Wiskunde in het web

Afscheidsrede
prof.dr. Arjeh M. Cohen
28 maart 2014

/ Faculteit Wiskunde en Informatica

TU/e Technische Universiteit **Eindhoven** University of Technology

Wiskunde in het Web

Where innovation starts

Afscheidsrede prof.dr. Arjeh M. Cohen

Wiskunde in het Web

Uitgesproken op 28 maart 2014
aan de Technische Universiteit Eindhoven

Inleiding

Dames en heren,

Tussen mijn afstuderen in 1971 en deze afscheidsrede zijn veel beroemde wiskundige vermoedens opgelost. Twee daarvan zijn zó bekend dat u er vast wel eens van hebt gehoord.

De eerste is de Laatste Stelling van Fermat. In 1637 schreef Fermat, in de marge van een bladzij uit een boek, dat hij een bewijs had. Maar dat bewijs is nooit door een ander gevonden of gereconstrueerd. Het eerste algemeen geaccepteerde bewijs van de stelling komt van Wiles en is pas verschenen in 1995. Het vermoeden stond dus 358 jaar open.

De vierkleurenstelling

Elke landkaart kan zodanig met vier kleuren gekleurd worden, dat geen enkel tweetal aangrenzende landen dezelfde kleur heeft.

Ferdinand Möbius 1840 + 136 = Kenneth Appel & Wolfgang Haken 1976

De tweede is de vierkleurenstelling. Die gaat over het zodanig kleuren van landkaarten dat geen enkel tweetal aangrenzende landen dezelfde kleur heeft. De uitspraak is dat je bij elke landkaart daarvoor met vier kleuren toe kan. In 1840 vroeg Möbius al of elke landkaart vierkleurbaar is. Het is voor het eerst bewezen door Appel en Haken in 1976. De vraag stond dus 136 jaar open.

Het bewijs van Appel en Haken berust op computerwerk. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Dat betekent dat het bestaan van een kleinste landkaart die niet vierkleurbaar is, wordt aangenomen en dat daaruit een tegenspraak wordt afgeleid. Met bekende redeneringen kwamen Appel en Haken uit op een lijst van 1936 landkaarten. Ten minste één daarvan zou in een kleinste landkaart voor moeten komen die niet vierkleurbaar is. Met behulp van computerberekeningen hebben ze vastgesteld dat dit voor geen van de 1936 kaarten het geval is. Zo verkregen ze de gewenste tegenspraak.

Het contrast met de laatste stelling van Fermat kan haast niet groter zijn. Ten eerste is de rol van de computer in het bewijs van Wiles minimaal. Ten tweede strekken de gevolgen voor de wiskunde van zijn resultaten veel verder dan alleen Fermat. Ik vraag met deze observatie dus eigenlijk:

Zijn de resultaten van Wiles belangrijker, interessanter, of dieper dan de vierkleurenstelling van Appel en Haken? Bestaat er zoiets als goede wiskunde?

Mijn promotor Springer zei lang geleden dat je als wiskundige wel aanvoelt wat goede wiskunde is. Misschien vraagt u zich af waarom ik deze vraag dan toch stel. Dat is omdat bestuurders en geldschieters ons al jaren analyseren met methoden als citatie-analyses, waarbij de beoordeling wel *met* maar niet *door* wiskundigen plaats vindt. Daar voelen velen zich ongemakkelijk bij.

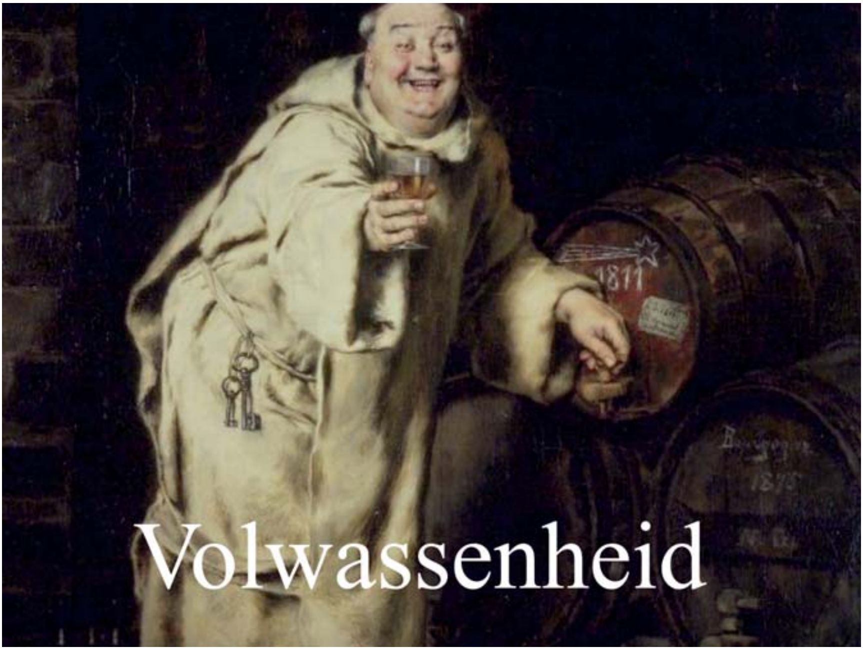
Inhoudsopgave

Diagram Geometry

1. Beoordelingscriteria voor wiskundige resultaten

Ter aansporing tot een beoordeling geheel door wiskundigen zelf, stel ik vijf criteria voor. Aan de hand daarvan ga ik op een derde grote stelling in. Daarna gebruik ik de vijf criteria om de positieve bijdrage van het web aan de wiskunde te bespreken.

Het eerste criterium



De nadruk die ik legde op de lange tijd dat de twee genoemde problemen open stonden, suggereert dat de lengte van die periode een criterium voor een goed wiskundig resultaat is. Maar een vraag kan best lang open staan omdat niemand zich er voor interesseert. Daarom is het verstandig dit criterium ruimer te nemen. Een goede omschrijving lijkt me **volwassenheid** van het probleem. Van de achterliggende vermoedens zijn al veel gevolgen geïdentificeerd en al veel pogingen tot falsificatie gestrand.

Het gaat bij het oplossen van een probleem duidelijk niet alleen om de vastgestelde uitspraak. Ook telt *hoe* het resultaat afgeleid wordt. Dit verwijst direct naar de uitdaging die wiskundigen in hun werk zien: slim zijn.

Het tweede criterium

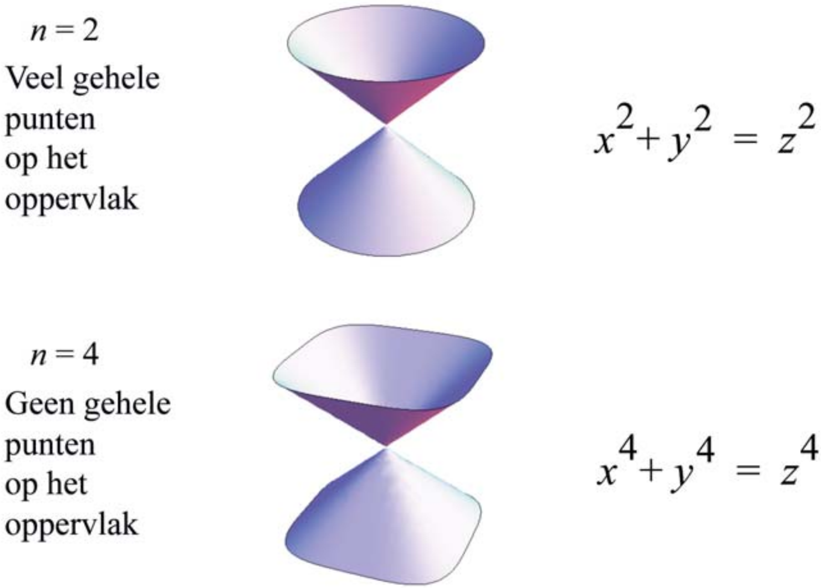
Zodra een bewijs gevonden is, kan het beeld van het achterliggende probleem drastisch veranderen. Fermat zelf verwees naar een bewijs dat hij had, en dat nooit door anderen gevonden is. Wat zou de waardering van de stelling geweest zijn als dat wel het geval was geweest? Hoeveel mensen zouden dan niet beweren dat het probleem eigenlijk triviaal is? Dat is wiskundig jargon voor “te flauw om los te lopen.” Het is een favoriete bezigheid van wiskundigen om dat te roepen. Het bevestigt je status als slimmerd.

Het bewijs van een stelling is soms alleen maar lang omdat het onhandig is opgezet. De waardering van het resultaat kun je dus niet alleen maar aflezen aan de lengte van het bewijs. Daarom wil ik dit criterium graag als **resistentie** omschrijven: de weerstand tegen belagers die het bewijs proberen te vereenvoudigen.

Het derde criterium

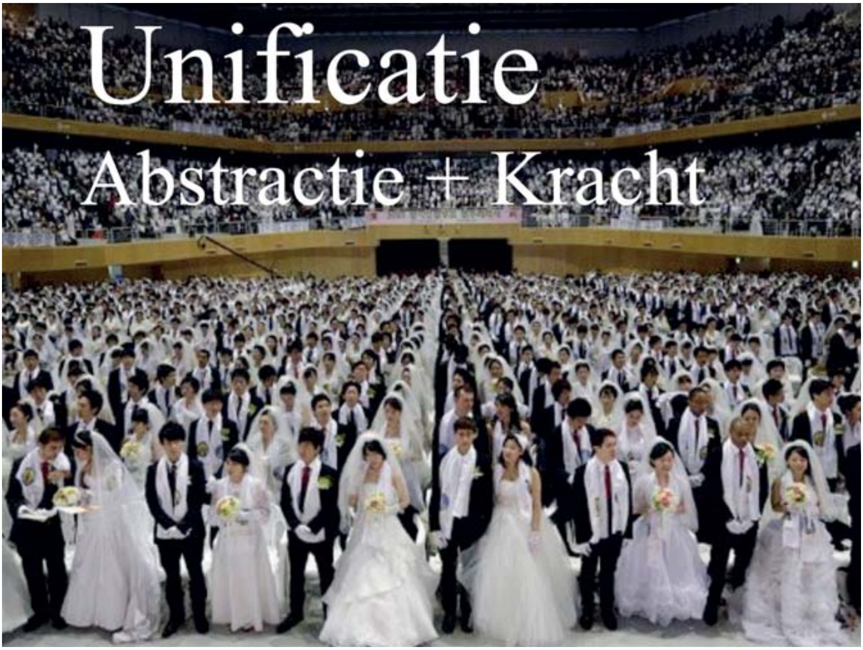
Het komt ook voor dat een bewijs drastisch ingekort wordt door verrassend gebruik van een sterke stelling uit een heel ander gebied. De waardering hiervoor deel ik in bij het criterium **originaliteit**.

Het is natuurlijk ook van toepassing op het resultaat zelf. Goede wetenschap brengt een schok te weeg, een plots verkregen inzicht dat uitstijgt boven het normale. Nu zou je kunnen denken dat dat bij Fermat toch nauwelijks het geval is, omdat de uitspraak al eeuwen bekend is.

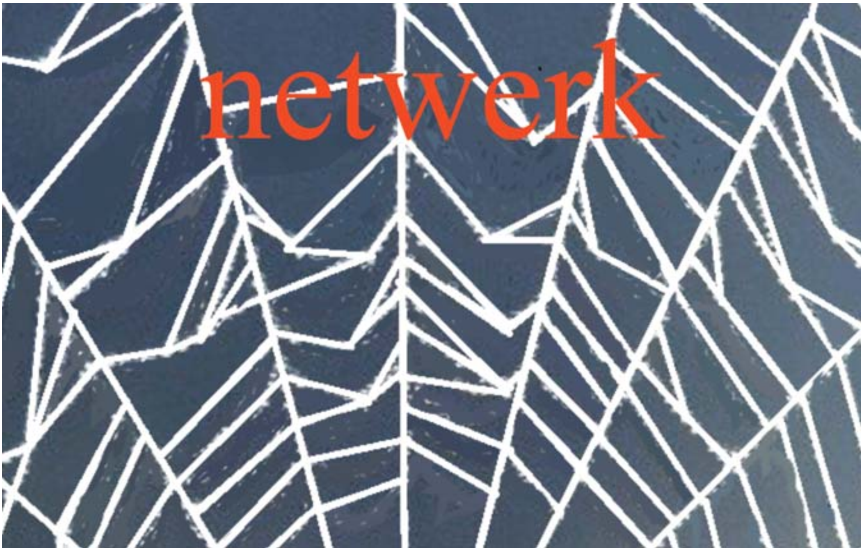


Toch is de bewering al wonderbaarlijk voor iedereen die er voor het eerst naar kijkt, vooral omdat er voor exponent *n* gelijk aan twee heel veel gehele oplossingen zijn, wat sterk contrasteert met het ontbreken van dergelijke oplossingen voor *n* groter dan twee.
De vierkleurenstelling biedt echter geen grote verrassing. De professionele kaartenmaker ziet bij vrijwel elke concrete landkaart snel hoe je vaak al met drie maar in ieder geval met vier kleuren toe kunt.

Het vierde criterium



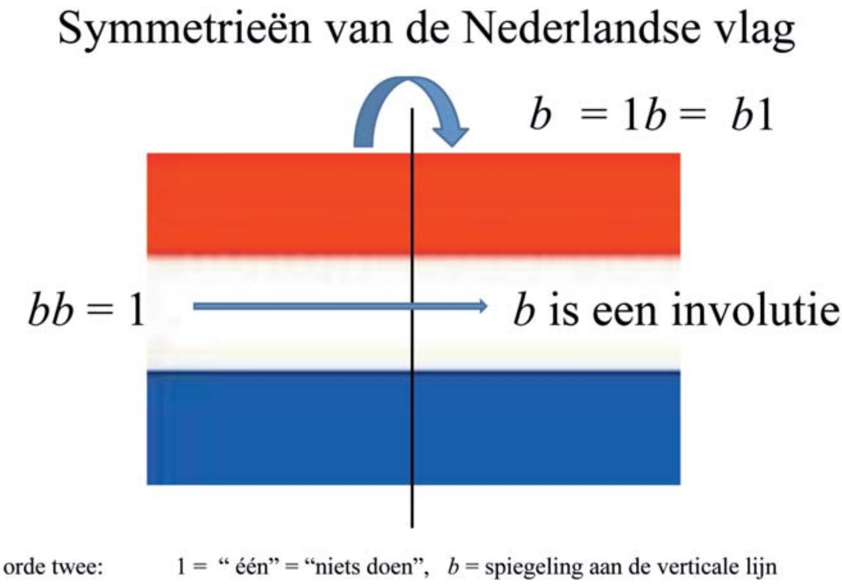
Dicht bij de verrassing zit een ander aspect: goede wetenschap **unificeert**. Unificatie berust op abstractie en kracht. **Abstractie** helpt bij het terugbrengen van een model naar de kale essentie. Door alle afleidende ruis weg te snijden, krijg je beter boven tafel wat de kern van het probleem is. Bovendien kan een oplossing in meerdere situaties gebruikt worden.



Een goed voorbeeld van abstractie is een **netwerk**. Als wiskundig concept is een netwerk een verzameling knooppunten waarvan bepaalde tweetallen met elkaar verbonden zijn, al of niet voorzien van informatie over de lengte of sterkte van die verbinding.

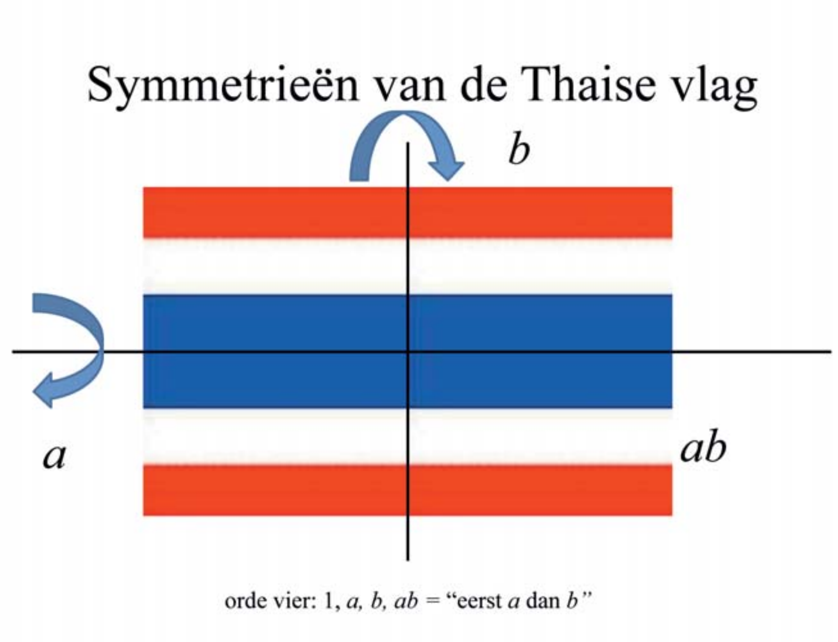
Of het netwerk nu een web voorstelt, een sociaal netwerk of een gasdistributie, maakt daarbij niet uit. De abstractie zorgt ervoor dat het model in verschillende situaties kan worden toegepast.

Een tweede voorbeeld is het wiskundige begrip **groep**. In mijn onderzoek heb ik daar veel mee te maken gehad. Het is een abstractie van het concept symmetrie. Een **symmetrie** van een meetkundige figuur is een transformatie die de figuur als geheel niet verandert.

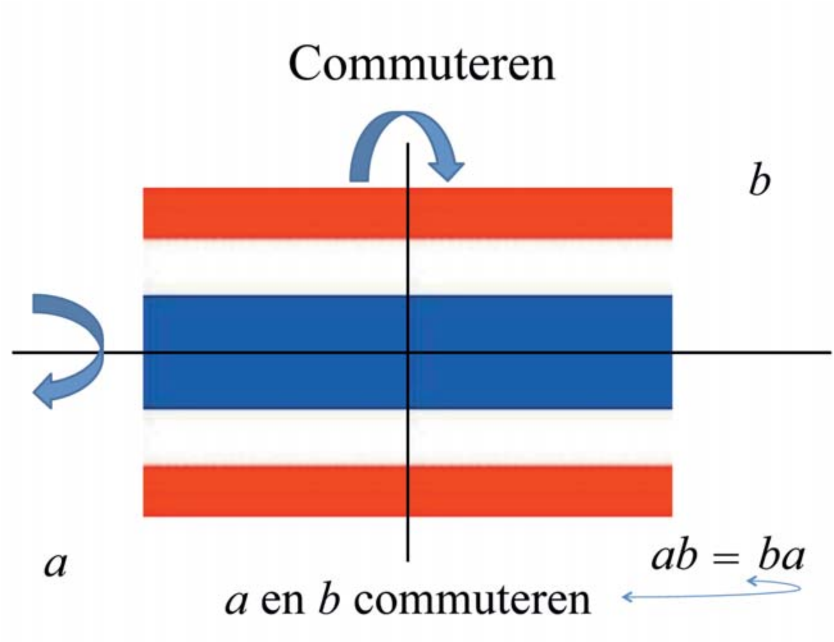


De Nederlandse vlag, bijvoorbeeld, neergelegd in het platte vlak, heeft twee symmetrieën. Een daarvan is de spiegeling aan de verticale lijn door het midden van de vlag. Deze spiegeling geven we aan met *b*. De ander is "niets doen", ofwel "alles op zijn plaats laten." Deze luie actie noemen we de één geven we aan met het symbool 1, net als het cijfer.

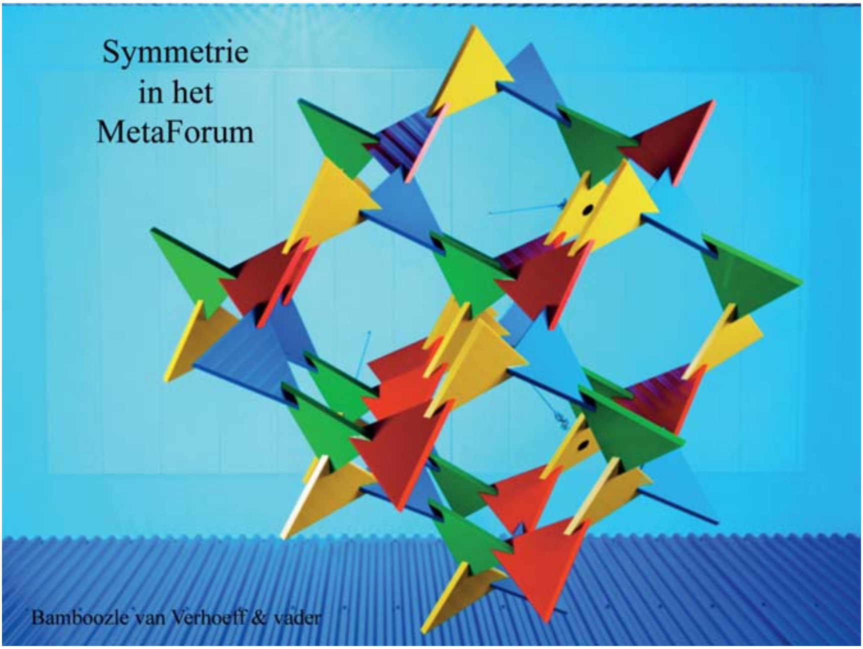
De spiegeling *b* en de één samen vormen, zo zeggen we dan, een **symmetriegroep** die **orde** twee heeft. We kunnen de groep algebraïsch beschrijven met de symbolen 1 en *b*. Het uitvoeren van twee of meer symmetrieën achter elkaar heet een **samenstelling**. Samenstellingen noteren we als woorden in de symbolen, hier 1 en *b*. Dus *bb* staat voor het twee keer uitvoeren van de spiegeling *b*. De formule *bb* =1 drukt uit dat twee keer spiegelen aan dezelfde zijde hetzelfde resultaat oplevert als niets doen. Elementen met deze eigenschap noemen we **involuties**. De formule 1 *b* = *b* drukt uit dat samenstelling van eerst *b* en dan de één, weer de symmetrie *b* geeft. Immers, de 1 staat voor niets doen. Het geheel van symmetrieën en hun samenstellingen is een **groep**.



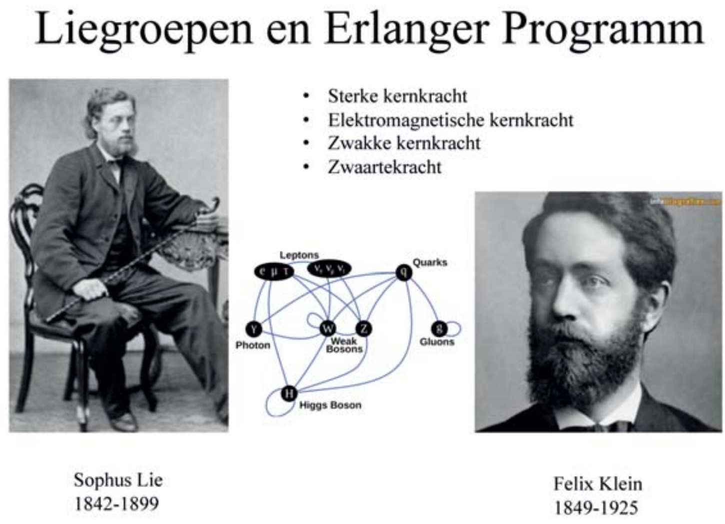
De symmetriegroep van de Thaise vlag heeft orde vier. Naast de elementen 1 en *b* als in de Nederlandse vlag, hebben we nog een spiegeling *a* en de samenstelling van *a* en *b*.



Of we nu eerst a en dan b uitvoeren, of andersom, het resultaat hier is hetzelfde: *ab* = *ba*. Als deze gelijkheid geldt, zeggen we dat *a* en *b* **commuteren**. We zullen later zien dat dit lang niet altijd het geval is. De groep van symmetrieën bestaat hier dus uit de vier elementen 1, *a*, *b*, en *ab*. Met andere woorden, de groep heeft orde vier.



Groepen worden gebruikt om verschillende patronen zoals kristalstructuren, naar hun symmetrieën te onderscheiden. Een mooi stukje van een dergelijk patroon hangt op onze campus.



Het begrip groep staat centraal in het Erlanger Programm, dat in 1872 door Felix Klein is gepubliceerd. Het gaat er vanuit dat alle relevante natuurkundige wereldbeelden afgeleid kunnen worden van een speciaal soort oneindige groepen, die **Liegroepen** genoemd worden, naar de Noorse wiskundige Sophus Lie. In hun zoektocht naar de vereniging van de vier fundamentele krachten in één unificerend model, hebben natuurkundigen al verschillende Liegroepen gebruikt.

Naast abstractie koppel ik aan unificatie het begrip **kracht**. Dat drukt uit in hoeveel gevallen de stelling een uitspraak van betekenis doet. Bij toegepaste wiskunde kun je de kracht van een resultaat meten aan situaties waar het een voorspellende uitspraak over doet. In meer abstracte wiskunde kun je tellen hoeveel andere resultaten direct uit de gegeven stelling volgen.

Fermat staat hierin sterk ten opzichte van de vierkleurenstelling. Taylor, die meewerkte aan de laatste loodjes van het bewijs van Fermat, heeft later Wiles' methoden gebruikt om een erg krachtige uitspraak te bewijzen. In tegenstelling tot zijn kleurige karakter, zijn van de vierkleurenstelling weinig consequenties bekend, noch in de wiskunde noch daarbuiten.

Het vijfde criterium

Wiles 1997: o.a. Wolf-prijs en Wolfskehl-prijs

Appel & Haken 1979: Fulkerson-prijs

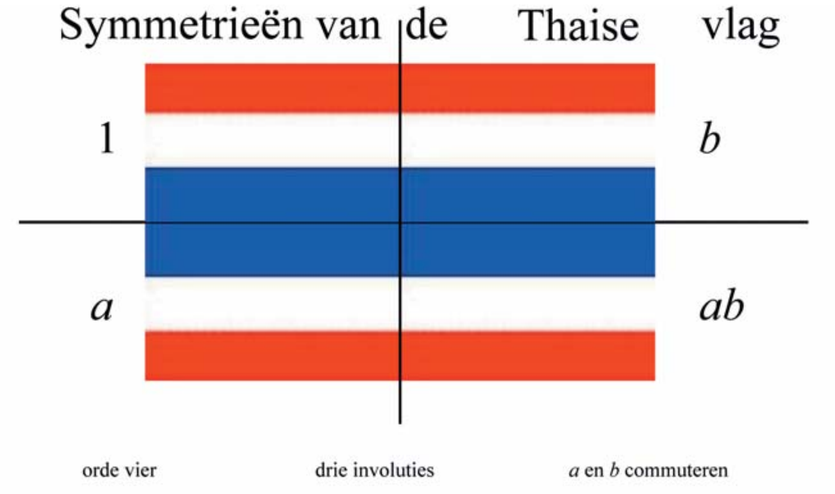
Het laatste criterium ter beoordeling van wiskundige resultaten dat ik wil voorstellen, is de **waardering** van de vakgenoten.

Wiskundigen zien zichzelf graag als onafhankelijke denkers. Toch hebben ze vrijwel allemaal een bepaalde gemeenschap van vakgenoten als referentiekader. Een stel collega's van Wiles keek gezamenlijk het werk van hem na vóórdat het bewijs van Fermat gepubliceerd werd. De waardering van deze onderzoekers voor zijn werk en die speciale behandeling getuigen van een gemeenschap van vakgenoten die zeer stimulerend kan werken, zelfs voor een individualist als Wiles.

Hoewel ook wiskundigen aan hypes en modes blootgesteld zijn, bepalen de bevindingen van de eigen gemeenschap mede het duurzame belang van een stelling. Die waardering spreekt ook uit prijzen, waarvan er steeds meer in omloop zijn.

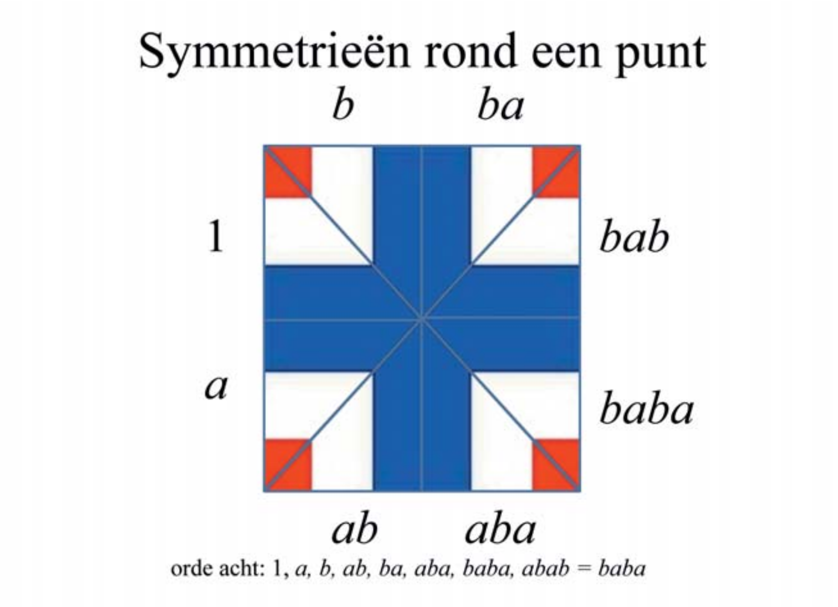
Zo zijn we tot vijf criteria gekomen om in te schatten hoe goed een wiskundig resultaat is. Ik heb de benamingen zo gekozen dat de eerste letters een aansprekend acroniem vormen: VROUW.

2. Eindige groepen

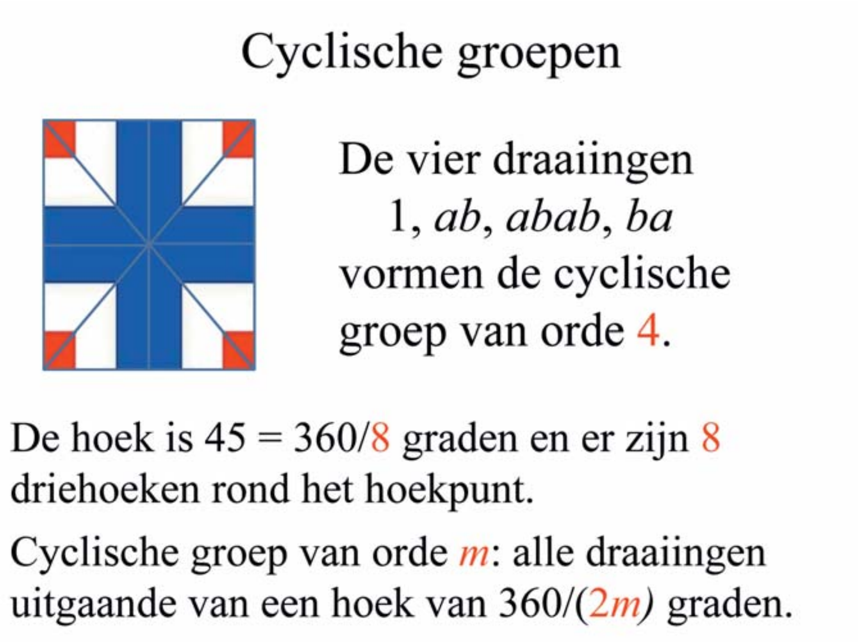


We gaan deze vijf criteria uitproberen op een derde groot resultaat: de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen. Ik heb namelijk een groot deel van de geschiedenis van dichtbij meegemaakt en mijn favoriete onderzoeksterrein, een bepaald soort meetkunde, heeft hier veel mee te maken.

Om een idee te geven waar het vak over gaat, visualizeren we een abstracte groep met behulp van meetkunde. Denk weer even terug aan de twee vlaggen. De Nederlandse vlag heeft een symmetriegroep van orde twee en de Thaise van orde vier. Maar met behulp van de *groep* van symmetrieën van de Thaise vlag, kunnen we de Nederlandse vlag Thais maken. Daartoe passen we eerst twee spiegelingen toe op de Nederlandse vlag. De ene, die we *b* noemen, is de spiegeling aan de oostzijde van de vlag en de andere, die we *a* noemen, aan de zuidzijde van de vlag. Passen we daarna ook hun samenstelling toe, dan ontstaat de Thaise vlag. We kunnen dus aan de hand van een abstracte groep een concrete meetkundige figuur maken waarin alle symmetrieën van de groep zichtbaar zijn. Van de abstracte groep hebben we hier gebruikt dat de twee involuties *a* en *b commuteren*, zodat de twee samenstellingen – eerst de één en dan de ander of andersom – het zelfde resultaat leveren, namelijk de vierde vlag.

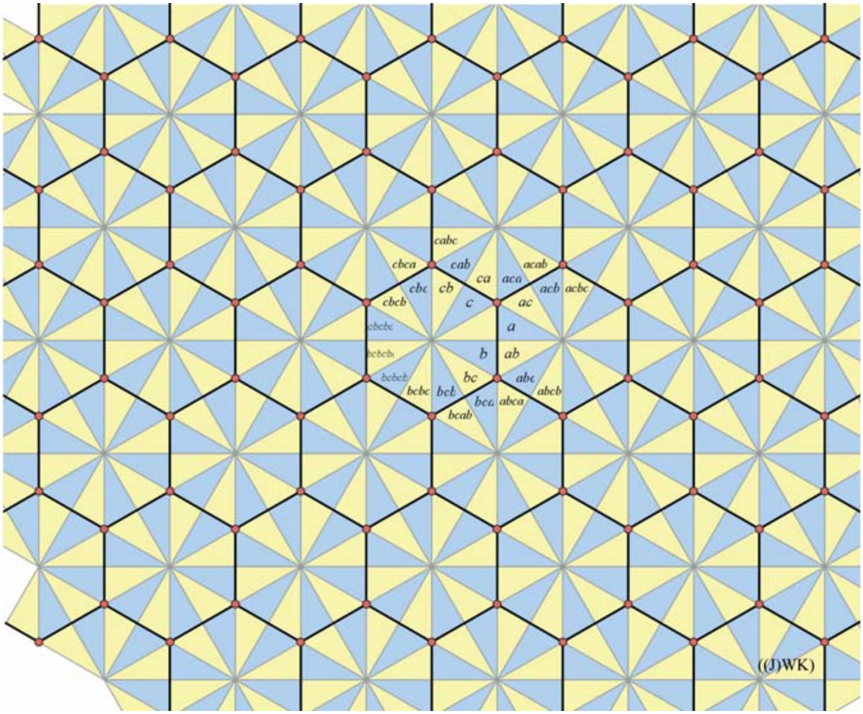


We gaan nu over op driehoeken in plaats van vlaggen. We nemen een driehoek uit de vlag waarin een hoek zit van 45 graden. Als we die driehoek gaan spiegelen om de zijden door een hoekpunt van 45 graden en dat blijven doen, ontstaan acht driehoeken op dat hoekpunt. Dit heeft te maken met het feit dat 45 gelijk is aan 360 gedeeld door 8.



Niet alle elementen uit de groep commuteren met elkaar, maar de vier draaiingen wel. Deze groep heet de **cyclische groep** van orde vier. Net zo krijgen we, uitgaande van een driehoek met een hoek van $360/2m$ graden, voor elk natuurlijk getal m, de **cyclische groep** van orde m.

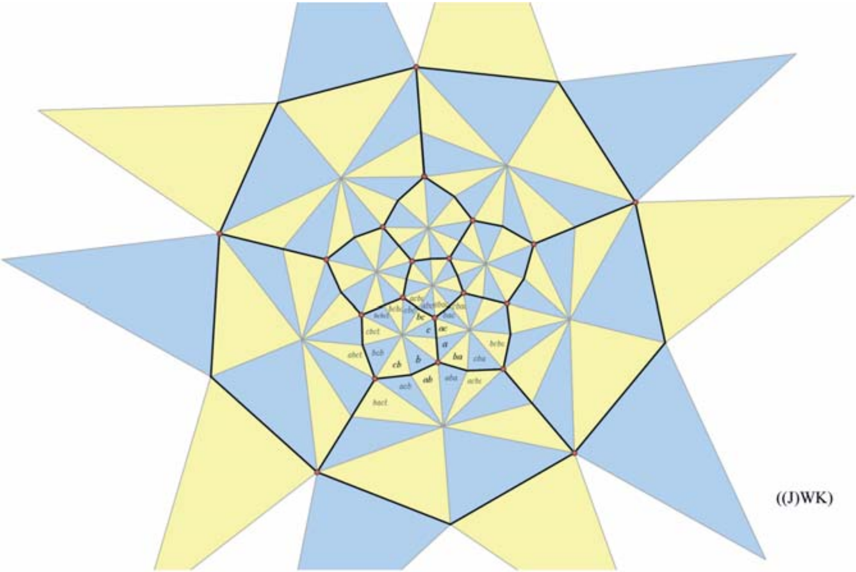
Dergelijke constructies van meetkunde en groep met spiegelingen voeren we nog drie keer uit, elke keer met een driehoek als uitgangspunt en met spiegelingen aan alledrie zijden van de driehoek in plaats van twee, zoals daarnet.



We kijken eerst naar een driehoek in het platte vlak met hoeken van 30, 60 en 90 graden.

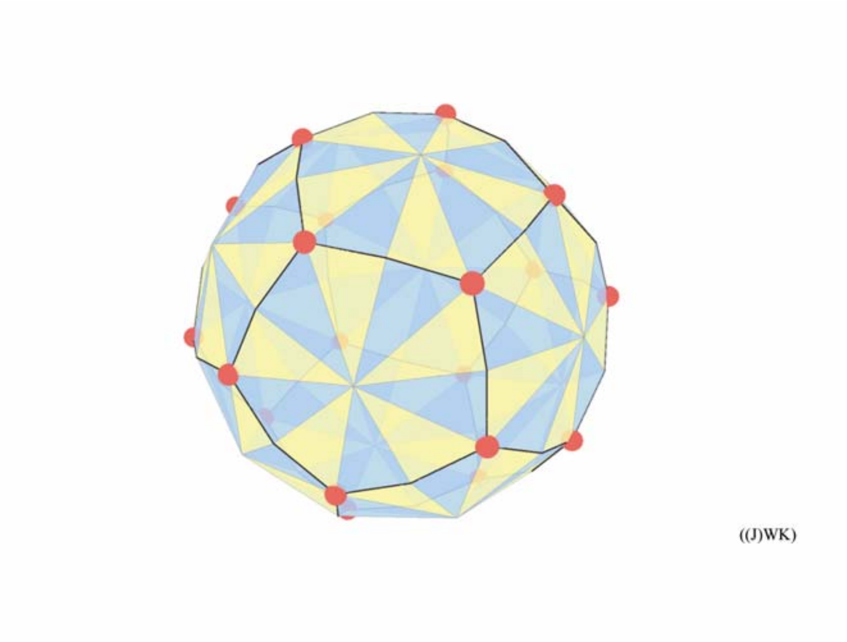
Steeds spiegelen we aan de zijden van bekende driehoeken om nieuwe driehoeken te maken. In sommige driehoeken staat een samenstelling van de spiegelingen *a*, *b* en *c* beschreven die de begindriehoek naar die driehoek transformeert. Rond elk hoekpunt ontstaan steeds 4 driehoeken, 6 driehoeken of 12 driehoeken. Het eindresultaat is een betegeling van het platte vlak met driehoeken. Elke spiegeling wordt een symmetrie van de hele betegeling. De groep van symmetrieën en de meetkundige figuur ontstaan zo hand in hand. Er zijn oneindig veel driehoeken, en de groep heeft oneindig veel symmetrieën. Met andere woorden, de groep heeft een oneindige orde. In het plaatje van deze betegeling is de rand van elk 12-tal driehoeken op één hoekpunt aangedikt om het honingraat-motief naar voren te laten komen.

Dit voorbeeld laat een van de vele mooie interacties zien tussen de meetkunde, de plaatjes dus, en de algebra, de groep waarvan symmetrieën geregistreerd worden in woorden, met de letters *a, b* en *c*.



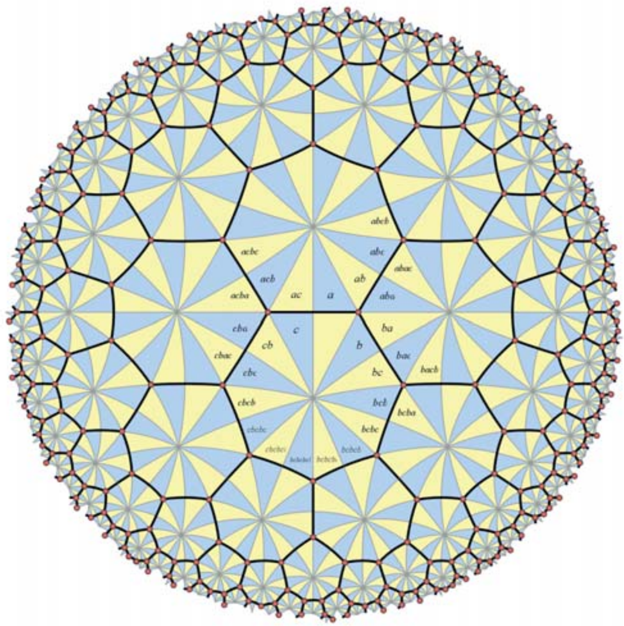
De tweede constructie starten we met een driehoek die hoeken van 36, 60 en 90 graden heeft. Dit betekent dat het spiegelen aan lijnen door een hoekpunt respectievelijk 10, 4 en 6 driehoeken op dat hoekpunt oplevert. We maken weer de drie buren van de oorspronkelijke driehoek en gaan door met spiegelen aan de zijden om nieuwe driehoeken te creëren.

Na 119 stappen is de opbouw compleet: er zijn 120 driehoeken ontstaan. Het eindresultaat is wat moeilijk te tekenen in het platte vlak. Daarom zijn de toppen van de tien uitstekende driehoeken apart getekend, terwijl ze eigenlijk samenvallen. Ook de lijnstukken die bij dat buitenste punt eindigen en in hetzelfde punt starten, vallen eigenlijk samen. We dikken de rand van elk tiental driehoeken op één hoekpunt aan om te accentueren dat we de dodecaëder, het beroemde regelmatige twaalfvlak, hebben gevonden.



Het plaatje is letterlijk en figuurlijk rond. Dit is te zien dankzij transformaties van de figuur, die het driehoekenpatroon intact houden. Het aantal gevonden driehoeken is gelijk aan het aantal symmetrieën van de groep. De bijbehorende groep heeft dus orde 120.

In de eerste constructie begonnen we met een driehoek waarvan de som van de hoeken gelijk is aan 180 graden, zoals we gewend zijn. In de tweede constructie was de som 186 graden, dus meer dan de gebruikelijke 180; de ontstane figuur in het platte vlak bleek tot een boloppervlak om te krommen.

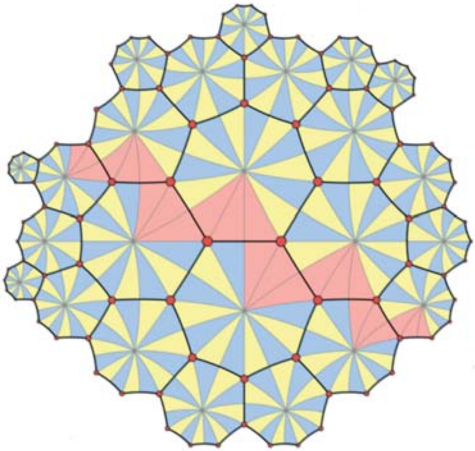


((J)WK)

Voor het derde voorbeeld starten we met een driehoek waarvan de hoeken 360/14, 60, en 90 graden zijn. De som van de hoeken is dan minder dan 180 graden.

Ook hier blijven we spiegelen om nieuwe driehoeken te maken, waarbij er steeds vier driehoeken, zes driehoeken of veertien driehoeken op een hoekpunt komen. Tenslotte dikken we de rand van elk veertiental driehoeken op één punt weer aan. De figuur die hier ontstaat, ligt in een zogenaamd hyperbolisch vlak, dat getekend is in een cirkelschijf. De cirkelschijf geeft een klassiek model voor wie zich afvraagt waar de rand van de wereld ligt. In het midden van de schijf kun je je bewegen zoals je gewend bent. Maar naarmate je dichter bij de rand van de schijf komt, worden je bewegingen trager. Zó traag dat je nooit echt bij de rand kunt komen. Dit model heeft Poincaré gebruikt om het gevoel over te brengen dat je in een wereld leeft waarvan je de rand nooit zult bereiken. De groep van symmetrieën van deze Poincaré-schijf is een Liegroep en het wereldmodel past in het eerder genoemde Erlanger Programm van Felix Klein. De groep van symmetrieën van de verenigde driehoeken is een deel van deze Liegroep.

Quotiënt



(Jack van Wijk)

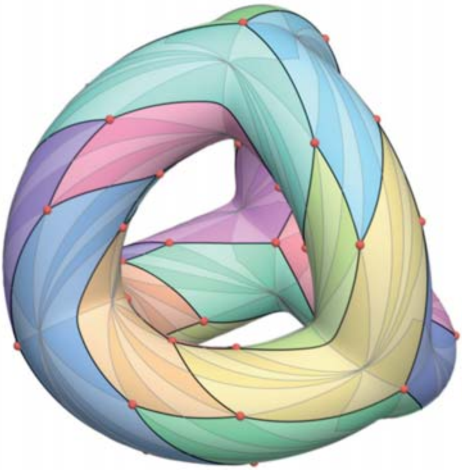
Uitknippen en plakken.

Elke zijde plakken aan de zijde die je bereikt via het roze pad *abcabcabcabcabcabcabc.*

Het quotiënt heeft 336 driehoeken.

Er ontstaan oneindig veel driehoeken. Maar je kunt eindige groepen vinden, door quotiënten te nemen. Een eindig **quotiën**t krijg je door de rand om een stuk met eindig veel driehoeken van de figuur uit te knippen en de zijden van telkens twee driehoeken uit die opengeknipte rand zó aan elkaar te plakken dat er geen rand overblijft. Niet elke aanpak leidt onmiddellijk tot een interessante groep, maar we weten waar we het zoeken moeten. In het plaatje staat een voorbeeld, waarin het plakvoorschrift voor twee zijden uit de rand door een roze pad is aangegeven.

Quotiënt



een oppervlak
zonder rand
met drie gaten

R3.1 {7, 3}: order 336, 24 septagons, 84 edges, 56 vertices

(Jack van Wijk)

Het resultaat is in bovenstaand plaatje te zien. De groep in dit voorbeeld heeft orde 336.

Eindige enkelvoudige groepen

- enkelvoudige groep: niet opgebouwd uit twee kleinere groepen als een soort product
- 18 oneindige reeksen: elk bestaat uit oneindig veel eindige enkelvoudige groepen die varianten van Liegroepen zijn
- sporadische groepen: 26 overige bekende eindige enkelvoudige groepen

De grootste sporadische groep is het Monster. Het heeft orde
808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000.
Dat is ongeveer 0,8 x 10^{54}.

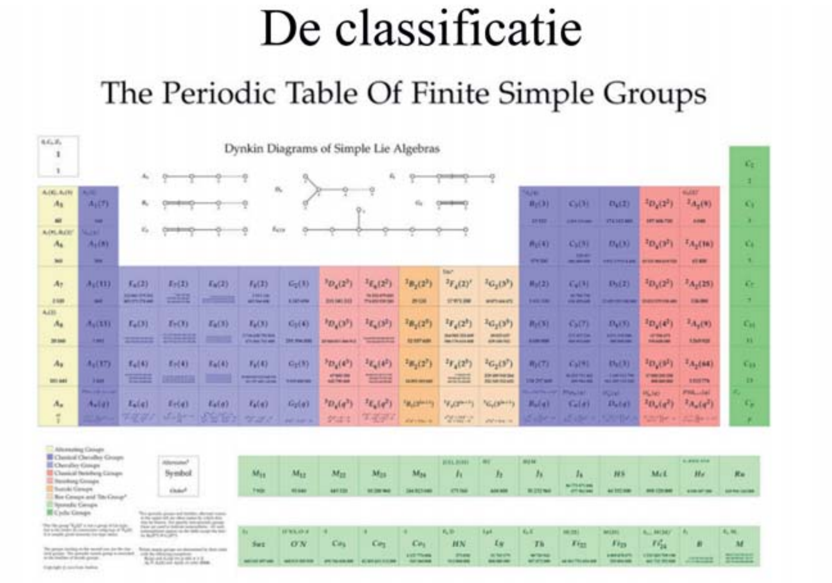
Een eindige groep bestaat uit eindig veel symmetrieën. Dat aantal heet, zoals gezegd, de orde van de groep. Veruit de meeste groepen kunnen worden opgebouwd uit kleinere groepen, waarbij het product van de ordes van de kleinere groepen gelijk is aan de orde van de oorspronkelijke groep. Bijvoorbeeld, de cyclische groep van orde 4 is opgebouwd uit twee cyclische groepen van orde 2, en de cyclische groep van orde 6 is opgebouwd uit een cyclische groep van orde 2 en een cyclische groep van orde 3. Een groep die niet opgebouwd kan worden uit twee kleinere groepen, heet **enkelvoudig**.

Tussen 1888 en 1894 zijn de enkelvoudige Liegroepen geclassificeerd. Deze groepen kennen varianten die eindige enkelvoudige groepen zijn. Er zijn precies 18 oneindige reeksen van die eindige varianten. Veruit de eenvoudigste van de 18 reeksen bestaat uit de cyclische groepen waarvan de orde een priemgetal is. De twee kleinste voorbeelden die niet cyclisch zijn maar wel in de oneindige reeksen voorkomen, zijn de groepen van draaiingen in de eerder besproken groep van orde 120 van de dodecaëder en de quotiëntgroep van orde 336 van het oppervlak met de drie gaten.

Er zijn precies 26 eindige enkelvoudige groepen bekend die niet in een van de 18 oneindige reeksen voorkomen. Deze groepen worden **sporadisch** genoemd. De grootste van deze sporadische groepen heet het **monster**. Zijn orde, het aantal symmetrieën van deze groep dus, is ongeveer gelijk aan het aantal kilogrammen dat het universum weegt.

Na al deze voorbereidingen zijn we klaar voor het derde grote resultaat: de **classificatie van de eindige enkelvoudige groepen**. Die zegt dat elke eindige enkelvoudige groep bekend is, dat wil zeggen, tot een van de 18 oneindige reeksen behoort of een van de 26 sporadische groepen is.

In 1892 vroeg Hölder of een dergelijke stelling mogelijk was. Het bewijs was rond in 2005, dus 113 jaar later.



De stelling is wel eens vergeleken met het periodiek systeem in de scheikunde. De figuur illustreert dat. De 18 kolommen vertegenwoordigen de 18 oneindige reeksen. De cyclische groepen staan groen afgebeeld in de laatste kolom. De 26 lichtgroene hokjes rechtsonder in twee rijen van 13 vertegenwoordigen de sporadische groepen, met helemaal rechtsonder, het monster.

We gaan nu de VROUW criteria voor de classificatie nalopen.

De enige eindige enkelvoudige groepen waarvan elk tweetal symmetrieën commuteert, zijn de cyclische die als orde een priemgetal hebben. Dit is een betrekkelijk eenvoudig deelresultaat van de classificatie. In 1899 publiceerde Burnside een moeilijker geval: hij classificeerde alle eindige enkelvoudige groepen die een involutie hebben waar alleen maar de één en enkele andere involuties mee commuteren. Deze classificatie, zo zag hij het, zou meeromvattend kunnen worden als het waar is dat elke eindige enkelvoudige groep die niet cyclisch is, een involutie heeft. Dit vermoeden leek lange tijd te moeilijk om op te lossen, maar het is in 1963 bewezen door Feit en Thompson. Het was het startsein voor een grote gezamenlijke inspanning om de volledige classificatie van eindige enkelvoudige groepen rond te krijgen. Sindsdien zijn stelling en bewijs langzaam maar zeker volwassen geworden.

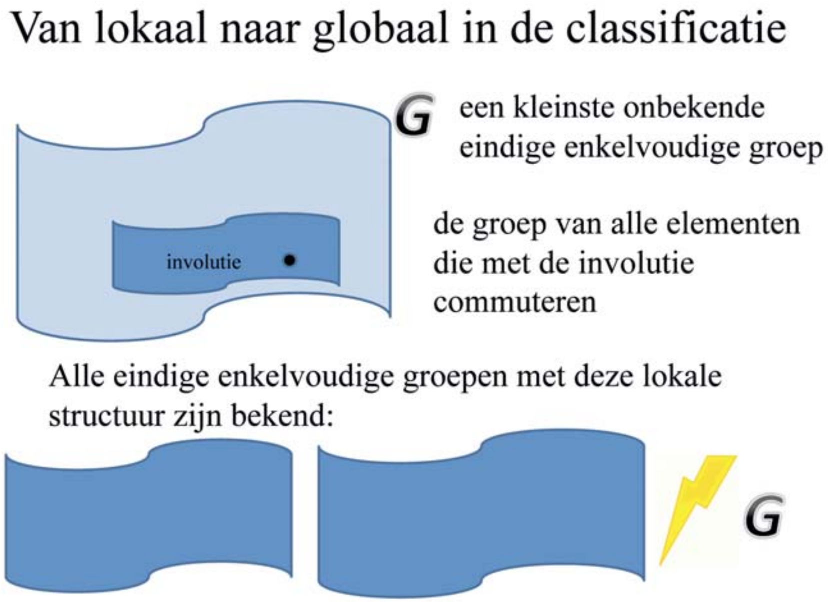
Omdat het begrijpen van de stelling al zo veel werk is, zal het niemand verbazen dat het bewijs erg lang is. Het bewijs beslaat ongeveer 4000 pagina's. Ter vergelijk: de publicatie van Wiles en Taylor telt niet meer dan 140 pagina's.

De meest aansprekende blunder van de classificatie zou een eindige enkelvoudige groep zijn die niet bekend is. Deze gedachte kwam vaak op en is al vroeg uitgesproken door Conway. Maar het bewijs lijkt redelijk robuust tegen de komst van een nieuwe groep; het zal dan hoogstwaarschijnlijk maar op een paar puntjes aanpassing behoeven.

Een verrassend aspect aan het bewijs is het “van lokaal naar globaal” principe, waarbij je verregaande conclusies kunt trekken over een groep als geheel uit informatie die alleen maar iets zegt over kleine onderdeeltjes ervan.

Een illustratie van dit principe zit in een vlucht vogels in V formatie. Een prachtige globale structuur als deze komt tot stand door de lokale sturing van elke deelnemende vogel. Het globale beeld ontstaat zonder centrale organisatie!

Bij de figuren die uit spiegelingen van driehoeken ontstonden, zagen we ook een voorbeeld van dit principe: de som van de hoeken in de startdriehoek bepaalt op voorhand of het betegelde oppervlak dat de driehoeken vormen, recht blijft als in het platte vlak, krom trekt tot een bol, of uitdijt tot het hyperbolisch vlak als in de Poincaré-schijf.



Dan nu het “lokaal naar globaal” principe in de classificatie. In de opzet van een bewijs uit het ongerijmde, nemen we aan dat er een kleinste eindige enkelvoudige groep *G* bestaat die niet bekend is. De stelling van Feit en Thompson uit 1963 zegt dat die groep *G* een involutie heeft. De symmetrieën van *G* die met deze involutie commuteren, vormen een groep die kleiner is dan *G*. Uit de aannames volgt dat deze kleinere groep opgebouwd is uit bekende groepen. De lokale informatie van de involutie is dus min of meer bekend. Volgens het “van lokaal naar globaal” principe worden alle eindige enkelvoudige groepen met deze bekende lokale structuur bepaald, om te constateren dat die zelf ook bekend zijn. In het bijzonder is de groep *G* bekend, in tegenstelling tot de aanname. Een tegenspraak is afgeleid en de stelling is bewezen uit het ongerijmde. Dit is natuurlijk een hele grove indicatie van het bewijs, maar het geeft het verrassende van-lokaal-naar-globaal principe goed weer.

Voor de oplossing waren heel veel nieuwe concepten en methoden nodig, meer in de orde van Fermat dan de vierkleurenstelling. Er moest ook veel parallel gewerkt worden aan allerlei verschillende gevallen, wat weer meer overeenkomst vertoont met de vierkleurenstelling.

Veel stellingen die in de groepentheorie niet zonder meer bewezen konden worden, zijn nu bewezen dankzij de classificatie. Want de lijst van voorbeelden is uitputtend, zodat elke uitspraak over eindige enkelvoudige groepen op juistheid gecontroleerd kan worden door haar te verifiëren voor elke groep uit de lijst. De kracht van de stelling is dus dat het een abstract begrip als eindige enkelvoudige groep zeer concreet maakt.

Daar staat tegenover dat op dit moment de stelling weinig toepassingen buiten de groepentheorie heeft. Ik verwacht dat dat over 50 jaar wel anders zal zijn en hoop het mee te maken.

Het onderzoek werd uitgevoerd door een relatief grote gemeenschap, geleid door een soort van generaal: Gorenstein. Hij was een groot wetenschapper, maar ook een groot leider.

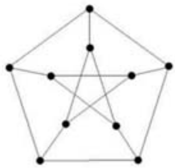
Op de Santa Cruz conferentie in 1979, waar ik bij was, werd door Gorenstein de op handen zijnde classificatie aangekondigd. Het nieuws had een enorm effect op de gemeenschap. Er was veel waardering voor die grote stelling die er aan zat te komen, en de gemeenschap was trots op wat er bereikt was. Maar er was ook ontreddering omdat voor velen hun dagelijkse werk, het bewijzen van deelresultaten voor die classificatie, uit handen leek geslagen.
Sommigen besloten acuut naar een ander gebied van onderzoek te verhuizen. Anderen gingen gewoon door in de eindige groepentheorie. Deze personen hadden gelijk in de zin dat de aankondiging van Gorenstein in 1979 achteraf wat voorbarig bleek. Tegenwoordig wordt het in 2005 verschenen werk van Aschbacher en Smith als de afronding van het bewijs gezien.

Er waren ook onderzoekers die hun heil zochten in meetkundig onderzoek dat de classificatie vanuit een ander gezichtspunt zou kunnen benaderen. Het was de ambitie van Jacques Tits en Francis Buekenhout de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen zoveel mogelijk in meetkunde te vatten. Ook die activiteiten hebben bijgedragen aan de grote waardering voor het resultaat.

3. Meetkunde

groep	netwerk
involutie	knooppunt
commuteren	verbinding

Petersen-graaf =



Ik gaf al aan dat ik de recente geschiedenis van de classificatie van dichtbij heb meegemaakt.

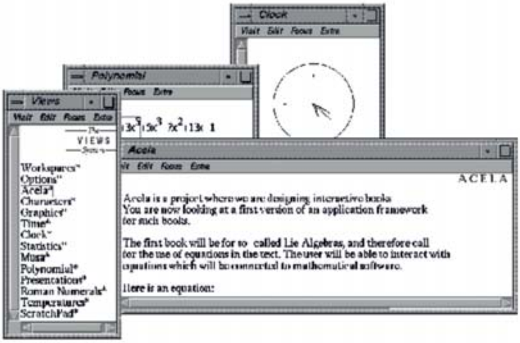
Tijdens mijn Masters-studie in Utrecht volgde ik colleges over groepen bij Freudenthal en Strooker, en Combinatoriek bij Klarner, die destijds in Eindhoven te gast was. Zij wezen me de weg naar de Discrete Wiskunde. Ik werd promovendus bij Springer en schreef een proefschrift over eindige complexe spiegelingsgroepen. Dit gaat over een uitbreiding van groepen van de gewone wereld van de reële getallen naar die van de complexe getallen.

Een paar jaar later, aan de Universiteit Twente, stortte ik me op nog complexere groepen en classificeerde ik de eindige spiegelingsgroepen in de wereld van de quaterniongetallen. Hierbij kwam een sporadische groep uit de classificatie naar voren. Seidel, de oprichter van de Faculteit Wiskunde en Informatica hier in Eindhoven, vertelde het nieuws aan de eerder genoemde Buekenhout. Na een seminar bij hem in Brussel om het verhaal te vertellen, leerde ik snel de gemeenschap kennen die aan de classificatie werkte. De Santa Cruz conferentie van 1979 was een van de eerste gelegenheden daarvoor.

Van de classificatie fascineerde me het werk van Tits en Buekenhout het meest. Het van lokaal naar globaal principe uit de classificatie werd op verschillende manieren in meetkunde vertaald. In een daarvan wordt uit een groep een netwerk gemaakt waarin de knooppunten de involuties van de groep zijn en twee involuties verbonden worden als ze commuteren. In het plaatje ziet u een voorbeeld van een netwerk dat zo tot stand gekomen is, de zogenaamde Petersen-graaf.

Het van-lokaal-naar-globaal principe van de classificatie is ook naar deze netwerken te vertalen. Zo zijn bepaalde stukjes van de classificatie pure meetkunde geworden. Aan dit soort resultaten heb ik een bijdrage geleverd.

4. Computers



Naast deze fraaie meetkunde heb ik al vroeg gewerkt met computers. Van 1979 tot 1992 werkte ik in het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Daar vroegen natuurkundigen me regelmatig bepaalde getallen uit te rekenen die met de eerder genoemde Liegroepen te maken hebben.
Om nieuwe vragen voor te zijn, schreef ik, met hulp van enkele collega's, het softwarepakket LiE, dat nog steeds in gebruik is.

Later op het CWI begon ik me te interesseren voor interactieve wiskundige documenten. In 1991 ging ik met collega's als Meertens en Pemberton aan de slag om een prototype daarvan te ontwerpen. Het bleek moeilijker dan we dachten. Een belangrijke oorzaak was de opkomst van het web, waardoor er steeds nieuwe technische mogelijkheden ontstonden, die ons tot herijking van de aanpak dwongen.

De inspanning heeft uiteindelijk geleid tot een blended learning aanpak bij meer dan tien colleges aan deze universiteit, en tot het platform dat de firma SOWISO gebouwd heeft voor een zeer interactieve en soepele wijze van exact onderwijs.

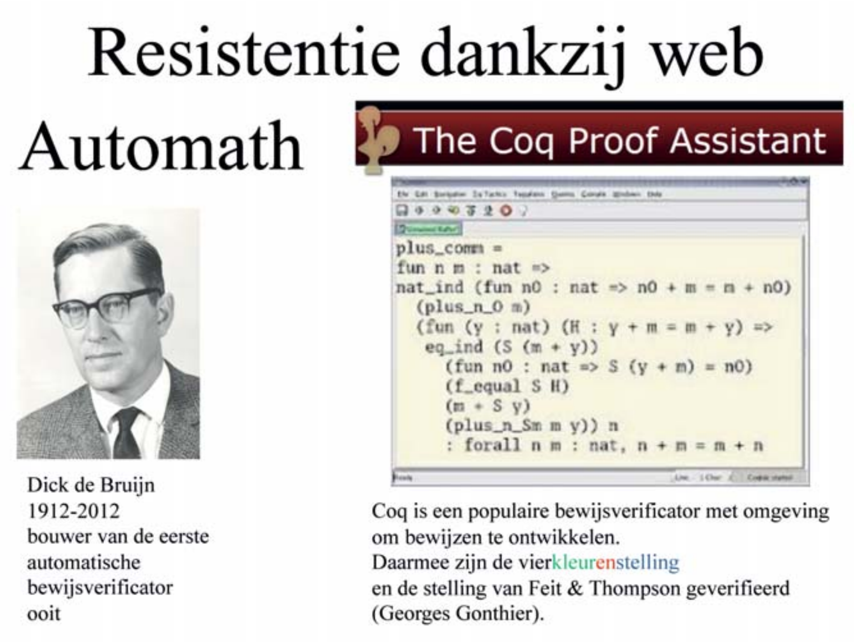
5. Web

criterium	algemene omschrijving	typische activiteit
Volwassenheid	bibliotheek	MathSciNet
Resistentie	bewijsverificatie	AutoMath
Originaliteit	forum	MathOverflow
Unificatie	computeralgebra	OpenMath
Waardering	gezamenlijke projecten	PolyMath

Door deze activiteiten werd ik vanaf het begin met mijn neus gedrukt op het zich steeds verder ontwikkelende web. Zo heb ik de positieve inwerking gezien van het web op de wiskunde. Ik wil daarvan een aantal ervaringen met u delen aan de hand van de VROUW criteria.

Volwassenheid bereik je door je werk zoveel mogelijk te toetsen aan dat van anderen. Maar in de grote hooiberg aan informatie is het niet altijd gemakkelijk de goede spelden te vinden. Op **MathSciNet** staan reviews van bijna alle wiskundige wetenschappelijke publicaties, compleet met allerlei online zoekmiddelen. Die mogelijkheid om relevante publicaties te vergaren voor eigen onderzoek, maakt nieuwe resultaten volwassener.

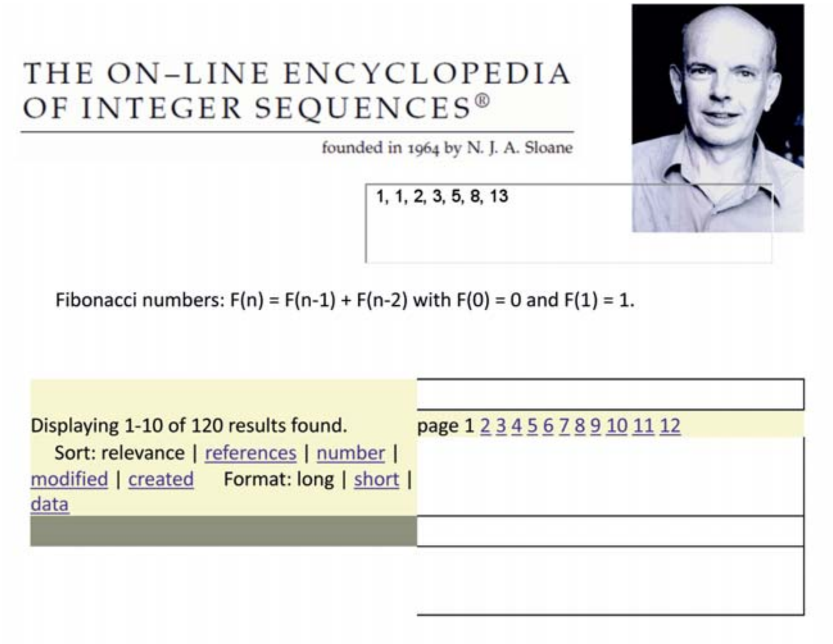
Ook wordt de voortgang van wiskunde nu beter geregistreerd dan ooit. Veel overwegingen en leerzame misstappen achter bewijzen, staan voor iedereen zichtbaar op het web. Een belangrijke bijdrage in die registratie levert de website **arxiv**. Bijna iedereen kan er een artikel op plaatsen, waarbij de indieningsdatum geregistreerd wordt. Zo kunnen auteurs hun rechten (zoals prioriteit) zeker stellen.



Hoeveel overeenstemming er ook is over de correctheid van een bewijs, als er een stap is die je niet kan volgen, komt er weer twijfel naar boven. Had je dit gewoon in moeten zien, of heeft de auteur een misstap begaan? Deze twijfel is weg te nemen dankzij werk van onze eigen De Bruijn uit het eind van de jaren zestig. Zijn programma **AutoMath** is de eerste van een serie kleine overzichtelijke programma's, waarmee de verificatie van de correctheid van een bewijs volledig automatisch kan worden uitgevoerd. Daar is dan wel voor nodig dat het bewijs in groot detail en met veel precisie formeel is opgeschreven.

In 2005 heeft Gonthier een bewijs van de Vierkleurenstelling zodanig formeel opgeschreven dat het volledig automatisch door het computerprogramma Coq geverifieerd kon worden. In 2012 deed hij hetzelfde voor de grote stelling van Feit en Thompson over het bestaan van een involutie.

Hoe kun je een aansprekend wiskundig probleem vinden, je oriënteren op een oplossing, en laten inspireren door anderen? Daarvoor zijn sites als **MathOverflow.** Dit is een vraag-en-antwoord kennisbank voor wiskundigen. Er is een ludiek systeem van bonuspunten aan verbonden voor goede antwoorden, en de begeleiding door experts is indrukwekkend.



Verder zijn er websites waarop zeer verrassende reacties op door jezelf gegeven informatie terug kunnen komen. Een legendarisch voorbeeld is een website van Sloane, waar je een rij getallen kunt intypen om terug te krijgen welke bekende oneindige rijen zo beginnen.

Ik heb al gesproken over automatische bewijs-verificatie, maar nog weinig over computer-algebra. Vrijwel alle denkbare wiskunde waaraan exact te rekenen valt, is in een computer- algebra-pakket uit te voeren. Deze software, die in de jaren tachtig commercieel werd, heeft het mogelijk gemaakt op grote schaal wiskundig te experimenteren. Op het plaatje staat een overzicht van de computer-algebra-pakketten die ik het meest gebruikt heb in mijn onderzoek. Aan GAP en Magma heb ik ook enkele bescheiden bijdragen geleverd.

Computer-algebra-pakketten hebben allemaal hun eigenaardigheden, zoals afwijkende opvattingen over de meest eenvoudige vorm van een eindresultaat. Om de gebruiker de mogelijkheid te geven zich uit te drukken onafhankelijk van het te gebruiken pakket, heb ik meegewerkt aan de ontwikkeling van een wiskundig Esperanto, de taal **OpenMath**. Vanuit deze semantisch rijke taal zijn formules en opdrachten eenvoudig over te zetten naar willekeurig welk software-pakket.

Waardering dankzij web

Is massively collaborative mathematics possible?

PolyMath

Timothy Gowers

Existing polymath projects

Polymath1: New proofs and bounds for the density Hales-Jewett theorem. Initiated Feb 1, 2009; research results have now been published.
Polymath2: Must an "explicitly defined" Banach space contain c_0 or l_p? Initiated Feb 17, 2009; attempts to relaunch via wiki, June 9 2010.
Mini-polymath1: Solving Problem 6 of the 2009 International Mathematical Olympiad. Initiated July 20, 2009; five proofs obtained so far.
Polymath3. The polynomial Hirsch conjecture. Proposed July 17, 2009; launched, September 30, 2010.
Polymath4: A deterministic way to find primes. Proposed July 27, 2009; launched Aug 9, 2009. Research results have been accepted for publication.
Polymath5: The Erdős discrepancy problem. Proposed Jan 10, 2010; launched Jan 19, 2010.
Mini-polymath2: Solving Problem 5 the 2010 International Mathematical Olympiad. Proposed Jun 12, 2010; launched and solved, Jul 8 2010.
Polymath6: Improving the bounds for Roth's theorem. Proposed Feb 5, 2011.
Mini-polymath3: Solving a problem from the 2011 International Mathematical Olympiad. Proposed Jun 9, 2011; launched and solved, Jul 19, 2011.
Mini-polymath4: Solving a problem from the 2012 International Mathematical Olympiad. Proposed, Jun 3, 2012; launched, July 12 2012.
Polymath7: Establishing the Hot Spots conjecture for acute-angled triangles. Proposed, May 31st, 2012; launched, Jun 8, 2012.
Polymath8: Improving the bounds for small gaps between primes. Proposed, June 4, 2013; launched, June 4, 2013.
Polymath9: exploring Borel determinacy-based methods for giving complexity bounds. Proposed, Oct 24, 2013; launched, Nov 3, 2013.

De waardering voor een stelling kan groter worden als je zelf aan de totstandkoming van het bewijs meewerkt. In 2009 formuleerde Gowers op zijn blog een wiskundig probleem. Hij nodigde zijn lezers daarbij uit om zelfs de kleinst denkbare bijdragen aan een oplossing op zijn website aan te leveren. Dit experiment is het begin geworden van het **Polymath** project, dat een web-gebaseerde samenwerkingsvorm is waarin iedereen aan het oplossen van een bepaald probleem kan bijdragen. Het lijkt te werken. Resultaten worden onder pseudoniem in gerespecteerde tijdschriften gepubliceerd, met verwijzing naar de Polymath website.

MOOCs

Massive	5000-200000 studenten
Open	gratis toegang, eventueel betaling voor certificaat
Online	geen aanwezigheid vereist, video's, fora, interactief materiaal en geautomatiseerde tests
Courses	nadruk op beeldvorming, contact met medestudenten, zelfwerkzaamheid

Bijna alles wat ik over het web gezegd heb, geldt niet alleen voor onderzoek maar ook voor onderwijs. Ook daar is veel van terug te vinden op het web. De MOOCs zijn daarbij wel heel spraakmakend. In dat format bestaan online colleges over vele onderdelen van de wiskunde, waarin erg goede docenten optreden en prachtige animaties worden vertoond. Ze vormen een verrijking van het studiemateriaal voor iedereen die weet wat zelfstandig werken is.

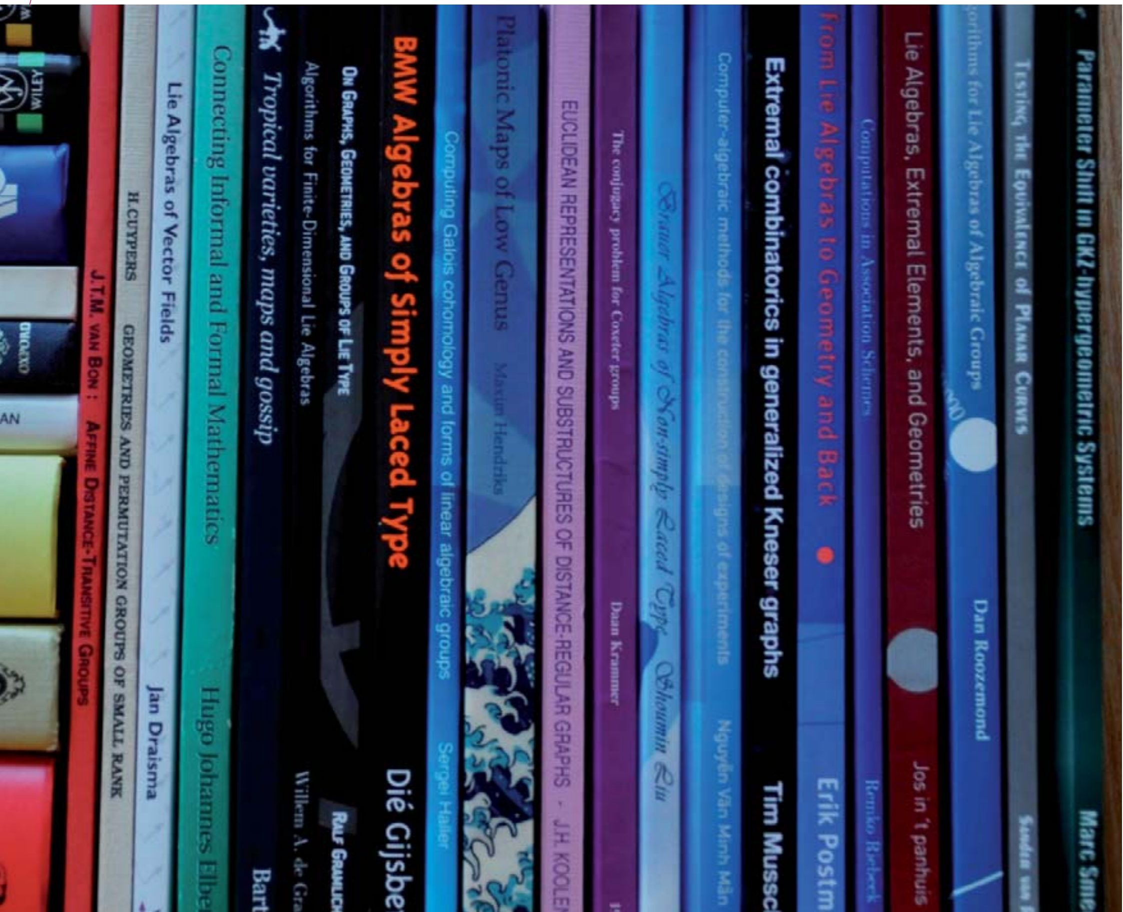
Maar de online cursussen zijn geen volwaardige vervangers van het bestaande onderwijs. Het contact in twee richtingen tussen studenten en goede leermeesters ontbreekt nog. Een nieuwe trend, waarin MOOCs gekoppeld worden aan bereikbare docenten, gaat hier wat aan doen.

criterium	**algemene omschrijving**	**typische activiteit**	**andere voorbeelden**
Volwassenheid	Bibliotheek	MathSciNet	arxiv
Resistentie	Bewijsverificatie	AutoMath	COQ,
Originaliteit	Forum	MathOverflow	
Unificatie	Computeralgebra	OpenMath	Mathematica, Sage
Waardering	Gezamenlijke projecten	PolyMath	

De gegeven voorbeelden laten zien hoe sterk het web helpt in het bedrijven van onderzoek en het volgen van onderwijs in de wiskunde. De wiskunde heeft veel bijgedragen aan de totstandkoming van het web, dat is bekend. Maar aan de hand van de VROUW- criteria heb ik betoogd dat het er ook veel voor terug krijgt.

6. Dank

De afgelopen 22 jaar heb ik aan de Technische Universiteit Eindhoven mogen werken. Dat heb ik als een voorrecht ervaren. Heel vaak als ik van het station naar de campus liep, deed ik een klein privé-onderzoekje. Was dit een campus waar ik met plezier naar toe liep? Een enkele keer spande het er om, en koesterde ik de gedachte aan een nieuwe onderneming. Maar het overgrote deel van al die loopjes werd ik vervuld van plezier vanwege de omgang met studenten en collega's, de vrijheid om eigen ideeën te verwezenlijken, en de vooruitgang die de universiteit heeft geboekt. Ik ben de TU/e daar zeer dankbaar voor.

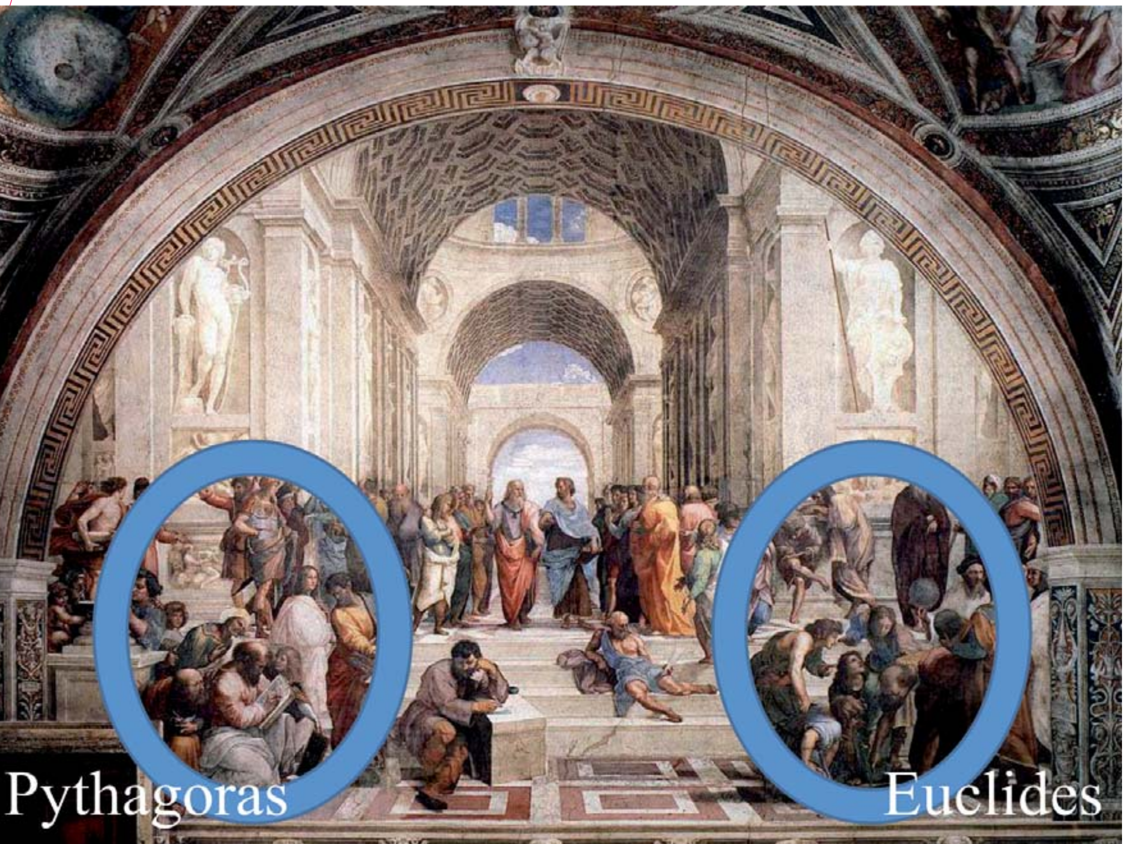


Er zijn, zoals u wel vaker in afscheidsredes hoort, veel te veel namen om te noemen in een kort dankwoord. Daarom beperk ik me, als een soort pars pro toto, tot drie mensen met dezelfde roepnaam, namelijk Hans. Het scherpe menselijke waarnemingsvermogen en het grote taalgevoel van Hans Sterk hebben me vaak erg goed geholpen, waarvoor veel dank. Hans van Duijn is een begeesterd roerganger van deze universiteit en ik ben hem dankbaar voor de taken die hij me daarin heeft toebedacht. Als laatste wil ik Hans Cuypers bedanken voor een professioneel leven lange vriendschap en inspirerende samenwerking. Je was mijn eerste promovendus. Gefeliciteerd met de 25ste verjaardag van je proefschrift afgelopen week.

7. Slot

Veel redes van dit soort beginnen met de klassieken. Deze eindigt er mee.

Euclides werd wel eens gevraagd waar zijn wiskunde nou eigenlijk goed voor was. Hij reageerde ooit met de woorden “Geef de vragensteller wat geld, want hij heeft er kennelijk niet genoeg aan zoiets moois te leren.” Gelukkig kunnen we op de vraag naar het nut voor de maatschappij, tegenwoordig antwoorden dat achter dertig procent van het nationale inkomen, wiskunde zit.



Pythagoras introduceerde het woord **mathematicus** voor ingewijden in zijn elitaire school. Zij waren de enigen die volledig kennis mochten nemen van de wiskundige resultaten van die lokale school. Het web stelt je in staat als mathematicus te participeren in vele globale kringen.

Zelf ben ik natuurlijk van plan het web grotelijks te benutten bij mijn activititeiten vanachter de geraniums. Ik hoop dat u, met welke achtergrond dan ook, zult meegenieten van de verworvenheden van de Wiskunde in het Web.

Ik heb gezegd.

Curriculum vitae

Prof.dr. Arjeh M. Cohen is op 1 augustus 1992 benoemd tot hoogleraar Discrete Wiskunde aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven en verwacht in juli 2014 met emeritaat te gaan.

Arjeh M. Cohen studeerde Wiskunde en promoveerde in de Wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Hij studeerde af in 1971 en kreeg de doctorstitel in 1975. Na een jaar bij het Openbaar Lichaam Rijnmond gewerkt te hebben, werd hij in 1976 aan de Universiteit Twente aangesteld en in 1979 aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam. In 1991 werd hij deeltijdhoogleraar aan de Universiteit Utrecht. Hij heeft zich toegelegd op discrete algebra, meetkunde, groepentheorie, knopentheorie, computeralgebra en interactieve wiskundige systemen.

Hij was de eerste voorzitter van de OpenMath Society en de enige wetenschappelijk directeur van RIACA (het Research Institute for Computer Algebra and its Applications). Van 2009 tot 2013 was hij decaan van de Faculteit Wiskunde en Informatica aan de TU/e, alwaar hij de Graduate School en het digitale onderwijsbeleid heeft helpen ontwikkelen. Hij heeft meegewerkt aan de oprichting van de organisaties PWN (Platform Wiskunde Nederland), AMI (3TU Applied Mathematics Institute) en EIRICT (Eindhoven Institute for Research on ICT).

Cohen was langere tijd te gast aan universiteiten in Ann Arbor, Basel, Ber Sheva, Jeruzalem, Kobe, London, Napels, Pasadena, Rome, Santa Cruz en Sydney. Hij gaf ongeveer 300 wetenschappelijke voordrachten op uitnodiging. Hij was (co-)promotor van 21 studenten en schreef (mee aan) meer dan 120 wetenschappelijke artikelen, 5 boeken (waarvan twee in de Ergebnisse reeks van Springer) en hij redigeerde 8 boeken. Momenteel werkt hij mee aan het webplatform voor exacte wetenschappen van de firma SOWISO.

Colofon

Productie
Communicatie Expertise
Centrum TU/e

Fotografie cover
Rob Stork, Eindhoven

Ontwerp
Grefo Prepress,
Sint-Oedenrode

Digitale versie:
www.tue.nl/bib/

Bezoekadres
Den Dolech 2
5612 AZ Eindhoven

Postadres
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

Tel. (040) 247 91 11
www.tue.nl/plattegrond