

## Grootschalige interactie met wiskunde

**Citation for published version (APA):**

Leeuwaarden, van, J. S. H. (2014). Grootschalige interactie met wiskunde. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/15(1), 28-36.

**Document status and date:**

Gepubliceerd: 01/01/2014

**Document Version:**

Uitgevers PDF, ook bekend als Version of Record

**Please check the document version of this publication:**

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

**General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

[www.tue.nl/taverne](http://www.tue.nl/taverne)

**Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

[openaccess@tue.nl](mailto:openaccess@tue.nl)

providing details and we will investigate your claim.

Johan van Leeuwen

Faculteit Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
j.s.h.v.leeuwen@tue.nl

Oratie

# Grootschalige interactie

In ons dagelijkse leven hebben we te maken met allerlei netwerken. Je kunt daarbij denken aan netwerken voor nutsvoorzieningen als gas, water en elektriciteit, maar bijvoorbeeld ook aan netwerken van mensen. Sinds de komst van internet spelen datanetwerken een belangrijke rol in ons leven en maken we steeds meer gebruik van sociale netwerken zoals Twitter en Facebook. Hoe kun je in deze hedendaagse netwerken de capaciteit zo goed mogelijk afstemmen op de vraag van de gebruikers? Johan van Leeuwen, hoogleraar stochastische netwerken, zet in zijn oratie, uitgesproken op 20 september 2013 aan de Technische Universiteit Eindhoven, uiteen hoe hiervoor stochastische modellen gebruikt kunnen worden.

Mijn lezing zal gaan over twee verschillende interpretaties van de zinsnede 'grootschalige interactie met wiskunde'. Ik hoop daarbij vooral mijn fascinatie voor mijn vakgebied met u te delen, ongeacht of u wel of niet wiskundig bedreven bent, en of u op voorhand de wiskunde van levensbelang of nutteloos acht.

Mijn vakgebied is stochastische netwerken. Dat tweede woord, netwerken, is als werkwoord een van de populairste woorden van onze tijd. Het verwijst naar iets als contacten leggen waar je je voordeel mee kunt doen, of professionele relaties onderhouden. En hoewel wiskundigen wel netwerken, maar te weinig netwerken, is dat niet wat ik in eerste instantie bedoel. Wat ik wel bedoel is het woord netwerk dat verwijst naar een geheel van met elkaar verbonden entiteiten. Ik richt me daarbij op het ontwikkelen van wiskunde om het gedrag van netwerken te begrijpen en te verbeteren, en dan in het bijzonder het gedrag van grootschalige netwerken.

Een eenvoudig voorbeeld van een netwerk is een emmerbrigade (zie Figuur 1), ofwel mensen geformeerd in een rij die emmers doorgeven om water van de bron naar het vuur te brengen. Het is een noodsituatie. De brand

dient geblust te worden en voldoende water moet binnen afzienbare tijd het vuur bereiken. De formatie is bijzonder kwetsbaar, want de zwakste schakel in de brigade is allesbepalend.

Een wiskundige raakt niet in paniek en maakt een wiskundig model van de situatie. De mensen worden dan het netwerk, en de emmers met water vormen een proces dat beweegt over het netwerk. Vervolgens probeert

de wiskundige inzicht te krijgen in wie de zwakste schakel is, hoeveel water per tijds-eenheid het vuur bereikt en of meerdere brigades nodig zijn.

Mijn vakgebied stochastische netwerken betreft een specifieke wiskundige kijk op netwerken. Stochastiek is de wiskunde van het toeval, van onzekerheid. De kunst in mijn vakgebied is, wiskundig precieze uitspraken te doen over systemen waarin niet alles bij voorbaat vastligt, en waarin toeval tot op zekere hoogte een rol speelt. Gooien we met een dobbelsteen, dan is de uitkomst onzeker, maar met kans  $1/6$  zal het aantal ogen 6 zijn, en het gemiddelde van veel worpen is naar verwachting 3,5.

Keren we terug naar de emmerbrigade, dan lijkt het aannemelijk dat dit een stochastisch systeem is. Het blijft mensenwerk, waardoor



Figuur 1 Emmerbrigade.



Johan van Leeuwen

# met wiskunde

de snelheid van handelen kan schommelen en de beweging van de emmers met water een stochastisch proces vormt. Maar ook het gedrag van het vuur en het effect van het water op dat gedrag zijn stochastische elementen.

Ik moet eerlijk bekennen dat ik nooit met emmerbrigades heb gewerkt, en dat is maar goed ook, want gaan rekenen in noodsituaties is niet bepaald heldhaftig. De brigade is slechts een voorbeeld van een kritiek netwerk met interactie en onzekerheid. Het wiskundige model is een vereenvoudigde beschrijving van de werkelijkheid. De wiskundige zal vervolgens proberen om bruikbare informatie uit het model te halen, voor de emmerbrigade, maar mogelijk ook voor andere toepassingen. De kracht van de wiskunde schuilt namelijk in de abstractie. Het model vertegenwoordigt vele werkelijkheden. De brigade

kan evengoed model staan voor het versturen van datapakketjes van een verzender naar een ontvanger, of voor het doorgeven van informatie van mens tot mens. Mijn onderzoek richt zich op soortgelijke wiskundige modellen, maar dan voor meer hedendaagse netwerken.

## *Begin twintigste eeuw*

Voordat ik kom bij de immense netwerken van nu neem ik u mee naar het begin van de twintigste eeuw. De Deense wiskundige Agner Erlang (1878–1929) kreeg van de Deense telefoonmaatschappij de vraag voorgelegd hoeveel telefoonlijnen nodig waren om een acceptabele dienstverlening te garanderen. Telefooncentrales bestonden toen al een aantal decennia, maar werden nog steeds handmatig bediend. De centrale was niets meer

dan een tafel waarop een telefoniste handmatig de verbindingen maakte. Bij het opnemen van de hoorn kreeg een klant verbinding met de telefoniste. De klant zei met wie hij wilde spreken, waarna de telefoniste de verbinding tot stand bracht (zie Figuur 2). Op de tafel was ruimte voor een eindig aantal verbindingen, zeg vijf. Er konden in dat geval maximaal vijf gesprekken tegelijkertijd plaatsvinden.

Erlang constateerde dat klanten op willekeurige momenten in de tijd wensen te telefoneren, en dat ook de lengte van gesprekken variabel is. Als alle klanten op vaste tijden voor een vaste duur telefoneren is er geen enkel probleem, zolang het aantal lijnen toereikend is. Maar in de praktijk melden klanten zich volgens een stochastisch proces, en ook de duur van het gesprek is stochastisch. De telefooncentrale is daarmee een stochastisch systeem, en dat betekent dat de prestaties van een telefooncentrale typisch worden uitgedrukt in kansen en gemiddelden.

Onder een aantal wiskundige aannamen creëerde Erlang het volgende stochastische model. Klanten arriveren met een gemiddelde snelheid  $\lambda$  en worden verwerkt met snelheid  $\mu$ . Het model houdt vervolgens bij hoeveel klanten op ieder moment in de tijd bellen of willen bellen. Dit aantal klanten in het systeem zal dus veranderen door de tijd. Als het aantal kleiner dan of gelijk is aan het aantal lijnen  $C$ , dan wacht niemand, maar is het aantal groter dan  $C$  dan ontstaat een wachtrij.

Een cruciale graadmeter voor stochastische systemen is de bezettingsgraad, aan-



Foto: Charles E. Keevil

**Figuur 2** Telefonistes en telefooncentrale in de jaren veertig.

geduid met de Griekse letter  $\rho$ , en gedefinieerd als de verhouding, per tijdseenheid, van de hoeveelheid werk die gemiddeld bij een systeem binnenkomt en de maximale hoeveelheid werk die het systeem kan verwerken. Voor de telefooncentrale is de bezettingsgraad gegeven door

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{\text{komt binnen}}{\text{kan maximaal verwerkt worden}}$$

Voor  $\rho < 1$  is het systeem stabiel en kan gemiddeld aan alle vraag worden voldaan, en voor  $\rho > 1$  is het systeem instabiel en zal het werk zich tot in het oneindige ophopen. Erlang gaf wiskundige formules voor de kans dat een klant moet wachten omdat alle lijnen bezet zijn, en ook voor de gemiddelde wachttijd die wordt gegeven door

$$\text{kans op wachten} \times \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Het wordt dus kritiek als de bezettingsgraad  $\rho$  de waarde 1 nadert. De formule van Erlang laat namelijk zien dat de problemen als functie van de bezettingsgraad toenemen volgens de kromme  $\rho/(1 - \rho)$ . Dicht bij  $\rho = 1$  moet vrijwel iedereen wachten, en ontstaan er enorme wachtrijen, en dus ook forse vertragingen. Voor mij is dit kritieke gedrag de essentie van het systeem. Wanneer een kritieke situatie optreedt, is het zo overheersend dat we dit fenomeen in alle detail willen en moeten begrijpen. Het kritieke verschijnsel, dat een stochastisch systeem grote problemen ondervindt als de grens van het haalbare wordt opgezocht, doet zich in heel veel systemen en netwerken voor. Ik kom daar nog op terug.

*Verbondenheid in de eenentwintigste eeuw*  
Erlang en zijn tijdgenoten konden niet bevoeden wat de technologische doorbraken in de twintigste eeuw teweeg zouden brengen. Erlang werkte aan een telefooncentrale die mensen in Denemarken zou verbinden. Maar de hele wereld ging bellen, en met de komst van de computer in de jaren veertig, en de eerste verbindingen tussen computers in de jaren zestig werd uiteindelijk het internet geboren, het immense netwerk van computers dat iedereen met elkaar verbindt. Je zou kunnen stellen dat het internet de telefooncentrale van de eenentwintigste eeuw is.

Erlang modelleerde een telefooncentrale in termen van een stochastisch systeem. En met het toenemen van de verbondenheid en interactie werd stochastiek steeds belangrijker. Het leidde tot een sterke groei van de wiskundige theorie van de stochastische pro-

cessen en de wachtrijtheorie, met standaardwerken van William Feller en Jacob Willem Cohen uit de jaren zestig die tot op de dag van vandaag inspiratie bieden.

Het internet is niet meer uit ons leven weg te denken. Het maakt grootschalige communicatie mogelijk tussen mensen en apparaten. En de mogelijkheden gaan steeds verder. Denk aan sociale netwerken als Twitter en Facebook. Wiskundig is Facebook een intrigerend object, een netwerk met meer dan een miljard gebruikers en nog veel meer verbindingen tussen die gebruikers. Facebook maakt het mogelijk om persoonlijke ervaringen, meningen, nieuws en nutteloze onzin te delen met anderen; voorbeelden van processen op netwerken die grote uitdagingen en mogelijkheden bieden, zowel praktisch als wiskundig.

**Kracht van de wiskunde**

Als wiskundige heb ik een brede interesse in netwerken, een interesse die verder reikt dan een enkele toepassing zoals het internet of Facebook. Er zijn veel meer toepassingen van netwerken die fascinerende vragen oproepen. Ik denk hierbij op dit moment vooral aan draadloze netwerken, energienetwerken, lichtnetwerken en epidemieën, maar morgen kan daar een nieuwe toepassing bij komen. Ik zal nu een drietal voorbeelden geven van de kracht van de wiskunde bij het analyseren van deze netwerken.

*Voorbeeld 1: schaalvoordelen*

We beginnen kleinschalig en keren terug naar het model van Erlang. Meer in het algemeen denken we aan een systeem dat service verleent, met klanten en bedienden. Nieuwe opdrachten komen binnen met gemiddelde snelheid  $\lambda$  en worden afgehandeld met gemiddelde snelheid  $\mu$  door in totaal  $C$  bedienden. Om de notatie eenvoudig te houden kiezen we  $\mu = 1$ , en noemen we  $\lambda$  de werklast en  $C$  de capaciteit.

We hebben al gezien dat een dergelijk systeem door stochastische schommelingen in de problemen komt wanneer de bezettingsgraad 1 nadert. Toch kunnen we situaties creëren waarin het systeem op een gezonde wijze met een hoge bezettingsgraad kan omgaan. Dit kan onder meer door opschalen: het groter maken van het systeem. Dit doen we door de capaciteit  $C$  te koppelen aan de werklast  $\lambda$  volgens de regel[1]

$$C = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$$

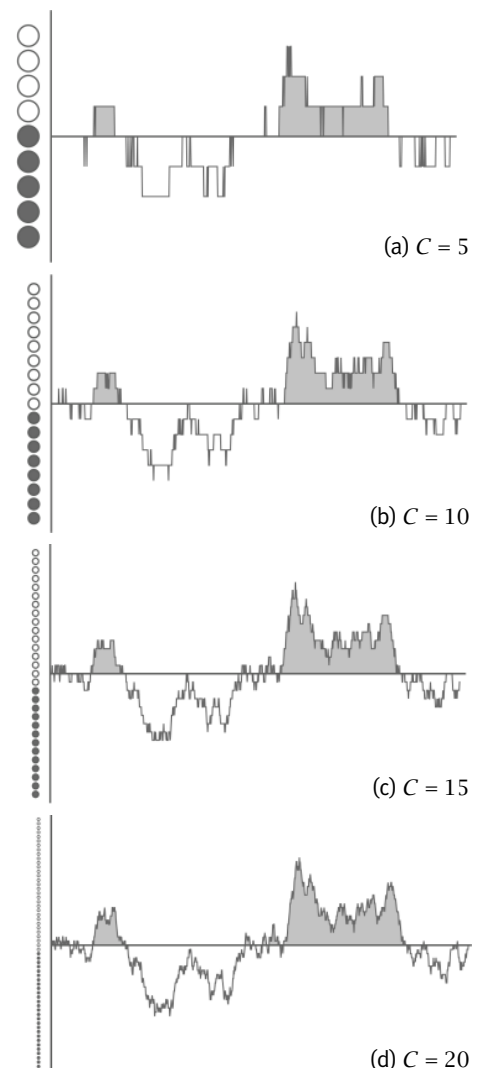
met  $\beta$  een willekeurige positieve constante,

waarbij we  $\lambda$  en daarmee ook  $C$  groot laten worden. Om een stabiele situatie te garanderen moet de capaciteit groter zijn dan de werklast, en dat is met deze regel het geval ( $C > \lambda$ ). De regel vult de minimale capaciteit  $\lambda$  aan met een extra capaciteit gelijk aan  $\beta\sqrt{\lambda}$ . Voor de bezettingsgraad geldt dan dat

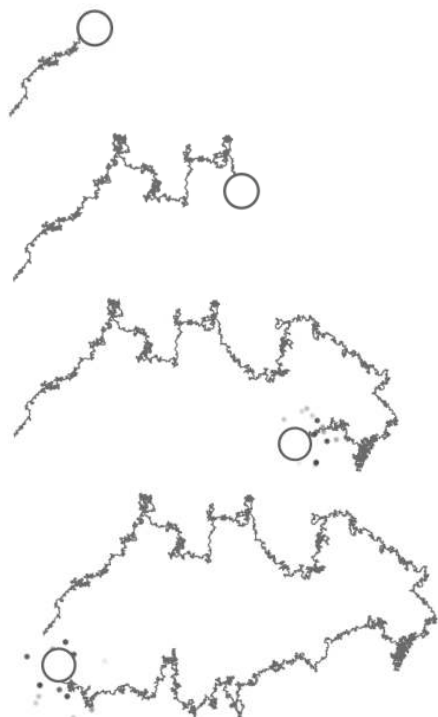
$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda + \beta\sqrt{\lambda}}$$

We zien dus dat voor grote systemen, grote waarden van  $\lambda$  en  $C$ , de bezettingsgraad  $\rho$  alsnog het kritieke punt 1 nadert. Maar er gebeurt meer, iets heel bijzonders, en dat kan ik het beste uitleggen aan de hand van het stochastische proces  $X(t)$  dat het aantal klanten in het systeem beschrijft door de tijd, en dan geschaald volgens  $(X(t) - C)/\sqrt{C}$ .

– We zien in Figuur 3(a) het proces van het aantal klanten in het systeem met  $C = 5$  bedienden. Telkens wanneer er meer dan



**Figuur 3** Het proces  $(X(t) - C)/\sqrt{C}$  voor verschillende waarden van  $C$ .



**Figuur 4** Animatie van de beweging van een stuifmeelkorrel door botsingen met moleculen.

5 klanten in het systeem zijn ontstaat een wachtrij. Dit zijn de grijze gebieden.

- In Figuur 3(b) zien we hetzelfde proces, maar dan voor  $C = 10$ . Het valt op dat het proces sneller lijkt te bewegen, en met kleinere stappen. Dat komt omdat steeds meer klanten arriveren en vertrekken per tijdseenheid.
- Het is alsof we de tijd versnellen. Dat wordt nog duidelijker in Figuur 3(c) voor  $C = 20$  en Figuur 3(d) voor  $C = 100$ .

De curve die we in Figuur 3(d) zien ontstaat is een heel speciaal stochastisch proces genaamd Brownse beweging. Een Brownse beweging is het natuurkundige verschijnsel dat kleine deeltjes dode materie onregelmatige of willekeurige bewegingen vertonen. Robert Brown observeerde dit fenomeen voor het eerst door een microscoop in 1827, toen hij naar een stuifmeelkorrel in water keek. Hoe kan het dat dode materie beweegt? Het fenomeen bleef onbegrepen, totdat Albert Einstein in 1905 met een prachtige wiskundige formule kwam die de onregelmatige bewegingen van de stuifmeelkorrel verklaarde[2]. Dit was een belangwekkend resultaat, want het bevestigde dat dode deeltjes bewegen door de vele botsingen met moleculen. Einsteins verklaring voor de Brownse beweging gaf daarmee het definitieve bewijs voor het bestaan van moleculen.

Wiskundigen stortten zich vervolgens ook op de Brownse beweging, niet vanwege dode

materie en moleculen, maar vanwege de bijzondere eigenschappen van dit merkwaardige stochastische proces. Het proces is namelijk geheugenloos in richting en tijd, waardoor het altijd vergeet waar het vandaan komt, en als het ware ronddoelt. Een duidelijk herkenbaar patroon valt dan ook niet te verwachten.

In de loop van de twintigste eeuw bleek dat de Brownse beweging veel meer echte processen kon beschrijven, vaak in situaties gedreven door een groot aantal kleine effecten. We hebben de Brownse beweging zo juist zien ontstaan in ons stochastisch systeem met klanten, maar een Brownse beweging beschrijft bijvoorbeeld ook de beweging van aandelenkoersen. Voor de dode materie van Brown zijn het de vele minuscule botsingen die de Brownse beweging doen ontstaan, voor de aandelenkoers zijn het de vele individuele meningen die de koers beïnvloeden, en voor ons wachtrijstelsel zijn het de vele aankomsten en vertrekken in slechts een korte periode.

Het afstemmen van de capaciteit op de vraag volgens de regel  $C = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$  blijkt dus wiskundig bijzonder, omdat in de limiet een Brownse beweging ontstaat. Maar vanuit een praktisch oogpunt is het eveneens bijzonder, omdat dit resultaat twee totaal verschillende perspectieven met elkaar verzoent.

Bij kwesties van vraag en capaciteit is er de klassieke tegenstelling tussen klant en systeem. De klant wil comfort en service, terwijl het systeem wordt afgerekend op kosten en efficiëntie. Als de klant koning is, dan moet de service goed zijn en de bezettingsgraad beperkt blijven. Prevaleert het systeem, dan zal net voldoende capaciteit worden gekozen om de kosten te drukken, met als gevolg dat de bezettingsgraad naar 1 gaat en de klant de dupe is. Het is de afweging tussen lange wachttijden enerzijds en overtollige capaciteit anderzijds. Maar met het wiskundige inzicht dat we zojuist hebben verkregen hoeven we die afweging niet langer te maken. De rijlengte in het systeem is van de orde  $\sqrt{C}$ , en omdat er  $C$  bedienden zijn, geldt dat de gemiddelde wachttijd ongeveer gelijk is aan

$$\frac{\text{gemiddelde wachtrij}}{\text{capaciteit}} \approx \frac{\sqrt{C}}{C} \approx 0$$

voor grote waarden van  $C$ . De vertraging is daarmee verwaarloosbaar, en de klant is tevreden. Maar het systeem presteert ook goed, want de bezettingsgraad nadert de 100 procent, het summum van efficiëntie.

Door het systeem groter te maken, en tegelijkertijd de bezettingsgraad op de juiste

manier te verhogen, kan de kritieke situatie het hoofd worden geboden. In de volksmond noemen we dit *schaalvoordelen*. Het staat ons vrij om de vuistregel  $C = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$  toe te passen op andere situaties, waarbij capaciteit moet worden afgestemd op vraag, en waarbij we kunnen opschalen. De vuistregel kan bijvoorbeeld worden toegepast bij het bepalen van het aantal plaatsen in een fietsenstalling, het aantal verpleegkundigen op een ziekenhuisafdeling, of het aantal melkplaatsen in een koeienstal. En vaker dan u wellicht zult vermoeden zal de vuistregel zijn dienst bewijzen, en kunnen klant en systeem door één deur.

Ook wiskundig zijn er schaalvoordelen. De vuistregel schaalde tijd en ruimte, op een manier waardoor de Brownse beweging als wetmatigheid kwam bovendrijven. En hoewel de meeste netwerken heel wat complexer en weerbarstiger zijn dan dit model, kunnen ook daar soortgelijke vuistregels of wetmatigheden optreden. Tijd en ruimte zijn op vele manieren te schalen, en er zijn dan ook vele wetmatigheden te ontdekken. De Brownse beweging is in die zin slechts een exponent uit een hele wereld vol met schalingslimieten.

De geestelijk vader van dit type schalingslimieten in mijn vakgebied is Sir John Kingman[3]. In mijn eigen werk zoek ik ook naar schalingslimieten, omdat ze inzichten geven in universeel gedrag, wetmatigheden die onder vele omstandigheden blijven gelden. Wanneer je eenmaal weet op welke schaal een systeem leeft, in ruimte en tijd, dan is dat een zeer krachtig inzicht om het netwerkgedrag te begrijpen en mogelijk te verbeteren. Ward Whitt, een autoriteit op mijn gebied, verwoordt dit als volgt: “Stochastic-process limits strip away unessential details and reveal key features determining performance.” [4]

#### Voorbeeld 2: verdeel en beheers

We hebben zojuist een voorbeeld gezien waarbij de capaciteit  $C$  werd afgestemd op de vraag in situaties met klanten en bedienden. Iets soortgelijks kunnen we doen voor een dataverbinding in het internet.

We bekijken de dataverbinding tussen Amsterdam en New York. Het dataverkeer van duizenden, of misschien wel miljoenen gebruikers zal deze verbinding passeren. Met de capaciteit  $C$  van de verbinding bedoelen we in dit geval het aantal pakketjes dat over de verbinding kan worden verzonden per tijdseenheid. En omdat de capaciteit  $C$  eindig is, zullen er zo nu en dan vertraagde pakketjes zijn. Om deze pakketjes tijdelijk op te vangen installeren we een databuffer bij Amsterdam,





Figuur 5 Vuistregel voor het aantal melkplaatsen in een koeienstal?

waarin de pakketjes wachten totdat ze verstuurd worden naar New York. Zeg dat er 1000 gebruikers zijn in Amsterdam, zodat de totale gemiddelde werklust  $\lambda$ , per tijdseenheid, gegeven wordt door de som van de werklust van de gebruikers. De vraag is dan hoe groot de capaciteit van de dataverbinding moet zijn om de datapakketjes zonder al te veel vertraging in New York te brengen. We willen de capaciteit  $C$  zo kiezen dat de databuffer niet al te vol geraakt. Een volle databuffer betekent immers lange vertragingen.

De vuistregel schrijft ons voor dat de capaciteit  $C$  moet worden gekozen als  $C = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$  en ook voor deze situatie kunnen we wiskundig hard maken dat het stochastische proces van de bufferinhoud, indien op de juiste manier geschaald, naar een Brownse beweging gaat, en dat pakketjes geen noemenswaardige vertraging ervaren.

Dat is een krachtig resultaat, ook al omdat dit resultaat vrijwel onafhankelijk is van het precieze aantal gebruikers en hun precieze gedrag. Dat bewijs ik een andere keer, bijvoorbeeld op de receptie straks, maar voor nu is van belang dat de vuistregel die werkt voor de telefooncentrale van Erlang ook werkt voor het bepalen van de capaciteit van onze internetverbinding.

Het verdelen van capaciteit wordt lastiger voor een heel netwerk, bestaande uit talloze dataverbindingen. Zoals het wegennet wordt gebruikt door auto's om van A naar B te rijden, zo dient het internet om datapakketjes van de

ene naar de andere computer te zenden, waar ook ter wereld[5]. Maar de vergelijking gaat verder. Wanneer Rijkswaterstaat de randweg bij Eindhoven wil verbreden, dan zal de capaciteit daar toenemen. Maar Rijkswaterstaat kijkt naar het hele wegennet in Nederland, en prioriteit geven aan deze randweg zal ten koste gaan van andere punten in het wegennet. Er moeten keuzes gemaakt worden. Dezelfde keuzes moeten worden gemaakt voor het internet.

Stel we bekijken drie dataverbindingen: Amsterdam–New York (verbinding 1), Amsterdam–Berlijn (verbinding 2) en Amsterdam–Parijs (verbinding 3). Iedere verbinding  $i$  heeft een eigen werklust  $\lambda_i$  en een eigen databuffer. Veronderstel dat we de prestatie van dit netwerk meten in termen van de gemiddelde bufferinhoud. Mochten we de totale capaciteit  $C$  verdelen volgens  $C_i$  voor verbinding  $i$ , met

$$C_1 + C_2 + C_3 = C,$$

dan is voor dit eenvoudige stochastische model de gemiddelde totale inhoud van de drie buffers gegeven door

$$\frac{\lambda_1}{C_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{C_2 - \lambda_2} + \frac{\lambda_3}{C_3 - \lambda_3}.$$

Voor dit voorbeeld liet Leonard Kleinrock[6] zien dat de regel  $C_i = \lambda_i + \beta\sqrt{\lambda_i}$  wiskundig optimaal is (de gemiddelde bufferinhoud wordt

geminimaliseerd). Hierbij is  $\beta$  een vast positief getal. Deze optimale regel bevestigt onder meer dat voor iedere verbinding moet gelden dat de capaciteit groter is dan de vraag ( $C_i > \lambda_i$ ). Maar wellicht verrassender is dat de overcapaciteit over de verbindingen verdeeld wordt naar rato van de wortel van de vraag, en dat de vuistregel die we eerder gezien hebben op een geheel andere manier tevoorschijn komt. En u raadt het al: ook hier kunnen we opschalen, om met grote kans een Brownse beweging in meerdere dimensies tegen het lijf te lopen.

Ook het eerlijk verdelen van capaciteit onder alle netwerkgebruikers is van groot belang. Vooral in draadloze netwerken wordt dat minder vanzelfsprekend. Data wordt in toenemende mate draadloos verzonden, waarbij de zender in alle richtingen een signaal verspreidt dat bij de ontvanger moet geraken.

- Neem een willekeurige groep draadloze gebruikers, in feite draadloze apparaten zoals laptops, tablets en smartphones. Ieder apparaat verzendt data, met de bedoeling een bepaalde ontvanger te bereiken. De situatie is nu volstrekt anders dan bij het internet. Er is niet langer een infrastructuur, want de apparaten zelf vormen het netwerk.
- Een tweede verschil met het internet is dat er geen centrale buffers zijn. Ieder apparaat heeft een eigen databuffer, en probeert de data op de plaats van bestemming te krijgen. Het netwerk is dus stabiel als alle individuele databuffers stabiel zijn. Hier verandert het perspectief van een globale kijk op het hele netwerk in een lokale kijk op de individuele gebruikers.
- Een bijkomende complicatie van dit type draadloze netwerken is dat het netwerk beweegt. Althans, de gebruikers van de apparaten bewegen, en daarmee verandert op ieder moment de structuur van het netwerk.
- Nu zou dat geen probleem zijn als de locaties van de apparaten de prestaties van het netwerk niet zouden beïnvloeden. Maar de locaties zijn juist belangrijk. Draadloze communicatie wordt namelijk gehinderd door interferentie. Indien teveel apparaten op een kluitje zitten, raken de signalen verstoord.
- Gebruikers die in drukke situaties verkeren, met veel andere gebruikers in de nabijheid, verkeren daarmee in een slechte positie. Het lukt ze niet om de datapakketjes te versturen, en hun buffers lopen vol.
- Nu zou je die gebruikers tijdelijk een groter deel van de capaciteit kunnen gunnen,

zodat hun buffers weer leeglopen. Maar dat is niet eenvoudig in een draadloos netwerk. Er is niemand die de centrale regie kan voeren, omdat er geen infrastructuur is. De apparaten zullen het dus zelf moeten opknappen.

De laatste jaren hebben we in onze groep allerlei aspecten bekeken die van belang zijn voor deze draadloze netwerken. We kijken onder meer naar lokale algoritmen, ofwel manieren om de capaciteit te verdelen die alleen lokale informatie gebruiken. Grofweg gaat het als volgt in zijn werk:

- De capaciteit wordt verdeeld volgens een loterij tussen apparaten in de directe nabijheid van elkaar. Hoe voller de buffer van het apparaat, hoe meer lotjes het apparaat krijgt om de loterij mee te winnen.
- We spelen de loterij iedere seconde, en het apparaat met het winnende lot mag gedurende die seconde datapakketjes versturen. Op deze manier stabiliseert het systeem: de minder volle buffers winnen minder vaak, en worden wat voller, en de volle buffers krijgen de kans om leeg te lopen.

Voor dit soort lokale algoritmen hebben we verrassende resultaten bewezen. Een van die resultaten zegt dat bepaalde lokale algoritmen, hoe eenvoudig ook, het hele globale netwerkgedrag kunnen stabiliseren, en ook nog eens goed kunnen laten presteren. De lokale algoritmen zijn dus populair gezegd voldoende intelligent en sociaal. Diezelfde algoritmen kunnen mogelijk ook globale netwerkproblemen op het gebied van verkeer en energie op lokale wijze oplossen, en daar gaan we de komende jaren onderzoek naar doen.

### Voorbeeld 3: dynamiek en complexiteit

Een aantal onder u heeft mij wel eens verweeten geen oog voor detail te hebben, en ik zal nu uitleggen waarom ik dat niet als kritiek heb ervaren.

“We zijn niets anders dan strandvonders van ons eigen leven, brokstukken verzamelend langs de zee der vergetelheid”, schreef Willem Frederik Hermans[7], uit de onmacht die hij ervoer bij het niet kunnen vastleggen van alle details van het leven. En hoewel ik een groot bewonderaar ben van zijn werk, ben ik als wiskundige optimistischer gestemd. Toegegeven, het leven zoals Hermans het bedoelt is te complex, maar voor het overige is de stochastiek bij uitstek geschikt om een complex verschijnsel te ontdoen van de onnodige details. William Feller, een groot kansrekenaar, schreef hierover: “Greater generality and much greater simplicity can be achieved... the economy of thought inherent

in a general theory where one’s view is not obscured by accidents or special cases.”[8]

Een grote mate van detail zorgt ervoor dat ook grootschalige netwerken te complex worden. Veel van deze netwerken zijn zo groot dat het overzicht verloren raakt. Zo is er geen enkele persoon op aarde die precies weet hoe het internet eruit ziet. De wiskunde heeft een prachtig arsenaal van manieren om met complexiteit om te gaan, en ik beperk me daarbij tot het stochastische deel. Drie stochastische manieren om de complexiteit te beteugelen zijn al voorbij gekomen:

- Het beschrijven van de werkelijkheid met kansen (bijvoorbeeld wachtkans).
- Schalen van processen in ruimte en tijd (bijvoorbeeld Brownse beweging).
- Capaciteit verdelen met loterijen (ofwel lokale algoritmen).

Ik zal nu nog een ander voorbeeld geven van hoe wiskundig om te gaan met complexiteit. Wederom betreft het lokale regels, maar ditmaal om een proces te kunnen beschrijven dat beweegt over een netwerk, terwijl de beschrijving van het netwerk zelf te complex is.

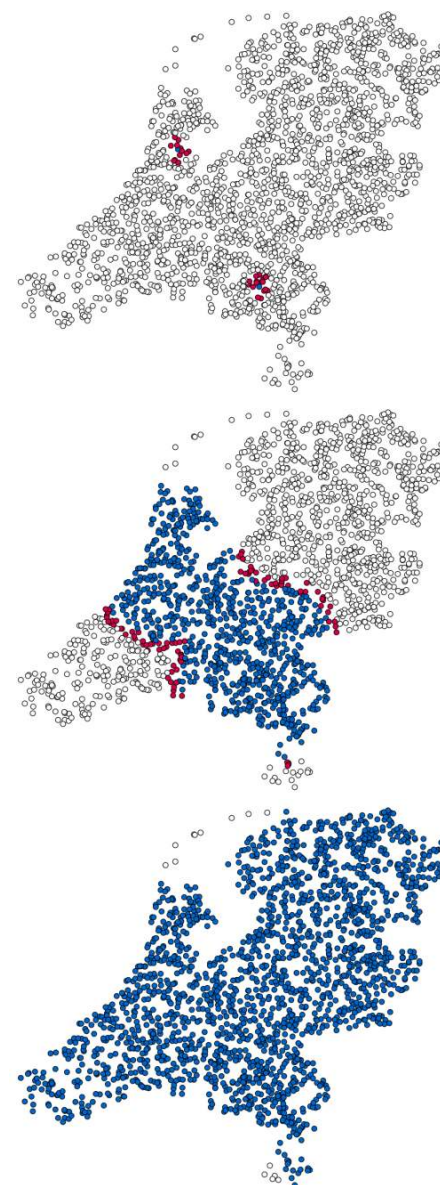
Het voorbeeld betreft een epidemie, of stochastisch gezegd, de mogelijkheid tot het ontstaan van een epidemie. Denk aan de jaarlijks terugkerende griepgolf. Ieder jaar krijgt een kleine miljoen Nederlanders de griep, in een periode van ongeveer drie maanden. Dit proces kan worden beschreven in termen van een netwerk. Het netwerk bestaat uit mensen, die bewegen, elkaar ontmoeten en mogelijk het virus uitwisselen. Een geschikt wiskundig model voor een epidemie houdt op ieder tijdstip bij wie ziek geweest is, wie momenteel ziek is, en wie nog ziek kan worden. Het is ook stochastisch, want hoe snel en naar wie het virus zich verspreidt is niet zeker. Het virus springt met een bepaalde kans over van een besmet persoon naar een ontvankelijk persoon. Dat zijn eigenlijk de lokale regels. Vanuit de zieken zal het virus met een bepaalde kans overspringen naar de mensen die nog ziek kunnen worden.

Ook hier is het schalen van tijd en ruimte van belang. Aanvankelijk zal het virus slechts een beperkt aantal personen raken, maar wanneer het eenmaal een substantieel deel van de populatie betreft, dan spreken we van een epidemie.

Een belangrijk wiskundig inzicht in epidemieën betreft kritiek gedrag: het wel of niet ontstaan van een grote uitbraak. Stochastische modellen laten zien dat het kritieke gedrag te maken heeft met het gemiddeld aantal besmettingen door één ziek persoon. De rol van het gemiddeld aantal be-

smettingen door één persoon is vergelijkbaar met die van de bezettingsgraad. Voor eenvoudige modellen geldt dat een grote uitbraak dreigt, zodra het gemiddeld aantal besmettingen 1 nadert. Maar in het geval van epidemieën speelt ook de structuur van het netwerk een belangrijke rol. Bestaan er duidelijke gemeenschapsstructuren, en zijn er superverspreiders? En als die er zijn, zijn het dan de personen met veel contacten, of wellicht de personen die lange afstanden afleggen? Dit zijn voorbeelden van wiskundig uitdagende vragen.

Net als bij de voorgaande voorbeelden kan de wiskundige verder gaan dan het in kaart brengen van de werkelijkheid. Met het wiskundige model in handen is het heel eenvoudig om andere werkelijkheden te onderzoeken.



**Figuur 6** Gestileerde animatie van een griep-epidemie in Nederland.



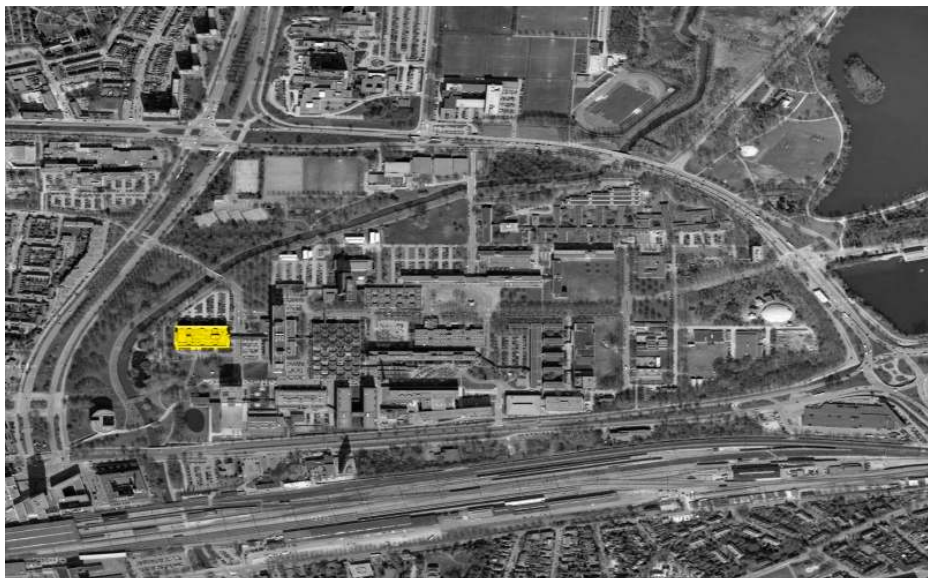
ken. Wat als het niet een griepvirus betreft maar een virus dat zich sneller verspreidt? Of wat als de interactie tussen de mensen ineens frequenter wordt? Wat zal de invloed zijn van vaccineren, of in quarantaine stellen? Vele scenario's kunnen aan de hand van de wiskundige modellen worden onderzocht, en dat kan helpen bij het nemen van beslissingen. Die beslissingen moeten dan wel worden genomen door mensen die meer weten van virussen.

Ik heb dan wel de jaarlijks terugkerende griepgolf als motiverend voorbeeld genomen, maar het wiskundige model kan voor mijn part een heel ander proces op een heel ander netwerk beschrijven. Een vrolijker voorbeeld is de verspreiding van informatie. Stel dat iemand nieuwe informatie wil delen met zijn Facebook-vrienden. Als die vrienden de informatie weer verspreiden naar hun vrienden ontstaat een golf van informatie die veel lijkt op een griepgolf. Maar het perspectief is volstrekt anders. Bij het griepvirus willen we een uitbraak voorkomen, terwijl we bij informatieverspreiding eerder een uitbraak willen forceren.

Voor de wiskundige is het om het even, want die plaatst een epidemie in het breder perspectief van een proces dat zich verspreidt over een netwerk. De wiskundige vindt het ook heel normaal om een lantaarnpaal als vriend te hebben, zoals blijkt in het volgende voorbeeld van lichtnetwerken.

In Figuur 7 ziet u een bovenaanzicht van de TU/e-campus, en in het geel het auditorium, waarin we op dit moment zitten. Als we goed kijken zien we lantaarnpalen, nu aangegeven door de gele puntjes op de andere kaart. Tot voor kort waren lantaarnpalen uitsluitend bedoeld voor het verschaffen van licht, maar nieuwe technologie, waarbij de lampen ook draadloze zenders en ontvangers worden, maakt het mogelijk voor lantaarnpalen om binnen een bepaalde afstand, zeg bijvoorbeeld driehonderd meter, met elkaar te communiceren.

Met deze technologie in handen is het leuk om nieuwe toepassingen te bedenken. Laat ik er zelf één geven. Als we energie willen besparen kunnen we de lichtsterkte van de lantaarnpalen aanpassen aan de weersomstandigheden. Ergens in Eindhoven, bij een lantaarnpaal, bepalen we een nieuwe lichtsterkte. Deze beslissing moet dan zo snel mogelijk worden gecommuniceerd naar alle andere palen, liefst binnen een paar seconden, zodat alle palen vrijwel gelijktijdig sterker of zwakker licht geven. De informatie moet dus, vanuit een punt in het netwerk, in razend tempo als



Figuur 7 TU/e campus, het auditorium en lantaarnpalen.

een draadloze epidemie over het netwerk worden verspreid.

#### *Kritieke fenomenen*

Kritieke netwerken zijn uiterst gevoelig voor toevallige gebeurtenissen, en vandaar dat we met stochastiek deze netwerken trachten te doorgronden. Ik heb nu een aantal voorbeelden gegeven van hoe dat in zijn werk gaat, en tot slot wil ik een drietal kritieke aspecten resumeren.

- De eerste vraag is wanneer het gedrag van een netwerk kritiek wordt. In een aantal gevallen bleek dit het punt te zijn waar de bezettingsgraad 1 nadert, een leidraad die ook helpt bij epidemieën. In veel van de netwerken waar we onderzoek naar doen, is het kritieke punt minder vanzelfspre-

kend en is het opsporen van het kritieke punt een hele opgave. Het is het kookpunt, het punt waarop het netwerk instabiel raakt, of vastloopt, of volledig wordt ingenomen. Het zoeken naar dat kookpunt is in draadloze netwerken lastig vanwege de veranderende locaties en de interferentie, en voor epidemieën is de structuur vreselijk belangrijk.

- Kennen we eenmaal het kritieke punt, dan willen we het gedrag van het netwerk begrijpen wanneer het dit kritieke punt zou naderen. Dat is immers het allesoverheersende scenario. We hebben in de voorbeelden van Erlang en internet gezien dat dit gedrag kan worden beschreven door de functie  $\rho/(1-\rho)$ , een eigenschap die voor netwerken met een duidelijke bottleneck



zeker algemener kan gelden. Andere netwerken vertonen weer ander gedrag en ook dat willen we begrijpen.

- Begrijpen we eenmaal het kritieke gedrag, in de buurt van het kritieke punt, dan kijken we hoe we dat gedrag kunnen verbeteren. Ik heb laten zien hoe de vuistregel  $C = \lambda + \beta\sqrt{\lambda}$  voor bepaalde netwerken tot schaalvoordelen leidt. Andere netwerken vragen weer andere oplossingen.

### Wiskunde in de maatschappij

Ik heb u een kijkje in mijn keuken van de wiskunde gegeven. Door de voorbeelden hoop ik mijn stochastische kijk op netwerken met u gedeeld te hebben. Ik wil nu graag de blik verruimen, en de wiskunde in een breder kader plaatsen van samenwerking en onderwijs.

#### *Fundamenten, toepassingen, samenwerking*

Binnen de wiskundige kaders zoek ik naar de fundamenten van interactie, netwerken en kritiek gedrag. Als wetenschapper krijg ik daartoe alle vrijheid, om zelf de vragen te stellen, en om zelf de agenda te bepalen. Een groot deel van mijn onderzoek is dan ook gericht op abstracte generieke modellen. Maar hoe abstract ook, er is een duidelijke kruisbestuiving met toepassingen. De toepassing motiveert wetenschappelijke vragen, en wetenschappelijke doorbraken vinden wellicht ooit een toepassing. Niemand weet precies wanneer, maar dat is nu juist de charme.

En ik mag me gelukkig prijzen dat er op mijn vakgebied toepassingen te over zijn waaraan de wiskunde, op haar eigen wijze, kan bijdragen. Echter, zodra het echte toepassingen betreft moet de wiskunde dat niet alleen willen doen, maar samenwerken met onderzoekers uit andere vakgebieden en met andere expertises.

Zo'n samenwerking kan op kleine schaal, voor een specifiek onderwerp, tussen individuele onderzoekers. Zo doen we ons onderzoek naar draadloze netwerken voor een gedeelte samen met bedrijven als IBM, Microsoft en Philips, die dichter bij de toepassing staan. De vraag om te kijken naar lichtnetwerken kwam ook van Philips. En soms ontstaat zo'n samenwerking onverwacht. Een voorbeeld hiervan is de recente samenwerking met kwantumfysici van de Faculteit Technische Natuurkunde, waarbij we de lokale algoritmen inzetten om koude gasmoleculen aan te sturen. In dit onderzoek worden de draadloze gebruikers feitelijk vervangen door atomen en is het hele netwerk van atomen

kleiner dan een speldenknop: een fraai staaltje schalen.

Ook initiatieven op grotere schaal zijn nodig, waarbij wiskundigen mede richting geven aan het onderzoek van de toekomst. Zelf ben ik bij twee van dit soort initiatieven betrokken. Het eerste initiatief betreft de plannen om een centrum op het gebied van netwerken op te richten in Nederland, om wetenschappelijke doorbraken te forceren en jonge mensen op te leiden. Onze maatschappij is op een onovertroffen wijze verbonden, met een interactie op een schaal die in de geschiedenis van de mens niet eerder vertoond is. De overweldigende complexiteit van netwerken maakt het doorgronden van netwerkgedrag tot een van de grootste uitdagingen van onze tijd. In de plannen voor het netwerkcentrum slaan verschillende onderzoekers uit de wiskunde, informatica en elektrotechniek de handen ineen. Ik hoop dat ik over tien jaar deze lezing kan teruglezen in de cloud bibliotheek van dat centrum. (Op 18 december 2013 werd bekend dat het initiatief voor een netwerkcentrum onder de naam 'Networks' is gehonoreerd door NWO in het kader van het zogeheten Zwaartekrachtprogramma.)

Het tweede initiatief is concreter en betreft Data Science, een enorm onderzoeksgebied dat voor ons ligt, en waarin ook netwerken een rol spelen. De digitale revolutie heeft geleid tot een explosie van beschikbare data. We kunnen die data gebruiken om netwerkgedrag te verbeteren en om maatschappelijke vraagstukken op te lossen. Als we precies weten wie, waar en wanneer op de weg zit, bijvoorbeeld, waarom zijn er dan nog files? Ook Data Science vereist een multidisciplinaire aanpak, met een grote inbreng van informatica en wiskunde, maar zeker ook van het bedrijfsleven en andere faculteiten hier op de campus. De TU/e opent in december 2013 het Data Science Center, waarin de krachten van experts op de TU/e en in het bedrijfsleven worden gebundeld om baanbrekend onderzoek te kunnen doen.

Theorie en toepassing houden elkaar in balans, maar kunnen elkaar ook verstoren. Zeker in de wiskunde is behoefte aan vrij wetenschappelijk onderzoek, waarin jonge mensen zich kunnen storten op fundamentele vragen, met de belofte iets te bedenken dat nog nooit bij iemand is opgekomen. De vrijheid die ik zelf dus ook geniet. Wiskundig onderzoek is in die zin hoogst onvoorspelbaar, en dat is geen zwakte maar een kracht.

Voor het vrije onderzoek in Nederland zijn het moeilijke tijden. Bij NWO, de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onder-

zoek, krimpt naar eigen zeggen de ruimte voor ongebonden onderzoek, ten faveure van meer toegepast onderzoek. De verantwoordelijkheid voor het waarborgen van vrij onderzoek komt daarmee steeds meer bij universiteiten en de individuele wetenschappers te liggen. En daarvoor moeten we samenwerken. Door zelf deel te nemen aan nieuwe initiatieven, vanaf het begin, kunnen we niet alleen samenwerkingen aangaan, maar ook binnen een groter initiatief de ruimte scheppen voor vrij onderzoek, ongebonden maar wel in een breder kader van een toepassing. Ook dat zijn schaalvoordelen.

De start van het Data Science Center is in dat opzicht beloftevol, met vier promotieplaatsen gefinancierd door de TU/e, vier promotieplaatsen gesponsord door bedrijven, en vier promotieplaatsen gefinancierd door NWO voor volledig vrij onderzoek. Zo vrij zelfs, dat de student zelf het onderwerp en de promotoren mag bepalen. Risicovol, spannend en noodzakelijk.

#### *Wiskunde studeren*

In 2011 sprak ik bij de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Van de ruim 5000 leerlingen die meededen aan de voorronde kwamen op die dag de beste 150 leerlingen naar de finaleronde om zich te kwalificeren voor het Nederlandse team. Tijdens de wedstrijd gaf ik mijn presentatie, niet voor de finalisten, die waren driftig in de weer met sommen, maar voor hun ouders. De meeste ouders keken aanvankelijk wat angstig, maar raakten gaandeweg geboeid, zeker toen ik na wat formules aangaf dat wiskunde ook echt nuttig is, en dat de maatschappij wiskundigen hard nodig heeft. Ik begrijp de ouders ook wel. Je zult maar een kind hebben dat wiskunde leuk vindt, en zelfs overweegt het te gaan studeren. Wat zeg je als ouder tegen zo'n kind? Zijn er geen andere studies, waar je later meer mee kunt? Ik ben geneigd om nee te zeggen. De maatschappij — bedrijfsleven, onderwijs, wetenschap — ontvangt je met open armen.

En toch kennen we in Nederland nu eenmaal een cultuur waarin wiskunde niet stoer is. Velen van ons laten op feestjes geen kans onbenut om te zeggen hoe slecht we wel niet in wiskunde waren. Vreemd, want met onze sportprestaties doen we in de regel het tegenovergestelde.

Het tij lijkt echter wel gekeerd. De laatste jaren gaan steeds meer scholieren wiskunde studeren. In 2006 nog lag de jaarlijkse instroom in Nederland onder de tweehonderd, maar sindsdien is er een duidelijke op-

waartse trend zichtbaar. De instroom is in tien jaar tijd grofweg verdrievoudigd. Wiskunde wordt steeds populairder, ook onze opleiding in Eindhoven.

Deze ontwikkelingen laten zich moeilijk verklaren. Ligt het aan de toegenomen media-aandacht, of betere voorlichting op de middelbare school? Dat zal vast helpen. Maar ik denk dat het vooral een natuurlijke ontwikkeling is. Een kwestie van vraag en aanbod. Uit een onderzoek van Elsevier van de afgelopen zomer bleek dat wiskundigen en economen vrijwel meteen een vaste baan vinden, in de huidige arbeidsmarkt vrij zeldzaam. En ook wel stoer, zou je zeggen.

Maar zie hier de spagaat van de wiskundige. Enerzijds is er het verlangen naar die abstracte wereld, met de uitdagende som en de prachtige formule, en anderzijds is er de roep uit de echte wereld van de toepassing. En toch kan dat samengaan. Als ik kijk naar de Faculteit Wiskunde en Informatica aan de TU/e, dan staan we wetenschappelijk hoog aangeschreven, ook internationaal, maar zijn we tevens ijzersterk in de samenwerking met de hightechindustrie hier in de regio. Zelf wil ik hier niet tussen kiezen, en gelukkig hoeft dat ook niet. Als wij voorlichting geven aan middelbare scholieren kunnen we eerst een prachtige stelling bewij-

zen, dan maatschappelijke relevante toepassingen beschrijven, en op de laatste slide de harde carrièrecijfers tonen. Daarmee zeggen we niets te veel, en kiest een scholier voor onze opleiding, dan kunnen we de drie elementen van de presentatie ook echt waar maken.

U ziet het, ik ben aan het netwerken: ik ben contacten aan het leggen waar ik mijn voordeel mee kan doen. Het voelt enigszins onnatuurlijk, maar ik schaam me er niet voor. De tijd is rijp om wiskunde te gaan studeren, vooral omdat het een prachtig vak is, maar ook omdat de maatschappij hier behoefte aan heeft. Zegt het voort! ←

## Referenties

- 1 S. Halfin en W. Whitt, Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers, *Operations Research* 29 (1981), 567–588.
- 2 A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik* 322(8) (1905), 549–560.
- 3 J.F.C. Kingman, The single server queue in heavy traffic, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 57 (1961), 902–904.
- 4 W. Whitt, *Stochastic-Process Limits*, Springer, New York, 2002.
- 5 O.J. Boxma, *Files van Files, WWW en de wonderlijke wereld van de wachtrij*, Intreerede TU Eindhoven, 2000.
- 6 L. Kleinrock, *Queueing Systems*, Vol. II, Wiley, 1975, Chapter 5.
- 7 W.F. Hermans, *Paranoia*, De Bezige Bij, 1953.
- 8 W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd edition, Wiley, 1971, p. 409.