Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw

REKEN-WISKUNDEONDERWIJS VOOR DE 21E EEUW

Rede
in verkorte vorm uitgesproken bij de
aanvaarding van het ambt van
bijzonder hoogleraar op het vakgebied van
'Domeinspecifieke onderwijstheorieën,
in het bijzonder voor reken-wiskunde'
aan de Universiteit Utrecht
op donderdag 8 maart 2001
door

Koeno P. E. Gravemeijer

Faculteit Sociale Wetenschappen
Faculteit Wiskunde en Informatica

Reken-wiskundeonderwijs voor de 21^{e} eeuw

Waarde toehoorders,

Het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs staat er goed voor, al zijn er natuurlijk altijd verbeteringen mogelijk. Maar dankzij de inspanningen van velen heeft Nederland reken-wiskundeonderwijs dat bij de tijd is. Daarmee onderscheidt Nederland zich van tal van andere landen, waar de inzichten die hier zo'n dertig jaar geleden de basis hebben gelegd voor de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs, pas een jaar of tien opgeld doen. Dit is geen reden om tevreden achterover te gaan leunen. Uiteraard mogen we best tevreden achterom kijken, maar we moeten ook vooruitkijken. Wat vraagt de toekomst?
Er zijn twee zaken die volgens mij van fundamentele betekenis zijn voor het toekomstige reken-wiskundeonderwijs. In de eerste plaats zijn dat de maatschappelijke veranderingen die het gevolg zijn van de snelle groei van de informatietechnologie. In de tweede plaats zijn dat de moderne opvattingen over leren en onderwijzen, die wezenlijke consequenties hebben voor het onderwijs. Deze twee zaken vragen om veranderingen van het reken-wiskundeonderwijs die uiteindelijk door leraren zullen moeten worden vormgegeven.
Daarmee kom ik aan drie thema's, aan de hand waarvan ik het reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw wil bespreken: de maatschappelijke ontwikkelingen; de moderne opvattingen over leren en onderwijzen; en de professionalisering van leraren. Ik wil beginnen met de maatschappelijke ontwikkelingen.

Maatschappelijke ontwikkelingen

Ik hoop u er in dit betoog van te overtuigen dat het toenemend gebruik van computers en rekenmachines niet betekent dat we minder reken-wiskundeonderwijs nodig hebben. Noch dat we met eenvoudige rekenvaardigheid kunnen volstaan. Ik zal proberen te laten zien dat iedereen eerder wiskunde van een hoger niveau nodig zal hebben. Dit betekent dat we de leerlingen daar al binnen de basisschool en de basisvorming mee in aanraking zullen moeten laten komen. De crux zit hem in wat je nodig hebt om adequaat met de nieuwe technologie te kunnen omgaan. Voor ik mij op de toekomst richt wil ik echter laten zien dat het huidige gebruik van computers en rekenmachines al problemen veroorzaakt in de aansluiting tussen het rekenonderwijs van vroeger en de maatschappij van nu.

Ter illustratie neem ik een stukje uit een column in het gratis treinblad Metro (van 25 februari 2000), waarin Pauline de Bok schrijft over haar rekenvaardigheid:

> ‘Vragend kijkt de visboer mij aan: ‘Mevrouw?’ M’n boodschappenbriefje, waar is m’n boodschappenbriefje? Ik graai in mijn zakken, in m’n tas, kijk in m’n portemonnee. Dan maar uit het hoofd. Zeven volwassenen, drie kinderen … eh, in elk pakje zitten twee filets, per volwassene had ik drie halve gedacht, de kinderen ieder … Achter me voel ik nauw verholen ongeduld van een winkel vol wachtenden. Hulpeloos kijk ik de visboer aan. Ik leg hem de feiten voor, hij is even stil en vertelt me wat ik nodig heb. Met meewarige blik. Goed, fluister ik in mijn schaamte. Het was de druk van de andere klanten, zo troost ik mezelf op weg naar huis en ik probeer het sommetje nu in vrijheid eventjes snel te maken. Weer stokt mijn innerlijke telraam.’

Toch heeft Pauline de Bok heel degelijk reken-wiskundeonderwijs genoten. Ze memoreert:

> ‘Op de Mariaschool hebben we uren tafels opgedreund onder het scherpe oor van de nonnen. Jaren heb ik de wiskunde I en II-lessen glansrijk doorstaan. En wat heeft het me opgeleverd? Goed als ik zes maal zeven zeg, denk ik nog steeds tweeënveertig, maar ik

> vertrouw dat antwoord niet meer. Waarom denk ik tweeënveertig? De reeks cijfers die vroeger automatisch ter controle voor mijn geestesoog verscheen, is weggevaagd. Hulpeloos sta ik met die getallen in mijn hoofd en voel me oliedom. Het is mijn eigen schuld, verwijt ik mijzelf. Een luiaard ben ik: ik reken zo min mogelijk. Als mijn computer in de buurt is, rekent hij alles voor mij uit en anders heb ik mijn vriend nog. Op hem schuif ik heel wat sommen af. Ik heb mijn talenten niet benut, ik heb mijn rekenkunsten verkwanseld.'

Pauline de Bok lijkt rekenen te hebben geleerd als een verzameling van losse feitjes, regels en procedures. Waarschijnlijk was er weinig aandacht voor toepassingen, behalve dan in standaard redactiesommen. Dit type rekenonderwijs had zijn nut in een tijd waarin je nog veel met pen en papier moest uitrekenen. Inmiddels heeft de zakrekenmachine veel van dit rekenwerk overgenomen. Mechanische rekenvaardigheid heeft zijn maatschappelijke functionaliteit verloren. Het gevolg is een gebrek aan oefening, en dat leidt weer tot onzekerheid.
In het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs worden de tafels niet meer als losse feitjes geleerd. Tegenwoordig ligt de nadruk juist op samenhang. Zo wordt de leerlingen bij het leren van de tafels van begin af aan gevraagd om onbekende tafelproducten af te leiden uit wat ze al weten.
Bijvoorbeeld door gebruik te maken van herhaald optellen.

> Door een opgave als 4x6 te berekenen via
> 6+6=12,
> 12+6=18,
> 18+6=24.

Of door gebruik te maken van verdubbelen.

> Bijvoorbeeld door voor het berekenen van 8x6 uit te gaan van
> 4x6=24,
> 8x6 is dan het dubbele is 48.

Of door op een andere manier gebruik te maken van een bekend tafelproduct[1].

Met dit onderwijs kan worden bereikt dat de leerlingen tafelproducten die ze niet direct uit het hoofd weten, of waar ze niet zeker van zijn, altijd kunnen reconstrueren.

> Bij 6x7 kun je dan denken aan
> 6x6=36 en
> 6x7 is dus 6 meer, dus
> 6x7=42.
> Of je gaat uit van
> 3x7=21 dus
> 6x7 is het dubbele, dus
> 6x7=42.

De nieuwe aanpak steunt op andere didactische inzichten dan de oude. Het zwaartepunt ligt niet meer op het uit het hoofd leren, het memoriseren. In plaats daarvan ligt het accent nu op het redeneren en het leggen van verbanden. De verandering betreft niet alleen een verandering van werkwijze, maar ook een verandering van doel: er wordt onder meer gemikt op een ander type getalkennis.
Ik denk dan aan getalkennis, waarbij getallen wiskundige objecten zijn geworden. Van Hiele[2] beschrijft dit objectkarakter van getallen door te spreken van getallen als knooppunten in een relatienet. Een simpel voorbeeld van zo'n knooppunt is het getal twaalf, dat een wiskundig object is geworden wanneer de leerlingen dit spontaan associëren met

> 12=10+2,
> 12=2x6,
> 12=3x4, maar ook
> 12=de helft van 24,
> 12=20-8 enz.

Het voordeel van dit soort kennis is dat je deze flexibel kunt inzetten als puzzelstukjes, die je naar believen kunt combineren. Greeno[3] vergelijkt dit type getalkennis met een omgeving waar je goed de weg weet. Een omgeving, waar je tal van herkenningspunten hebt en allerlei handige routes kent. Het aardige van dit beeld is, dat daarmee eveneens wordt uitgedrukt dat de leerling die

dit type getalkennis ontwikkelt, een stukje nieuwe werkelijkheid creëert.
Een relatienet rond vermenigvuldigen zal uiteraard ook relaties met andere bewerkingen, zoals optellen, aftrekken en delen moeten bevatten. Bovendien zal zo'n relatienet zich niet mogen beperken tot de tafels tot tien. De gangbare tafelkennis dient te worden uitgebouwd met wat Treffers de 'grote tafels' noemt: als je 3x7 weet, dan weet je ook 30x7 en 30x70 enz. Daarnaast zullen de leerlingen ook vertrouwd moeten raken met breuken en kommagetallen. Ik denk daarbij bijvoorbeeld aan mooie getallen als 0,25 of ¼.

> Rond 4x0,25=1 kun je zo een mooi netwerkje opbouwen met
> 4x2,5=10,
> 4x25=100,
> 4x250=1000.

Zulke kennis heb je nodig bij het schattend rekenen. Bijvoorbeeld om te bepalen dat 4x247 ongeveer 1000 is. En naar mate het precieze rekenen vaker aan machines wordt overgelaten neemt het belang van het schattend rekenen toe. Al was het alleen maar om de machine globaal te kunnen controleren.

Samenvattend kunnen we zeggen dat de aandacht voor het ontwikkelen van een flexibel netwerk van getalrelaties een belangrijke verworvenheid is van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Maar het gaat uiteindelijk om het kunnen toepassen. En bij toepassen gaat het om meer dan getalrelaties alleen. Het is ook een kwestie van inzicht, en van attitude: hoe benader je een toepassingsprobleem?
Wanneer je bij het visboer-probleem op zoek gaat naar de formele standaardprocedures die hier mogelijk bruikbaar zijn dan wordt het tamelijk lastig. Zeker als je denkt dat de traditionele standaardprocedure eist dat je de betrokken getallen eerst als echte breuken schrijft. Pauline de Bok wilde zeven volwassenen ieder drie halve filets geven. Volgens de traditionele standaardprocedure moet je zeven keer drie halve dan herschrijven als ${}^{7}/_{1}x{}^{3}/_{2}$ en de tellers met

de tellers en de noemers met de noemers vermenigvuldigen. Dat levert $^{21}/_{2}$ op en dat moet je nog 'vereenvoudigen' tot 10½. Dus:

$$^{7}/_{1}x^{3}/_{2} = {}^{21}/_{2} = 10½.$$

Met meer inzichtelijke rekenkennis zou je op het idee kunnen komen 7x1½ te vervangen door 1½x7 en dat is 7+3½=10½. Maar dat is wel een puur rekenkundige oplossing. Het kan ook met een redenering die dichterbij de context blijft. Als één volwassene 1½ filet krijgt, dan heb je voor twee volwassenen 3 filets nodig. Dan kan je gemakkelijk verder redeneren:

1 volwassene:	1½	filet
2 volwassenen:	3	filets
4 volwassenen:	6	filets
6 volwassenen:	9	filets, 7 volwassenen is 1½ meer, dus
7 volwassenen:	10½	filets

Ik heb met dit voorbeeld willen laten zien dat het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs tot meer zekerheid, meer flexibiliteit en een betere toepasbaarheid leidt dan het eraan voorafgaande, mechanistische, rekenonderwijs. Het huidige reken-wiskundeonderwijs past daarmee veel beter bij de maatschappij van nu.

Maar hoe staat het met de toekomst?
Die is dichterbij dan je denkt: de vierjarige leerling die nu de basisschool betreedt is over veertien jaar achttien, we leven dan in het jaar 2015. En als we een onderwijsverandering willen voorbereiden dan zullen we nog verder vooruit moeten kijken. Ik denk dan al gauw aan 2025.

Freudenthal voorspelde in 1976 dat het wiskundeonderwijs zo rond het jaar 2000 of 2010 verdwenen zou zijn[4]. De wiskunde die het toenmalige IOWO - de voorloper van het Freudenthal Instituut - voorstond, was zo verweven met andere vakken, dat Freudenthal verwachtte dat de wiskunde in deze vakken zou worden opgenomen. Wiskunde zou als zelfstandig vak ophouden te bestaan. Behalve misschien als specialisatie voor oudere leerlingen.

Ik hoop niet dat Freudenthal gelijk krijgt. In het mbo is echter wel een tendens te bespeuren in die richting. Nieuwe ontwikkelingen als modulering en meer nadruk op een verbinding met de praktijk na de school, zouden kunnen maken dat wiskunde straks bijna alleen nog maar een kans krijgt in toepassingen. Ik denk dat dit geen goede zaak is. Niet omdat wiskunde in toepassingen niet goed zou zijn, maar omdat de informatiemaatschappij wiskunde vraagt die het niveau van de toepassingen overstijgt.
Freudenthal heeft dit niet voorzien en achteraf is het natuurlijk gemakkelijk om te wijzen op de maatschappelijke consequenties van de snelle opmars van de informatietechnologie. Toch is het goed om er even bij stil te staan hoe snel de ontwikkelingen gaan.

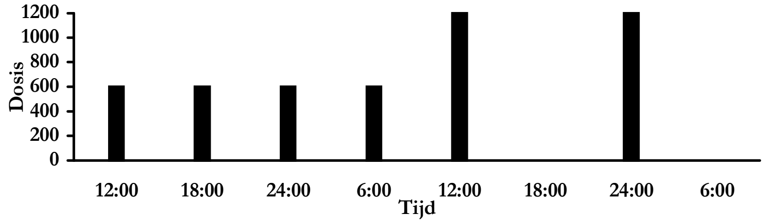
Zo blijkt dat de capaciteit van een modale chip elke 18 maanden verdubbelt. Verder daalt de prijs van een computer waarop je een geavanceerd computeralgebra-programma als Maple kunt draaien elke zes jaar met een factor tien[5].
Het gevolg van deze ontwikkeling is dat zwaardere zakrekenmachines inmiddels computeralgebra-systemen, als Maple of Derive, bevatten die algebraïsche vergelijkingen voor je oplossen en waaraan je integraal- en differentiaalrekening kunt overlaten.

Voor een deel ervaren de meeste van ons de technologische ontwikkeling direct in de dagelijkse levenssfeer en het werk. Niet alleen maken we steeds meer gebruik van computers, we maken ook steeds meer gebruik van apparaten waarin computertechnologie zit verwerkt. Kenelly[6] spreekt in dit verband van een 'black-box world'. We krijgen steeds meer te maken met apparaten waarvan we niet eens globaal weten wat ze doen. Dit maakt het vaak lastig om ermee om te gaan. Kenelly geeft als voorbeeld een vliegtuig-ongeluk dat werd veroorzaakt door een fout bij het intypen van de coördinaten van het vertrekpunt. De computer maakt gebruik van een ingebouwde landkaart die ook hoogtegegevens bevat. De foute coördinaten maakten dat de computer van een verkeerde hoogte uitging, waardoor het vliegtuig met een veel te grote snelheid de grond raakte. Piloten zouden zich moeten realiseren hoe cruciaal de startcoördinaten zijn voor het goed functioneren van de automatische piloot.

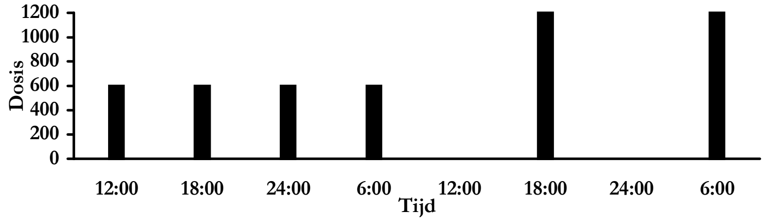
Kenelly pleit voor het ontwikkelen van 'grey-box experience for a black-box world'. Experience moet hier ruim worden opgevat; het gaat ook om de vorming van een conceptueel model van de werking van die black box[7].

Ik wil het belang hiervan aantonen door gebruik te maken van onderzoek van Noss[8], die samen met anderen onderzoek doet naar het gebruik van wiskunde in de alledaagse beroepspraktijk. Hij betoogt dat de belangrijkste wiskundige activiteit in de beroepssfeer bestaat uit het modelleren van complexe situaties. Een van de voorbeelden die hij geeft betreft een probleem waar verpleegkundigen zich voor geplaatst zien wanneer een arts de voorgeschreven dosis van een antibioticum, vancomycine geheten, verandert van 4 x per dag 600 mg naar 2 x per dag 1200 mg. De vraag waar de verpleegkundigen nu voor staan is wanneer met de nieuwe dosering te beginnen. Dit is geen academische kwestie, want te weinig vancomycine in het bloed betekent dat het medicijn zijn werk niet kan doen, terwijl te veel doofheid tot gevolg kan hebben.

Bekend is dat dit medicijn slechts langzaam wordt afgebroken. Hoe lang moet je dan wachten na het toedienen van de laatste lage dosis, voor je die nieuwe, hoge, dosis kunt toedienen? Zes uur (figuur 1), of twaalf uur (figuur 2), of iets er tussenin?



Figuur 1: Snelle start met nieuwe dosering



Figuur 2: Uitgestelde start nieuwe dosering[9]

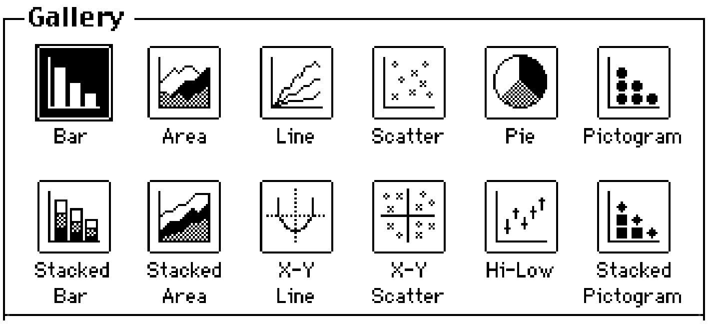
De verpleegkundigen maken bij het oplossen van dit probleem gebruik van een model van de situatie; ze denken in termen van een grafiek die de hoogte van het medicijnniveau in het bloed beschrijft als functie van de tijd. Ze tekenen de grafiek niet daadwerkelijk maar verwijzen ernaar wanneer ze spreken van 'piek' en 'verval'. De piek doet zich voor bij de toediening van een nieuwe dosis, daarna neemt het medicijnniveau af tot de nieuwe dosis wordt toegediend. De tijd die verstrijkt en het tempo waarin het medicijnniveau daalt bepalen samen hoeveel er nog in het bloed zit bij de toediening van de volgende dosis.
De kern is dat de verpleegkundigen niet zomaar een model maken; ze maken een mathematisch model. Ze gebruiken wiskundige middelen als getallen, grafieken, variabelen en functies om hun probleem te modelleren. Voor het modelleren van complexe

situaties heb je reken-wiskundige kennis en inzichten nodig. Dat zal zeker gelden voor de modellen die de basis vormen voor veel black-box-technologie.

Wanneer we dus willen dat toekomstige gebruikers van geavanceerde technologie globaal begrijpen wat die technologie doet, dan zullen deze gebruikers over de noodzakelijke reken-wiskundige bagage moeten beschikken. Een deel daarvan overstijgt het niveau dat nu voor basisschool en basisvorming gebruikelijk is. Maar, we moeten daarbij wel bedenken dat het kunnen begrijpen van een wiskundig model andere kennis vraagt dan het model kunnen doorrekenen. De gebruiker hoeft niet te kunnen wat de computer kan. Het zal gaan om meer globale noties en inzichten. Dit kan betekenen dat dit type kennis binnen het bereik van een grotere groep leerlingen kan worden gebracht. En dat er op jongere leeftijd mee kan worden begonnen.
Overigens kan worden opgemerkt dat hiermee wordt aangesloten op een traditie binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ik denk in dit verband aan de door De Lange, Kindt en anderen ontwikkelde Wiskunde A, waarmee bepaalde wiskunde binnen het bereik van een groter aantal leerlingen is gebracht. Maar ook de realistische aanpak van het rekenen op de basisschool past in die categorie. De cijferalgoritmen zijn immers ook te beschouwen als black-boxes, waarvan de werking voor jonge kinderen inzichtelijk wordt gemaakt. Op een vergelijkbare manier wordt er op de basisschool ook al het nodige gedaan aan het verkennen van grafieken.

Tenslotte kan de computer zelf een rol spelen bij het toegankelijk maken van reken-wiskundige kennis en inzichten. Uiteraard moet daarvoor specifieke didactische software worden ontwikkeld.

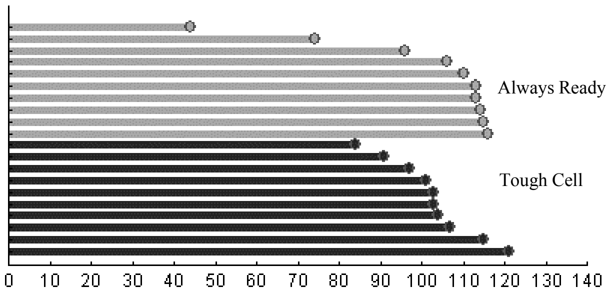
Als voorbeeld kan de didactische software dienen die in het kader van een project aan Vanderbilt University is ontwikkeld ten behoeve van een leergang rond statistiek[10]. Ons doel was dat de leerlingen uiteindelijk met standaard software zouden kunnen werken. Deze standaard software plaatst de leerling echter voor complexe keuzen. Zo kun je bij een programma als ClarisWorks al kiezen uit twaalf manieren om statistische data te representeren (zie figuur 3).



Figuur 3: Verschillende manieren om statistische data te representeren

Op basis van een analyse van de voorwaarden, kwamen we tot de conclusie dat leerlingen een notie moeten hebben van een verdeling van data als een wiskundig object. Om deze notie te ontwikkelen laten we de leerlingen met een aantal simpele computerprogrammaatjes werken. Ik wil deze met u doorlopen en ik hoop dat u gaandeweg duidelijk wordt wat ik met een verdeling als object bedoel. Voor de goede orde wijs ik erop dat er in de volgende voorbeelden steeds sprake is van gefingeerde data.

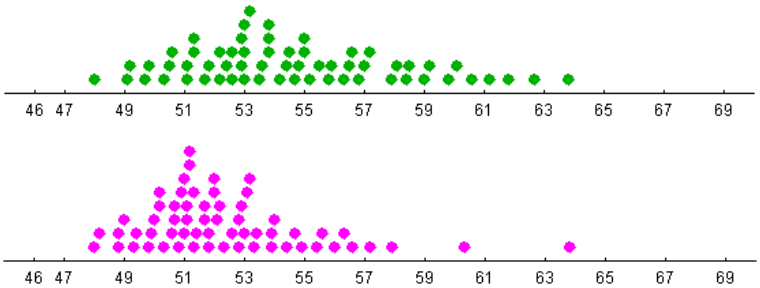
Het eerste programmaatje start met eenvoudige grafieken waarbij elk balkje een meetwaarde voorstelt. In figuur 4 toont elk balkje de levensduur van een geteste batterij.



Figuur 4: Levensduur van geteste batterijen in uren

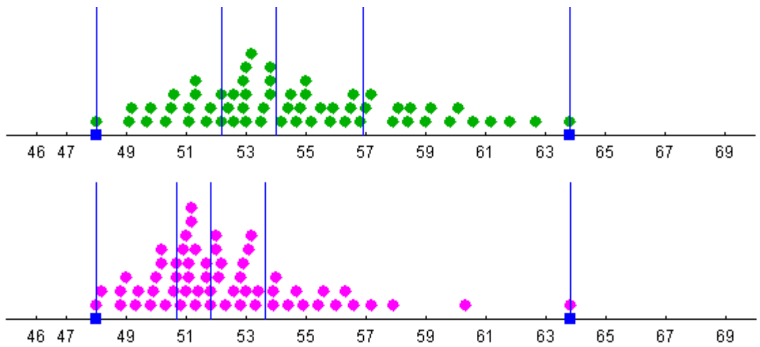
De grafiek bevat twee sets testgegevens, één van het merk 'Always Ready', de bovenste tien, en één van het merk 'Tough Cell', de onderste tien. In de grafiek is te zien, dat één van de Always Ready batterijen (de bovenste) wel een heel korte levensduur heeft.
De leerlingen van de proefklas[11] gebruiken deze grafiek om een vergelijking te kunnen maken tussen batterijen van het merk 'Always Ready' en die van 'Tough Cell'. Bij het vergelijken van de data richten de leerlingen zich op de eindpunten van de staafjes. Dan kun je zien dat de 'Always Ready' set meer batterijen telt met een lange levensduur. Terwijl de set van 'Tough Cell' minder variatie vertoont.
Welk merk je kiest zal volgens de leerlingen afhangen van waar je ze voor gebruikt. Als je één batterij nodig hebt waar je echt op moet kunnen vertrouwen kies je 'Tough Cell'. Wanneer je de batterijen aan de lopende band gebruikt kies je voor 'Always Ready'.

In een volgend programmaatje worden de balkjes weggelaten en zijn de eindpunten als het ware neergedaald op de horizontale as. Daar waar veel data ongeveer dezelfde waarde hebben ontstaat een opeenstapeling, zo wordt zichtbaar hoe de data zijn verdeeld. De grafieken van figuur 5 tonen de snelheden van auto's vóór een actie met snelheidscontroles (de bovenste grafiek) en ná deze acties (de onderste grafiek).



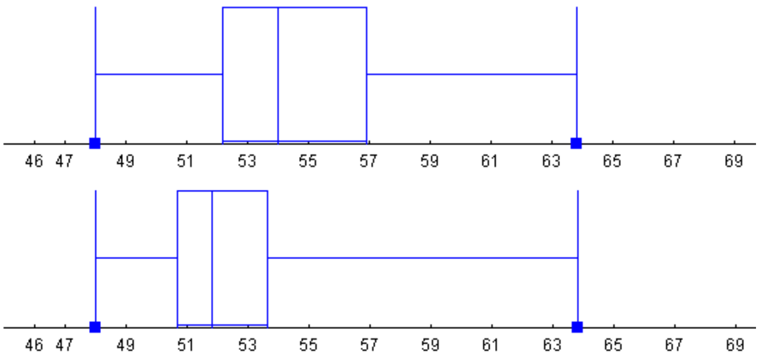
Figuur 5: Snelheden voor en na snelheidscontroles in km/uur

'Je kunt zien dat de actie heeft gewerkt,' merkt één van de leerlingen op, 'want de heuvel is verschoven.' Belangrijk is hier dat de leerling deze conclusie alleen kan trekken wanneer ze zich realiseert wat de vorm van de grafiek betekent. Een verschuiving van de heuvel naar links betekent namelijk dat er verhoudingsgewijs meer automobilisten zijn die met een lagere snelheid rijden.
In een volgende stap wordt de verdeling van de datapunten preciezer beschreven door de datapunten in vier gelijke groepen op te delen zoals in Figuur 6 is gedaan.



Figuur 6: Indeling data in vier gelijke groepen

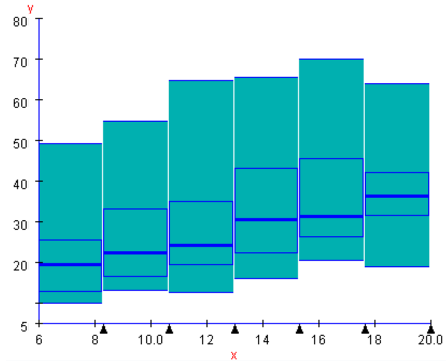
Daar de hoeveelheden datapunten in elke groep gelijk zijn geldt: hoe smaller de groep, hoe dichter de data in die groep bij elkaar liggen. (Hoe dichter de streepjes bij elkaar, hoe voller.) Zo kunnen we de vorm van de verdeling van de data aflezen uit de plaats van de groepsgrenzen.



Figuur 7: Vier gelijke groepen, schematisch

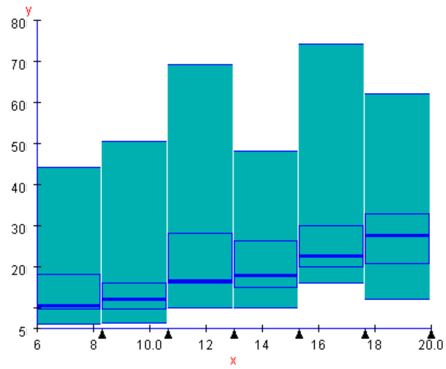
Met enige moeite kunnen we de snelheidsverdelingen uit figuur 5 in figuur 7 herkennen. Daarmee beschikken we over een abstractere beschrijvingswijze, waarmee we een groter aantal verdelingen kunnen beschrijven.

Dit gebruiken we in een derde programmaatje waar de grafieken een kwartslag zijn gedraaid en waar een aantal van zulke grafieken achter elkaar gezet kan worden.



Figuur 8: Salaris (x $1000) en opleiding (jaren) van 50 Amerikaanse mannen

Elke strook in figuur 8 toont één data set. De eerste strook toont hoe de salarissen zijn verdeeld voor mannen die 8 jaar opleiding hebben genoten. De tweede strook toont hoe het zit met mannen met 10 jaar opleiding, enz. Zo kunnen we zien hoe salaris en opleiding samenhangen. Des te hoger de opleiding, des te hoger het salaris, klopt globaal wel maar gaat zeker niet altijd op.



Figuur 9: Salaris (x $1000) en opleiding (jaren) van 50 Amerikaanse vrouwen

Figuur 9 toont een zelfde grafiek voor de salarissen van vrouwen. Wanneer we deze twee grafieken vergelijken zien we dat er wel vrouwen zijn met hoge inkomens, maar de indeling per strook laat zien dat de meeste vrouwen in de lagere inkomenscategorieën zitten. Ongeacht het opleidingsniveau.

Het hier beknopt geschetste leergangetje toont niet alleen hoe didactische software kan worden ingezet voor het ontwikkelen van het type reken-wiskundige kennis en inzichten dat je voor het gebruik van standaard softwarepakketten nodig hebt. Het toont ook de centrale rol die modellen in dit onderwijs kunnen spelen. Ik doel dan op wat je 'zich ontwikkelende modellen' zou kunnen noemen[12]. Modellen die op een natuurlijke manier naar voren komen als een 'model van' een voor de leerlingen betekenisvolle situatie - zoals in de eerste grafiek waarin elk staafje de levensduur van een batterij voorstelt - en zich via een aantal transformaties ontwikkelen tot een 'model voor' wiskundig redeneren. Zo kan de 'heuvel' van de snelheidscontrole zich, samen met de vier-groepen-structuur, ontwikkelen tot een model voor het redeneren over karakteristieken van verdelingen - zoals positie, spreiding en scheefheid.

Laat ik dit stuk over technologie en maatschappij afsluiten. Hoofdpunt is dat de informatisering van de maatschappij ertoe leidt een groter beroep gedaan zal worden op modelleren en redeneren. Met Noss ben ik van mening dat je daar reken- en wiskundige kennis en inzichten voor nodig hebt. Daarbij horen zaken die nu pas in het voorgezet onderwijs worden onderwezen maar die in een andere vorm mogelijk al op de basisschool aan de orde kunnen komen. Zo wordt op initiatief van de helaas veel te vroeg overleden Leen Streefland door Van Amerom onderzoek gedaan naar een vorm van aanvankelijke algebra die op de basisschool start.
Verder kunnen computerprogramma's zoals de zojuist geschetste hier een rol spelen. Maar ook het gewone rekenen behoudt zeker zijn betekenis. Zij het dat het in de toekomst meer zal gaan om structuren en verbanden. Als we de metafoor van Greeno, die getalkennis voorstelt als een omgeving waarin je de weg kent,

doortrekken zouden we kunnen spreken van een helikopterview. Meer specifiek denk ik aan flexibel rekenen dat steunt op een relatienet van ‘mooie getallen’ en semi-informele oplossingsprocedures. Daarnaast verwacht ik, en dat zult u uit mijn voorbeeld al begrepen hebben, dat statistiek steeds belangrijker zal worden voor de geïnformeerde burger. Aan dit laatste zou ik willen toevoegen dat het doel van het reken-wiskundeonderwijs niet alleen economische functionaliteit is; van belang is ook de bagage waarover een lid van de informatiemaatschappij moet beschikken om in de democratische besluitvorming te kunnen participeren.
Echter het is niet mijn bedoeling om hier nu vast te stellen wat de inhoud van het toekomstige onderwijs moet worden. Om dat te doen wil ik een interdisciplinaire groep deskundigen vormen.
Ik kom nu bij mijn tweede thema; moderne opvattingen over leren en onderwijzen.

Moderne opvattingen over leren en onderwijzen

Moderne opvattingen over leren en onderwijzen worden wel samengevat onder de noemer ‘het nieuwe leren’. Dit omvat dan alles wat met de studiehuisgedachte heeft te maken, zoals ‘leren leren’, ‘zelfstandig leren’ en het leren van ‘vaardigheden’, plus zaken als ‘situated cognition’ en ‘constructivisme’. Ik wil het hier over het laatste hebben omdat ik me tot het basisonderwijs en de basisvorming wil beperken. Ik zal bovendien niet apart op de notie van gesitueerde cognitie ingaan, omdat deze mijns inziens door het constructivisme wordt geïmpliceerd.

Constructivisme

Constructivisme is een term die tegenwoordig te pas en te onpas wordt gebruikt. Voor sommigen is het een vlag, voor anderen meer een rode lap. Dit komt onder meer door onduidelijkheden over wat er onder ‘constructivisme’ moet worden verstaan. Maar ik zal hier niet alle mogelijke interpretaties en misinterpretaties gaan bespreken. Ik zal volstaan met te vertellen wat ik eronder wil verstaan. Ik kies mijn startpunt bij Von Glasersfeld[13], aan wie de huidige belangstelling voor het constructivisme voor een groot deel te danken is. Verder richt ik mij op het socio-constructivisme, waarin specifiek aandacht wordt besteed aan de rol van sociale interactie en aan de sociale context waarbinnen kennis wordt geconstrueerd.

Von Glasersfeld, die zich baseert op het werk van Piaget, beschouwt het constructivisme primair als een kentheorie, een theorie over wat kennis is en hoe je kennis verwerft. Het kentheoretische uitgangspunt is dat alle kennis waarover iemand beschikt door de individuele persoon zelf wordt geconstrueerd. De redenering is dat de enige informatie waar we over kunnen beschikken tot ons komt via onze zintuigen. De informatie die zo binnenkomt wordt door onszelf omgevormd tot betekenisvolle kennis.

Kennis is daarom idiosyncratisch, oftewel uniek voor elke persoon. Je zou kunnen zeggen dat iedereen zijn of haar eigen werkelijkheid maakt. De juistheid of geldigheid van dit type kennis kan niet worden vastgesteld door deze kennis te vergelijken met de werkelijkheid buiten onszelf. Omdat we daar geen directe toegang toe hebben. We hebben alleen de informatie die onze zintuigen doorgeven en die wordt, zoals zojuist betoogd, door onszelf geïnterpreteerd, op basis van wat we al weten. Wat dat laatste betekent kan ik met enkele voorbeelden van visuele waarneming illustreren.

Wanneer je bijvoorbeeld een vogel ziet vliegen, denk je niet eerst, ik zie een vlek in de lucht om vervolgens vast te stellen dat het een vogel is. Je ziet meteen een vogel[14]. Verder zijn er tal van zaken die we niet zien omdat we niet weten dat ze er zijn. Da Costa[15] geeft als voorbeeld het verschijnsel bijzonnen. Bijzonnen manifesteren zich als zwakke schijnzonnen links en rechts van de zon. Dit is een verschijnsel dat volgens kenners regelmatig voorkomt maar door gewone stervelingen zelden wordt gezien.

De rol van onze kennis bij de waarneming wordt ook bevestigd door neurologisch onderzoek. Daaruit blijkt dat er bij visuele waarneming niet alleen informatie van de zintuigen naar het geheugen stroomt maar ook in omgekeerde richting. Blijkbaar gebruiken we kennis uit ons geheugen om onze waarneming vorm te geven. Wat we zien wordt bijna letterlijk door onszelf geconstrueerd.

De objectieve werkelijkheid buiten onszelf is volgens Von Glasersfeld dan ook ongeschikt als criterium om onze kennis te toetsen. Deze objectieve werkelijkheid is immers niet direct toegankelijk. Een alternatieve mogelijkheid is om na te gaan of onze kennis in de praktijk voldoet en dat is wat we volgens Von Glasersfeld feitelijk doen. Hij spreekt van 'viability', wat je zou kunnen vertalen met 'bruikbaarheid' of 'houdbaarheid'. Wanneer we ervaringen opdoen die strijdig zijn met onze kennis over de werkelijkheid, dan proberen we onze kennis zo aan te passen dat het weer klopt. En daarbij streven we in het algemeen naar consistentie en samenhang. Dit laatste betekent ook dat de wijze waarop nieuwe informatie wordt geïnterpreteerd sterk wordt beïnvloed door de kennis waarover we al beschikken.

Als voorbeeld kunnen we denken aan hoe leerlingen leren wat vermenigvuldigen inhoudt. Hoewel dat nooit expliciet wordt onderwezen, weten ze na verloop van tijd dat vermenigvuldigen 'groter maakt'. Vermenigvuldigen met twee, drie, vier, enz. levert een uitkomst op die groter is dan het getal waar je mee begon. Op een zelfde manier maakt delen altijd kleiner. Bij het rekenen met kommagetallen kan dan een conflictsituatie ontstaan.
Dat zie je bijvoorbeeld wanneer de leerlingen met de rekenmachine contextopgaven moeten uitrekenen. Bij een opgave als:

> Hoeveel je moet betalen voor 0,385 kilogram kaas die f12,- per kilogram kost?

realiseren de leerlingen zich dat 0,385 kilogram, oftewel 385 gram, minder is dan één kilogram. Het antwoord moet dus kleiner worden. En delen maakt kleiner. Dus denken ze dat ze 12 door

0,385 moeten delen. Dit levert echter een uitkomst die veel hoger is dan 12 gulden.
Zo worden de leerlingen genoodzaakt hun kennis over vermenigvuldigen bij te stellen: 'vermenigvuldigen met getallen groter dan één maakt groter, vermenigvuldigen met getallen kleiner dan één maakt juist kleiner'.
Dit soort bijstellingen vormt een noodzakelijk onderdeel van kennisconstructie, bestaande kennis wordt steeds uitgebreid en aangepast.

Het hierboven geschetste kentheoretische uitgangspunt roept enkele fundamentele vragen op:
(1) Hoe kunnen mensen kennis uitwisselen?
(2) Welke kennis of wiens kennis zou als richtpunt voor het onderwijs moeten dienen?

De eerste vraag wordt beantwoord met 'negotiation of meaning'. Letterlijk zou dit kunnen worden vertaald met, door te 'onderhandelen over betekenis'. Zo letterlijk moet dat niet worden opgevat, er wordt niet bedoeld dat leraar en leerling onderhandelen over de vraag of 1+1 nu 2 dan wel 3 is, en het dan samen 'afmaken' op 2½.
In het Engels wordt het werkwoord to negotiate ook gebruikt in uitdrukkingen als: 'to negotiate a road'. Daarbij wordt dan niet bedoeld dat er over of met een weg wordt onderhandeld, maar dat je ervoor zorgt dat jouw auto op de weg blijft. To negotiate verwijst dan naar het adequaat reageren op hobbels, bochten en dergelijke. Met negotiate wordt uitgedrukt dat er sprake is van een wisselwerking: de bestuurder reageert op de weg en daarmee verandert de situatie en de bestuurder moet weer op deze nieuwe situatie reageren.
Een dergelijke wisselwerking vindt ook in de dagelijkse communicatie plaats. Ervan uitgaande dat de betrokkenen ernaar streven elkaar zo goed mogelijk te begrijpen, zal de spreker alert zijn op signalen waaruit zou kunnen blijken dat de luisteraar hem of haar

niet heeft begrepen. Om het zo nodig nog eens anders te zeggen. Omgekeerd zullen de luisteraars ook proberen uit te vinden of ze het wel goed hebben begrepen.

Socio-constructivistisch onderzoek van traditioneel reken-wiskundeonderwijs[16] heeft laten zien dat dit proces van negotiation of meaning daar heel impliciet blijft. De leerlingen ontwikkelen weliswaar ideeën over wat de meester of juf bedoelt, maar gaan daarover niet in discussie. Ze proberen uit de reacties van de leraar op hun antwoorden af te leiden of ze op het goede spoor zitten. Omgekeerd gebruikt de leraar de reacties van de leerlingen als graadmeter voor de duidelijkheid van de uitleg. Het probleem bij dit type interactie is dat het enige criterium voor een geslaagde communicatie ligt in de juistheid van de antwoorden van de leerlingen. De overgedragen kennis kan daarmee een heel instrumenteel karakter krijgen. Zo van, ‘als er dit staat, dan moet je dat doen’, zonder dat de leerling duidelijk is waarom je dat zou moeten doen. Op deze manier wordt bovendien een basis gelegd voor wiskundeangst. Het feit dat jouw regeltjes het goede antwoord opleveren bewijst namelijk nog niet dat je de goede interpretatie te pakken hebt. Opeens kan blijken dat de regel die je altijd met succes hebt toegepast nu niet meer werkt (zie figuur 10).

34 + 52 = ...	36 + 47 = ...	53 - 27 = ...
3 + 5 = 8	3 + 4 = 7	5 - 2 = 3
4 + 2 = 6 => 86	6 + 7 = 13 => ?	3 - 7 = ?!
	7 +1 = 8 => 83	

Figuur 10: Rekenen met tientallen en eenheden.

Zo kunnen leerlingen hebben uitgevonden dat je getallen van twee cijfers kunt optellen door eerst de tientallen bij elkaar op te tellen en daarna de eenheden. Dit werkt vooral goed als de tussenuitkomsten onder de tien blijven. Dus bijvoorbeeld bij 34+52, dan doe je 3+5=8 en 4+2=6 en het antwoord is dus 86. Dit wordt al lastiger bij

tientaloverschrijding. Bij 36+47 krijg je 3+4=7 en 6+7=13. Om het antwoord goed te krijgen moet je de linker één van 13 optellen bij de 7 van de tientallen. Bij aftrekken gaat het ook goed zolang je niet hoeft te 'lenen'. Maar bij 53-27 ontstaat er al gauw verwarring over de deel-aftrekking 3-7. Veel leerlingen lossen dit op door er 7-3 van te maken, het verschil is immers 4, maar dat levert weer een fout antwoord.
Dit soort problemen kan worden voorkomen met realistisch reken-wiskundeonderwijs, waarin de leerlingen onder leiding van de leraar discussiëren over oplossingsmethoden. Daarmee wordt het belang van het antwoord op de eerste vraag, hoe we kennis uitwisselen, nog eens aangegeven. Kennisuitwisseling vindt plaats op basis van sociale interactie, maar het maakt nogal wat uit wat de aard van die interactie is.

De tweede vraag was: welke kennis of wiens kennis zou als richtpunt voor het onderwijs moeten dienen? Immers, als we allemaal onze eigen kennis construeren en we de werkelijkheid buiten ons zelf niet als absolute maatstaf kunnen gebruiken, wat hebben we dan nog voor een houvast? Dit lijkt te leiden tot een soort 'anything goes'; je bepaalt immers zelf wat waar is.
Socio-constructivisten als Cobb lossen dit probleem op door voort te borduren op de idee van 'negotiation of meaning'. Door met elkaar in gesprek te gaan ontstaat gedeelde kennis. De objectieve maatstaf van de werkelijkheid buiten onszelf wordt vervangen door intersubjectiviteit. Samen bepaal je welke kennis je voor waar houdt. Voor wetenschappelijke kennis geldt bovendien dat deze wordt voortgebracht door het volgen van procedures die hun waarde binnen het desbetreffende wetenschapsgebied hebben bewezen. Als richtpunt voor het reken-wiskundeonderwijs wordt daarom gekozen voor algemeen geaccepteerde kennis, inzichten en procedures[17].

Mooi, zult u misschien zeggen, maar wat betekent dit nu concreet voor het onderwijs?
De belangrijkste betekenis van het constructivisme is volgens mij dat het ons helder laat zien dat leerlingen de werkelijkheid anders zien dan mensen met meer kennis en dat dezelfde woorden en procedures andere betekenissen kunnen hebben. We zullen dus steeds moeten proberen te kijken door de ogen van de leerling. En rekening houden met zijn of haar voorkennis en referentiekader.

Verder richt het constructivisme de aandacht op de vraag wàt is het dat de leerling construeert. En is datgene wat de leerling construeert wel wiskunde, althans, wat wij daaronder willen verstaan?
Met Freudenthal, zien we wiskunde binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs primair als een activiteit met als centraal element, de activiteit van het mathematiseren; het wiskundig organiseren van de werkelijkheid, of van de wiskunde zelf. Door Treffers respectievelijk horizontaal en verticaal mathematiseren genoemd. Horizontaal mathematiseren verwijst hierbij naar het zodanig bewerken van een contextprobleem dat het voor een wiskundige aanpak toegankelijk wordt. Terwijl het verticaal mathematiseren zich richt op het op een hoger niveau brengen van de wiskundige activiteit als zodanig[18].
Het basisidee van het realistisch reken-wiskundeonderwijs is dat een combinatie van horizontaal en verticaal mathematiseren de leerlingen in de gelegenheid stelt reken-wiskundige kennis en inzichten uit te vinden. Daarmee hoop je te bereiken dat de leerlingen wiskunde construeren waarvan ze zelf de juistheid kunnen overzien. Zodat ze daarvoor niet hoeven te leunen op de autoriteit van de leraar of het leerboek.
Dit laatste is voor mij ook een belangrijk motief om me voor de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs in te zetten. Bij rekenen en wiskunde gaat het om meer dan functionaliteit alleen, het gaat ook om persoonlijke vorming. Ik verzet me tegen het idee dat kinderen worden getraind om kritiekloos na te zeggen wat ze op

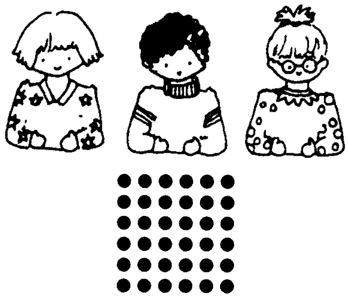
school hebben geleerd - zoals bij Pauline de Bok schijnbaar het geval was. Zeker voor reken-wiskundeonderwijs zou toch moeten gelden dat de leerling zelf moet kunnen beoordelen wat juist is en wat niet.

Zijn we daarmee weer terug bij ‘anything goes’?
Neen, zeker niet! Het gaat immers over wiskunde, en wat wiskunde is, welke argumenten daar gelden en hoe je bepaalt, wat waar is en wat niet, ligt vast. De wiskunde heeft haar eigen regels en daar moet je je wel aan houden. En nu mag iemand best een andere manier van redeneren aanhangen, maar dan noemen wij dat geen wiskunde.
In die zin staat de autoriteit van de leraar dus niet ter discussie. De leraar is de gene die weet wat wiskunde is en hoe je wiskunde bedrijft. Het is zijn of haar taak de leerlingen daarmee vertrouwd te maken. Verder komt de leidende rol van de leraar tot uitdrukking in de keuze van de opgaven, het aansturen van de discussie en het introduceren van conventies.

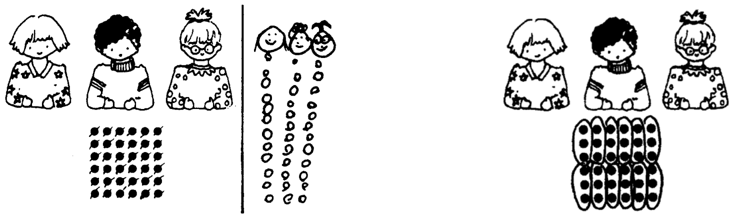
Analyses van de onderwijsleerprocessen in traditionele klassen hebben laten zien hoe snel alle mogelijke misverstanden ontstaan. Bovendien blijken deze misverstanden vaak onopgemerkt en hardnekkig. Het kernprobleem is namelijk dat leraren en leerlingen vanuit verschillende referentiekaders werken. Dezelfde woorden en overeenkomstige activiteiten hebben voor beide partijen verschillende betekenissen.
Zo kan het gebeuren dat de leerlingen bij de zojuist geschetste oplossingsstrategie voor 34+52 bij ‘tientallen’ alleen denken aan het linker cijfer van een getal (dus respectievelijk de 3 en de 5). Terwijl de docent bij een tiental denkt aan een eenheid die zelf weer bestaat uit tien kleinere eenheden.

Dergelijke misverstanden gedijen vooral in klassieke onderwijssituaties waarin sprake is van eenrichtingverkeer, met aan de ene

kant een docent die kennis overdraagt en aan de andere kant leerlingen die kennis opnemen en reproduceren. Dan lijkt het al gauw of de leerlingen, die de door de leraar gebruikte termen overnemen, daar ook hetzelfde onder verstaan.
Dit zal niet zo gauw gebeuren in onderwijssituaties, waarin meer ruimte is voor een eigen inbreng van de leerlingen. Daar wordt sneller zichtbaar in hoeverre de ideeën van de leerlingen overeenstemmen met wat de leraar beoogt. Interessant zijn in dit verband experimentjes waarin de leerlingen gevraagd wordt opgaven op te lossen waarvoor ze (nog) geen standaardprocedure voor handen hebben, of deze niet direct herkennen. Zo leidde de opgave 'Verdeel 36 snoepjes onder drie kinderen' (zie figuur 11), die werd voorgelegd aan leerlingen van groep vijf, tot antwoorden die varieerden van eerlijk delen via 'ik één, jij één', tot het maken van groepjes van drie (zie figuur 12 a&b)[19].



Figuur 11: Drie kinderen verdelen 36 snoepjes: hoeveel krijgt ieder?



Figuur 12 a&b: Oplossingen, (a) 'ik één,jij één', (b) groepjes van drie.

Daarmee is ook aangegeven hoe met het gevaar van miscommunicatie kan worden omgegaan: door de leerlingen ruimte te geven voor eigen inbreng wordt zichtbaar wat de leerlingen denken.
In die zin sluiten het constructivisme en het realistisch rekenen goed op elkaar aan. In het realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt ernaar gestreefd de leerlingen te begeleiden bij het heruitvinden van wiskunde. De eigen kennis en de eigen inbreng van de leerlingen vormen daarbij het vertrekpunt. Door in het realistisch reken-wiskundeonderwijs de eigen inbreng van de leerlingen te stimuleren en daarop voort te bouwen kan tegelijkertijd tegemoet worden gekomen aan het door constructivistische analyses gesignaleerde communicatieprobleem.
Uiteraard is dit allemaal gemakkelijker gezegd dan gedaan. De leraar moet deze mooie ideeën wel in de klas vormgeven.
Daarmee kom ik bij het derde thema van mijn voordracht, de professionalisering van leraren.

De professionalisering van leraren

De vernieuwing van de praktijk van het reken-wiskundeonderwijs is in Nederland vooral totstandgekomen doordat de leraren nieuwe schoolboeken zijn gaan gebruiken. Voor hun kennis over nieuwe doelen en werkwijzen zijn de leraren aangewezen op de handleidingen bij de nieuwe methoden. Maar het lezen van teksten is niet de manier om je nieuwe onderwijsvaardigheden eigen te maken.

Uiteraard is ook het opleidingsonderwijs veranderd, maar daar hebben alleen de jongere leraren wat van meegekregen. Bovendien is de positie van de vakdidactiek binnen de opleiding lelijk in het gedrang gekomen, waarmee die invloed ook is ingeperkt[20]. Landelijke nascholing heeft er nooit plaatsgevonden, hoewel er met de nationale cursus rekencoördinator wel stappen in die richting worden gezet.
Het hoeft ons dan ook niet te verbazen dat het zojuist beschreven open, realistisch reken-wiskundeonderwijs nog geen gemeengoed is in de dagelijkse onderwijspraktijk. Bovendien moeten we de complexiteit van dit nieuwe onderwijs niet onderschatten.

Het nieuwe leren veronderstelt een andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen dan het traditionele rekenonderwijs. In het traditionele rekenonderwijs was het de taak van de leerlingen uit te vinden wat de leraar in zijn of haar hoofd had. In het nieuwe onderwijs moet de leraar proberen om erachter te komen wat de leerlingen denken. Bovendien moet de leraar dit denken van de leerlingen stimuleren en sturen. Daarmee is de taak van de leraar veel complexer geworden. Het is nu immers niet meer de leraar die onderwijst maar de leerling die uitvindt. En hoe zorg je ervoor dat de leerlingen uitvinden wat je wilt dat ze uitvinden?
Of, om Ball te parafraseren: 'hoe kun je recht doen aan de eigen inbreng en eigen ideeën van de leerlingen en ze tegelijkertijd vertrouwd maken met de wiskunde die door anderen is uitgevonden?'[21]
Bij de beantwoording van deze uitdaging kan de Nederlandse leraar steunen op de eerder genoemde realistische schoolboeken. Decennia van ontwikkelingsonderzoek in en rond het Freudenthal Instituut hebben ertoe geleid dat we nu beschikken over uitgebalanceerde leergangen die geleid heruitvinden mogelijk maken. De goed functionerende netwerken binnen de 'rekenkring' hebben ervoor gezorgd dat deze leergangen concreet zijn uitgewerkt

in moderne reken-wiskundemethoden die ook breed zijn ingevoerd in het basisonderwijs.
Maar het is wel de leraar die dit in de praktijk concreet moet invullen. Die moet proberen aan te sluiten bij de actuele kennis en ideeën van de leerlingen. En die moet bedenken hoe de leerlingen individueel en als groep te helpen deze kennis verder uit te bouwen. Voorwaar geen eenvoudige opdracht.

Het zal duidelijk zijn dat leraren tijd nodig zullen hebben om dit nieuwe reken-wiskundeonderwijs onder de knie te krijgen. En dat kan alleen maar door te experimenteren met het eigen onderwijs. De eigen onderwijspraktijk is mijns inziens de beste leersituatie. Ik denk dan aan een proces van experimenteren, reflecteren en discussiëren. Met 'discussiëren' doel ik op het feit dat leraren niet ieder voor zich het wiel moeten gaan uitvinden. Leraren kunnen van en met elkaar leren en externe deskundigen kunnen zo'n leerproces ondersteunen[22].
Hier kunnen we ons een zelfde rolverdeling tussen de externe deskundigen en de leraren voorstellen als die in het beoogde reken-wiskundeonderwijs bestaat tussen de leraar en de leerlingen. Wat betekent dat de eigen inbreng en het eigen oordeel van de leraren voorop staat, maar er toch een gidsrol voor de deskundige is weggelegd. Een belangrijk verschil met het 'gewone' onderwijs is echter dat er tussen leraren en deskundigen veel meer op voet van gelijkheid zal worden 'onderhandeld', om die term nog maar eens te gebruiken.
Het Freudenthal Instituut probeert dergelijke processen te faciliteren in het Rekennet-project. Niet alleen door geïnteresseerde leraren bij elkaar te brengen maar ook door het creëren van een virtuele ontmoetingsplaats op internet.

Dat vakdidactici, zoals ikzelf, een bepaald soort onderwijs voor ogen hebben, betekent niet dat de leraren uiteindelijk aan dit ideaal moeten gaan voldoen. Een open samenwerking veronderstelt immers dat deze ideaalbeelden ook ter discussie staan en aan de praktijk worden getoetst. Er zal daarom veel meer gedacht moeten worden in termen van ‘gap closing’, waarbij praktijk en idealen bij elkaar komen in een proces van wederzijdse aanpassing. Aan de ene kant betreft dit een proces waarbij het gat tussen praktijk en idealen wordt gedicht doordat de leraren steeds verder toe groeien naar ideaaltypisch realistisch reken-wiskundeonderwijs. Aan de andere kant betreft dit een proces van aanpassing van het ideaalbeeld onder invloed van uitwisseling van ervaringen en ideeën.

De externe deskundigen komen dan voor de taak te staan de theorie over voortbouwen op eigen inbreng van de leerlingen verder uit te bouwen. Hoe realiseer je dat in de praktijk, wat is er reëel mogelijk? Wat zijn de belemmeringen en wat kun je daaraan doen? Van leraren zal worden gevraagd dat ze zich hun praktijktheorieën bewustmaken en daarop reflecteren. Wat wil je met je onderwijs, wat zijn de doelen, wat vind je echt belangrijk? Wat doe je om dat te bereiken? Waarom denk je dat dat werkt?

Externe deskundigen kunnen het experimenteren en reflecteren bovendien ondersteunen door beschikbare wetenschappelijke kennis in te brengen. Ik denk hier bijvoorbeeld aan onderzoek van Desforges & Cockburn[23]. Zij verrichtten klassenobservaties bij leraren die aangaven probleemgeoriënteerd te willen werken. Uit die observaties bleek dat deze leraren geconfronteerd werden met leerlingen die verandering in een meer probleemgeoriënteerde richting tegenwerkten. Ze bleven vragen wat ze moesten doen, wilden steeds aanwijzingen, meer voordoen. Leraren met zulke ervaringen zullen van mening zijn dat probleemgeoriënteerd onderwijs met hun leerlingen niet mogelijk is. En de praktijk geeft hen daarin ook gelijk.
Maar vanuit een wetenschappelijk perspectief valt te verdedigen dat er vermoedelijk een onderliggende oorzaak is die te maken heeft met de rolpatronen die in de loop der tijd zijn ontstaan. De

leerlingen zijn gewend dat de docent uitlegt en voordoet. En dat hun werk wordt beoordeeld op de mate van overeenstemming met wat de docent heeft uitgelegd en voorgedaan. Daardoor hebben ze zich een beeld gevormd van wat hun rol is en die van de docent, van wat er van hen wordt verwacht en van wat ze van de docent mogen verwachten. In de literatuur spreekt men in dit verband wel van een 'didactisch contract'[24]. Dit zogeheten contract is doorgaans niet gebaseerd op expliciete afspraken die leraar en leerlingen met elkaar hebben gemaakt, maar op basis van ervaring.
Aspecten van zo'n contract worden zichtbaar als we een gangbare schoolse dialoog vergelijken met alledaagse communicatie buiten de school.

In de klas is een normaal lespatroon dat van vraag, antwoord en evaluatie. De leraar stelt een vraag, de leerling antwoordt en de leraar stelt vast of het antwoord goed is. Hoe typisch deze gesprekvorm is blijkt wanneer we ons voorstellen dat we dat buiten de school zouden doen. Stelt u zich de volgende dialoog voor:

A.:	Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwarsstraat is?
B.:	De Kerkdwarsstraat, dan moet u recht doorgaan tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.
A.:	Oké: Rechtdoor tot de tweede stoplichten, en daar naar rechts. En dan de eerste links. Goed zo, andere vraag: Kunt u nu ook vertellen waar de Middenweg is?

Op basis van informatie over het verschijnsel 'didactisch contract' zou een docent kunnen gaan experimenteren met het veranderen van de rollen en verwachtingen.

Uiteraard speelt de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van de leraar een belangrijke rol. Zo zal de mate waarin de leerlingen probleemgeoriënteerd willen werken niet alleen afhangen van het didactisch contract, maar ook van het probleem dat de leraar de leerlingen voorlegt. Het probleem moet zodanig van aard zijn dat het de leerlingen motiveert. Ik denk dat het dan gaat om de juiste mix van het creëren van een uitdaging en van een gevoel van: 'hier kom ik wel uit.' Vervolgens is het essentieel dat de leraar op de oplossingen van de leerlingen kan voortbouwen. Dit vergt een behoorlijke dosis vakdidactische kennis, inclusief zicht op leerlijnen en onderwijsactiviteiten. Via de nationale cursus reken-coördinator wordt thans geprobeerd rekencoördinatoren op te leiden die de collega's van de eigen school op dit punt kunnen ondersteunen.

Aanleiding om de professionalisering van leraren aan de orde te stellen was de complexiteit van realistisch reken-wiskunde-onderwijs dat rekening houdt met het individuele karakter van kennisconstructie. Maar er is nog een andere overweging en die betreft de in het begin van dit betoog genoemde tempo van de veranderingen in technologie en maatschappij.

De maatschappij verandert en dus zal het onderwijs moeten veranderen. De maatschappij verandert steeds sneller en het gevolg zal zijn dat verandering een permanent kenmerk van het onderwijs wordt. Dit heeft consequenties voor de professionaliteit van leraren. Waar de leraar in een grijs verleden tijdens zijn of haar studie genoeg leerde om zijn of haar hele loopbaan mee toe te kunnen, zal de leraar van de toekomst zich steeds nieuwe vaardigheden eigen moeten maken. Dit plaatst ook de professionaliteitsontwikkeling in een ander perspectief. De gangbare separate nascholingsactiviteiten zullen moeten worden vervangen door nascholing als een continu proces. Ik spreek in dit verband overigens liever van professionalisering dan van nascholing. Niet omdat het mooier klinkt maar om dat je het centrum van de activiteit daarmee bij de leraar legt. Niet 'de leraar wordt nageschoold', maar 'de leraar werkt aan zijn of haar professionalisering'. Het werken aan de eigen professionaliteit zou mijns inziens ook een onderdeel van de beroepsidentiteit van de leraar moeten zijn. Leraren moeten daarvoor dan ook de ruimte en de middelen krijgen. Dit is ook een concept waar de NVORWO zich voor inzet. En het verheugt me te kunnen zeggen dat de staatsecretaris, mevrouw Adelmund, positief op NVORWO-ideeën in deze richting heeft gereageerd.

Besluit

Terugblikkend op mijn betoog over 'reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw', zie ik drie ontwikkelingen.

(1) De technologische ontwikkeling van onze maatschappij, die nieuw, daarbij passend reken-wiskundeonderwijs nodig maakt - voor alle leerlingen. Dat betekent dat dit nieuwe onderwijs met name in de basisschool en de basisvorming zijn beslag zal moeten krijgen.

(2) De moderne inzichten in kennisconstructie en reken-wiskunde-didactiek vragen om onderwijs dat een centrale plaats inruimt voor de eigen inbreng van de leerlingen en voor interactie tussen leraar en leerlingen en tussen leerlingen onderling.

(3) Deze twee ontwikkelingen komen samen bij de leraar die uiteindelijk het onderwijs in de klas zal moeten vormgeven. Ook die zal zich moeten ontwikkelen. De leraar van de 21e eeuw zal nooit zijn uitgeleerd. Dit betekent mijns inziens dat het werken aan de eigen professionaliteit een structurele plaats moet krijgen in de taak van de leraar. Bijvoorkeur ingebed in een structuur, waarin de leraar met het eigen onderwijs experimenteert en kennis en ervaringen uitwisselt met collega's en andere deskundigen.

Geachte aanwezigen,

Tot slot wil ik nog enkele persoonlijke woorden tot u richten. Allereerst gaat mijn dank uit naar het bestuur van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs, de

NVORWO die voor mijn benoeming verantwoordelijk is. Verder bedank ik allen die zich ervoor hebben ingezet dat de leerstoel van de NVORWO weer zou worden bezet.

Voor mij is het allemaal begonnen toen ik als aankomend PA-leraar betrokken raakte bij de door Wiskobas in gang gezette vernieuwing. Als lid van de PA-responsgroep van Fred Goffree en Huub Janssen. En via de kadervormingbijeenkomsten bij de heroriënteringscursussen die Adri Treffers en Ed de Moor organiseerden. Daarna kreeg ik de kans hun vernieuwingsideeën handen en voeten te geven met de ontwikkeling van de methode Rekenen & Wiskunde binnen het project Onderwijs en Sociaal Milieu. Aan die tijd bewaar ik mijn beste herinneringen, dankzij de vriendenclub met wie ik dat werk heb mogen doen.
Hierop volgde de overgang naar, het door Jan de Lange geleide, Freudenthal Instituut dat me blijvend inspireert met zijn fascinerende combinatie van onderwijsontwikkeling en ontwikkelingsonderzoek en het enthousiasme van de collega's en vrienden die daar werken.
De afgelopen tien jaar is de samenwerking met Paul Cobb en zijn collega's daar bij gekomen, met de daarbijbehorende mogelijkheden tot theoretische verdieping.
Het doet mij genoegen nu in de gelegenheid te worden gesteld de samenwerking die in de afgelopen jaren met de vakgroep Onderwijskunde en in het bijzonder met Gellof Kanselaar, gestalte heeft gekregen in verschillende onderzoeksprojecten, verder te kunnen verdiepen.
Graag wil ik alle genoemde en ongenoemde bedanken voor hun steun en inspiratie en de hoop uitspreken op een plezierige samenwerking in de toekomst.

Last but not least bedank ik mijn gezin voor al die dingen die niets met mijn benoeming te maken hebben en daarom juist toch weer alles.

Ik wil afsluiten door terug te keren naar het reken-wiskunde-onderwijs voor de 21e eeuw. Om met Marten Toonder te spreken, zou ik willen zeggen:

‘Hier ligt een mooie taak.’

Ik heb gezegd.

Noten en literatuur

1. Zie Ter Heege (1985) voor een overzicht van de oplossingsstrategieën die de leerlingen spontaan gebruiken. Heege, H. ter (1985), The Acquisition of Basic Multiplication Skills, *Educational Studies in Mathematics, 16* (4), 375-388.
2. Hiele, P.M. van (1973), *Begrip en Inzicht,* Purmerend: Muusses.
3. Greeno, J.G. (1991), Number sense as situated knowing in a conceptional domain, *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 170-218.
4. Freudenthal, H. (1976), Wiskundeonderwijs anno 2000, *Euclides, 52,* 290-295.
5. Kenelly, J. (2000), 'When machines do mathematics, what do mathematics teachers do?' paper gepresenteerd op de ICME-9 te Tokyo.
6. Zie noot 5.
7. Binnen het wiskundeonderwijs zelf zien we iets dergelijks bij het gebruik van grafische rekenmachines en computeralgebra. Hier blijkt, dat schijnbaar eenvoudige gebruiksvoorschriften toch vereisen dat de leerling over een conceptueel, wiskundig model beschikt (zie Drijvers, P. en Van Herwaarden, O. (2000), Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment, *International Journal of Computeralgebra in Mathematics Education 7* (4), 255 - 275.).
8. Noss, R. (1997), *New cultures, new numeracies,* London: Institute of Education, University of London (Inaugural Professorial Lecture).
9. Figuren ontleend aan Noss (1997).
10. Een door de National Science Foundation en het Office for Educational Research and Improvement gesubsidieerd onderzoeksproject onder leiding van Paul Cobb, Kay McClain, Cliff Konold en Koeno Gravemeijer. Op dit moment wordt door A. Bakker vervolgonderzoek gedaan in het kader van het PROO-aandachtsgebied 'Wiskunde en ICT'.
11. Deze computerprogrammaatjes zijn gebruikt in een onderwijsexperiment in de 7th en 8th grade van een Amerikaanse middle school
12. Zie Gravemeijer, K. (1999), How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning, 1* (2), 155-177.

13. Glasersfeld, E. von (1995), *Radical constructivism: A way of knowing and learning,* Bristol, PA: The Falmer Press.
14. Voorbeeld ontleend aan Boonman, J. H. & Kok, W. A. M. (1982), Het verwerven van kennis, *Losbladig Onderwijskundig Lexicon,* PO-4240, Alphen a/d Rijn, Samson.
15. Voorbeeld ontleend aan Luciano da F. Costa: 'Vision Reviewed', een review van het boek 'The Object Stares Back: On the Nature of Seeing van James Elkins' in de Scientific American van maart 1997 (pp 124-125).
16. Cobb, P. (1991), Reconstructing elementary school mathematics, *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13* (2) 3-22.
17. Cobb, P., E. Yackel and T. Wood (1992), A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (1), 2-33.
18. Treffers, A. (1987), *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project,* Dordrecht: Reidel.
19. Galen, F. van (red), Gravemeijer, K.P.E., Kraemer, J.M., Meeuwisse, A.P.J. & Vermeulen, W.M.M.J. (1985), *Rekenen in een tweede taal,* Enschede: SLO.
20. Hier werd onlangs weer de aandacht op gevestigd in een artikel in de 'Trouw' van 16 februari 2001, onder de titel 'meer uren taal en rekenen op de pabo's' (door E. Hageman en P-K. Jager).
21. Ball, D. (1993), With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics, *Elementary School Journal, 93*, 373-397.
22. Een dergelijke opzet sluit ook nauw aan bij de huidige algemeen-onderwijskundige opvattingen over nascholing en professionalisering. Ook daar pleit men voor observatie en reflectie op de eigen en andermans lespraktijk en het gezamenlijk zoeken naar andere vormen van instructie (zie bijvoorbeeld het interview van M. Notenbomer met Berger en Derksen in Didactief en School jrg. 30, nr. 7, 2000). Dankzij de TIMSS-studies weten we dat zo'n systeem in Japan allang bestaat. En, dat de leraren daar, een belangrijk deel van hun professionele identiteit ontlenen aan het uitwisselen van ervaringen met experimentele lessen, zie Lewis, Ch. (2000), Lesson study: *The core of Japanese professional development,* paper gepresenteerd tijdens de AERA conferentie in New Orleans.
23. Desforges, Ch. and A. Cockburn (1987), *Understanding the Mathematics Teacher, A Study of Practice in First School,* London: The Falmer Press.
24. Brousseau, G. (1990), Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique de Mathématiques, 9* (3), 308-336. Zie ook: Elbers, E. (1988), *Social context and the child's construction of knowledge,* Utrecht (dissertatie).