  $\cdot$  in (2.2) geeft het scalaire vectorproduct aan.

De positie van een willekeurig punt P van L kan worden vastgelegd met de positievector  $\vec{r}$  van 0 naar P. Als  $(r_x, r_y, r_z)$  de coördinaten van P in het (x,y,z)-systeem zijn dan geldt:

$$\underline{r}^T := [r_x \quad r_y \quad r_z]; \quad \vec{r} = \vec{e}^T \underline{r} = \underline{r}^T \vec{e} \quad (2.3)$$

De kolommatrix  $\underline{r}$  wordt wel de coördinatenkolom van P in  $\vec{e}$  genoemd. Wij zullen L in het vervolg opvatten als de verzameling van alle positievectoren, waarvan het eindpunt tot het beschouwde lichaam behoort.

De positievector van een willekeurig punt P van S wordt genoteerd met  $\vec{c}$ . In overeenstemming met het voorgaande kunnen wij schrijven:

$$\underline{c}^T := [c_x \quad c_y \quad c_z]; \quad \vec{c} = \vec{e}^T \underline{c} = \underline{c}^T \vec{e} \quad (2.4)$$

waarbij  $(c_x, c_y, c_z)$  de coördinaten van P zijn. Met S bedoelen wij hierna steeds de verzameling positievectoren met eindpunt op het beschouwde oppervlak.

Voor  $\vec{c} \in S$  kunnen de drie coördinaten  $c_x$ ,  $c_y$  en  $c_z$  niet onderling onafhankelijk zijn. Zeer algemeen mogen wij stellen dat  $c_x$ ,  $c_y$  en  $c_z$  functies zijn van twee onafhankelijke parameters, u en v. Wij beperken ons in het vervolg tot het geval dat  $c_x$ ,  $c_y$  en  $c_z$  gegeven zijn als expliciete functies van u en v. Op de gebruikelijke, wiskundig niet helemaal correcte manier, kunnen wij dan schrijven:  $c_x = c_x(u,v)$ ,  $c_y = c_y(u,v)$ ,  $c_z = c_z(u,v)$  en op grond van (2.4) dus ook:

$$\vec{c} = \vec{c}(u,v) \quad (2,5)$$

In het algemeen zal (2.5) niet gedefinieerd zijn voor alle  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ . Wij zeggen dat  $(u,v) \in \mathbb{R}^2$  toelaatbaar is dan en slechts dan als  $\vec{c}(u,v) \in S$ . De verzameling van alle toelaatbare  $(u,v)$  wordt D genoemd. Er geldt:

$$D := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{c}(u,v) \in S\} \quad (2.6)$$

Formeel kunnen wij nu stellen dat de parametervoorstelling (2.5) een afbeelding  $\vec{c}: D \rightarrow S$  is waardoor aan iedere  $(u,v) \in D$  één en niet meer dan één vector  $\vec{c}(u,v) \in S$  wordt toegevoegd. Deze -volstrekt triviale- opmerking impliceert dat u en v aan zekere eisen moeten voldoen: de parameters u en v moeten zó gekozen worden dat  $\vec{c}: D \rightarrow S$  een éénéén-duidige afbeelding van D op S is. Een gevolg hiervan is dat bijv. de keuze  $u \equiv c_x$ ,  $v \equiv c_y$  zeker niet toelaatbaar is als (2.5) de parametervoorstelling van een gesloten oppervlak moet zijn. Dan zijn er immers  $(u,v) \in D$  waaraan minstens twee waarden van  $c_z$  (en dus twee vectoren  $\vec{c}$ ) moeten worden toegevoegd.

Wij zullen hierna steeds aannemen dat  $\vec{c}: D \rightarrow S$  éénéénduidig en op is. Bij iedere  $\vec{a} \in S$  is er dan één en niet meer dan één  $(u,v) \in D$  zodanig dat  $\vec{a} = \vec{c}(u,v)$ . In feite betekent dit dat wij eisen dat  $\vec{c}: D \rightarrow S$  inverteerbaar is. Bovendien zullen wij in het vervolg steeds aannemen dat  $\vec{c}: D \rightarrow S$  voor alle  $(u,v) \in D$  continu en voldoende vaak differentieerbaar is.

### 3. Raakvectoren aan en normaalvector op het oppervlak

Laat P en Q twee naburige punten op het beschouwde oppervlak zijn met positievector  $\vec{c}(u,v) \in S$ , resp.  $\vec{c}(u+du, v+dv) \in S$ . Aangezien  $\vec{c}: D \rightarrow S$  voor alle  $(u,v) \in D$  continu en differentieerbaar is, geldt bij infinitesimaal kleine  $du$  en  $dv$  voor de vector van P naar Q:

$$\vec{c}(u+du, v+dv) - \vec{c}(u,v) = \left(\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}\right)_{(u,v)} du + \left(\frac{\partial \vec{c}}{\partial v}\right)_{(u,v)} dv \quad (3.1)$$

De vectoren in het rechterlid zijn raakvectoren aan het oppervlak. Uit de eis dat  $\vec{c}: D \rightarrow S$  inverteerbaar is volgt dat deze vectoren géén nulvectoren zijn en dat zij onderling onafhankelijk zijn zodat hun vectorproduct géén nulvector is. Voor alle  $(u,v) \in D$  kunnen wij dus eenheidsraakvectoren  $\vec{t}_u(u,v)$  en  $\vec{t}_v(u,v)$  en een eenheidsnormaal  $\vec{n}(u,v)$  definiëren door:

$$\alpha_u(u,v) := \left\| \left(\frac{\partial \vec{c}}{\partial u}\right)_{(u,v)} \right\| ; \quad \vec{t}_u(u,v) := \left(\frac{1}{\alpha_u} \frac{\partial \vec{c}}{\partial u}\right)_{(u,v)} \quad (3.2)$$

$$\alpha_v(u,v) := \left\| \left(\frac{\partial \vec{c}}{\partial v}\right)_{(u,v)} \right\| ; \quad \vec{t}_v(u,v) := \left(\frac{1}{\alpha_v} \frac{\partial \vec{c}}{\partial v}\right)_{(u,v)} \quad (3.3)$$

$$\vec{n}(u,v) := s \frac{\vec{t}_u(u,v) * \vec{t}_v(u,v)}{\|\vec{t}_u(u,v) * \vec{t}_v(u,v)\|} \quad (3.4)$$

Hierin is  $\|\cdot\|$  de zg. lengtenorm: voor een willekeurige vector  $\vec{a}$  geldt  $\|\vec{a}\| := (\vec{a} \cdot \vec{a})^{\frac{1}{2}}$ . Voor de grootheid  $s$  in (3.4) geldt  $s=1 \vee s=-1$ . Het teken van  $s$  wordt zo gekozen dat  $\vec{n}(u,v)$  de naar buiten gerichte normaal op het oppervlak van het beschouwde lichaam is. Zonder wezenlijke beperking van de algemeenheid mogen wij aannemen dat het teken van  $s$  overal op  $S$  hetzelfde is, m.a.w. dat  $s$  niet zal afhangen van  $u$  en  $v$ .

In het algemeen zullen de raakvectoren  $\vec{t}_u(u,v)$  en  $\vec{t}_v(u,v)$  niet onderling loodrecht zijn. De hoek, die wordt ingesloten door  $\vec{t}_u(u,v)$  en  $\vec{t}_v(u,v)$ , wordt  $\zeta(u,v)$  genoemd. De richting, waarin deze hoek wordt

gemeten, is zodanig dat steeds zal gelden  $0 < \zeta(u,v) < \pi$ . Met deze afspraken volgt:

$$\cos \zeta(u,v) = \vec{t}_u(u,v) \cdot \vec{t}_v(u,v) \quad \text{voor alle } (u,v) \in D \quad (3.5)$$

Desgewenst kan ook de norm in het rechterlid van (3.4) worden uitgedrukt in  $\zeta(u,v)$ . Met  $(\vec{a} * \vec{b}) \cdot (\vec{a} * \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  voor willekeurige vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  blijkt voor deze norm te gelden:

$$\| \vec{t}_u(u,v) * \vec{t}_v(u,v) \| = \sin \zeta(u,v) \quad \text{voor alle } (u,v) \in D \quad (3.6)$$

De vectoren  $\vec{t}_u(u,v)$ ,  $\vec{t}_v(u,v)$  en  $\vec{n}(u,v)$  zijn onderling onafhankelijk en vormen in de beschouwde ruimte dus een vectorbasis, die wij aangeven met  $\vec{t}(u,v)$ :

$$\vec{t}(u,v) := [\vec{t}_u(u,v) \quad \vec{t}_v(u,v) \quad \vec{n}(u,v)] \quad \text{voor alle } (u,v) \in D \quad (3.7)$$

Deze vectorbasis is niet orthogonaal en de geassocieerde matrix  $\vec{t}(u,v) \cdot \vec{t}^T(u,v)$  is dan ook géén eenheidsmatrix. Noemen wij deze matrix  $\mathbb{T}(u,v)$  dan volgt:

$$\mathbb{T}(u,v) := \vec{t}(u,v) \cdot \vec{t}^T(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & \cos \zeta(u,v) & 0 \\ \cos \zeta(u,v) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

en dit geldt uiteraard voor alle  $(u,v) \in D$ . Wij merken op dat deze matrix regulier is, immers  $\det(\mathbb{T}(u,v)) = \sin^2 \zeta(u,v) \neq 0$  omdat  $0 < \zeta(u,v) < \pi$ . De inverse  $\mathbb{T}^{-1}(u,v)$  bestaat dus voor alle  $(u,v) \in D$ .

Wij beschouwen nu een kromme  $K$  op het oppervlak  $S$  en vatten  $K$  op als de verzameling van alle vectoren  $\vec{c}(u,v) \in S$  met eindpunt op die kromme. Wij beperken ons tot het geval dat  $K$  gegeven is door  $\vec{x}(w) = \vec{c}(u(w), v(w))$ , waarbij  $\vec{x}(w)$  een positievector is met eindpunt op  $K$ . Als  $W$  het definitiegebied is van de parameter  $w$  geldt formeel  $\vec{x}: W \rightarrow K$  met  $K = \{\vec{c}(u(w), v(w)) \mid w \in W\}$ . Voor de eenheidsraakvector  $\vec{\tau}(w)$  in  $\vec{x}(w)$  aan  $K$  vinden wij:



$$\alpha(w) := \left\| \frac{d\vec{x}(w)}{dw} \right\| ; \vec{\tau}(w) := \frac{1}{\alpha(w)} \frac{d\vec{x}(w)}{dw} \quad \text{voor } w \in W \quad (3.9)$$

Deze raakvector ligt in het raakvlak aan  $S$  in  $\vec{c}(u(w), v(w))$  en is dus een lineaire combinatie van  $\vec{t}_u(u(w), v(w))$  en  $\vec{t}_v(u(w), v(w))$ . Met de kettingregel voor differentiëren en met  $\vec{x}(w) = \vec{c}(u(w), v(w))$  volgt:

$$\vec{\tau} = \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \vec{t}_u + \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \vec{t}_v \equiv \underline{\tau}^T \underline{\tau} \quad (3.10)$$

Ter vereenvoudiging van de notatie hebben wij hierbij -zoals gebruikelijk- de (onafhankelijke) variabele(n) bij functies niet vermeld en bijv.  $\vec{\tau}$  en  $\alpha_u$  geschreven in plaats van  $\vec{\tau}(w)$  en  $\alpha_u(u(w), v(w))$ . Tenzij dit verwarring kan veroorzaken zullen wij dit in het vervolg steeds doen.

De kolommatrix  $\underline{\tau}$  in (3.10) heeft  $\frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw}$ ,  $\frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw}$  en 0 als componenten en is gedefinieerd door:

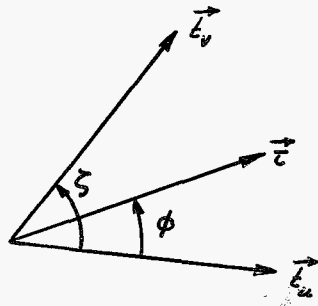
$$\underline{\tau}^T := \left( \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \quad \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \quad 0 \right) \quad (3.11)$$

Desgewenst kan  $\underline{\tau}$  bij gegeven  $\vec{\tau}$  eenvoudig worden bepaald uit (3.10). Voorvermenigvuldiging van die relatie met  $\underline{\tau}^{-1} \vec{t}$  levert:

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}^{-1} \vec{t} \cdot \vec{\tau} = \frac{1}{\sin^2 \zeta} \begin{bmatrix} \vec{t}_u \cdot \vec{\tau} - \cos \zeta \vec{t}_v \cdot \vec{\tau} \\ \vec{t}_v \cdot \vec{\tau} - \cos \zeta \vec{t}_u \cdot \vec{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

De componenten van  $\underline{\tau}$  kunnen geometrisch geïnterpreteerd worden. Laat  $\phi$  de hoek zijn tussen  $\vec{t}_u$  en  $\vec{\tau}$  waarbij voor  $\phi$  dezelfde tekenafspraken wordt gehanteerd als voor de hoek  $\zeta$  tussen  $\vec{t}_u$  en  $\vec{t}_v$  (zie figuur).

Dan geldt:



$$\|\vec{t}_u\| = \|\vec{t}_v\| = \|\vec{\tau}\| = 1$$

$$\cos \zeta = \vec{t}_u \cdot \vec{t}_v$$

$$\cos \phi = \vec{t}_u \cdot \vec{\tau}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \vec{t}_v &= \vec{\tau} \cdot \{ \vec{t}_u * (\vec{t}_v * \vec{t}_u) + (\vec{t}_v \cdot \vec{t}_u) \vec{t}_u \} = \sin \zeta \sin \phi + \\ &+ \cos \zeta \cos \phi = \cos(\zeta - \phi). \end{aligned}$$

Invullen in (3.12) levert:

$$\underline{\tau}^T = \frac{1}{\sin \zeta} [\sin(\zeta - \phi) \quad \sin \phi \quad 0] \quad (3.13)$$

#### 4. Kromming van het oppervlak

De kromming  $\kappa(w)$  van  $K$  in  $\vec{x}(w) \in K$  wordt bepaald door de afgeleide naar  $w$  van de raakvector  $\vec{\tau}(w)$  aan  $K$ . Er geldt:

$$\vec{\kappa} := \frac{1}{\alpha} \frac{d\vec{\tau}}{dw} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dw} \left( \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \vec{t}_u + \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \vec{t}_v \right); \quad |\kappa| = \|\vec{\kappa}\| \quad (4.1)$$

Invullen van  $\alpha_u \vec{t}_u = \frac{\partial \vec{c}}{\partial u}$  en  $\alpha_v \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{c}}{\partial v}$  levert na enige omwerkingen:

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} = & \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{d}{dw} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{du}{dw} \right) \vec{t}_u + \left( \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \right)^2 \vec{k}_{uu} + \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \vec{k}_{uv} + \\ & + \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{d}{dw} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{dv}{dw} \right) \vec{t}_v + \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \vec{k}_{vu} + \left( \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \right)^2 \vec{k}_{vv} \end{aligned} \quad (4.2)$$

waarbij  $\vec{k}_{uu}$ ,  $\vec{k}_{uv}$ ,  $\vec{k}_{vu}$  en  $\vec{k}_{vv}$  volgen uit de geometrie van het beschouwde oppervlak  $S$ . Deze zg. krommingsvectoren worden gegeven door:

$$\vec{k}_{ab} := (\alpha_a \alpha_b)^{-1} \frac{\partial^2 \vec{c}}{\partial a \partial b} \quad \text{voor } a, b \in \{u, v\} \quad (4.3)$$

Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat  $\vec{k}_{uv} = \vec{k}_{vu}$ .

De vector  $\vec{\kappa}$  is een lineaire combinatie van de lokale basisvectoren  $\vec{t}_u$ ,  $\vec{t}_v$  en  $\vec{n}$ . Wij kunnen dus schrijven:

$$\vec{\kappa} = \underline{k}^T \vec{t}; \quad \underline{k}^T := [k_u \quad k_v \quad k_n] \quad (4.4)$$

Dit betekent dat  $\vec{\kappa}$  gesplitst kan worden in een vector  $k_u \vec{t}_u + k_v \vec{t}_v$  in het raakvlak aan  $S$  en een vector  $k_n \vec{n}$  loodrecht op dat raakvlak. De eerste vector wordt de geodetische krommingsvector  $\vec{g}$  genoemd, de tweede is de zg. normale krommingsvector  $\vec{k}_n$ :

$$\vec{g} := k_u \vec{t}_u + k_v \vec{t}_v; \quad \vec{k}_n := k_n \vec{n}; \quad \vec{\kappa} = \vec{g} + \vec{k}_n \quad (4.5)$$

Wij zullen ons hierna in hoofdzaak richten op een nadere bestudering van  $\vec{k}_n$ . Wel merken wij nog op dat  $\vec{g}$  steeds loodrecht staat op  $\vec{n}$  en op  $\vec{\tau}$ . Dat  $\vec{g} \cdot \vec{n} = 0$  volgt direct uit de definitie van  $\vec{g}$  in (4.5). De juistheid van de bewering  $\vec{g} \cdot \vec{\tau} = 0$  kan eenvoudig bewezen worden

door op te merken dat  $\vec{\kappa} \cdot \vec{\tau} = \vec{g} \cdot \vec{\tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\vec{\tau}}{dw} \cdot \vec{\tau} = 0$  omdat  $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ .

Met (4.5) en (4.2) kan de normale kromming  $k_n$  van de kromme  $K$  op het oppervlak  $S$  bepaald worden. Uit  $k_n = \vec{\kappa}_n \cdot \vec{n} = \vec{\kappa} \cdot \vec{n}$  volgt:

$$k_n = k_{uu} \left( \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \right)^2 + 2 k_{uv} \left( \frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw} \right) \left( \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \right) + k_{vv} \left( \frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw} \right)^2 \quad (4.6)$$

waarbij de krommingen  $k_{uu}$ ,  $k_{uv} = k_{vu}$  en  $k_{vv}$  gegeven worden door:

$$k_{ab} := \vec{\kappa}_{ab} \cdot \vec{n} \quad \text{voor } a, b \in \{u, v\} \quad (4.7)$$

Voor de factoren  $\frac{\alpha_u}{\alpha} \frac{du}{dw}$  en  $\frac{\alpha_v}{\alpha} \frac{dv}{dw}$  zijn in hoofdstuk 3 (zie (3.11) en (3.13)) relaties afgeleid waarin de hoek  $\zeta$  tussen  $\vec{t}_u$  en  $\vec{t}_v$  en de hoek  $\phi$  tussen  $\vec{t}_u$  en  $\vec{\tau}$  optreden. Vullen wij die resultaten in in (4.6) dan ontstaat:

$$k_n = M_0 + M_1 \sin(2\phi) + M_2 \cos(2\phi) \quad (4.8)$$

Hierin zijn  $M_0$ ,  $M_1$  en  $M_2$  oppervlaktekarakteristieken, die wel afhangen van  $k_{uu}$ ,  $k_{uv}$ ,  $k_{vv}$  en  $\zeta$  maar niet van  $\phi$ :

$$M_0 := \frac{1}{2 \sin^2 \zeta} (k_{uu} - 2 k_{uv} \cos \zeta + k_{vv}) \quad (4.9)$$

$$M_1 := \frac{1}{2 \sin^2 \zeta} (-k_{uu} \sin 2 \zeta + 2 k_{uv} \sin \zeta) \quad (4.10)$$

$$M_2 := \frac{1}{2 \sin^2 \zeta} (-k_{uu} \cos 2 \zeta + 2 k_{uv} \cos \zeta - k_{vv}) \quad (4.11)$$

Uit (4.8) t/m (4.10) blijkt dat  $k_n$  een functie is van  $\phi$ . Extrema van deze functie volgen uit  $\frac{dk_n}{d\phi} = 0$ , dus uit  $M_1 \cos 2 \phi = M_2 \sin 2 \phi$ . Als  $M_1 = 0 \wedge M_2 = 0$  hangt  $k_n$  niet af van  $\phi$  en is de normale kromming in het beschouwde punt van  $S$  in alle richtingen hetzelfde. Als  $M_1 \neq 0 \vee M_2 \neq 0$  vinden wij twee oplossingen  $\phi_1$  en  $\phi_2$  voor  $\phi$ :

$$\cos 2 \phi_1 = \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad ; \quad \sin 2 \phi_1 = \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad (4.12)$$

$$\cos 2 \phi_2 = \frac{-M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad ; \quad \sin 2 \phi_2 = \frac{-M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad (4.13)$$

De oplossing  $\phi = \phi_1$  leidt tot een maximum  $k_{\max}$  voor  $k_n$ , de oplossing  $\phi = \phi_2$  leidt tot een minimum  $k_{\min}$  voor  $k_n$ . Substitutie van (4.12) en (4.13) in (4.8) levert voor deze extrema:

$$k_{\max} = M_0 + \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad ; \quad k_{\min} = M_0 - \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (4.14)$$

Deze extreme waarden van  $k_n$  worden hoofdnormaalvormingen genoemd, terwijl de door  $\phi = \phi_1$  en  $\phi = \phi_2$  bepaalde richtingen hoofdkrommingsrichtingen heten. Omdat  $|\phi_1 - \phi_2| = \frac{\pi}{2}$  zijn deze hoofdkrommingsrichtingen steeds onderling loodrecht.

Het gemiddelde  $\bar{k}$  van  $k_{\max}$  en  $k_{\min}$  wordt de gemiddelde kromming van  $S$  genoemd terwijl het product van  $k_{\max}$  en  $k_{\min}$  de zg. Gauss-kromming  $k_G$  van  $S$  is. Er geldt:

$$\bar{k} = M_0 \quad ; \quad k_G = M_0^2 - (M_1^2 + M_2^2) \quad (4.15)$$

Wij hebben ons in het voorgaande gericht op de bepaling van de kromming van een willekeurige kromme  $K$  op het oppervlak  $S$ . Daarbij zijn diverse oppervlaktekarakteristieken zoals krommingsvectoren, hoofdnormaalvormingen etc. geïntroduceerd. Dezelfde karakteristieken blijken van belang te zijn als wij de afgeleiden van de basisvectoren  $\vec{t}_u$ ,  $\vec{t}_v$  en  $\vec{n}$  naar de oppervlakteparameters  $u$  en  $v$  willen bepalen. Wij beschouwen eerst de partiële afgeleiden van  $\vec{t}_u$  en  $\vec{t}_v$ . Uit de definitie van deze raakvectoren volgt dat voor  $a, b \in \{u, v\}$  zal gelden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_a} \frac{\partial \vec{t}_b}{\partial a} &= \frac{1}{\alpha_a} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial \vec{c}}{\partial b} \right) = \frac{1}{\alpha_a \alpha_b} \frac{\partial^2 \vec{c}}{\partial a \partial b} - \frac{1}{\alpha_a \alpha_b} \frac{\partial \alpha_b}{\partial a} \frac{1}{\alpha_b} \frac{\partial \vec{c}}{\partial b} \\ &= \vec{k}_{ab} - (\vec{k}_{ab} \cdot \vec{t}_b) \vec{t}_b = \vec{t}_b * (\vec{k}_{ab} * \vec{t}_b) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de reeds in (4.3) gedefinieerde krommingsvector  $\vec{k}_{ab}$  en van de definities (3.2) en (3.3) voor  $\alpha_u$  en  $\alpha_v$ .

De partiële afgeleiden van  $\vec{n}$  naar  $u$  en  $v$  zouden wij kunnen bepalen door differentiëren van (3.4). Het is echter verre te verkiezen om een minder voor de hand liggende en veel eenvoudiger methode te volgen. Allereerst merken wij op dat  $\frac{\partial \vec{n}}{\partial a}$  voor  $a \in \{u, v\}$  kan worden opgevat als een lineaire combinatie van  $\vec{t}_u$ ,  $\vec{t}_v$  en  $\vec{n}$ :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = p_u \vec{t}_u + p_v \vec{t}_v + p_n \vec{n} = \vec{t}^T p \quad (4.17)$$

Daarbij kan de kolommatrix  $p$  worden bepaald door (4.17) voor te vermenigvuldigen met  $\vec{t}^{-1}$ . Dat levert:

$$p = \vec{t}^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a} \quad (4.18)$$

De componenten  $\vec{t}_u \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a}$ ,  $\vec{t}_v \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a}$  en  $\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a}$  van de kolommatrix  $\vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a}$  zijn met (4.16) eenvoudig te bepalen. Allereerst merken wij op dat  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$  zodat  $\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = 0$ . Bovendien geldt  $\vec{t}_b \cdot \vec{n} = 0$  voor  $b \in \{u, v\}$ . Dat houdt echter in dat ook zal gelden:  $\vec{t}_b \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{t}_b}{\partial a}$  en op grond van (4.16) dus ook  $\vec{t}_b \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = -\vec{n} \cdot \vec{k}_{ab} = -\alpha_a k_{ab}$ . Invullen van deze resultaten in (4.18) en (4.19) levert dan voor  $a \in \{u, v\}$ :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = \frac{-\alpha_a}{\sin^2 \zeta} \left( (k_{au} - \cos \zeta k_{av}) \vec{t}_u + (k_{av} - \cos \zeta k_{au}) \vec{t}_v \right) \quad (4.19)$$

en dit kan, door gebruik te maken van  $\vec{t}_u \cdot \vec{t}_v = \cos \zeta$  en van  $\vec{t}_u * \vec{t}_v = s \cdot \sin \zeta \vec{n}$ , desgewenst ook geschreven worden als:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial a} = \frac{s \alpha_a}{\sin \zeta} \left( k_{au} \vec{n} * \vec{t}_v - k_{av} \vec{n} * \vec{t}_u \right) \quad \text{voor } a \in \{u, v\} \quad (4.20)$$

## 5. Hoofdkrommingslijnen

In veel beschouwingen, o.a. bij de grafische weergave van gekromde oppervlakken, spelen de zg. hoofdkrommingslijnen een grote rol. Een kromme  $K$  op een oppervlak  $S$  is een hoofdkrommingslijn van  $S$  indien in ieder punt van  $K$  de raaklijn aan  $K$  samenvalt met een van de hoofdkrommingsrichtingen van  $S$ . Wij zullen hierna de hoofdkrommingslijn, waarvan de raaklijn samenvalt met de richting van de maximale (resp. minimale) normale kromming, aangeven met  $K_1$  (resp.  $K_2$ ). Uit hoofdstuk 4 volgt dan dat  $K_1$  en  $K_2$  in ieder punt van  $S$  onderling loodrecht zullen zijn. In dit hoofdstuk zullen wij differentiaalvergelijkingen afleiden voor de bepaling van  $K_1$  en  $K_2$ .

Beschouw de hoofdkrommingslijnen  $K_1$  en  $K_2$  door een punt  $\vec{c}(u,v)$  van het oppervlak  $S$ . De eenheidsraakvectoren  $\vec{\tau}_1$  en  $\vec{\tau}_2$  in dat punt aan  $K_1$  en  $K_2$  liggen in het vlak dat wordt opgespannen door de raakvectoren  $\vec{t}_u$  en  $\vec{t}_v$ . De hoek tussen  $\vec{\tau}_1$  en  $\vec{t}_u$  is  $\phi_1$ , die tussen  $\vec{\tau}_2$  en  $\vec{t}_u$  is  $\phi_2$ , waarbij  $\phi_1$  en  $\phi_2$  gegeven worden door (4.12) en (4.13). In hoofdstuk 3 is aangetoond dat voor een kromme  $K$  op het oppervlak  $S$ , waarvan de eenheidsraakvector  $\vec{\tau}$  een hoek  $\phi$  maakt met  $\vec{t}_u$ , geldt (zie (3.10) en (3.13)):

$$\vec{\tau} = \frac{\sin(\zeta - \phi)}{\sin \zeta} \vec{t}_u + \frac{\sin \phi}{\sin \zeta} \vec{t}_v \quad (5.1)$$

Maken wij hiervan gebruik dan volgt dat de eenheidsraakvector  $\vec{\tau}_i$  aan  $K_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) gegeven zal worden door:

$$\vec{\tau}_i = \frac{\sin(\zeta - \phi_i)}{\sin \zeta} \vec{t}_u + \frac{\sin \phi_i}{\sin \zeta} \vec{t}_v \quad \text{voor } i \in \{1, 2\} \quad (5.2)$$

Uit deze relatie moeten wij  $K_i$  bepalen. Neem aan dat  $K_i$  in parametervorm gegeven wordt door  $\vec{x}_i(w_i) = \vec{c}(u_i(w_i), v_i(w_i))$  waarbij  $w_i$  de langs  $K_i$  gemeten booglengte is. Uit (3.9) en (3.10) volgt dan dat voor  $\vec{\tau}_i$  ook geschreven mag worden:

$$\vec{\tau}_i = \alpha_u \frac{du_i}{dw_i} \vec{t}_u + \alpha_v \frac{dv_i}{dw_i} \vec{t}_v \quad \text{voor } i \in \{1, 2\} \quad (5.3)$$

Opmerking: de grootheid  $\alpha$  in (3.9) en (3.10) is in dit geval gelijk aan 1 omdat de booglengte als parameter gekozen is.

Vergelijking van (5.2) met (5.3) levert twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor  $u_i = u_i(w_i)$  en  $v_i = v_i(w_i)$ . Wij vinden:

$$\frac{du_i}{dw_i} = \frac{\sin(\zeta - \phi_i)}{\sin \zeta} ; \frac{dv_i}{dw_i} = \frac{\sin \phi_i}{\sin \zeta} \quad \text{voor } i \in \{1, 2\} \quad (5.4)$$

In het rechterlid van deze vergelijkingen komen uitsluitend grootheden voor die bepaald kunnen worden, zodra de parametervoorstelling  $\vec{c}: D \rightarrow S$  bekend is. Uitgaande van een gekozen startpunt op  $S$  kan  $K_i$  bepaald worden door (numerieke) integratie van (5.4). Daarbij mag de "dummy variabele"  $w_i$  in het startpunt op een willekeurige waarde (bijv. 0) geïnitialiseerd worden.