

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Estudo dos Efeitos do Espaço-Tempo Não Comutativo no Buraco Negro de Schwarzschild

Rodrigo Fraga da Silva

Porto Alegre  
2023

Rodrigo Fraga da Silva

# Estudo de Efeito do Espaço-Tempo Não Comutativo no Buraco Negro de Schwarzschild

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da UFRGS como parte do requisito para obtenção do Grau de Bacharel em Astrofísica.

Orientador: Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef

Porto Alegre  
2023

# Resumo

Nesse trabalho, foi feito um estudo sobre a não-comutatividade do espaço-tempo aplicada ao buraco negro de Schwarzschild. Essa teoria supõe que o espaço-tempo possui uma dimensão mínima na ordem do comprimento de Planck. Uma consequência direta na Mecânica Quântica é a troca do produto entre duas funções por um produto Moyal que mantém o isomorfismo, mas traz problemas ao tentar expandir os termos desse produto, de forma que a adoção de estados coerentes se torna uma ferramenta conveniente para ser utilizada dentro do estudo de buracos negros, uma vez que podemos substituir uma massa pontual por uma distribuição gaussiana, resolvendo o problema da singularidade a partir dos valores de posição média.

Essa distribuição gaussiana, aplicada ao buraco negro de Schwarzschild, traz outras consequências como limites mínimos de massa e raio de horizonte de eventos necessários para a formação de um buraco negro, assim como um valor máximo de temperatura Hawking durante sua evaporação. Tais consequências não trazem inconsistências para o modelo já conhecido, pois é desprezível no nível macroscópico.

**Palavras-chave:** Espaço-tempo, Não-comutatividade, Buraco Negro de Schwarzschild, Relatividade Geral.

# Abstract

In this work, a study was done about the space-time non-commutativity applied in the Schwarzschild black hole. This theory supposes a space-time with a minimal length in the Planck's length order. A straight consequence in Quantum Mechanics is the exchange of two function product by a Moyal product, that keeps the isomorphism but brings problems when try to expand terms of this product in a way that coherent states become a convenient tool to be used in the study of black holes, since we can replace a pontual mass for a gaussian distribuction, resolving the singularity problem starting from mean values positions.

This gaussian distribuction, aplied to Schwarzschild black hole, brings others consequences, like minimum limit to massa and horizon event radius necessary to a black hole formation, as a Hawking temperature maximum value during its evaporation. Such consequences do not bring inconsistencies to the already known model, because is negligible in the macroscopic level.

**Key words:** Space-time, Non-commutativity, Schwarzschild Black Hole, General Relativity.

# Agradecimentos

Agradeço à minha companheira Gabrielle, por todo apoio e suporte dado durante esta nova jornada que foi o bacharelado em astrofísica.

Agradeço ao professor Dimiter, por aceitar ser meu orientador e sugerir um tema tão fascinante que é esse que está sendo trabalhado.

*"Ao nos ocuparmos da emergência de novas teorias, inevitavelmente ampliaremos nossa compreensão da natureza das descobertas".*

---

Thomas S. Kuhn

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Uma Revisão da Relatividade Geral</b>	<b>9</b>
2.1	Conceitos Iniciais . . . . .	9
2.1.1	Princípio da Equivalência . . . . .	9
2.1.2	Equação de Poisson . . . . .	11
2.2	Tensores do Espaço-Tempo . . . . .	11
2.2.1	Intervalo e Convenção de Einstein . . . . .	11
2.2.2	Componentes Contravariantes e Covariantes . . . . .	12
2.2.3	Tensor Métrico . . . . .	12
2.2.4	Tensor Energia-momentum . . . . .	14
2.3	Geometria de Riemann . . . . .	16
2.3.1	Símbolos de Christoffel e Derivada Covariante . . . . .	16
2.3.2	Geodésicas . . . . .	19
2.3.3	Símbolos de Christoffel e a Métrica . . . . .	19
2.3.4	Tensor de Curvatura de Riemann . . . . .	20
2.4	Equação de Einstein . . . . .	22
2.4.1	Tensor e Escalar de Ricci . . . . .	22
2.4.2	Identidade de Bianchi e Tensor de Einstein . . . . .	23
2.4.3	Limite Newtoniano . . . . .	24
2.4.4	Voltando à Equação de Einstein . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Buraco Negro de Schwarzschild</b>	<b>28</b>
3.1	A Métrica de Schwarzschild . . . . .	28
3.1.1	A Derivação da Métrica . . . . .	28
3.1.2	O Teorema de Birkhoff . . . . .	30
3.2	A Geometria e o Raio de Schwarzschild . . . . .	31
3.2.1	A Curvatura do Espaço-Tempo de Schwarzschild . . . . .	31
3.2.2	Coordenadas de Kruskal . . . . .	33
3.3	O Buraco Negro de Schwarzschild . . . . .	35
3.3.1	A Temperatura do Buraco Negro . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Mecânica Quântica Não Comutativa</b>	<b>38</b>
4.1	Espaço-Tempo Não Comutativo . . . . .	38
4.1.1	Condição de Quantização de Dirac . . . . .	39
4.1.2	Definindo o Produto Moyal . . . . .	41
4.2	Sobre Estados Coerentes . . . . .	43
4.2.1	Operadores de Criação e Aniquilação . . . . .	43
4.2.2	Relação de Recursão . . . . .	45
4.2.3	Estado de Vácuo . . . . .	45

4.2.4	Relação de Completeza . . . . .	46
4.3	O Espaço-Tempo em uma Distribuição Gaussiana . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Buraco Negro de Schwarzschild na Geometria Não-Comutativa</b>	<b>50</b>
5.1	A Não-Comutatividade no Momentum-Energia . . . . .	50
5.2	A Métrica de Schwarzschild Não-Comutativa . . . . .	52
5.3	A Termodinâmica do Buraco Negro Não-Comutativo . . . . .	53
5.4	Energia-Momentum e Curvatura . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Código Python para Obtenção do <math>r</math> Mínimo de <math>g_{00}</math></b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Código Python para Obtenção do <math>T_H</math> Máximo</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Física que temos hoje é bastante diferente daquela de 400 anos atrás. O avanço tecnológico possibilita o acesso a novas informações que antes eram desconhecidas ou mesmo inacessíveis. E essas novas informações descartam paradigmas antigos em preferência aos novos mais genéricos [1]. Mas há aqueles que se tornam casos limites, determinado por um certo conjunto de restrições. Vê-se de exemplo a mecânica newtoniana, formulada no século XVII [2], que até hoje é ensinada em escolas e Universidades. Embora não inclua efeitos quânticos ou relativísticos é ideal para explicar o mundo macroscópico a baixas velocidades (velocidades muito menores que a da luz, entende-se). Mas nem toda informação é realmente nova. Há ocasiões em que resultados já são esperadas por algum paradigma que o previu. Mas mesmo nos casos em que não há novidades, a simples corroboração para um paradigma em disputa pode ocasionar numa revolução científica [1]. Revolução essa que irá abrir portas para mais uma etapa de ciência normal onde poderá explorar novos caminhos e fenômenos, reiniciando o ciclo existente entre avanço tecnológico e conhecimento científico.

Um dos grandes problemas que temos hoje é a dificuldade em conciliar a Teoria Quântica com a Relatividade Geral quanto a natureza da gravidade. Enquanto a primeira explica que a força gravitacional é regida por uma partícula, o *gravitron* [3], a segunda traz a gravidade apenas como uma consequência geométrica do espaço-tempo deformado na presença de matéria [4]. E o desafio atual é conseguir observar os efeitos da gravitação à nível quântico, uma observação que envolveria energias muito altas. Enquanto os aceleradores atuais chegam a aproximadamente menos que 1 TeV, a previsão para a formação de um "mini" buraco negro (escala subatômica) é de cerca de  $10^{19}$  GeV [5]. Esses objetos são previstos pela Relatividade Geral, mas sua evaporação é um fenômeno quântico [6], por isso a importância de seu estudo. Com isso, nos resta contribuir com novas hipóteses que nos permitam descobrir novos fenômenos físicos que sejam energeticamente mais acessíveis.

A formulação de um espaço-tempo não comutativo foi proposto em 1947, por Snyder [7], mas já havia sido sugerida por Heisenberg para introduzir uma *cutoff* ultravioleta. Porém perdeu espaço para as melhorias das técnicas de renormalização. Atualmente a hipótese do espaço-tempo não comutativo vem ressurgindo devido a conexões que essa tem com a teoria das cordas [8–10]. Nesse trabalho veremos como um espaço-tempo não comutativo pode resolver o problema da singularidade e da divergência da temperatura Hawking encontrada para os buracos negros, assim como outras consequências desse no espaço-tempo. A aplicação da não comutatividade será feita unicamente para o caso de buracos negros estáticos e sem carga (Buraco Negro de Schwarzschild), mas que pode ser

estendido para casos mais gerais em trabalhos futuros.

No capítulo 2 é feita uma revisão dos conceitos necessários a respeito da Teoria da Relatividade Geral, iniciando com a definição da métrica de Minkowski e finalizando com a equação de Einstein. No capítulo 3 é apresentado o caminho a obtenção da métrica de Schwarzschild, uma discussão a respeito da singularidade e da alternativa proposta por Kruskal para simplificar esse problema. O capítulo 4 traz um dos pontos principais desse trabalho que é o estudo da obtenção da não comutatividade do espaço-tempo e de suas consequências dentro do âmbito da mecânica quântica como, por exemplo, a substituição do produto de operadores pelo produto estrela. No capítulo 5 é feito um estudo dos efeitos da não comutatividade no buraco negro de Schwarzschild, baseado nos trabalhos de Nicolini [3, 11–13], em que a singularidade é substituída por uma região limitada e as massas antes consideradas pontuais passam a ser distribuídas nesse espaço. E ao final no capítulo 6 é feito o fechamento com as conclusões obtidas e os planos para um projeto futuro na área da Mecânica Quântica Não Comutativa.

# Capítulo 2

## Uma Revisão da Relatividade Geral

### 2.1 Conceitos Iniciais

#### 2.1.1 Princípio da Equivalência

O Princípio da Equivalência de Einstein se baseia na igualdade entre massa gravitacional e massa inercial e explica como um sistema físico arbitrário irá responder a um campo gravitacional externo [14]. Newton já havia demonstrado essa igualdade, porém adotando um espaço euclidiano e um tempo absoluto. Nisso, todos relógios mediriam o mesmo intervalo de tempo se sincronizados e acionados simultaneamente, independente da localização e do referencial desses relógios. Da mesma forma, dois pontos do espaço teriam a mesma distância um do outro independente da régua utilizada. Consequentemente, na teoria de Newton espaço e tempo não poderiam ser combinados afim de definir uma grandeza invariante num espaço-tempo curvo [15]. Mas essa definição de espaço e tempo desconexos e absolutos é radicalmente modificada quando Einstein assume a invariância da velocidade da luz e espaço e tempo passam a se relacionar através da relação

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \quad (2.1)$$

em que as coordenadas sem linha representam um referencial  $S$  e as coordenadas com linha um referencial em  $S'$ . Essa relação também define o espaço de Minkowski [16]. As consequências diretas são a dilatação temporal e a contração espacial. Adotando o instante de tempo próprio  $\tau$ , medido no referencial  $S'$  que se movimenta com velocidade constante de módulo  $v$  no sentido do eixo  $x$  temos

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (2.2)$$

como  $v$  é constante podemos fazer  $df \rightarrow \Delta f$  e sendo  $\Delta x = v\Delta t$  chegamos em

$$c\Delta\tau = \sqrt{c^2\Delta t^2 - v^2\Delta x^2} \quad (2.3)$$

e portanto

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.4)$$

que é a conhecida relação da dilatação temporal da Relatividade Restrita. A contração do comprimento  $L$  se acha fazendo  $L' = v\Delta\tau$ , em que  $L'$  é o comprimento medido no

referencial  $S'$ , ficando

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.5)$$

Mesmo assim, ainda não há nenhuma interação com campo gravitacional. Porém com a igualdade entre massa gravitacional e inercial podemos invocar o *Princípio da Equivalência* que afirma que toda partícula acelerada é equivalente a essa partícula num referencial em queda livre [15]. De forma que, a partir da segunda lei de Newton, podemos fazer

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (2.6)$$

$$\vec{a} = \vec{g} \quad (2.7)$$

em que  $\Phi$  é potencial gravitacional Newtoniano. Com isso, todo referencial não inercial pode ser considerado um referencial inercial sob um campo gravitacional. Em um espaço curvo, suave e submetido a um campo gravitacional podemos adotar um conjunto de planos, cada um tangente a cada ponto desse espaço. Cada um desses planos pode ser assumido como um Referencial Local em Queda Livre ( $LF^3$ , sigla em inglês para *Local Freely Falling Frame*) [17]. Cada um desses planos assume um espaço plano no espaço de Minkowski. A Figura 2.1 é uma exemplificação de um desses planos. Considere que a esfera é o espaço, o plano  $xy$  é tangente a esse espaço no ponto  $P$ , logo esse plano pode representar o espaço de Minkowski nesse ponto e em uma vizinhança infinitesimal. É importante enfatizar que é apenas uma consideração local, ou seja, em uma região infinitesimal.

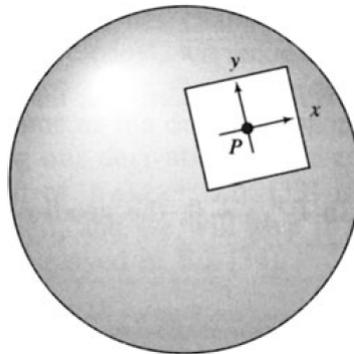


Figura 2.1: Representação de um plano tangente em um espaço esférico, o ponto  $P$  é o ponto tangente do plano na esfera. Imagem retirada de [16].

É o princípio da equivalência que induz Einstein a atribuir uma natureza geométrica para a gravidade. Isso, por que um feixe de luz observado num referencial  $S'$  acelerado teria uma trajetória oblíqua, pensando num caso que a direção do feixe não é paralela a direção do movimento do referencial  $S'$ . Como o referencial  $S'$  acelerado é equivalente a um referencial em queda livre, concluí-se que o feixe de luz sofre um desvio de trajetória devido ao campo gravitacional local. Mas como Newton atribuiu a força gravitacional como uma interação entre massas, esse desvio não seria possível, logo deve haver uma outra explicação para a gravitação. E Einstein encontrou essa resposta na geometria [18].

### 2.1.2 Equação de Poisson

Sabendo que o potencial gravitacional numa posição  $\vec{r}$  gerado por uma distribuição contínua de massa  $\rho(\vec{r}')$  num volume  $d\tau'$  é

$$\Phi = -G \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} d\tau' \quad (2.8)$$

onde a integral está sobre o volume que contém a massa e  $G$  é a constante da gravitação universal. Como fora dessa região  $\rho(\vec{r}') = 0$ , podemos estender o volume para até o ponto  $\vec{r}$  fazendo  $\mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$ . Aplicando o operador Laplaciano  $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  em (2.8), ficamos com

$$\nabla^2 \Phi = -G \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left[ \frac{\rho(\vec{r}')}{r} \right] d\tau \quad (2.9)$$

e como os operadores divergentes são sobre a variável  $r$ , tiramos  $\rho(\vec{r}')$  para fora da laplaciano e

$$\nabla^2 \Phi = -G \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = -G \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau \quad (2.10)$$

como  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r})$ , em que  $\delta(\vec{r})$  é a função delta de Dirac [19], ficamos com

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}) d\tau \quad (2.11)$$

e por fim, usando  $\int f(x')\delta(x)dx' = f(x)$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.12)$$

que é a chamada equação de Poisson para gravitação. Ela será relevante quando formos estudar os efeitos da não comutatividade no buraco negro de Schwarzschild no capítulo 5.

## 2.2 Tensores do Espaço-Tempo

### 2.2.1 Intervalo e Convenção de Einstein

A equação (2.1) define uma grandeza que é invariante frente a transformações de Lorentz e também define o espaço de Minkowski na Relatividade Restrita. A essa grandeza damos o nome de *intervalo*  $ds^2$  e definimos como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.13)$$

Perceba a falta da constante  $c$  no termo temporal. Isso se justifica, pois a partir de agora usaremos o sistema natural de unidades [15] em que  $c = 1$ . Isso irá simplificar as expressões e teremos as velocidade em termos de velocidade da luz. Outra simplificação que faremos é adotar as igualdades  $t = x^0$ ,  $x = x^1$ ,  $y = x^2$  e  $z = x^3$  e escrever (2.13) como o seguinte somatório

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.14)$$

em que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

é denominado de tensor métrico que irá depender do sistema de coordenadas utilizados. Esse tensor também pode ser representado através da sua assinatura, que nesse caso será  $\{+, -, -, -\}$ . Como a utilização de somatórios será bastante presente, é conveniente usar a notação de Einstein, em que índices gregos repetidos, um superior e outro inferior devemos fazer um soma sobre esse índice de 0 à 3. Dessa forma (2.14) fica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.16)$$

### 2.2.2 Componentes Contravariantes e Covariantes

A posição dos índices nas variáveis usadas até então são para definir a componente como contravariante, quando o índice for superior, e covariante, quando o índice for inferior. Essa diferença se dá devido a forma como é feita uma mudança de base em cada tipo. Para uma componente contravariante a mudança de base de  $x^\mu$  para  $x'^\alpha$  é<sup>1</sup>

$$x'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu \quad (2.17)$$

enquanto que para uma componente covariante a mudança da base  $x_\mu$  para a base  $x'_\alpha$  seria

$$x'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} x_\mu \quad (2.18)$$

Além disso, uma componente contravariante pode ser transformada numa componente covariante através do tensor métrico nas formas

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.19)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.20)$$

e o intervalo  $ds^2$  agora pode ser escrito como

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu \quad (2.21)$$

demonstrando que o intervalo será invariante, independente da base.

### 2.2.3 Tensor Métrico

Como vemos na equação (2.16) o tensor métrico foi definido em termos do intervalo  $ds^2$ . Pela convenção de sinais o termo  $g_{00}$  será positivo, enquanto que os termos restantes da diagonal  $g_{kk}$  serão negativos. Podemos mostrar que de fato  $g_{\mu\nu}$  é um tensor. Para isso, primeiramente vemos que o tensor métrico é um tensor simétrico,  $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ . Isso é necessário, visto que  $ds^2$  é invariante, então

$$ds^2 = g_{\nu\mu} x^\nu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (2.22)$$

<sup>1</sup>Embora não esteja explícito, a convenção de Einstein ainda é válido. Nos casos em que se apresenta um derivada parcial, consideramos o índice da componente do denominador como índice inferior e o índice da componente do numerador como índice superior de forma que em (2.17) e (2.18) há uma soma em  $\mu$ .

e como  $x^\mu x^\nu = x^\nu x^\mu$ , concluímos que  $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ . Fazendo uma mudança de base nas componentes  $x^\mu$  e  $x^\nu$  obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} x'^\alpha \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} x'^\beta \\ ds^2 &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} x'^\alpha x'^\beta \end{aligned} \quad (2.23)$$

Adotando a invariância de  $ds^2$  então podemos ver que a mudança de base nas componentes  $x^\mu$  e  $x^\nu$  podemos ser vistas como uma mudança nó próprio tensor,

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

que é exatamente a forma como um tensor covariante de ordem 2 é transformado [16].

O tensor métrico apresentado em (2.15) é o chamado tensor de Minkowski, com as componentes espaciais representadas em coordenadas retangulares. Podemos fazer uma mudança de base afim de obter o tensor em coordenadas esféricas, pois será o sistema utilizado mais adiante. Com uso da (2.24) com  $x'^\alpha, x'^\beta \rightarrow (t, r, \theta, \phi)$  e  $x^\mu, x^\nu \rightarrow (t', x, y, z)$  e das relações

$$t = t' \quad (2.25)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.26)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.27)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.28)$$

os termos do tensor métrico que contêm  $t$  serão uma delta de Kronecker

$$g_{\alpha t} = g_{t\alpha} = \delta_{\alpha t} \quad (2.29)$$

os termos diagonais espaciais serão

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial r} \frac{\partial x^\nu}{\partial r} g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \\ &= -1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \theta} g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial t}{\partial \theta} \right)^2 - \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 - \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= -r^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi} \frac{\partial x^\nu}{\partial \phi} g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial t}{\partial \phi} \right)^2 - \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 - \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \\ &= -r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

e o restante dos termos serão iguais a zero e o tensor métrico em coordenadas esféricas fica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

e o correspondente intervalo fica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.34)$$

Podemos obter uma outra relação importante. Para isso faremos uma elevação de índice de uma componente covariante  $x^\mu$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.35)$$

Essa componente covariante  $x_\nu$  podemos escrever como um rebaixamento de índice

$$x^\mu = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} x^\alpha \quad (2.36)$$

e então escrevemos a componente  $x^\mu$  como uma soma em *alpha* usando a função delta de Kronecker

$$\delta^\mu_\alpha x^\alpha = g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} x^\alpha \quad (2.37)$$

como agora temos os dois lados da com a componente  $x^\alpha$  podemos concluir que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha \quad (2.38)$$

e na representação matricial a função delta de Kronecker é uma matriz identidade, e dessa forma mostramos também que

$$g_{\mu\nu} = (g^{-1})^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

ou seja, a matriz que representa os valores de  $g_{\mu\nu}$  é a matriz inversa daquela que representa os valores de  $g^{\mu\nu}$  [17].

### 2.2.4 Tensor Energia-momentum

Embora usualmente associamos a massa à curvatura do tempo-espaço, essa ideia não é totalmente correta. Sabemos que uma partícula com velocidade  $v$  para um referencial  $S$  tem sua massa alterada por um fator  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  [18] e isso significa então dizer que a curvatura causada por essa partícula será diferente para o observador em  $S$  e para um observador em  $S'$  que acompanha o movimento da partícula. Dessa forma o conceito de energia e momentum tomam um importante papel na formulação de uma teoria relativística da gravitação, visto que em um dado referencial podemos ter apenas densidade de energia (um observador em  $S'$ , por exemplo), mas em outro sistema de referência (em  $S$ , por exemplo) haver um fluxo de energia [16]. Dessa forma, é importante definir uma grandeza que considere tanto energia quanto momentum, incluindo a a massa através da equivalência dada por Einstein<sup>2</sup>  $E = mc^2$ . Essa grandeza, que é tensorial, é o que chamamos de Tensor Energia-momentum. Mais adiante, na seção 2.4, iremos demonstrar a relação entre o tensor energia-momentum e a curvatura no espaço tempo.

<sup>2</sup>Aqui é conveniente deixar explícito a velocidade da luz, pois é a forma mais conhecida da equivalência massa e energia. No desenvolvimento dos cálculos manteremos  $c = 1$ .

De forma resumida, podemos definir os componentes do tensor energia-momentum,  $T^{\mu\nu}$ , na forma [16]<sup>3</sup>:

- $T^{00}$  = densidade de energia;
- $T^{0k} = T^{k0}$  = fluxo de densidade de energia na direção  $k$ ;
- $T^{kl} = T^{lk}$  = fluxo de densidade de momentum  $k$  na direção  $l$ .
- $T^{kk}$  = fluxo de momentum, também podendo ser chamado de pressão  $p$

Perceba que o tensor energia-momentum é simétrico,  $T^{kl} = T^{lk}$ . Isso se dá pela definição das componentes do tensor. Para uma região cuja densidade de partículas é  $n$ , cada uma com massa  $m$  cujo quadri-vetor velocidade é  $u$  para um referencial  $S$ , a componente  $T^{\mu\nu}$  é

$$T^{\mu\nu} = nm u^\mu u^\nu \sqrt{1 - v^2} \quad (2.40)$$

em que  $v$  é o módulo da velocidade do referencial  $S'$  naquela região. Como  $u^\mu u^\nu = u^\nu u^\mu$ , temos que  $T^{\mu\nu}$  um tensor simétrico [16].

Considerando um fluido sem viscosidade, os termos  $T^{kl}$  com  $k \neq l$  serão nulo, pois não heverá forças perpendiculares às interfaces. Consideremos também que não há trocas de calor entre as partículas, fazendo com que  $T^{0k} = T^{k0} = 0$ . Dessa forma as componentes do tensor energia-momentum para um referencial que acompanha as partículas será

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

em que  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  é a pressão desse fluido. Notemos que como o movimento das partículas é aleatório espera-se que a distribuição das velocidades não tenha um eixo de preferência de forma que a quantidade de colisões é igual em todas as direções e logo  $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ . Isso mostra que estamos considerando um fluido homogêneo e isotrópico.

Para a métrica de Minkowski, ou seja, num espaço-tempo plano, a conservação de energia e momentum se juntam numa única lei de conservação que, nesse caso, é a conservação do tensor energia-momentum. Essa lei é escrita da forma [15]

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (2.42)$$

e uma forma mais compacta de escrever essa soma de derivadas parciais, que adotaremos, é

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.43)$$

Essa lei de conservação só é válida para um espaço-tempo plano. Em 2.3.1 veremos como essa lei é estendida para um espaço-tempo curvo.

---

<sup>3</sup>Aqui utilizamos a convenção em que índices latino significam uma contagem de 1 à 3. Diferente dos índices gregos que são de 0 à 3. Logo para índices latinos estaremos considerando apenas as componentes espaciais de qualquer quadri-vetor ou tensor.

## 2.3 Geometria de Riemann

Um espaço-tempo curvo é representado pela geometria de Riemann. Seu espaço possui topologia e estrutura geométrica. E nessa geometria é importante fazermos a distinção entre geometrias *afins* e geometrias *métricas* [16]. Como vimos anteriormente, a métrica é o que irá determinar de fato a geometria do espaço-tempo analisado. A geometria afim é o que irá definir as mudanças em vetores produzidos por transportes paralelos. Num espaço plano, todo vetor deslocado se mantém paralelo ao vetor original, diferente de vetores num espaço curvo, em que um transporte paralelo para quem está nesse espaço pode causar uma mudança de sua direção, como esquematizado na Figura 2.2, que representa um vetor se deslocando em um espaço plano e outro em um espaço curvo. Ambos os espaços representado pela linha tracejada. Na formulação da geometria de Riemann, essa mudança do vetor num transporte paralelo será definido com os *Símbolos de Christoffel* que designam as conexões afins.

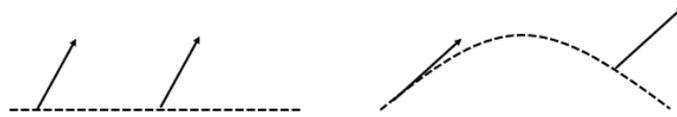


Figura 2.2: Esquematização de um transporte paralelo de um vetor em um espaço plano (à esquerda, representado pela linha tracejada) e um vetor deslocado num espaço curvo (à direita, com a mesma representação que a anterior). Perceba que na primeira situação o vetor se mantém na mesma direção enquanto que na segunda situação há uma mudança de direção para o observador que se encontra nesse espaço. Imagem do autor.

### 2.3.1 Símbolos de Christoffel e Derivada Covariante

Embora no espaço Euclidiano um deslocamento infinitesimal de uma componente espacial  $x^i$ , em coordenadas cartesianas, seja independente das outras componentes, em coordenadas polares isso já não ocorre. Um deslocamento  $\Delta\theta$ , por exemplo, irá deslocar uma partícula de um ponto A a um ponto B em  $r\Delta\theta$  além da própria mudança  $\Delta\theta$ , como pode ser visto na Figura 2.3 [15]. Por essa razão, podemos dizer que a derivada de um vetor  $\vec{V}$  não consiste apenas na derivadas de suas componentes  $v^\mu$ , mas também da derivadas dos vetores de base  $\vec{e}_\mu$ . Então segue que para um vetor  $\vec{V}$  cujas componentes  $V^\mu$  estão representadas num conjunto de bases ortonormais  $\vec{e}_\mu$  a derivada parcial desse vetor e dada por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu + V^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.44)$$

O último termo dessa expressão não surge em coordenadas cartesianas, já que é composta por uma base unitária, mas é de fundamental importância na geometria de Riemann, onde o espaço-tempo é apenas localmente plano. Definimos então o *Símbolo de Christoffel*,  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ , como

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \vec{e}_\alpha \quad (2.45)$$

O índice  $\alpha$  entra como uma soma, já que a derivada de um vetor de base pode gerar uma combinação linear dos vetores de base. Embora a derivada parcial "tradicional" e os símbolos de Christoffel poderem ser escritos como tensores (segunda ordem para a

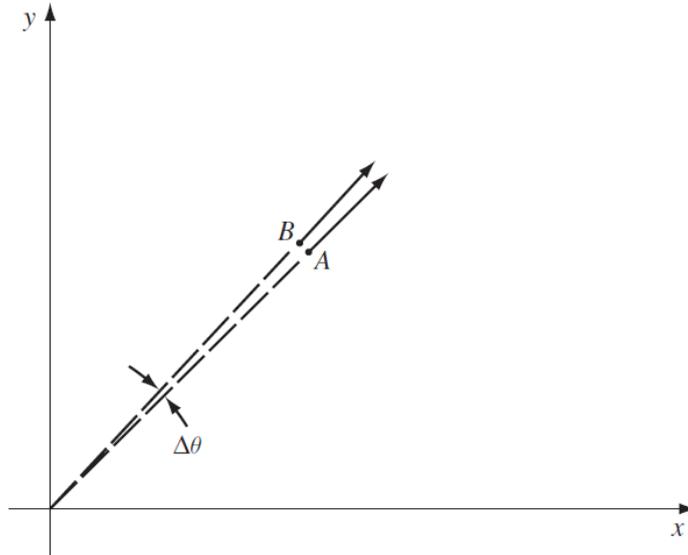


Figura 2.3: Deslocamento de  $rd\theta$  de uma partícula de um ponto A a um ponto B. Figura retirada de [15].

derivada parcial e terceira ordem para o símbolo de Christoffel), separadamente não são, mas juntos eles obedecem as transformações tensoriais, de forma que uma nova definição de derivada será necessário para incorporar as transformações tensoriais. Reescrevendo a derivada parcial utilizando os símbolos de Christoffel temos

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\nu + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \vec{e}_\alpha \quad (2.46)$$

e como os índices  $\mu$  e  $\alpha$  fazem o papel de índices mudos (servindo apenas como índices de um somatório) podemos fazer a troca entre ambos ficando com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \vec{e}_\mu \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} &= \left( \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \right) \vec{e}_\mu \end{aligned} \quad (2.47)$$

e o termo entre parênteses é nada mais que a derivada covariante da componente  $V^\mu$ . Para diferenciar a derivada parcial da derivada covariante usaremos a seguinte notação<sup>4</sup>

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \quad (2.48)$$

em que o símbolo  $\nabla_\nu$  indica a derivada covariante em  $x^\nu$  e  $\partial_\nu$  a derivada parcial em  $x^\nu$ . Mas aqui vemos a regra para a derivada covariante para uma componente contravariante. Para definir a derivada covariante de uma componente covariante lembremos que uma grandeza escalar é invariante sobre qualquer métrica, logo a derivada covariante de uma escalar  $\phi$  é idêntica a sua derivada de forma que

$$\nabla_\nu \phi = \partial_\nu \phi \quad (2.49)$$

<sup>4</sup>Muitos autores [14–18, 20] utilizam para a derivada covariante a notação  $V^\mu_{;\nu}$  que indica a derivada covariante em  $x^\nu$  sobre a componente  $V^\mu$  e para a derivada parcial  $V^\mu_{,\nu}$  que indica a derivada parcial em  $x^\nu$  sobre a componente  $V^\mu$  de forma que a derivada covariante é escrita como  $V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ . Mas por questões estéticas e de fácil visualização foi preferível utilizar a notação em (2.48).

Supondo então que  $\phi = p_\mu V^\mu$  aplicamos a derivada covariante e temos

$$\nabla_\nu(p_\mu V^\mu) = \partial_\nu(p_\mu V^\mu) \quad (2.50)$$

Como a derivada covariante é uma generalização da derivação em qualquer base, ela deve obedecer as propriedades da derivação. Dessa forma, podemos aplicar a regra do produto e obter

$$V^\mu \nabla_\nu p_\mu + p_\mu \nabla_\nu V^\mu = V^\mu \partial_\nu p_\mu + p_\mu \partial_\nu V^\mu \quad (2.51)$$

utilizando (2.48) para substituir  $\partial_\nu V^\mu$  ficamos com

$$\begin{aligned} V^\mu \nabla_\nu p_\mu + p_\mu \nabla_\nu V^\mu &= V^\mu \partial_\nu p_\mu + p_\mu (\nabla_\nu V^\mu - V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}) \\ V^\mu \nabla_\nu p_\mu &= V^\mu \partial_\nu p_\mu - V^\alpha p_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (2.52)$$

como  $\alpha$  e  $\mu$  são índices mudos no último termo da equação (2.52) podemos fazer a troca entre eles e obtemos

$$\begin{aligned} V^\mu \nabla_\nu p_\mu &= V^\mu \partial_\nu p_\mu - V^\mu p_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \\ \nabla_\nu p_\mu &= \partial_\nu p_\mu - p_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.53)$$

que é a regra da derivada covariante sobre um componente covariante. Para um tensor misto e de ordem maior que 1 os símbolos de Christoffel serão colocados seguindo as regras de (2.48) e (2.53) para cada índice de forma que, por exemplo

$$\nabla_\nu T^\mu_\sigma = \partial_\nu T^\mu_\sigma + T^\alpha_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\nu} - T^\mu_\alpha \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \quad (2.54)$$

Uma característica importante dos símbolos de Christoffel é a simetria nos índices inferiores. Para demonstrar isso, faremos duas derivadas sobre uma escalar  $\phi$ , sabendo que a ordem das derivadas não afeta o resultado

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi \quad (2.55)$$

como a derivada covariante de um escalar é igual a derivada dessa podemos fazer

$$\nabla_\mu \partial_\nu \phi = \nabla_\nu \partial_\mu \phi \quad (2.56)$$

e usando (2.53)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\alpha \phi \Gamma^\alpha_{\nu\mu} &= \partial_\nu \partial_\mu \phi - \partial_\alpha \phi \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \\ \Gamma^\alpha_{\nu\mu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.57)$$

mostrando que os símbolos de Christoffel são simétricos em qualquer sistema de coordenadas <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>É importante destacar que no espaço em que estamos trabalhando não é considerado a existência de *spin*, por isso podemos assumir tal simetria. Mas para o caso com spin há a definição do tensor de torção,  $C^\alpha_{\mu\nu}$  dados por  $C^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$  [21–23]. Como os efeitos quânticos são desprezíveis no nosso estudo, podemos sem perda de significado considerar  $C^\alpha_{\mu\nu} = 0$ .

### 2.3.2 Geodésicas

Consideremos que um vetor  $V^\alpha$  é deslocado infinitesimalmente em um espaço curvo. Se esse vetor se mantêm paralelo e de mesmo comprimento podemos dizer que ele realizou um transporte paralelo nesse espaço [15]. Então em um referencial local num ponto  $\mathcal{P}$  esse vetor é constante em relação a algum parâmetro  $\lambda$  ao longo da curva. de forma que

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 \quad (2.58)$$

no ponto  $\mathcal{P}$ . Consideremos agora um vetor

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (2.59)$$

tangente a curva em que se encontra  $V^\alpha$ . Com (2.59) reescrevemos (2.58) na forma

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{dx^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = U^\beta \nabla_\beta V^\alpha = 0 \quad (2.60)$$

como a derivada foi feito em um referencial local, foi possível estender (2.60) para o caso mais geral e utilizar a forma covariante da derivação em  $V^\alpha$ . No espaço euclidiano, a menor distância entre os ponto é um linha reta, diferente de um espaço curvo em que a menor distância se dá através de um vetor que é sempre paralelo a curva. Como  $V^\alpha$  seria tangente apenas em um ponto, o mais apropriado é utilizar  $U^\alpha$ , já que esse é sempre tangente a curva. Então (2.60) fica

$$U^\beta \nabla_\beta U^\alpha = 0 \quad (2.61)$$

que é a equação que determinar a menor distância entre dois ponto em um espaço curvo, essa distância damos o nome de *geodésia*. Aplicando a derivação covariante em (2.61) temos

$$U^\beta (\partial_\beta U^\alpha + U^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) = 0 \quad (2.62)$$

usando (2.59)

$$\frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} = 0 \quad (2.63)$$

e vendo que o primeiro termo do lado esquerdo é uma regra da cadeia ficamos com

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad (2.64)$$

que é a equação geodésica para o espaço-tempo curvo em função de um parâmetro de curva  $\lambda$  ou qualquer função linear dessa [15].

### 2.3.3 Símbolos de Christoffel e a Métrica

Os símbolos de Christoffel representam conexões afins e como são dependentes do sistema de coordenadas deve possuir alguma relação com a métrica. Para descobrir essa relação, consideremos que as elevações de abaixamentos de índice se dão através da métrica. Uma componente covariante  $V_\mu$  pode ser então escrita na forma

$$V_\mu = g_{\mu\alpha} V^\alpha \quad (2.65)$$

e como a derivada covariante é um tensor, ele também pode ser escrito na mesma forma, então a derivada covariante de  $V_\mu$  pode ser escrito como

$$\nabla_\nu V_\mu = g_{\mu\alpha} \nabla_\nu V^\alpha \quad (2.66)$$

porém se fizermos a derivada covariante em  $\nu$  de (2.65) ficamos com

$$\nabla_\nu V^\mu = V^\alpha \nabla_\nu g_{\mu\alpha} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu V^\alpha \quad (2.67)$$

que, por coerência, para ficar igual a (2.66) e considerando que  $V^\mu$  é uma componente arbitrária, teremos que

$$\nabla_\nu g_{\mu\alpha} = 0 \quad (2.68)$$

para qualquer sistema de coordenadas. E analogamente, pelo mesmo procedimento podemos também mostrar que

$$\nabla_\nu g^{\mu\alpha} = 0 \quad (2.69)$$

que o enunciado do *Teorema de Ricci*. Com esse resultado faremos o seguinte conjunto de derivadas covariante sobre um tensor métrico

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu}, \quad \nabla_\nu g_{\mu\beta} \quad \text{e} \quad \nabla_\mu g_{\nu\beta} \quad (2.70)$$

cujos resultados serão

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = \partial_\beta g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\nu} = 0 \quad (2.71)$$

$$\nabla_\nu g_{\mu\beta} = \partial_\nu g_{\mu\beta} - g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} = 0 \quad (2.72)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\beta} = \partial_\mu g_{\nu\beta} - g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} = 0 \quad (2.73)$$

somando (2.72) com (2.73), subtraindo com (2.71) e usando da simetria do tensor métrico  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , do dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel,  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ , chegamos em

$$2g_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \quad (2.74)$$

fazendo uma contração em  $\beta$  em ambos os lados de (2.74) com  $g^{\gamma\beta}$ , sabendo por (2.38) que  $g^{\gamma\beta} g_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\alpha$  e fazendo  $\gamma \rightarrow \alpha$ , chegamos em

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad (2.75)$$

Dessa forma, conseguimos demonstrar que as conexões afins estão ligadas unicamente pela métrica geométrica [16].

### 2.3.4 Tensor de Curvatura de Riemann

Os símbolos de Christoffel indicam as mudanças devido aos processos de transporte paralelo no espaço-tempo curvo. Porém, ainda é necessário quantificar essa curvatura do espaço tempo [20, 24]. Podemos determinar a curvatura através de uma sequência de transportes paralelos ao longo de curvas geodésicas. Em um espaço-tempo esférico, por exemplo, se um vetor arbitrário realizar um transporte paralelo de um ponto A no equador dessa esfera até um polo no ponto B, do ponto B até um ponto C, também no equador e retorna ao ponto A, como pode ser visto na Figura 2.4 retirada de [15]. Evidentemente, as componentes do vetor em uma determinada basa sofrem uma mudança devido a curvatura

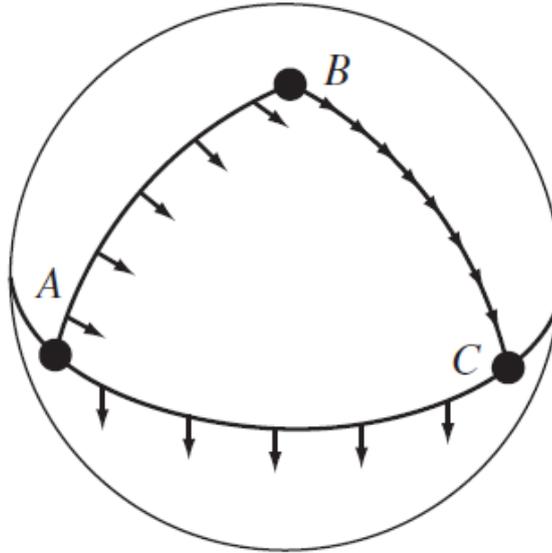


Figura 2.4: Transporte paralelo de um vetor arbitrário saindo do ponto A no equador dessa esfera até um polo no ponto B, do ponto B até um ponto C, também no equador e retornando ao ponto A. Figura retirada de [15].

presente no caminho seguido, mas o vetor permanece inalterado. Como essa mudança deve independe do sistema de coordenadas ela deve ser uma grandeza tensorial. Esse tensor é chamado de *Tensor de Riemann*.

Se considerarmos um caminho infinitesimal, podemos utilizar a derivada covariante para determinar o tensor de Riemann, já que aquela está relacionada com a mudança realizada num transporte paralelo. Num espaço-tempo plano a ordem de derivação não interfere no resultado final. Para um vetor sendo transportado infinitesimalmente, significa que não haverá mudanças se houver mudança na ordem de derivação. Porém, num espaço-tempo curvo a mudança de ordem das derivadas covariantes manifesta-se através de uma diferença do estado final de dois vetores iguais, mas que percorrem caminhos diferentes de um mesmo ponto inicial a um mesmo ponto final. Para determinar essa diferença podemos aplicar o comutador das derivadas covariantes  $\nabla_\mu$  e  $\nabla_\nu$  num vetor arbitrário  $V^\rho$  de forma que

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \partial_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\lambda V^\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \nabla_\nu V^\sigma \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \\ &\quad - \partial_\nu(\nabla_\mu V^\rho) + \nabla_\lambda V^\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \nabla_\mu V^\sigma \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Aplicando novamente a derivação covariante, fazendo as devidas trocas entre os índices mudos e usando da simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel chegamos em

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma \quad (2.77)$$

o termo entre parênteses é o que definimos como o tensor de Riemann

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (2.78)$$

Como num espaço-tempo plano o transporte paralelo independe do caminho teremos que nesse espaço-tempo  $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$ , enquanto que num espaço-tempo curvo  $R^\rho_{\sigma\mu\nu} \neq 0$ .

Conhecendo a métrica  $g_{\mu\nu}$  é possível obter o tensor de Riemann. Esse tem um papel análogo ao dos campos elétrico e magnético na eletrodinâmica [16], pois a presença de um campo gravitacional não nulo se dá somente se  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  tem componente não nula. Se tratando de um tensor, o tensor de Riemann pode ser escrito como um tensor unicamente covariante

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \quad (2.79)$$

e esse tensor satisfaz as seguintes identidades

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\lambda\mu\nu} \quad (2.80)$$

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = -R_{\lambda\sigma\nu\mu} \quad (2.81)$$

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (2.82)$$

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\sigma} + R_{\lambda\nu\sigma\mu} = 0 \quad (2.83)$$

vemos então que o tensor de Riemann é anti-simétrico em relação ao primeiro e ao segundo par de índices pelas (2.80) e (2.81) e simétrico em relação a permutação do primeiro par com o segundo par por (2.82). Devido a essas identidades o tensor de Riemann possui 20 componentes independentes, ao invés de 256 ( $4 \times 4 \times 4 \times 4$ ).

## 2.4 Equação de Einstein

### 2.4.1 Tensor e Escalar de Ricci

Pelo Princípio da Equivalência, Einstein encontra uma resposta geométrica para a interação gravitacional. Pela teoria de Newton, essa interação está diretamente relacionada a massa gravitacional das partículas envolvidas, que mais tarde Einstein postula sua igualdade com a massa inercial dessas partículas [15]. A massa, por sua vez, pela relatividade geral é alterada por um fator  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  dependendo do referencial adotado, de forma que é mais conveniente trabalhar com o tensor energia-momentum  $T^{\mu\nu}$  pela questão da invariância. Consequentemente o tensor  $T^{\mu\nu}$  será associado a característica geométrica da gravitação, ou seja, da curvatura do espaço-tempo. Curvatura essa que é quantificada pelo tensor de Riemann  $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}$ . Mas enquanto o tensor de Riemann é um tensor de ordem 4 enquanto que o tensor energia-momentum é de ordem 3, sendo necessário fazer uma contração no tensor de Riemann para que possamos criar um relação entre esses. Essa contração só pode ser de um tipo, devido as questões de simetria e anti-simetria de  $R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}$  verificadas em (2.80) e (2.81), a essa contração damos o nome de *Tensor de Ricci* definido por

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad (2.84)$$

que é simétrico,  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$  se visualizarmos (2.82), o que é uma condição necessária já que  $T^{\mu\nu}$  é simétrico. Outra contração que é possível fazer é

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu{}_\mu \quad (2.85)$$

que é o escalar de Ricci que devemos utilizar para relacionar o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  a um novo tensor junto com o tensor de Riemann. Com isso devemos procurar por um tensor  $G_{\mu\nu}$  na forma [14]<sup>6</sup>

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (2.86)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  sendo constantes que serão definidas a seguir.

### 2.4.2 Identidade de Bianchi e Tensor de Einstein

Retornando a definição do tensor de Riemann (2.78) e utilizando a definição dos símbolos de Christoffel (2.75), reescrever  $R_{\rho\mu\sigma\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\mu\sigma\nu}$  em termos das componentes da métrica. Adotando um referencial inercial local, temos  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$  e então

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.87)$$

se fizermos uma derivada parcial em  $x^\lambda$  ficamos com

$$\partial_\lambda R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\lambda \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (2.88)$$

e usando da simetria do tensor métrico e sabendo que as derivadas parciais comutam entre si, chegamos a seguinte identidade

$$\partial_\lambda R_{\rho\mu\sigma\nu} + \partial_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} + \partial_\sigma R_{\rho\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.89)$$

e como no sistema de coordenadas adotado  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ , podemos estender a derivada parcial para derivada covariante e obter

$$\nabla_\lambda R_{\rho\mu\sigma\nu} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} + \nabla_\sigma R_{\rho\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.90)$$

e como se trata de uma equação tensorial, será válida para todos os sistemas de coordenadas [15]. Essa identidade é chamada de *identidade de Bianchi*. Como a derivada covariante do tensor métrico é nulo tanto para a versão covariante ( $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ) quanto para a versão contravariante ( $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ ) podemos utilizá-los para fazer elevação de índice e contração em (2.90) de forma que

$$g^{\rho\sigma} (\nabla_\lambda R_{\rho\mu\sigma\nu} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} + \nabla_\sigma R_{\rho\mu\nu\lambda}) = 0$$

onde o primeiro termo dentro dos parênteses contrai em  $\rho$  e  $\sigma$ , o segundo também, mas usando da anti-simetria em (2.81) e apenas elevando o primeiro índice do terceiro termo, ficamos com

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_{\mu\lambda} + \nabla_\sigma R^\sigma_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.91)$$

fazendo novamente uma contração temos

$$g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_{\mu\lambda} + \nabla_\sigma R^\sigma_{\mu\nu\lambda}) = 0 \quad (2.92)$$

<sup>6</sup>Aqui foi preferível derivar a equação de Einstein usando o processo feito por [14], por estarmos fazendo uma seção de revisão. Para uma derivação mais detalhada há uma seção alternativa no próprio [14], e mais detalhada em [17] com base nos artigos originais encontrados em [25].

contraíndo o primeiro termo, elevando o índice  $\mu$  do segundo junto com a anti-simetria e contraíndo o terceiro termo chegamos em

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\nu R^\nu_\lambda - \nabla_\sigma R^\sigma_\lambda = 0 \quad (2.93)$$

como  $\nu$  e  $\sigma$  estão atuando como índices mudos podemos fazer uma troca de índices e então

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\mu R^\mu_\lambda - \nabla_\mu R^\mu_\lambda = 0$$

$$\nabla_\mu \delta^\lambda_\mu R - 2\nabla_\mu R^\mu_\lambda = 0$$

$$\nabla_\mu (2R^\mu_\lambda - \delta^\lambda_\mu R) = 0 \quad (2.94)$$

aplicando  $g^{\lambda\nu}$

$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (2.95)$$

de forma que definimos o tensor  $G^{\mu\nu}$  como

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (2.96)$$

que é o chamado *tensor de Einstein* e vemos que, além de ser simétrico ele obedece a relação

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.97)$$

da mesma forma que o esperado para o tensor energia-momentum que cuja lei de conservação na forma covariante é

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.98)$$

agora devemos conseguir estabelecer uma relação entre esses dois tensores na forma

$$G^{\mu\nu} = k T^{\mu\nu} \quad (2.99)$$

onde  $k$  é uma constante que deve ser encontrada. Como se trata de uma equação tensorial podemos escrever ela na sua forma covariante

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad (2.100)$$

com  $k$  definido teremos a equação de Einstein.

### 2.4.3 Limite Newtoniano

Como a equação (2.100) é uma generalização para a gravitação, ela deve ser capaz de trazer a equação (2.12) no limite de baixas velocidade ( $v \ll c$ ). Sendo assim, usaremos esse fato para determinar o valor de  $k$ . Iniciamos com a equação geodésica (2.64) utilizando o tempo próprio  $\tau$  como parâmetro

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.101)$$

considerando uma partícula em, ou mesmo no limite newtoniano, com velocidade muito baixa podemos considerar apenas a componente temporal de  $x^\mu$  já que as restantes serão muito próximas de zero [14, 24], logo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.102)$$

o símbolo de Christoffel em (2.102) é calculado através de (2.75)

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_0 g_{0\nu} + \partial_0 g_{\nu 0} - \partial_\nu g_{00}) \quad (2.103)$$

como o tensor métrico é simétrico os primeiros dois termos dentro dos parênteses de (2.103) se anulam, restando

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} \quad (2.104)$$

para  $g^{\mu\nu}$  podemos adicionar um termo de perturbação pequena, devido a presença da partícula, na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.105)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é o termo designado para definir o tensor de Minkowski (2.15),  $h_{\mu\nu}$  é o termo de perturbação e sendo  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Pela definição  $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$  e desconsiderando termos de ordem não lineares de  $h_{\mu\nu}$  temos que

$$h^{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} \quad (2.106)$$

e então

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (2.107)$$

Aplicando (2.104) e (2.107) em (2.102) ficamos com

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \partial_\nu (\eta_{00} + h_{00}) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.108)$$

Considerando apenas termos de primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  e como os componentes de  $\eta_{\mu\nu}$  são constantes, ficamos com

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.109)$$

como  $\partial_0 h_{00} = 0$  por estarmos tratando de um caso estático, podemos trabalhar apenas com as componentes espaciais e nesse caso  $\eta^{ij} = -\delta_{ij}$  e então

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (2.110)$$

com uma regra da cadeia obtemos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00} \quad (2.111)$$

que na sua forma vetorial é

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (2.112)$$

comparando com

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi \quad (2.113)$$

concluimos que

$$h_{00} = 2\Phi \quad (2.114)$$

e

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \quad (2.115)$$

com  $\Phi$  dado por (2.8).

#### 2.4.4 Voltando à Equação de Einstein

Podemos reescrever (2.100) fazendo uma contração com  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = kg^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\mu R = kT \quad (2.116)$$

com  $\delta^\mu{}_\mu = 4$

$$R = -kT \quad (2.117)$$

aplicando em (2.100)

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \quad (2.118)$$

Considerando o limite newtoniano, temos que  $T_{00} = \rho$  e  $T_{ij} = 0$  de forma que faremos

$$R_{00} = \frac{1}{2}k\rho \quad (2.119)$$

agora para encontrar  $R_{00}$  vemos que  $R^0{}_{00} = 0$  de acordo com (2.87), sendo necessário apenas as componentes espaciais, logo

$$R_{00} = R^i{}_{0i0} = g^{ij}R_{j0i0} = \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_0\partial_i g_{j0} - \partial_0\partial_0 g_{ji} + \partial_j\partial_0 g_{0i} - \partial_j\partial_i g_{00}) \quad (2.120)$$

como estamos usando  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  o único termo que não será não nulo em (2.120) é o último dentro dos parênteses, portanto

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_i\partial_j g_{00}$$

$$R_{00} = -\frac{1}{2}(\eta^{ij} - h^{ij})\partial_i\partial_j(\eta_{00} + h_{00}) \quad (2.121)$$

eliminando os termos de segunda ordem

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\partial_i\partial_j h_{00}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \quad (2.122)$$

que, comparando com (2.119) e sabendo que  $h_{00} = 2\Phi$  temos que

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{2}k\rho \quad (2.123)$$

e comparando com (2.12) chegamos em  $k = 8\pi G$  e então a equação de Einstein fica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.124)$$

que demonstra que a curvatura do espaço-tempo reage a presença de energia-momentum [24].

# Capítulo 3

## Buraco Negro de Schwarzschild

### 3.1 A Métrica de Schwarzschild

#### 3.1.1 A Derivação da Métrica

A primeira solução exata para a equação de Einstein no vácuo foi apresentada em 1916 Karl Schwarzschild [26]. Essa solução descreve o campo fora de uma massa esféricamente simétrica e estática e mais tarde se reconheceu que a solução descreve também o interior dessa massa [18]. Se tratando de um caso em que temos uma simetria esférica, usaremos a métrica em coordenadas esféricas, de forma que o intervalo  $ds^2$  fique

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

e essa métrica será modificada pela presença de uma massa  $M$ . Pela simetria esférica podemos considerar que a parte angular da métrica não irá se alterar, de forma que apenas as componentes  $dt$  e  $dr$  tenham uma modificação, ou seja<sup>1</sup>

$$ds^2 = f_A(r) dt^2 - f_B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.2)$$

com  $f_A(r)$  e  $f_B(r)$  sendo os termos de modificação da métrica. O fato dessas funções dependerem apenas de  $r$  é consequência da simetria esférica.

Do limite newtoniano, chegamos na aproximação para  $g_{00}$  como sendo

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \quad (3.3)$$

e se tratando de um caso limite, a métrica (3.2) deve ser capaz de descrever esse resultado. Por esse motivo podemos supor que a função  $f_A(r) = e^{A(r)}$ , com  $A(r) = 2\Phi$ , já que no caso de um potencial gravitacional pequeno pode-se fazer a aproximação  $e^{2\Phi} \approx 1 + 2\Phi$ , retornando ao limite newtoniano. Dessa forma ficamos com

$$ds^2 = e^{A(r)} dt^2 - f_B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.4)$$

sendo necessário encontrar  $f_B(r)$ . Por convenção de cálculo iremos fazer  $f_B(r) = e^{B(r)}$ , e então

$$ds^2 = e^{A(r)} dt^2 - e^{B(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Aqui utilizamos a dedução feita em [18]. Em [26] encontra-se a dedução original feita por Schwarzschild.

Notamos que a métrica depende apenas dos termos diagonais da métrica e como estamos atrás de uma solução para métrica que seja solução para equação de Einstein é necessário determinar os componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  que ficam limitados apenas as componentes  $R_{\mu\mu}$ . Por (2.87), podemos determinar essas componentes, obtendo [18]

$$R_{tt} = -e^{A-B} \left( \frac{1}{2} \partial_r \partial_r A - \frac{1}{4} \partial_r A \partial_r B + \frac{1}{4} (\partial_r A)^2 + \frac{\partial_r A}{r} \right) \quad (3.6)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2} \partial_r \partial_r A - \frac{1}{4} \partial_r A \partial_r B + \frac{1}{4} (\partial_r A)^2 - \frac{\partial_r B}{r} \quad (3.7)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-B} \left[ 1 + \frac{1}{2} r (\partial_r A - \partial_r B) \right] - 1 \quad (3.8)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (3.9)$$

e o restante dos termos são nulos.

Como se trata de uma solução para o vácuo, é necessário que  $R_{\mu\nu} = 0$  para todos os termos. Então de (3.6) e (3.7) chegamos em

$$\partial_r A = -\partial_r B \quad (3.10)$$

como  $A$  e  $B$  dependem apenas de  $r$ , pois estamos tratando de uma caso estático e esfericamente simétrico, as derivadas parciais podem ser tomadas como derivadas totais, permitindo que façamos uma integração em ambos os lados, obtendo

$$A = -B + k \quad (3.11)$$

onde a constante  $k$  de integração pode ser suprimida, já que, observando (3.5), se trata apenas de uma mudança na escala de tempo. Logo

$$A = -B \quad (3.12)$$

usando o resultado (3.12) em (3.8) ficamos com

$$e^A (1 + r \partial_r A) = 1$$

$$\partial_r (r e^A) = 1 \quad (3.13)$$

que, por integração direta, como feito em (3.10) chegamos em

$$r e^A = r - k$$

$$e^A = 1 - \frac{k}{r} \quad (3.14)$$

com  $k$  sendo uma constante de integração. O sinal negativo é devido ao fato de que  $e^A$  é decrescente em  $r$ .

Para determinar o valor de  $k$  faremos

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{k}{r}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{k}{r} \right) \quad (3.15)$$

utilizando a expansão em série [27]

$$\ln(1 - x) \approx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (3.16)$$

temos

$$\Phi \approx -\frac{1}{2} \left( \frac{k}{r} + \frac{k^2}{2r^2} + \dots \right) \quad (3.17)$$

No limite newtoniano

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (3.18)$$

podemos eliminar os termos não lineares e comparando (3.17) com (3.18) vemos que

$$k = 2GM \quad (3.19)$$

e encontramos para a métrica

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.20)$$

que é a métrica de Schwarzschild. Para fins de simplificação, utilizaremos novamente o sistema de unidades naturais onde  $G = 1$  e então a métrica de Schwarzschild simplifica-se na forma

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \quad (3.21)$$

### 3.1.2 O Teorema de Birkhoff

Se considerássemos as funções  $e^A = e^{A(t,r)}$  e  $e^{B(t,r)}$  os componentes  $R_{tt}$  e  $R_{rr}$  teriam um acréscimo de derivadas em  $t$  ficando

$$R_{tt} = -e^{A-B} \left( \frac{1}{2} \partial_r \partial_r A - \frac{1}{4} \partial_r A \partial_r B + \frac{1}{4} (\partial_r A)^2 + \frac{\partial_r A}{r} \right) + \frac{\partial_t \partial_t B}{2} + \frac{\partial_t B (\partial_t B - \partial_t A)}{4} \quad (3.22)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{2} \partial_r \partial_r A - \frac{1}{4} \partial_r A \partial_r B + \frac{1}{4} (\partial_r A)^2 - \frac{\partial_r B}{r} + e^{B-A} \left( \frac{\partial_t \partial_t B}{2} + \frac{\partial_t B (\partial_t B - \partial_t A)}{4} \right) \quad (3.23)$$

e a componentes  $R_{rt}$  seria

$$R_{rt} = \frac{\partial_t B}{r} \quad (3.24)$$

mas como no vácuo todas as componentes do tensor de Ricci devem ser nulos, temos que  $B(r)$  deve ser uma constante em relação ao tempo, de acordo com (3.24), logo  $B$  dependerá apenas de  $r$ , como feito anteriormente. Para  $A(t, r)$  chegaríamos a uma função do tipo  $-L + f(t)$ , em que  $f(t)$  substituiria a constante  $k$  de (3.12), porém essa constante foi suprimida por se tratar apenas de uma mudança na escala de tempo, o que pode ser

feito igualmente para  $f(t)$ , de forma que a métrica de Schwarzschild também é válida para uma distribuição de massa não estática, desde que se mantenha a simetria esférica. Essa conclusão é chamada de *teorema de Birkhoff*

Essa conclusão tem uma importância prática, pois demonstra que um objeto massivo, como uma estrela por exemplo, pode contrair ou expandir sem emitir nenhum tipo de onda gravitacional desde de que a simetria esférica seja mantida [28]. Outra conclusão é que em um ponto, a uma distância  $r$  do centro e no interior desse objeto massivo terá uma métrica idêntica a de Schwarzschild, porém considerando apenas a massa compreendida no interior de uma esfera de raio  $r$  concêntrico ao objeto, enquanto que a massa externa não influencia a métrica [16]. Essa última previsão já se conhecia da teoria clássica de Newton, mas generaliza a métrica de Schwarzschild para todos os pontos no exterior e no interior do objeto massivo, não sendo somente uma equação válida para o vácuo.

## 3.2 A Geometria e o Raio de Schwarzschild

### 3.2.1 A Curvatura do Espaço-Tempo de Schwarzschild

Tomemos apenas a parte espacial da métrica de Schwarzschild

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.25)$$

se colocarmos uma régua na direção radial de uma massa central, o comprimento dessa régua encolheria por um fator  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}$ . Admitindo a simetria esférica, ao colocarmos régua idênticas distribuídas ao redor da massa central, todas a mesma distância e orientadas de forma radial, mediriam o mesmo comprimento. Isso indica que a geometria em torno da massa é curva e idêntica a de uma superfície de revolução [18].

Para determinar essa superfície consideremos uma caso em que uma régua está posicionada em  $\theta = 0$  de forma que

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (3.26)$$

e iremos comparar com o comprimento de arco numa superfície curva qualquer [29]

$$dl^2 = \left[ \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 1 \right] dr^2 \quad (3.27)$$

onde  $z$  é uma função de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para  $z$  temos que

$$z = \int \sqrt{\frac{2M}{r - 2M}} dr \quad (3.28)$$

com uma mudança de variável  $u = r - 2M$  e suprimindo a constante de integração chegamos em

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2M}\sqrt{r - 2M} \\ z^2 &= 8M(r - 2M) \end{aligned} \quad (3.29)$$

que é uma função de um parabolóide. Essa função é conhecida como *parabolóide de Flamm* [18]. Para determinar a curvatura  $K$  desse parabolóide, usaremos a definição dada em [18]

$$K = \frac{R_{r\phi r\phi}}{(g_{rr}g_{\phi\phi} - g_{r\phi}^2)} \quad (3.30)$$

que determina  $K$  para uma superfície bidimensional. Assim consideremos  $dl^2$  dada em coordenadas cilíndricas

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.31)$$

como  $z^2 = 8M(r - 2M)$  podemos escrever  $dz$  em termos de  $dr$  derivando em  $r$  dos dois lados de (3.29) e obtendo

$$dz^2 = \frac{2M}{r - 2M} dr^2 \quad (3.32)$$

de forma que  $dl^2$  fica

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.33)$$

A partir de (3.33) obtemos

$$R_{r\phi r\phi} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{2M}{r} \quad (3.34)$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (3.35)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \quad (3.36)$$

$$g_{r\phi} = 0 \quad (3.37)$$

e então

$$K = -\frac{M}{r^3} \quad (3.38)$$

Percebemos aqui que para massas pequenas (dentro do limite newtoniano) e a largas distâncias a curvatura é praticamente plana.

Dentro da métrica de Schwarzschild observamos que em  $r = 2M$  a componente  $g_{tt}$  é nula enquanto que  $g_{rr}$  é infinita. Diante disso poderíamos afirmar que nesse ponto há uma singularidade, porém como vimos, a curvatura (3.38) é bem definida em  $r = 2M$  de forma que essa singularidade é consequência apenas do sistema de coordenadas, logo não sendo uma singularidade verdadeira. Percebemos também que para  $r < 2M$  ocorre um inversão de sinais em  $dt^2$  e  $dr^2$ , a coordenada tipo tempo passa a ser tipo espaço e vice-versa. Definimos então, para fins de estudo, o *raio de Schwarzschild*  $r_{sc}$  como

$$r_{sc} = 2M \quad (3.39)$$

e o problema da pseudo-singularidade em  $r = r_{sc}$  resolvemos quando a métrica é trabalhada dentro das coordenadas de Kruskal.

### 3.2.2 Coordenadas de Kruskal

Em 1960, Martin David Kruskal apresenta uma solução para a singularidade em  $r = 2M$ , o qual chama de singularidade esférica, estendendo a geometria de Schwarzschild a sua máxima extensão livre de singularidade [30]. Essa solução se apresenta como uma mudança nas coordenadas temporal e espacial na forma

$$ds^2 = f^2(dT^2 - dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.40)$$

em que  $f$  deve ser uma função apenas de  $r$  e livre de singularidade em  $r = 2M$ . As coordenadas  $dT$  e  $dX$  são as novas coordenadas que podem ser escritas em termos de  $r$  e  $t$ . Para encontrá-las, começamos com um caso de simetria esférica em que podemos considerar apenas as componentes  $t$  e  $r$  da métrica (3.21), de forma que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (3.41)$$

considerando agora um intervalo nulo,  $ds^2 = 0$  e rearranjando os termos obtemos

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2 \quad (3.42)$$

$$dt = \pm \frac{r}{r-2M} dr \quad (3.43)$$

integrando ambos os lados de (3.43) fazendo uma mudança de variável  $u = r - 2M$  ficamos com

$$t = \pm \int \frac{u+2M}{u} du = \pm(u + 2M \ln u) + k \quad (3.44)$$

$$t = \pm \left[ r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) \right] + k \quad (3.45)$$

com  $k$  sendo uma constante de integração que absorve todas os valores contantes que surgem na solução da integral. O termo dentro do colchetes de (3.45) pode definido como

$$r_* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) \quad (3.46)$$

e então

$$t = \pm r_* + k \quad (3.47)$$

a coordenada  $r_*$  é também chamada de *coordenadas de Regge-Wheeler tortoise* [31]. Derivando  $r_*$  em relação a  $r$  encontramos a seguinte relação

$$dr = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr_* \quad (3.48)$$

que, substituindo na métrica (3.41) fica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dr_*^2) \quad (3.49)$$

Definimos agora duas novas coordenadas  $u$  e  $v$  como

$$u = t + r_* \quad (3.50)$$

$$v = t - r_* \quad (3.51)$$

de forma que

$$du = dt + dr_* \quad (3.52)$$

$$dv = dt - dr_* \quad (3.53)$$

$$dudv = dt^2 - dr_*^2 \quad (3.54)$$

Essa última relação pode ser substituída em (3.49)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv \quad (3.55)$$

como  $r_*$  pode ser escrito em termos de  $u$  e  $v$  faremos

$$r_* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) = \frac{u - v}{2} \quad (3.56)$$

chegamos numa relação para  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$  na forma

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{2M}{r} e^{(u-v)/(4M)} e^{-r/(2M)} \quad (3.57)$$

que, aplicado a métrica fica

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{(u-v)/(4M)} e^{-r/(2M)} dudv \quad (3.58)$$

para retirar as coordenadas  $u$  e  $v$  da exponencial, definimos

$$U = e^{u/(4M)} \quad (3.59)$$

$$V = e^{-v/(4M)} \quad (3.60)$$

e suas derivadas em  $u$  e  $v$ , respectivamente

$$4M dU = e^{u/(4M)} du \quad (3.61)$$

$$4M dV = e^{-v/(4M)} dv \quad (3.62)$$

e obtemos

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} dU dV \quad (3.63)$$

e, finalmente fazemos a última mudança de coordenada na forma

$$T = \frac{U - V}{2} \quad (3.64)$$

$$X = \frac{V + U}{2} \quad (3.65)$$

de forma que

$$dX^2 - dT^2 = dU dV \quad (3.66)$$

e então temos para a métrica, nas coordenadas de Kruskal

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (-dT^2 + dX^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.67)$$

onde, podemos fazer o caminho inverso, aplicando (3.59) e (3.60) em (3.64) e em (3.65) e utilizando (3.57) chegamos em

$$X^2 - T^2 = \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} \quad (3.68)$$

e com (3.50) e (3.51) chegamos em

$$\frac{t}{2M} = 2 \tanh^{-1} \left[ \left( \frac{T}{X} \right)^{\pm 1} \right] \quad (3.69)$$

com o expoente positivo para  $r > 2M$  e o expoente negativo para  $r < 2M$ .

Aqui vemos que não há singularidade em  $r = 2M$ , mas em  $r = 0$  ainda se mantêm, pois se trata de uma singularidade verdadeira, já que nesse ponto a curvatura se torna infinita. A partir de (3.68), vemos que para  $r = 2M$  temos uma equação do tipo  $X = \pm T$ , descrevendo duas retas perpendiculares num plano  $X - T$ , enquanto que para  $r > 2M$  e  $r < 2M$  (3.68) temos funções hiperbólicas. Essas funções podem ser vistas na Figura 3.1, que será melhor explorada na seção seguinte. Vê-se que uma partícula poderia ultrapassar a região de  $r > 2M$  para  $r < 2M$ , mas o oposto não seria possível, já que as retas  $X = \pm T$  caracterizam um intervalo do tipo luz (desconsiderando os deslocamentos angulares  $\theta$  e  $\phi$ ). Isso traz uma nova definição para  $r_{sc}$ , como sendo a distância mínima que um sinal pode estar da massa central e ainda poder se afastar desse.

### 3.3 O Buraco Negro de Schwarzschild

Voltemos a atenção para a Figura 3.1. A linha tracejada (em preto) indica a região  $r = 2M$ , a linha contínua (em vermelho) representa hipérbolas para regiões de  $r < 2M$  e a linha de traço e ponto (em azul) representa hipérbolas para regiões de  $r > 2M$ . Para  $r \neq 2M$  quanto maior o valor de  $r$  mais afastada as hipérbolas estão da origem, cada uma representando um valor de  $r$  específico. Essas hipérbolas descrevem a linha de mundo nas coordenadas de Kruskal de forma que fótons apresentam  $\left| \frac{dT}{dX} \right| = 1$  enquanto que partículas massivas  $\left| \frac{dT}{dX} \right| > 1$ . A linha pontilhada (em preto) representa o movimento arbitrário de uma partícula massiva que sai de uma região  $r > 2M$  e cruza a linha  $r = 2M$ . Pela restrição imposta, após cruzar essa linha ela não poderá cruzar novamente afim de retornar para a região  $r > 2M$ . Com base nisso o raio de Schwarzschild é definido por  $r_{sc} = 2M$ . Qualquer sinal que entre na região  $r < 2M$  não poderá mais sair dessa região de forma que só é possível determinar a massa de objeto. Porém para que um objeto consiga chegar em  $r = 2M$  a massa central deve estar, no mínimo enclausurada dentro de uma esfera de raio  $2M$  de forma a ter uma densidade  $\rho$  de

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} \quad (3.70)$$

explicitando  $c$  e  $G$ . Objetos que possuem tal densidade são denominado como *Buracos Negros*.

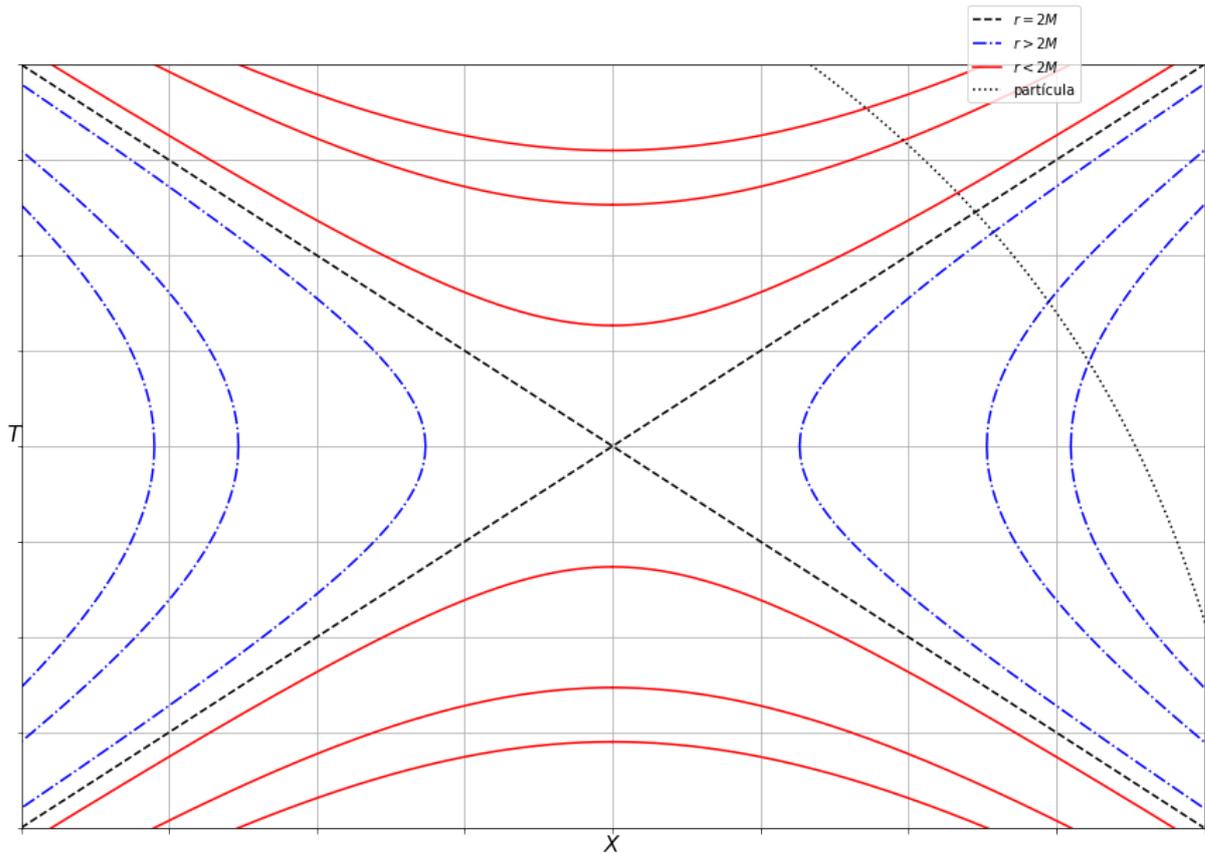


Figura 3.1: Extensão do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal. As linhas tracejadas representam a região para  $r = 2M$ , as linhas contínuas representam a região para  $r < 2M$  e as linhas de traço e ponto  $r > 2M$ . A linha pontilhada representa o movimento de uma partícula. Imagem do autor.

Buracos negros são objetos de grande densidade cuja distorção do espaço é tão grande que nem mesmo a luz consegue escapar [4]. A massa desses objetos devem estar no mínimo enclausuradas numa esfera de raio  $r = 2M$  e o sinal de luz que entrar nessa região não consegue sair. E a linha que separa o interior do buraco negro ( $r < 2M$ ) com o exterior ( $r > 2M$ ) é chamado de *horizonte de eventos*. No interior do buraco negro a matéria colapsa, devido a atração gravitacional de forma que em  $r = 0$  a curvatura é infinita, como podemos ver através da métrica (3.21). Embora previsto em 1916, foi apenas de 1960 que os buracos negro receberam sua denominação [32], já que para Einstein e Schwarzschild se tratava apenas de uma consequência matemática sem sentido físico. Mais tarde foi determinada a métrica para buracos negros em rotação e com carga elétrica [20].

Então definimos aqui que um buraco negro de Schwarzschild é um objeto compacto cuja massa está contida dentro de uma raio  $r \leq 2M$  em uma distribuição esférica e estática que segue a métrica (3.21).

### 3.3.1 A Temperatura do Buraco Negro

Tendo a região delimitada por  $r = 2M$  como o horizonte de eventos, podemos definir a área  $A$  do horizonte de eventos como

$$A = 16\pi M^2 \quad (3.71)$$

de forma que conseguimos relacionar a área do horizonte de eventos com a massa do buraco negro. Consideremos um buraco negro de massa  $M_1$  e área de horizonte  $A_1$  e outro com massa  $M_2$  e área de horizonte  $A_2$ . Sabemos que  $A_1 = 16\pi M_1^2$  e  $A_2 = 16\pi M_2^2$ . Caso eles se fundam resultarão em um novo buraco negro de massa  $M = (M_1 + M_2)$ , pela conservação do momentum-energia, porém a área do horizonte de eventos  $A$  desse será proporcional a  $(M_1 + M_2)^2$  de forma que

$$\begin{aligned} A &= 16\pi(M_1 + M_2)^2 \\ A &= 16\pi(M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2) \end{aligned} \quad (3.72)$$

e portanto,  $A > A_1 + A_2$ . Algo bastante semelhante com o que acontece com a entropia de um sistema. Em 1973 Stephen W. Hawking [33] relaciona essa lei com a lei de entropia e logo pressupõe que buracos negros tem temperatura. Em 1975 Hawking [34] argumenta e deriva, através da mecânica quântica, que essa temperatura, denominada *temperatura Hawking*, é dada por

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} \quad (3.73)$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. No sistema de unidades naturais ( $G = \hbar = k_B = c = 1$ ) fica

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_{sc}} \quad (3.74)$$

que, para a métrica de Schwarzschild podemos definir essa temperatura como [13]

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_{sc}} \quad (3.75)$$

Como o buraco negro tem propriedades termodinâmicas, ela deve obedecer a lei do equilíbrio térmico e, conseqüentemente, emitir radiação para o exterior. Hawking explica essa emissão [6, 34] com base no princípio da incerteza. Sabe-se que as flutuações de energia  $\Delta E$  de um sistema e o tempo de duração  $\Delta t$  delas é dado por [35]

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2 \quad (3.76)$$

e por isso é possível que partículas sejam criadas e destruídas desde que obedecem a (3.76) não violando a conservação de energia e dentro das leis da Mecânica Quântica. Próximo a região do horizonte de eventos ocorrem criação de partículas – incluindo fótons – em pares, pela conservação de momentum, uma com energia negativa e outra positiva. As partículas de energia negativa adentram no horizonte de eventos deixando as outras partículas, de energia positiva, livres. Como as partículas absorvidas têm energia negativa, a massa do buraco negro diminui, causando sua diminuição. Esse processo é conhecido como evaporação do buraco negro. Como  $T_H$  é inversamente proporcional a  $M$ , significa que os buracos negros mais massivos são mais frios e a radiação emitida é menos intensa, aumentando o tempo de vida desses. Para buracos negros menores ocorre o oposto, a emissão é mais intensa por conta da maior temperatura de forma que seu tempo de vida seja mais curto.

Um problema que surge nessa teoria é na etapa final de evaporação dos buracos negros, pois a medida que  $r \rightarrow 0$ ,  $T_H \rightarrow \infty$  o que corresponderia a divergência ultravioleta. Como há a previsão teórica de buracos negros subatômico [36], deveria ser possível identificar essas emissões. Uma das possíveis explicações para a não detecção é a não-comutatividade do espaço-tempo, que resolve o problema da divergência ultravioleta na emissão de buracos negros.

# Capítulo 4

## Mecânica Quântica Não Comutativa

### 4.1 Espaço-Tempo Não Comutativo

A formulação de uma Mecânica Quântica Não-Comutativa se inspira na própria Mecânica Quântica, a partir do princípio da incerteza que descreve grandezas físicas que não comutam através da relação [35]<sup>1 2</sup>

$$[Q^i, P_j] = Q^i P_j - P_j Q^i = i\delta_{ij} \quad (4.1)$$

onde  $Q^i$  e  $P_j$  são operadores hermitianos de posição e momentum<sup>3</sup>, respectivamente, que substituem as variáveis canônicas de posição  $q^i$  e momentum  $p_j$  da física clássica. Dirac mostra que a regra de comutação clássica, envolvendo os parênteses de Poisson [37] entre duas variáveis quaisquer  $f$  e  $g$

$$[f, g]_P = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \quad (4.2)$$

são, na verdade, um caso dentro do limite quântica para grandes escalas. Sendo assim, para sairmos do tratamento clássico e ir para o quântico segue-se a regra de quantização de Dirac [38, 39]

$$[f, g]_P \rightarrow -i[F, G] \quad (4.3)$$

com  $f$  e  $g$  sendo as variáveis e  $F$  e  $G$  seus respectivos operadores. Porém, vemos que a mecânica quântica trabalha com a incerteza dentro do espaço de fase, espaço  $2N$  dimensional formado pelas variáveis canônicas de posição  $q^i$  e momentum  $p_j$ .

Baseando-se no trabalho de Girotti [40, 41] faremos uma revisão sobre a formulação de um princípio de incerteza aplicado ao espaço-tempo. Essa formulação foi proposta pela primeira vez em 1947 pelo Snyder [7] como uma forma de resolver o problema da divergência do ultravioleta presente na teoria quântica como, por exemplo, nas integrais de caminho de Feynman a curtas distâncias. Princípio esse que seria relacionado a um valor extremamente pequeno – na ordem do comprimento de Planck de  $10^{-35}m$  – que explicaria a não detecção dessa propriedade e ao mesmo tempo resolveria problemas de divergências quando tendemos a distâncias próximas de zero,  $r \rightarrow 0$ , como no caso da singularidade do buraco negro de Schwarzschild. Isso, pois teríamos a substituição de um ponto material por uma distribuição de matéria em torno de uma célula de Planck.

---

<sup>1</sup>Estamos utilizando o sistema natural de unidades, onde  $\hbar = 1$ .

<sup>2</sup> $i = \sqrt{-1}$  quando  $i$  não for índice.

<sup>3</sup>Nesse capítulo os índices  $i$  e  $j$  irão se referir ao número de graus de liberdade presentes no sistema, logo  $i, j = 1, 2, \dots, N$  com  $N$  sendo o número de graus de liberdade.

### 4.1.1 Condição de Quantização de Dirac

Para encontrarmos uma relação de espaço-tempo não-comutativo, iniciaremos com a quantização de um sistema dinâmico canônico que possui vínculos de segunda classe. Esses vínculos são importantes, pois a não-comutatividade do espaço-tempo surge das relações de comutação não nulas desses vínculos.

Começamos com a definição da Lagrangiana comutativa  $L_C$  em termos de variáveis canônicas  $q^i$  e  $p_i$  e do Hamiltoniano [37]

$$L_C(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i) \quad (4.4)$$

onde o ponto em  $\dot{q}^i$  representa a derivada temporal de  $q^i$ . Mas como a descrição de um sistema dinâmico não é único [42], pode-se aumentar o espaço de fase acrescentando uma nova coordenada  $v_i$  e redefina o Lagrangiano como

$$L_1(q^i, v_i) = v_i \dot{q}^i - H(q^i, v_i) \quad (4.5)$$

cujas equações canônicas são dadas por

$$p_i \equiv \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}^i} = v_i \quad (4.6)$$

$$\pi^i \equiv \frac{\partial L_C}{\partial v^i} = 0 \quad (4.7)$$

com  $\pi^i$  e  $v_i$  sendo as conjugadas canônicas de  $q^i$  e  $p_i$ , respectivamente. Dessa forma, a partir de (4.6) e (4.7) obtemos os vínculos

$$G_i \equiv p_i - v_i = 0 \quad (4.8)$$

$$T^i \equiv \pi^i = 0 \quad (4.9)$$

e, aplicando os parênteses de Poisson a esses vínculos temos

$$[G_i, G_j]_P = \frac{\partial G_i}{\partial \pi^k} \frac{\partial G_j}{\partial v_k} - \frac{\partial G_i}{\partial v_k} \frac{\partial G_j}{\partial \pi^k} = 0 \quad (4.10)$$

$$[T^i, T^j]_P = \frac{\partial T^i}{\partial \pi^k} \frac{\partial T^j}{\partial v_k} - \frac{\partial T^i}{\partial v_k} \frac{\partial T^j}{\partial \pi^k} = 0 \quad (4.11)$$

$$[G_i, T^j]_P = \frac{\partial G_i}{\partial \pi^k} \frac{\partial T^j}{\partial v_i} - \frac{\partial G_i}{\partial v_k} \frac{\partial T^j}{\partial \pi^k} = \delta_{ij} \quad (4.12)$$

que constitui um vínculo de segunda classe, porém não com a relação de comutação que desejamos. Por outro lado, para obter tais vínculos faremos uma modificação na Lagrangiana adicionando um termo como feito em [40]

$$L_N = v_i \dot{q}^i - H(q^i, v_i) + \dot{v}_i \theta^{ij} v_j \quad (4.13)$$

Esse termo extra não altera os graus de liberdade nem mesmo as equações de movimento de Hamilton [37]

$$\dot{q}^i = [q^i, H]_P \quad (4.14)$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H]_P \quad (4.15)$$

além disso,  $\theta^{ij}$  deve representa os elementos de uma matriz anti-simétrica  $N \times N$ .

Nessa nova Lagrangiana os vínculos passam a ter as seguintes relações

$$G_i \equiv p_i - v_i \quad (4.16)$$

$$T^i \equiv \pi^i - \theta^{ij} v_j \quad (4.17)$$

e os parênteses de Poisson agora são

$$[G_i, G_j]_P = \frac{\partial G_i}{\partial \pi^k} \frac{\partial G_j}{\partial v_k} - \frac{\partial G_i}{\partial v_k} \frac{\partial G_j}{\partial \pi^k} = 0 \quad (4.18)$$

$$[T^i, T^j]_P = \frac{\partial T^i}{\partial \pi^k} \frac{\partial T^j}{\partial v_k} - \frac{\partial T^i}{\partial v_k} \frac{\partial T^j}{\partial \pi^k} = 2\theta^{ij} \quad (4.19)$$

$$[G_i, T^j]_P = \frac{\partial G_i}{\partial \pi^k} \frac{\partial T^j}{\partial v_i} - \frac{\partial G_i}{\partial v_k} \frac{\partial T^j}{\partial \pi^k} = \delta_{ij} \quad (4.20)$$

onde para obter (4.19) foi necessário usar a anti-simetria de  $\theta^{ij}$ , caso contrário, retornaríamos às relações anteriores. Através do algoritmo de Dirac [43,44], encontramos os parênteses de Dirac para  $q^i$  e  $q^j$

$$[q^i, q^j]_D = [q^i, q^j]_P - 2[q^i, G_i]_P \theta^{ij} [G_j, q^j]_P - [q^i, G_i]_P [T^i, q^j]_P + [q^i, T^i]_P [G_i, q^j]_P \quad (4.21)$$

e portanto

$$[q^i, q^j]_D = 2\theta^{ij} \quad (4.22)$$

além disso se mantém

$$[p_i, p_j]_D = 0 \quad (4.23)$$

Aplicando a regra de quantização de Dirac, encontramos as relações para um o espaço-tempo não-comutativo.

$$[Q^i, Q^j] = 2i\theta^{ij} \quad (4.24)$$

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (4.25)$$

$$[Q^i, P_j] = i\delta^i_j \quad (4.26)$$

Porém, como o espaço-tempo clássico é comutativo, é necessário formular uma relação entre as coordenadas não-comutativas e as comutativas. Podemos então definir um espaço-tempo comutativo cujos operadores de posição e momentum são  $\tilde{Q}^i$  e  $\tilde{P}_j$ , respectivamente que obedecem as relações

$$[\tilde{Q}^i, \tilde{Q}^j] = 0 \quad (4.27)$$

$$[\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] = 0 \quad (4.28)$$

$$[\tilde{Q}^i, \tilde{P}_j] = i\delta^i_j \quad (4.29)$$

e escrever os operadores não comutativos em função dos operadores comutativos. As funções definidas são [41]

$$Q^i = \tilde{Q}^i - \theta^{ij} \tilde{P}_j \quad (4.30)$$

$$P_i = \tilde{P}_i \quad (4.31)$$

que podem ser verificados facilmente. Vemos que o comutador entre dois operadores de posição é

$$[Q^i, Q^j] = [\tilde{Q}^i - \theta^{ik} \tilde{P}_k, \tilde{Q}^j - \theta^{jk} \tilde{P}_k] \quad (4.32)$$

aplicando a propriedade dos comutadores [35]

$$[A - B, C - D] = [A, C] - [A, D] - [B, C] + [B, D] \quad (4.33)$$

e utilizando (4.27), (4.28) fica

$$[Q^i, Q^j] = -\theta^{jk}[Q^i, \tilde{P}_k] - \theta^{ik}[\tilde{P}_k, Q^i] \quad (4.34)$$

usando (4.29) e sabendo que  $[A, B] = -[B, A]$

$$[Q^i, Q^j] = -i\theta^{ji} + i\theta^{ij} \quad (4.35)$$

e utilizando a anti-simetria de  $\theta^{ij}$  chegamos em

$$[Q^i, Q^j] = 2i\theta^{ij} \quad (4.36)$$

e as relações (4.25) e (4.26) também se confirmam se utilizarmos os operadores não-comutativos em termos dos operadores comutativos. A relação (4.24) mostra que o espaço-tempo apresenta um limite de tamanho mínimo, definido por  $\theta^{ij}$  que, no sistema de unidades naturais, possui uma dimensão de área. Logo a definição de ponto deve ser substituída por uma região central de incerteza  $\approx \sqrt{\theta^{ij}}$  em relação a algum eixo. Uma das implicações que isso traz é de que uma massa pontual, na verdade, não é mais bem localizada, mas sim distribuída. Devido a isso uma das consequências, que será visto na próxima seção é a definição do produto entre funções que dependem da posição.

### 4.1.2 Definindo o Produto Moyal

Como dito anteriormente, umas das consequências da não-comutatividade do espaço-tempo é o produto entre funções que dependam das posições. Como essas estão sujeitas a incertezas proporcionais a  $\sqrt{\theta^{ij}}$ , as posições não podem ser bem localizadas e, em consequência, suas funções também não. Para podermos definir uma nova regra para produtos de funções no espaço-tempo não comutativo partiremos do hamiltoniano clássico para uma partícula de massa  $m$  sujeito a um potencial  $V(q^i)$

$$H(q^i, p_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(q^i) \quad (4.37)$$

e trazendo o correspondente quântico

$$H(Q^i, P_i) = \frac{P_i P_i}{2m} + V(Q^i) \quad (4.38)$$

,aplica-se (4.30) e (4.31) em (4.38) a obtêm-se

$$H(\tilde{Q}^i - \theta^{ik} \tilde{P}_k, \tilde{P}_i) = \frac{\tilde{P}_i \tilde{P}_i}{2m} + V(\tilde{Q}^i - \theta^{ik} \tilde{P}_k) \quad (4.39)$$

A equação de Schroedinger [35] no plano não-comutativo, em que os operadores  $\tilde{Q}^i = \tilde{q}^i$  e  $\tilde{P}_i = -i\hbar \partial/\partial \tilde{q}^i$ , fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\tilde{q}}^2 \Psi(\tilde{q}, t) + V\left(\tilde{q}^i + i\hbar \theta^{ik} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}\right) \Psi(\tilde{q}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\tilde{q}, t)}{\partial t} \quad (4.40)$$

Vê-se que o segundo termo do lado esquerdo de (4.40) é o que caracteriza a não-comutatividade do espaço. Esse termo, de acordo com [41], pode escrito como

$$V(\tilde{q}) \exp \left\{ i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^i} \theta^{ik} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^k} \right\} \Psi(\tilde{q}, t) \quad (4.41)$$

em que a notação  $\overleftarrow{\partial}/\partial \tilde{q}^i$  significa que a derivada parcial é aplicada na função a sua esquerda,  $V(\tilde{q})$ , enquanto que  $\overrightarrow{\partial}/\partial \tilde{q}^k$  é aplicada na função a sua direita,  $\Psi(\tilde{q}, t)$ . Para demonstrar que (4.41) é igual ao segundo termo da direita de (4.40), expandi-se a exponencial, ficando

$$V(\tilde{q}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar)^n}{n!} \left[ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^i} \theta_{ik} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^k} \right]^n \Psi(\tilde{q}, t) \quad (4.42)$$

e aplicando as derivações devidas, lembrando que dentro dos colchetes há uma soma em  $i$  e uma em  $k$ , chega-se em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{i_n}} V(\tilde{q}) \right] \theta^{i_1 k_1} \cdots \theta^{i_n k_n} \left[ (i\hbar)^n \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{k_n}} \Psi(\tilde{q}, t) \right] \quad (4.43)$$

O termo dentro do primeiro colchetes de (4.43), pode ser escrito adotando a transformada de Fourier [27] de  $V(\tilde{q})$  e obtêm-se

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^{i_n}} \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{N/2}} e^{i\tilde{q} \cdot \tilde{k}} V(\tilde{k}) = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{N/2}} \tilde{k}_{i_1} \cdots \tilde{k}_{i_n} e^{i\tilde{q} \cdot \tilde{k}} V(\tilde{k}) \quad (4.44)$$

Aplicando (4.44) em (4.43), usando  $\tilde{P}_k = -i\hbar \partial/\partial \tilde{q}^k$  e que a integral da soma é a soma das integrais, tem-se

$$\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{N/2}} V(\tilde{k}) e^{i\tilde{q} \cdot \tilde{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \tilde{k}_{i_1} \cdots \tilde{k}_{i_n} \theta^{i_1 k_1} \cdots \theta^{i_n k_n} (-1)^n \tilde{P}_{k_1} \cdots \tilde{P}_{k_n} \Psi(\tilde{q}, t) \quad (4.45)$$

cujo último somatório é nada mais que uma expansão da função exponencial  $e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{k}_i \cdot \theta^{ik} \tilde{P}_k}$ . Com isso, demonstra-se então que

$$\left\{ \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{N/2}} V(\tilde{k}) e^{i\tilde{k} \cdot [\tilde{q} - \theta^{ik} \tilde{P}_k]} V(\tilde{k}) \right\} \Psi(\tilde{q}, t) = V(\tilde{q}) \exp \left\{ i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^i} \theta^{ik} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^k} \right\} \Psi(\tilde{q}, t) \quad (4.46)$$

e como o lado esquerdo é uma transformação de Fourier, vê-se que

$$V \left( \tilde{q}^i + i\hbar \theta^{ik} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k} \right) \Psi(\tilde{q}, t) = V(\tilde{q}) \exp \left\{ i\hbar \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^i} \theta^{ik} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \tilde{q}^k} \right\} \Psi(\tilde{q}, t) \quad (4.47)$$

que é definido como produto de Greenwald-Moyal  $V(\tilde{q}) * \Psi(\tilde{q}, t)$ . Esse produto é isomórfico em relação ao produto de funções no espaço comutativo [41], ou seja

$$\int V(\tilde{q}) * \Psi(\tilde{q}, t) dx = \int V(\tilde{q}) \Psi(\tilde{q}, t) dx \quad (4.48)$$

Como a integral reduz o produto Moyal para um produto simples, para que seja possível estudar o comportamento não-comutativo é necessário expandir a função  $V(q)$

em  $\theta^{ij}$  através da teoria de perturbações. Porém segundo [45] essa expansão só daria origem a termos que representam um fator de fase, não trazendo novas informações. Vê-se também que se  $V(q)$  for uma função polinomial, a expansão do produto Moyal é finita. Girotti [40, 41] demonstra que a não comutatividade aplicada ao oscilador harmônico quântico se assemelha a uma partícula carregada sobre ação de um campo magnético constante, modificando a termodinâmica de um sistema no limite da não-comutatividade.

Pelas dificuldades impostas na tentativa de obter uma expansão dos termos de  $\theta^{ij}$  numa modelo relativístico, o conceito de estados coerentes será usado para que se possa obter uma formulação da mecânica quântica não-comutativa que possa ser aplicado ao Buraco Negro de Schwarzschild.

## 4.2 Sobre Estados Coerentes

### 4.2.1 Operadore de Criação e Aniquilação

Para fins de facilidade e sem perdas de significado iremos reescrever (4.24) suprimindo a constante para dentro de  $\theta^{ij}$

$$[Q^i, Q^j] = i\theta^{ij} \quad (4.49)$$

e considerando um espaço-tempo de dimensão 2+1, escrevemos as relações de comutação das coordenadas espaciais na forma

$$[Q^i, Q^j] = i\theta\epsilon^{ij} \quad (4.50)$$

$$[Q^i, P_j] = i\delta^i_j \quad (4.51)$$

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (4.52)$$

onde  $\epsilon^{ij}$  é o tensor de Levi-Civita de segunda ordem e  $i, j = 1, 2$ .

Uma das diferenças presentes no espaço-tempo não-comutativo é que devido a (4.50) não é possível encontrar um autovetor que seja comum a  $Q^1$  e  $Q^2$ . Com isso, é conveniente trabalharmos com um conjunto de estados em que podemos utilizar para definir valores médio dos operadores de posição. Assim, introduziremos [46]

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 + iQ^2) \quad (4.53)$$

$$A^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q^1 - iQ^2) \quad (4.54)$$

cujo comutador é

$$\begin{aligned} [A, A^\dagger] &= \frac{1}{2}[Q^1 + iQ^2, Q^1 - iQ^2] \\ &= \frac{1}{2}([Q^1, Q^1] - i[Q^1, Q^2] + i[Q^2, Q^1] + [Q^2, Q^2]) \\ &= \theta \end{aligned} \quad (4.55)$$

que pode ser comparado com os operadores de destruição e criação usados para resolver o oscilador harmônico quântico [35] quando  $\theta \rightarrow \hbar$ . Se definirmos um estado  $|a\rangle$  em que o operador  $A$  tenha uma autovalor  $a$  associado de forma que

$$A|a\rangle = a|a\rangle \quad (4.56)$$

$$\langle a| A^\dagger = \langle a| \bar{a} \quad (4.57)$$

com  $\bar{a}$  representando o complexo conjugado de  $a$ . Podemos dizer então que existe um conjunto de estados coerentes [47]. Os operadores associados a esses estados devem seguir a mesma algebra daqueles associados aos estados de um oscilador harmônico [48]. Sendo assim definimos o operador número  $N$  como

$$\begin{aligned} N &= A^\dagger A \\ &= \frac{1}{2}(Q^1 - iQ^2)(Q^1 + iQ^2) \\ &= \frac{1}{2}(Q^1 Q^1 + Q^2 Q^2 + i[Q^1, Q^2]) \\ &= \frac{1}{2}(Q^1 Q^1 + Q^2 Q^2 + \theta) \end{aligned} \quad (4.58)$$

e  $N^\dagger$

$$\begin{aligned} N^\dagger &= A A^\dagger \\ &= \frac{1}{2}(Q^1 Q^1 + Q^2 Q^2 - \theta) \\ &= N + \theta \end{aligned} \quad (4.59)$$

Comutando  $N$  com os operadores  $A$  e  $A^\dagger$  obtemos

$$\begin{aligned} [N, A] &= [A^\dagger A, A] \\ &= A^\dagger [A, A] + [A^\dagger, A]A \\ &= -\theta A \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} [N, A^\dagger] &= [A^\dagger A, A^\dagger] \\ &= A^\dagger [A, A^\dagger] + [A^\dagger, A^\dagger]A \\ &= \theta A^\dagger \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde usamos a propriedade dos comutadores  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ . Um operador número aplicando em um auto-estado  $|n\rangle$  associado resultará em um auto-valor  $n$

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (4.62)$$

$$N^\dagger |n\rangle = (n + \theta) |n\rangle \quad (4.63)$$

com  $n$  tendo que ser um múltiplo inteiro de  $\theta$  como veremos a seguir. Aplicamos agora os operador  $NA$  e  $NA^\dagger$  sobre o estado  $|n\rangle$

$$\begin{aligned} NA |n\rangle &= ([N, A] + AN) |n\rangle \\ &= (n - \theta)A |n\rangle \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} NA^\dagger |n\rangle &= ([N, A^\dagger] + A^\dagger N) |n\rangle \\ &= (n + \theta)A^\dagger |n\rangle \end{aligned} \quad (4.65)$$

como o operador  $N$  indica o nível que o estado  $|n\rangle$  se encontra, podemos concluir que os operadores  $A$  e  $A^\dagger$  realmente fazem o papel de operadores de destruição e criação de forma que

$$A |n\rangle = c |n - \theta\rangle \quad (4.66)$$

$$A^\dagger |n\rangle = d |n + \theta\rangle \quad (4.67)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes de normalização que devem ser definidas. Observamos também que  $n$  deve ser múltiplo inteiro de  $\theta$ , já que deve existir um nível fundamental – estado de vácuo – em que

$$A |0\rangle = 0 \quad (4.68)$$

### 4.2.2 Relação de Recursão

Para a determinar  $c$  faremos

$$\langle n | A^\dagger A |n\rangle = \langle n | c^2 |n\rangle \quad (4.69)$$

como do lado esquerdo temos o operador número, temos que

$$c = \sqrt{n} \quad (4.70)$$

com a convenção de que  $c$  é real e positivo. Para determinar  $d$  faremos o mesmo processo

$$\langle n | AA^\dagger |n\rangle = \langle n | d^2 |n\rangle \quad (4.71)$$

e assim como anteriormente, aqui temos o operador  $N^\dagger$

$$d = \sqrt{n + \theta} \quad (4.72)$$

e então

$$A |n\rangle = \sqrt{n} |n - \theta\rangle \quad (4.73)$$

$$A^\dagger |n\rangle = \sqrt{n + \theta} |n + \theta\rangle \quad (4.74)$$

Como existe um estado de vácuo, podemos escrever qualquer estado  $|n\rangle$  como uma sucessão de operadores  $A^\dagger$  a partir de  $|0\rangle$ . Para isso vemos que

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{A^\dagger}{\sqrt{n}} |n - \theta\rangle \\ &= \frac{(A^\dagger)^2}{\sqrt{n}\sqrt{n - \theta}} |n - 2\theta\rangle \\ &= \frac{(A^\dagger)^m}{(m!\theta^m)^{1/2}} |0\rangle \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde fizemos  $n = m\theta$ , com  $m$  sendo um número inteiro que também identifica o número de vezes que o operador  $A^\dagger$  foi aplicado. E assim confirmamos que os operadores  $A$  e  $A^\dagger$  formam um conjunto que segue a algebra dos operadores de destruição e aniquilação.

### 4.2.3 Estado de Vácuo

Com (4.75) podemos descrever o estado  $|a\rangle$  na base  $|n\rangle$  em termo de estado de vácuo  $|0\rangle$ . Primeiro fazemos

$$\langle n | a \rangle = \frac{A^m}{(m!\theta^m)^{1/2}} \langle 0 | a \rangle \quad (4.76)$$

como  $A$  aplicado sobre  $|a\rangle$  tem auto-valor  $a$

$$\langle n | a \rangle = \frac{a^m}{(m!\theta^m)^{1/2}} \langle 0 | a \rangle \quad (4.77)$$

Sobre um estado  $|a\rangle$  aplicamos um operador de projeção para a base de  $|n\rangle$  de forma que

$$|a\rangle = \sum_m |n\rangle \langle n|a\rangle \quad (4.78)$$

utilizando (4.77) ficamos com

$$|a\rangle = \langle 0|a\rangle \sum_m \frac{a^m}{(m!\theta^m)^{1/2}} |n\rangle \quad (4.79)$$

precisando determinar  $\langle 0|a\rangle$ , para isso faremos calculemos quadrado do comprimento de  $|a\rangle$

$$\langle a|a\rangle = |\langle 0|a\rangle|^2 \sum_m \frac{|a|^{2m}}{m!\theta^m} \quad (4.80)$$

onde foi usado a relação de ortonormalidade

$$\langle n_i|n_j\rangle = \delta_{i,j} \quad (4.81)$$

o somatório que aparece em (4.80) é uma expansão de uma função exponencial, então

$$\langle a|a\rangle = |\langle 0|a\rangle|^2 \exp\left\{\frac{a\bar{a}}{\theta}\right\} \quad (4.82)$$

e como  $|a\rangle$  é normalizado  $\langle a|a\rangle = 1$ , portanto

$$\langle 0|a\rangle = \exp\left\{-\frac{a\bar{a}}{2\theta}\right\} \quad (4.83)$$

assim

$$|a\rangle = \exp\left\{-\frac{a\bar{a}}{2\theta}\right\} \sum_m \frac{a^m}{(m!\theta^m)^{1/2}} |n\rangle \quad (4.84)$$

Utilizando (4.75)

$$|a\rangle = \exp\left\{-\frac{a\bar{a}}{2\theta}\right\} \sum_m \frac{(aA^\dagger)^m}{m!\theta^m} |0\rangle \quad (4.85)$$

e vendo novamente que o somatório se trata da expansão de uma função exponencial

$$|a\rangle = \exp\left\{-\frac{a\bar{a}}{2\theta}\right\} \exp\left\{\frac{aA^\dagger}{\theta}\right\} |0\rangle \quad (4.86)$$

#### 4.2.4 Relação de Completeza

Se a base  $|a\rangle$  é uma base completa, ela deve ter uma relação com completeza.

$$\int |a\rangle \langle a| d^2a \quad (4.87)$$

de forma que (4.87) não seja divergente e com  $d^2a = d(\text{Re } a)d(\text{Im } a)$  é a área infinitesimal do plano de  $a$  [47]. Em coordenadas polares (4.87) fica

$$\int |a\rangle \langle a| |a| d|a| d\phi \quad (4.88)$$

onde  $|a\rangle = \sqrt{a\bar{a}}$  e  $a = |a|e^{i\phi}$  é a representação exponencial do complexo  $a$ , cujo complexo conjugado então é  $\bar{a} = |a|e^{-i\phi}$  e  $\phi$  representa o ângulo que  $|a\rangle$  faz com o eixo dos reais. Para determinar a relação de completeza faremos com uso de (4.84) e sabendo que  $|n\rangle = |\theta m\rangle$

$$|a\rangle\langle a| = \exp\left\{-\frac{|a|^2}{\theta}\right\} \left[ \sum_{m_1} \frac{a_1^m}{(m_1!\theta^{m_1})^{1/2}} |n_1\rangle \right] \left[ \sum_{m_2} \frac{\bar{a}_2^m}{(m_2!\theta^{m_2})^{1/2}} \langle n_2| \right] \quad (4.89)$$

podemos separar o produto dos somatório entre aqueles em que  $m_1 = m_2$  e aqueles que  $m_1 \neq m_2$  deixando (4.89) na forma

$$|a\rangle\langle a| = \exp\left\{-\frac{|a|^2}{\theta}\right\} \left[ \sum_{m=m_1=m_2} \frac{a^m \bar{a}^m}{m!\theta^m} |n\rangle\langle n| + \sum_{m_1 \neq m_2} \frac{a^{m_1} \bar{a}^{m_2}}{(m_1!\theta^{m_1})^{1/2} (m_2!\theta^{m_2})^{1/2}} |n_1\rangle\langle n_2| \right] \quad (4.90)$$

Fazendo uma troca de variável  $\alpha = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$ , a relação de completeza fica

$$\int |a\rangle\langle a| \sqrt{\theta} |\alpha\rangle\langle \alpha| d\alpha d\phi \quad (4.91)$$

e (4.90)

$$|a\rangle\langle a| = e^{-|\alpha|^2} \left[ \sum_{m=m_1=m_2} \frac{(\alpha\bar{\alpha})^m}{m!} |n\rangle\langle n| + \sum_{m_1 \neq m_2} \frac{\alpha^{m_1} \bar{\alpha}^{m_2}}{(m_1!)^{1/2} (m_2!)^{1/2}} |n_1\rangle\langle n_2| \right] \quad (4.92)$$

utilizando a forma exponencial de  $\alpha$  em (4.92)

$$|a\rangle\langle a| = e^{-|\alpha|^2} \left[ \sum_{m=m_1=m_2} \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} |n\rangle\langle n| + \sum_{m_1 \neq m_2} \frac{|\alpha|^{m_1+m_2}}{(m_1!)^{1/2} (m_2!)^{1/2}} e^{i(m_1-m_2)\phi} |n_1\rangle\langle n_2| \right] \quad (4.93)$$

aplicando (4.91) vemos que o segundo termo dentro dos colchetes de (4.93) será nulo, pois

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m_1-m_2)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m_1, m_2} \quad (4.94)$$

sobrando apenas o primeiro termo, logo

$$\int |a\rangle\langle a| d^2a = 2\pi\sqrt{\theta} \int_0^\infty e^{-|\alpha|^2} \sum_m \frac{|\alpha|^{2m+1}}{m!} |n\rangle\langle n| d|\alpha| \quad (4.95)$$

efetuando mais uma troca de variável em  $|\alpha|$  na forma  $y = |\alpha|^2$  ficamos com

$$\int |a\rangle\langle a| d^2a = \pi\sqrt{\theta} \int_0^\infty e^{-y} \sum_m \frac{y^m}{m!} |n\rangle\langle n| dy \quad (4.96)$$

como  $\int_0^\infty e^{-y} y^m dy = m!$  [49], ficamos com

$$\begin{aligned} \int |a\rangle\langle a| d^2a &= \pi\sqrt{\theta} \sum_m |n\rangle\langle n| \\ &= \pi\sqrt{\theta} \end{aligned} \quad (4.97)$$

mostrando que  $|a\rangle$  é uma base completa de forma que podemos representar os valores médios de  $Q^1$  e  $Q^2$  a partir dessa base. De (4.53) e (4.54) temos

$$Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^\dagger) \quad (4.98)$$

$$Q^2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A - A^\dagger) \quad (4.99)$$

portanto.

$$\begin{aligned} \langle a|Q^1|a\rangle &= \langle a|\frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^\dagger)|a\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \bar{a}) \\ q^1 &= \sqrt{2} \operatorname{Re} a \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \langle a|Q^2|a\rangle &= \langle a|-\frac{i}{\sqrt{2}}(A - A^\dagger)|a\rangle \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(a - \bar{a}) \\ q^2 &= \sqrt{2} \operatorname{Im} a \end{aligned} \quad (4.101)$$

De forma que o vetor espacial  $\vec{q} = (q^1, q^2)$  representa a posição média da partícula no espaço não-comutativo. Como são valores médios eles não representam auto-valores, podendo ser medidos simultaneamente [50]. Da mesma forma é possível determinar o valor esperado de qualquer outro operador  $F$ , desde que seja em função dos operadores posição  $Q^i$ ,  $i = 1, 2$  e associá-lo à uma função  $f$  na forma

$$\langle a|F(Q^1, Q^2)|a\rangle = f(q^1, q^2) \quad (4.102)$$

### 4.3 O Espaço-Tempo em uma Distribuição Gaussiana

Como podemos o valor médio para qualquer função de  $F(Q^1, Q^2)$ , vamos considerar uma onda plana na versão não comutativa

$$e^{ip_i Q^i} = e^{ip_1 Q^1 + ip_2 Q^2} \quad (4.103)$$

onde  $p_i$  é o momentum conjugado de  $q^i$ . Como o valor médio é feito na base  $|a\rangle$  é interessante escrever a função de onda em termo de operadores de aniquilação e de destruição. Utilizando (4.98) e (4.99) ficamos com

$$\exp\left\{i\left[\frac{p_1 + ip_2}{\sqrt{2}}A^\dagger + \frac{p_1 - ip_2}{\sqrt{2}}A\right]\right\} = e^{i(p_+ A^\dagger + p_- A)} \quad (4.104)$$

onde denotamos  $p_+$  e  $p_-$  para fins de simplificação. e como os operadores  $A$  e  $A^\dagger$  não-comutam, usaremos a fórmula de Backer-Hausdorff [50] para fazer uma decomposição

$$e^{i(p_+ A^\dagger + p_- A)} = e^{ip_+ A^\dagger} e^{ip_- A} e^{\frac{p_+ p_-}{2}[A^\dagger, A]} \quad (4.105)$$

reescrevendo  $p_+$  e  $p_-$  em termos de  $p_1$  e  $p_2$ , usando (4.55), (4.100), (4.101) e sabendo que um operador no expoente aplicado a uma auto-estado desse operador resulta em  $e^{cA}|a\rangle = e^{ca}|a\rangle$ , com  $c$  sendo uma constante, obtemos

$$\langle a|e^{i(p_1 Q^1 + p_2 Q^2)}|a\rangle = \exp\left\{\left(-\theta\frac{(\vec{p})^2}{4} + i\vec{p}\cdot\vec{q}\right)\right\} \quad (4.106)$$

com  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  e  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ .

Observamos que (4.106) é uma função que representa um pacote gaussiano de  $\vec{q}$  na representação de  $\vec{p}$  [35] de forma que podemos interpretar como uma função de onda de uma partícula livre no espaço não-comutativo [50]

$$\langle p|q \rangle \equiv \exp\left\{\left(-\theta\frac{(\vec{p})^2}{4} + i\vec{p} \cdot \vec{q}\right)\right\} \quad (4.107)$$

no espaço comutativo quando dois auto-vetores de base  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  são ortogonais [35] obedecem a relação

$$\langle x|y \rangle = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.108)$$

porém o espaço não-comutativo podemos ver, através de (4.107), a condição de ortogonalidade não irá dar origem a uma função delta de Dirac, sendo uma consequência da não-comutatividade. Começemos com a definição dada por [50] que diferencia de [35] por uma constante de normalização

$$\langle y|x \rangle = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \langle y|p \rangle \langle p|x \rangle \quad (4.109)$$

onde  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  serão as bases dos vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  conjugados de  $\vec{q}$ . Aplicando (4.107) e usando  $\langle A|B \rangle = (\langle B|A \rangle)^*$ , no qual o sinal \* serve para representar o complexo conjugado, obtemos

$$\langle y|x \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2p \exp\left\{-\frac{\theta(\vec{p})^2}{2}\right\} \exp\{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})\} \quad (4.110)$$

com  $\vec{p} = (p_x, p_y)$  temos  $(\vec{p})^2 = p_x^2 + p_y^2$  e o diferencial  $d^2p = dp_x dp_y$  de forma que podemos rearranjar os termos de (4.110) na forma

$$\langle y|x \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \exp\left\{-\frac{\theta p_x^2}{2} - ip_x x\right\} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \exp\left\{-\frac{\theta p_y^2}{2} - ip_y y\right\} \right) \quad (4.111)$$

Para resolver as integrais em (4.111) usaremos o resultado tabelado [51]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 - bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} \quad (4.112)$$

obtendo

$$\langle y|x \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\theta}\right\} \quad (4.113)$$

o expoente em (4.113) pode ser escrito em termos de vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  na forma  $(\vec{x} - \vec{y})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \phi$ , já que  $\phi$  é o ângulo entre  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  que são ortogonais – a escolha foi feita para que  $\langle a|b \rangle$ , entre vetores  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$  não ortogonais, também possa ser incluso – ficando assim

$$\langle y|x \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left\{-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\theta}\right\} \quad (4.114)$$

Esse resultado mostra o efeito da não-comutatividade ao substituir uma função delta de Dirac, relacionada a posições pontuais, por uma distribuição gaussiana de meio comprimento  $\sqrt{\theta}$  que corresponderia a um comprimento mínimo de uma espaço "borrado". Vemos também que no limite comutativo,  $\theta \rightarrow 0$ , retornamos a função delta de Dirac.

# Capítulo 5

## Buraco Negro de Schwarzschild na Geometria Não-Comutativa

### 5.1 A Não-Comutatividade no Momentum-Energia

No espaço-tempo comutativo, massas pontuais são bem localizadas. Porém, como vimos no capítulo anterior, quando adotamos um espaço-tempo não-comutativo essas massas pontuais passam a ter sua localização distribuída em torno de uma posição central com meia largura na ordem de  $\sqrt{\theta}$ . Isso faz com que as posições  $x^\mu$  e  $x^\nu$  em um plano de referência sejam mediados por um princípio da incerteza

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{\theta^{\mu\nu}}{2} \quad (5.1)$$

como podemos concluir de (4.49). Na seção 2.4 deduzimos a equação de Einstein adotando argumentos clássico e sem considerar efeitos da não-comutatividade. Embora isso, não há a necessidade de reformular a equação de Einstein para o espaço não comutativo. A motivação para isso é que a não-comutatividade é uma propriedade intrínseca de uma *manifold*<sup>1</sup> que afeta a distribuição de matéria e energia [11, 12] embaçando objetos pontuais. Enquanto que a curvatura é uma forma que quantificar a intensidade de uma campo gravitacional em termos de geometria. Dessa forma a não-comutatividade deve afetar apenas o tensor momentum-energia, mantendo inalterada o tensor de Einstein. Dessa forma podemos assumir uma densidade de massa  $\rho(r)$  para uma partícula de massa  $M$  no espaço não-comutativo como uma função gaussiana do tipo [12, 13, 52]

$$\rho(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\theta} \quad (5.2)$$

que representa também uma distribuição estática e simetricamente esférica. Veja que para  $\sqrt{\theta} \ll r$  a exponencial é aproximadamente nula e (5.2) volta a representar uma delta de Dirac. Uma das consequências diretas é que haverá uma modificação na componente  $T^0_0 = \rho(r)$  do tensor energia-momentum.

Sobre a densidade de massa  $\rho$  é importante destacar algumas propriedades [13]. Se tomarmos a derivada de  $\rho(r)$  em relação a  $r$  obtemos

$$\frac{d\rho}{dr} = -Kr e^{-r^2/4\theta} \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup>Manifold é o termo utilizado para descrever um espaço topológico localmente Euclidiano. [15]

onde  $K = \frac{2M}{\pi^{3/2}(4\theta)^{5/2}}$ . Se observarmos na Figura 5.1 que representa  $\rho(r)$  para diferentes valores em termos de  $M$ , no limite no qual  $r \ll \sqrt{\theta}$ , (5.3) tende a zero de forma que  $\rho(r) \approx \rho(0)$ , enquanto que no limite  $r \geq 4\sqrt{\theta}$  a derivada também se anula, só que  $\rho(r) \approx$  constante  $\ll \rho(0)$ . E no limite assintótico com  $r \gg 2M$ ,  $\rho(r) \approx 0$ .

Como a massa é dada por uma distribuição gaussiana, devemos determinar seu valor através de uma integral de  $\rho(r)$  sobre um volume de raio  $r'$

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r 4\pi\rho(r')r'^2 dr' \\ &= \int_0^r \frac{4\pi M r'^2}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-r'^2/4\theta} dr' \\ &= \frac{M}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \int_0^r r'^2 e^{-r'^2/4\theta} dr' \end{aligned} \quad (5.4)$$

fazendo uma troca de variável  $u = \frac{r'^2}{4\theta}$  temos que  $dr' = \frac{\sqrt{4\theta u}}{2} du$ . Fazendo todas as substituições de  $r'$  em (5.4) ficamos com

$$\begin{aligned} m &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/4\theta} u^{1/2} e^{-u} \\ &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/4\theta} u^{3/2-1} e^{-u} \end{aligned} \quad (5.5)$$

de [49] temos a função

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} = (n-1)! \quad (5.6)$$

e se verificarmos em (5.5) temos uma função semelhante, com a diferença que o limite superior de integração é finito, logo podemos definir uma função gama incompleta  $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$  como

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \int_0^{r^2/4\theta} u^{3/2-1} e^{-u} \quad (5.7)$$

e a massa da partícula será dada por

$$m = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \quad (5.8)$$

notemos que no limite comutativo  $\frac{r^2}{4\theta} \rightarrow \infty$ ,  $\gamma = \sqrt{\pi}/2$  e  $m = M$ . Ainda não foi possível detectar efeitos fenomenológicos da não-comutatividade [13], o que leva a suposição de que  $\sqrt{\theta} < 10^{-18}m$ . Logo para largas distâncias, efeitos não-comutativos não devem interferir na métrica, sendo observável apenas no limite  $r \approx \sqrt{\theta}$ . E como podemos ver na Figura 5.2, pelo comportamento assintótico, para  $r \gtrsim 5\sqrt{\theta}$  os efeitos não-comutativos já são desprezíveis, pois na esfera de volume  $5\sqrt{\theta}$  já temos praticamente toda a massa do objeto e a métrica obedecendo a métrica comutativa de Schwarzschild. Condição essa que está em acordo com o que vimos também na Figura 5.1, já que para  $r = 5\sqrt{\theta}$  temos  $\rho(r) \approx 0$ .

Mesmo pensando que nessa distribuição de massa tivéssemos um fluido dinâmico, pela simetria esférica, pelo teorema de Birkhoff, estaríamos impedidos de detectar quaisquer manifestações dessa dinâmica em uma distância maior que  $5\sqrt{\theta}$ .

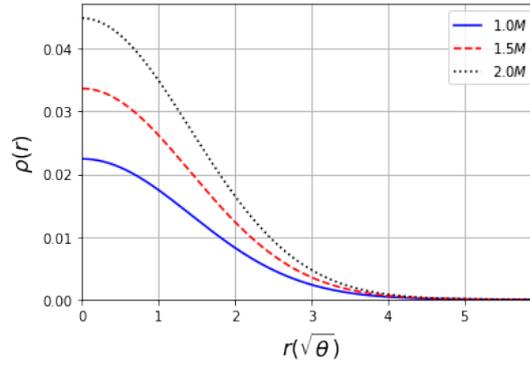


Figura 5.1: Densidade de massa  $\rho(r)$  para diferentes valores em termos de  $M$ . A linha contínua (em azul) se refere a  $1M$ , a linha tracejada (em vermelho) a  $1.5M$  e a linha pontilhada (em preto) a  $2M$ . Para  $r \geq \sqrt{\theta}$  a densidade é praticamente nula, enquanto que para  $r \ll \sqrt{\theta}$  a densidade é constante e próximo de  $\rho(0)$ . Imagem do autor.

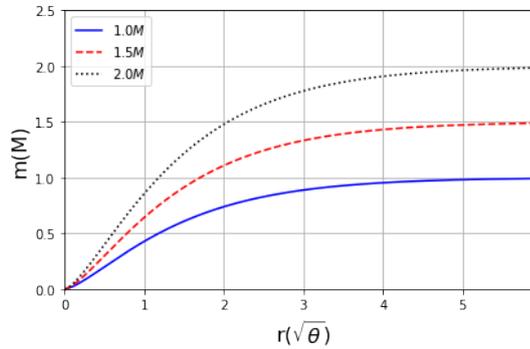


Figura 5.2: Massa do objeto (em termos de  $M$ ) em função do raio  $r$ , de acordo com a função de densidade  $\rho(r)$ . A linha contínua (em azul) se refere a  $1M$ , a linha tracejada (em vermelho) a  $1.5M$  e a linha pontilhada (em preto) a  $2M$ . Para  $r \gtrsim 5\sqrt{\theta}$ ,  $m$  é praticamente constante. Imagem do autor.

## 5.2 A Métrica de Schwarzschild Não-Comutativa

Como a não-comutatividade afeta apenas o tensor momentum-energia, podemos resolver a equação de Einstein no espaço não-comutativo para uma simetria esférica através da métrica de Schwarzschild aplicando (5.8) na métrica (3.21) e o resultado é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma(3/2, r^2/4\theta)\right) dt^2 - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma(3/2, r^2/4\theta)\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.9)$$

vemos que o horizonte de eventos só irá ser em  $r_{sc} = 2M$  no limite comutativo (para valores de  $r^2/4\theta \gg 1$ ), logo devemos determinar a posição do horizonte de eventos. Vimos na seção 3.2 que o horizonte de eventos delimita a região onde os sinais de  $dt^2$  e  $dr^2$  são trocados, de forma que uma componente tipo tempo passe a ser tipo espaço e vice-versa. Na métrica comutativa de Schwarzschild o horizonte de eventos é definida na região onde  $g_{00} = 0$  em  $r_{sc} = 2M$ . Sendo assim, devemos procurar por valores de  $r$  nos quais  $g_{00} = 0$ . Mas como a função  $\gamma(3/2, r^2/4\theta)$  é uma função crescente com comportamento assintótico e a função  $1/r$  é decrescente e com comportamento também assintótico, espera-se que possa ser possível haver dois horizontes<sup>2</sup> dependendo do valor de  $M$ , assim como pode

<sup>2</sup>A partir daqui, quando nos referirmos a horizonte estamos nos referindo ao valor de  $r$  em que  $g_{00} = 0$ , delimitando um horizonte de eventos.

haver soluções em que não há horizonte. Para determinar os limites de  $M$  para a existência ou não de horizonte vemos o mínimo local de  $g_{00}$  aplicando uma derivação em  $r$ .

$$\frac{dg_{00}}{dr} = \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) = 0 \quad (5.10)$$

como a derivada deve ser nula no mínimo, podemos reduzir para

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) = 0 \quad (5.11)$$

uma conclusão que se tira diretamente de (5.11) é que  $r$  onde  $g_{00}$  é mínimo independe do valor de  $M$  de forma que será o mesmo para todo objeto esfericamente simétrico.

Outro ponto é que na derivada temos funções inversas e exponenciais de forma que não podemos resolver analiticamente. Sendo assim foi desenvolvido uma pequena aplicação em *Python*<sup>3</sup> para determinar os valores de  $r$  mínimo e o resultado foi  $r \approx 3\sqrt{\theta}$ . Agora podemos determinar se há um valor de  $M$  em que  $r = 3\sqrt{\theta}$ . Vamos agora determinar o valor de  $M_\theta$  onde  $g_{00} = 0$  em  $r = 3\sqrt{\theta}$ . A importância desse valor de  $M_\theta$  é devido ao fato de ser o valor limite entre a situação que podemos ter dois horizontes e a que podemos não ter horizonte. Para encontrar, basta considerar  $g_{00} = 0$  para  $r = 3\sqrt{\theta}$  de forma que

$$M_\theta = \frac{3\sqrt{\theta\pi}}{4\gamma(3/2, 9/4)} \quad (5.12)$$

resolvendo de forma numérica, encontramos  $M_\theta \approx 1.9\sqrt{\theta}$ . Podemos ver na Figura 5.3, que para  $1.9\sqrt{\theta}$  há um horizonte degenerado que corresponde a situação limite que [12] chama de buraco negro extremo. Para valores  $M < 1.9\sqrt{\theta}$  não há horizonte formado, logo não é possível formar um buraco negro. Já para  $M > 1.9\sqrt{\theta}$  há dois horizontes formados. Para  $r = 0$ ,  $g_{00} = 1$ , retomando a geometria de Minkowski ao invés de haver uma singularidade como no caso comutativo. E seguindo o comportamento de  $g_{00}$  para  $M \gg \sqrt{\theta}$  um dos horizontes tenderá a ser formado em  $r = 0$ , dando origem a singularidade no caso comutativo, enquanto que o outro tenderá a se formar em  $r = 2M$ . Esse resultado é importante, pois mostra que um buraco negro precisaria de uma massa mínima para ser formado no espaço-tempo não-comutativo, sem ficar em desacordo com o já previsto pela métrica comutativa de Schwarzschild.

### 5.3 A Termodinâmica do Buraco Negro Não-Comutativo

Na seção 3.3 vimos que a temperatura  $T_H$  de uma buraco negro é dado em termos da componente  $g_{00}$  da métrica

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{dg_{00}}{dr} \right) \Big|_{r=r_{sc}} \quad (5.13)$$

utilizando  $g_{00}$  da métrica (5.9) ficamos com

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}r} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) \Big|_{r_{sc}} \quad (5.14)$$

<sup>3</sup>O código encontra-se no Apêndice A.

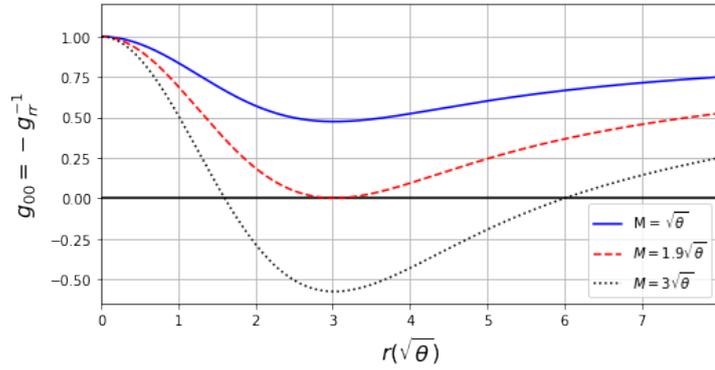


Figura 5.3:  $g_{00} = -g_{rr}^{-1}$  em função de  $r$  para alguns valores de  $M$ . A linha contínua (em azul) se refere a  $1M$  em que não há horizonte; a linha tracejada (em vermelho) se a  $1.9M$  e há apenas um horizonte; e a linha pontilhada (em preto) a  $3M$  e há dois horizontes. Imagem do autor, mas inspirado em [12].

aplicando a regra do produto

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} \gamma(3/2, r^2/4\theta) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) \Big|_{r=r_{sc}} \quad (5.15)$$

para podermos realizar a derivação em  $r$  sobre a função  $\gamma(3/2, r^2/4\theta)$  vamos abri-la e escrever em termos de  $r$ , lembrando que  $u = \frac{r^2}{4\theta}$  e a derivada fica

$$\frac{d}{dr} \left( \int_0^r \frac{r^2 e^{-r^2/4\theta}}{4\theta^{3/2}} dr \right) = \frac{r^2 e^{-r^2/4\theta}}{4\theta^{3/2}} \quad (5.16)$$

de forma que

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} \gamma(3/2, r^2/4\theta) - \frac{r e^{-r^2/4\theta}}{4\theta^{3/2}} \right) \Big|_{r=r_{sc}} \quad (5.17)$$

da métrica (5.9) podemos ver que

$$r_{sc} = \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \gamma(3/2, r_{sc}^2/4\theta) \quad (5.18)$$

Utilizando (5.18) em (5.17) ficamos com

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_{sc}} \left( 1 - \frac{r_{sc}^3 e^{-r_{sc}^2/4\theta}}{4\theta^{3/2} \gamma(3/2, r_{sc}^2/4\theta)} \right) \quad (5.19)$$

que no limite comutativo retornamos para (3.74). Nessa expressão a temperatura cresce a medida que  $r_{sc}$  decresce de forma a ter uma divergência em  $r \rightarrow 0$ . Por outro lado, a versão não-comutativa pode ter um outro comportamento na região próxima de  $\sqrt{\theta}$  [12, 13]. Na Figura 5.4 está representado a temperatura do buraco negro em função de seu raio, as unidades para  $T_H$  estão em  $\theta^{-1/2}$  e de  $r = r_{sc}$  em  $\sqrt{\theta}$ . Diferentemente do caso comutativo, representado pela linha tracejada (em vermelho) que a temperatura diverge para  $r \rightarrow 0$ , o caso não-comutativo apresenta um máximo de temperatura, além de cair para zero quando  $r_{sc} \approx 3\sqrt{\theta}$ . Para  $r < 3\sqrt{\theta}$  não há temperatura definida, já que está abaixo do raio mínimo para formar um buraco negro. Para o regime de  $r \gg 3\sqrt{\theta}$  os efeitos da não-comutatividade já são desprezíveis.

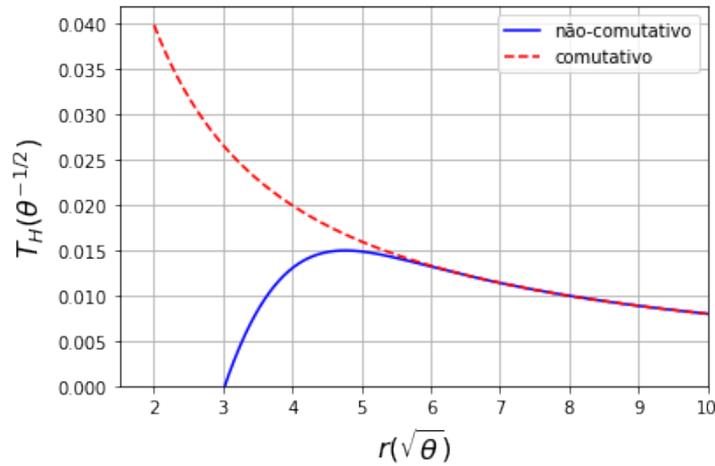


Figura 5.4:  $T_H$ , em unidade de  $\theta^{-1/2}$  em função de  $r = r_{sc}$ , em unidade de  $\sqrt{\theta}$  para o caso comutativo representado pela linha tracejada (em vermelho) e para o caso não-comutativo representado pela linha contínua (em azul). Percebe-se que no caso não comutativo a temperatura chega a um valor máximo e decresce rapidamente para 0 em  $r \approx 3\sqrt{\theta}$ , a medida que  $r$  diminui. Para  $r < 3\sqrt{\theta}$  não há temperatura definida, pois é menor que o valor mínimo para se ter a formação de um buraco negro. O máximo se encontra em  $r \approx 4.75\sqrt{\theta}$  e com  $T \approx 0.015/\sqrt{\theta}$ . A partir de  $r = 6\sqrt{\theta}$  as temperaturas já coincidem. Imagem do autor inspirado em [12].

Para determinar a temperatura máxima, foi utilizado novamente uma aplicação em Python cujo código se encontra no Apêndice B. Nele foi determinado que a temperatura máxima é de  $T_{Hmax} \approx 0.015\theta^{-1/2}$  e ocorre para um raio de  $r \approx 4.75\sqrt{\theta}$ . Interessante observar que quando  $r \approx 3\sqrt{\theta}$  que corresponde a  $M$  que forma um buraco negro sua temperatura cai para 0 deixando um buraco negro congelado [12].

Como a radiação Hawking depende proporcionalmente da temperatura, um buraco negro emitiria radiação, perdendo massa e, conseqüentemente diminuindo seu raio. Para o caso comutativo essa radiação deveria ser cada vez mais intensa, enquanto que no caso não-comutativo essa emissão encontra um ponto máximo e então passa a diminuir cada vez mais, aumentando o tempo de evaporação do buraco negro.

## 5.4 Energia-Momentum e Curvatura

Como a densidade de massa é dada por uma distribuição gaussiana espera-se que uma partícula de dimensões  $\approx \sqrt{\theta}$  se comporte como um fluido cujo tensor energia-momentum seja da forma

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\perp \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

com  $p_r$  representando uma pressão radial e  $p_\perp$  uma pressão tangencial [13] que deve ser igual para  $T^{\theta\theta}$  e  $T^{\phi\phi}$ , pois estamos lidando com uma simetria esférica. Para isso iremos determinar as componentes do tensor energia-momentum para o caso não-comutativo. Partindo da condição de conservação covariante temos

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.21)$$

aplicando (2.48)

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda} \quad (5.22)$$

escrevendo os símbolos de Christoffel em termos da métrica com (2.75)

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{\mu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{\mu\lambda} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \quad (5.23)$$

como a métrica possui apenas diagonais não-nula, podemos suprimir o somatório em  $\alpha$ . Da mesma forma, podemos suprimir o somatório em  $\lambda$  já que  $T^{\mu\nu}$  também só possui termos diagonais. Dessa forma, aplicando  $\mu = r$  e mantendo o somatório em  $\nu$  ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{r\nu} &= \partial_\nu T^{r\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{r\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{r\lambda} g^{\nu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda}) \\ &= \partial_r T^{rr} + \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} (\partial_\nu g_{\nu r} + \partial_\nu g_{r\nu} - \partial_r g_{\nu\nu}) + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} (\partial_r g_{\nu\nu} + \partial_\nu g_{\nu r} - \partial_\nu g_{\nu r}) \\ &= \partial_r T^{rr} + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

podemos abaixar um índice de  $T^{rr}$

$$T^{rr} = g^{r\alpha} T^r_\alpha = g^{rr} T^r_r \quad (5.25)$$

e aplicar apenas à derivada parcial de  $T^{rr}$  de (5.24)

$$\begin{aligned} \partial_r (g^{rr} T^r_r) + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0 \\ T^r_r \partial_r g^{rr} + g^{rr} \partial_r T^r_r + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Pro (2.38) temos que

$$g^{r\alpha} g_{\alpha r} = g^{rr} g_{rr} = 1 \quad (5.27)$$

de forma que  $g^{rr} = (g_{rr})^{-1}$  e então

$$\partial_r g^{rr} = \partial_r (g_{rr})^{-1} = -\frac{1}{g_{rr}^2} \partial_r g_{rr} \quad (5.28)$$

aplicando esse resultado no primeiro termo do lado esquerdo de (5.26)

$$-T^r_r \frac{1}{g_{rr}^2} \partial_r g_{rr} + g^{rr} \partial_r T^r_r + T^{rr} g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0 \quad (5.29)$$

faremos agora com uso de (5.25) e (5.27) uma contração multiplicando todos os termos de (5.29) por  $g_{rr}$

$$\begin{aligned} -T^r_r g^{rr} \partial_r g_{rr} + \partial_r T^r_r + T^r_r g^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^r_r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0 \\ \partial_r T^r_r - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^r_r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Em (5.30) faremos a substituição do segundo termo do lado esquerdo por

$$T^{\nu\nu} = g^{\nu\alpha} T^\nu_\alpha = g^{\nu\nu} T^\nu_\nu \quad (5.31)$$

ficando

$$\partial_r T^r_r - \frac{1}{2} T^\nu_\nu g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T^r_r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0 \quad (5.32)$$

rearranjando os termos temos

$$\partial_r T^r_r = -\frac{1}{2} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} (T^r_r - T^\nu_\nu) \quad (5.33)$$

expandindo o somatório em  $\nu$ , haverá um cancelamento para  $\nu = r$

$$\partial_r T^r_r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T^r_r - T^0_0) - \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T^r_r - T^\theta_\theta) - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} (T^r_r - T^\phi_\phi) \quad (5.34)$$

resolveremos o último termo do lado direito de (5.34). Por (2.38) temos que

$$g^{\phi\alpha} g_{\alpha\phi} = g^{\phi\phi} g_{\phi\phi} = 1 \quad (5.35)$$

$$g^{\theta\alpha} g_{\alpha\theta} = g^{\theta\theta} g_{\theta\theta} = 1 \quad (5.36)$$

e

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (5.37)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{g^{\theta\theta}}{\sin^2 \theta} \quad (5.38)$$

de forma que

$$g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} = g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} \quad (5.39)$$

e aplicando (5.39) em (5.34), e pela simetria esférica  $T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$  obtemos

$$\partial_r T^r_r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T^r_r - T^0_0) - g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T^r_r - T^\theta_\theta) \quad (5.40)$$

Pela condição da métrica de Schwarzschild  $g_{00} = -(g_{rr})^{-1}$ , de forma que para preservá-la devemos ter  $T^r_r = T^0_0 = \rho$ , com  $\rho$  sendo dado por (5.2)<sup>4</sup>. Assim (5.40) fica

$$\partial_r \rho = -g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (\rho - T^\theta_\theta) \quad (5.41)$$

na métrica de Schwarzschild temos para a componente  $g_{\theta\theta} = r^2$  e portanto  $g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$ , já que  $g^{\theta\alpha} g_{\alpha\theta} = g^{\theta\theta} g_{\theta\theta} = 1$ , de forma que obtemos para  $T^\theta_\theta$

$$T^\theta_\theta = \rho - \frac{r}{2} \partial_r \rho = p_\perp \quad (5.42)$$

Como  $p_r \neq p_\perp$ , temos um fluido anisotrópico. O fato de haver uma pressão não-nula é consequência da não-comutatividade, pois a massa não sendo pontual deve ter a pressão gravitacional compensado por uma pressão radial de sinal oposto. Dessa forma uma massa pontual é representada por uma gota auto-gravitante [13]. Porém como

$$p_\perp - p_r = \frac{r}{2} \partial_r \rho \quad (5.43)$$

essa diferença só deve ser significativa para  $r \approx \sqrt{\theta}$  e em largas distâncias deve-se retornar ao comportamento de um fluido perfeito [3]. Como podemos na Figura 5.5 os valores de

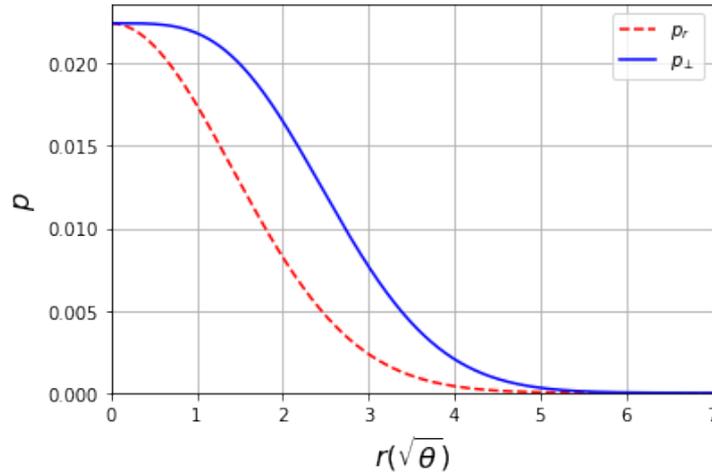


Figura 5.5: Pressão radial (tracejada em vermelho) e pressão tangencial (contínua em azul) em função de  $r$ . Para  $r > 5\sqrt{\theta}$  a diferença entre elas é considerada desprezível. Imagem do autor.

$p_r$  (tracejado em vermelho) e  $p_{\perp}$  (contínuo em azul) tem sua maior diferença  $\sqrt{\theta}$  e  $3\sqrt{\theta}$  e para  $r > 5\sqrt{\theta}$  a diferença já é desprezível.

Na teoria comutativa a curvatura  $R$  é infinita quando  $r \rightarrow 0$  de forma que obtemos uma singularidade. Dá equação de Einstein na forma (2.117), sendo  $k = 8\pi$  ( $G=1$ ) temos que

$$\begin{aligned}
 R &= -8\pi T \\
 &= -8\pi(T^0_0 + T^r_r + T^\theta_\theta + T^\phi_\phi) \\
 &= -8\pi(\rho + p_r + p_{\perp} + p_{\perp})
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

como  $p_r = \rho$  e  $p_{\perp}$  é dado por (5.42), resolvendo para  $r = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 R &= -32\pi \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \\
 &= -\frac{4M}{\sqrt{\pi\theta^3}}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

e dessa forma o modelo não-comutativo prevê que em  $r = 0$  a curvatura é não nula e finita e para a região próximo de  $r = 0$  pode ser considerada constante e, dessa forma, corresponder a um espaço localmente de De Sitter [18]<sup>5</sup>. Devido a curvatura finita, no centro do buraco negro ocorre induções através das flutuações quânticas [3]. Essas flutuações dariam origem a pressão radial prevista anteriormente ficando de acordo com as previsões já feitas e resolvendo o problema da singularidade em  $r = 0$  no caso comutativo. E para  $r \gg \sqrt{\theta}$ , como  $p_r$  e  $p_{\perp}$  tendem a zero nesse limite,  $R$  também tenderá a zero, de forma a descrever um espaço sem curvatura retornando a geometria de Minkowski.

<sup>4</sup>No artigo de base [3] a assinatura adotada foi  $\{-, +, +, +\}$  de forma que  $T^0_0 = -\rho$ . A consequência disso é apenas a inversão dos sinais de  $p_r$  e  $p_{\perp}$ , mas sem perda de significado.

<sup>5</sup>Espaço de De Sitter é uma espaço em que a curvatura é constante e finita, e se relaciona com a constante cosmológica que não foi considerado nesse estudo [18].

# Capítulo 6

## Conclusões

Vemos que a não-comutatividade do espaço-tempo traz consigo uma necessidade de reformular a mecânica quântica nos limites próximos a  $\sqrt{\theta}$ , uma vez que o produto entre funções é substituído pelo produto Moyal. Embora tal substituição mantenha a isomorfia, a obtenção de termos de uma expansão, afim de procurar por efeitos, se torna um processo trabalhoso, mesmo para o caso não relativístico e sem spin, como o que foi trabalhado. Para uma formulação mais completa dos efeitos da não-comutatividade teríamos que fazer uma formulação dentro da teoria quântica de campo. Então a adoção de estados coerentes para justificar a distribuição gaussiana para um buraco negro que substitui a singularidade se torna bastante conveniente.

Com a simples ideia de um tamanho mínimo para o espaço-tempo resolvemos o problema da singularidade presente na teoria de buracos negros, já que um ponto de volume zero e densidade infinita é substituído por uma distribuição gaussiana de massa. Vemos que essa substituição não traz inconsistências com o que já foi estudado até o momento, já que para valores  $\gg \sqrt{\theta}$  seus efeitos já são desprezíveis. A não-comutatividade prevê uma pressão radial que evitaria o colapso gravitacional, tornando o buraco negro uma gota líquida auto-gravitante. Essa pressão é originada da curvatura constante do espaço-tempo no núcleo do buraco negro responsável pela radiação Hawking. A temperatura do buraco negro, durante sua evaporação, deixa de sofrer uma divergência no limite de  $r \rightarrow 0$  e passa a ter um valor máximo em  $r \approx 4.75\sqrt{\theta}$ . E a condição para a existência de um buraco negro para a ter a inclusão de uma valor mínimo de massa de  $1.9\sqrt{\theta}$ .

Dessa forma a teoria de um espaço-tempo não-comutativo se torna um campo de estudo bastante promissor a ser estudado e desenvolvido até que possamos realizar experimentos com energia suficientemente grandes para evidenciar sua natureza.

# Referências Bibliográficas

- [1] Thomas Samuel Kuhn. *A estrutura das revoluções científicas-Posfácio*. Perspectiva, 2017.
- [2] Isaac Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press, 1999.
- [3] Piero Nicolini. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, 24(07):1229–1308, 2009.
- [4] Stephen Hawking. *A brief history of time: from big bang to black holes*. Bantam, 1988.
- [5] Jonathan L Feng and Alfred D Shapere. Black hole production by cosmic rays. *Physical Review Letters*, 88(2):021303, 2001.
- [6] Stephen W Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
- [7] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Physical Review*, 71(1):38–41, January 1947.
- [8] Ralph Blumenhagen. A course on noncommutative geometry in string theory. *Fortschritte der Physik*, 62(9-10):709–726, 2014.
- [9] Edward Witten. Non-commutative geometry and string field theory. *Nuclear Physics B*, 268(2):253–294, 1986.
- [10] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09):032, 1999.
- [11] Piero Nicolini. A model of radiating black hole in noncommutative geometry. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(39):L631, 2005.
- [12] Piero Nicolini. Noncommutative nonsingular black holes. *arXiv preprint hep-th/0510203*, 2005.
- [13] Piero Nicolini, Anais Smailagic, and Euro Spallucci. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters B*, 632(4):547–551, 2006.
- [14] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [15] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.

- [16] Hans C Ohanian and Remo Ruffini. *Gravitation and spacetime*. Cambridge University Press, 2013.
- [17] John Dirk Walecka. *Introduction to general relativity*. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [18] Wolfgang Rindler. *Relativity: special, general, and cosmological*, 2003.
- [19] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*, 2005.
- [20] Kip S Thorne, Charles W Misner, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.
- [21] Friedrich W Hehl. How does one measure torsion of space-time? *Physics Letters A*, 36(3):225–226, 1971.
- [22] Friedrich W Hehl, Paul Von der Heyde, G David Kerlick, and James M Nester. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, 48(3):393, 1976.
- [23] HT Nieh. A torsional topological invariant. *International Journal of Modern Physics A*, 22(29):5237–5244, 2007.
- [24] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [25] Hendrik A Lorentz, Albert Einstein, Hermann Minkowski, and H Weyl. *Das Relativitätsprinzip*. Springer, 1922.
- [26] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999.
- [27] E. Butkov. *Mathematical Physics*. A-W series in advanced physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [28] Nils Voje Johansen and Finn Ravndal. On the discovery of birkhoff’s theorem. *arXiv preprint physics/0508163*, 2005.
- [29] Howard Anton, Irl C Bivens, and Stephen Davis. *Calculus*. John Wiley & Sons, Chichester, England, January 2012.
- [30] Martin D Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Physical review*, 119(5):1743, 1960.
- [31] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [32] Carlos A. R. Herdeiro and José P. S. Lemos. The black hole fifty years after: Genesis of the name. 2018.
- [33] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [34] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. In *Euclidean quantum gravity*, pages 167–188. World Scientific, 1975.

- [35] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [36] Alex Casanova and Euro Spallucci. Tev mini black hole decay at future colliders. *Classical and Quantum Gravity*, 23(3):R45, 2006.
- [37] S.T. Thornton and J.B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems.* Brooks/Cole, 2004.
- [38] Paul Adrien Maurice Dirac. The fundamental equations of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 109(752):642–653, 1925.
- [39] Kamal Datta. The quantum poisson bracket and transformation theory in quantum mechanics: Dirac’s early work in quantum theory. *Resonance*, 8(8):75–85, 2003.
- [40] HO Girotti. Noncommutative quantum field theories. *arXiv preprint hep-th/0301237*, 2003.
- [41] H. O. Girotti. Noncommutative quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 72(5):608–612, 2004.
- [42] A. A. Deriglazov. Noncommutative version of an arbitrary nondegenerated mechanics, 2002.
- [43] Paul Adrien Maurice Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian journal of mathematics*, 2:129–148, 1950.
- [44] N Mukunda and ECG Sudarshan. Structure of the dirac bracket in classical mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 9(3):411–417, 1968.
- [45] Thomas Filk. Divergencies in a field theory on quantum space. *Physics Letters B*, 376(1-3):53–58, 1996.
- [46] Anais Smailagic and Euro Spallucci. Uv divergence-free qft on noncommutative plane. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(39):L517, 2003.
- [47] Roy J Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [48] Wei-Min Zhang, Robert Gilmore, et al. Coherent states: theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, 62(4):867, 1990.
- [49] João Paulo Casquilho and Paulo Ivo Cortez Teixeira. *Introdução a física estatística.* São Paulo: Editora Livrara da física, 2012.
- [50] Anais Smailagic and Euro Spallucci. Feynman path integral on the non-commutative plane. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(33):L467, 2003.
- [51] Murray R Spiegel, Seymour Lipschutz, and John Liu. *Schaum’s Outlines: Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, volume 2. McGraw-Hill, 2009.
- [52] Yun Soo Myung and Myungseok Yoon. Regular black hole in three dimensions. *The European Physical Journal C*, 62(2):405–411, 2009.

# Apêndice A

## Código Python para Obtenção do $r$ Mínimo de $g_{00}$

```
# Importando as bibliotecas necessárias
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate

#Definindo os valores de theta e M como valores unitários
theta = 1
r = np.arange(0,8,0.001)/np.sqrt(theta)
M = 1/np.sqrt(theta)

#Definindo uma função para g_00
def g00(r) :
    #definindo a função gamma incompleta
    global gamma
    gamma = lambda r: integrate.quad(lambda u: u**(1/2)*np.exp(-u)
    ,0,r**2/4/theta)[0]
    G=[]
    #Gerando uma lista para os valores de g_00
    for i in range(len(r)):
        G.append(1-4*M/i/np.sqrt(np.pi)*gamma(r[i]))
    return G

#Definido o valor mínimo de g_00 e seu respectivo valor de r
gmin = 1e9 #colocado um valor muito alto para iniciar o laço for
G = g00(r)
for i in range(len(G)):
    if G[i] <= gmin:
        gmin = G[i]
        rmin = r[i]
print(rmin)
#Calculando o valor de M para r
M = rmin*np.sqrt(np.pi)/4/gamma(rmin)
print(M)
```

# Apêndice B

## Código Python para Obtenção do $T_H$ Máximo

```
# Importando as bibliotecas necessárias
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate

#Definindo os valores de theta e M como valores unitários
theta = 1
r = np.arange(0,8,0.001)/np.sqrt(theta)
M = 1/np.sqrt(theta)

#Definindo uma função para TH
def TH(r) :
    #definindo a função gamma incompleta
    global gamma
    gamma = lambda r: integrate.quad(lambda u: u**(1/2)*np.exp(-u)
    ,0,r**2/4/theta)[0]
    T=[]
    #Gerando uma lista para os valores de TH
    for i in range(len(r)):
        aux = (1/4/np.pi/r[i])*(1-(r[i]**3*np.exp(-r[i]**2/4/theta))/
        (4*theta**(3/2)*gamma(r[i])))

        T.append(aux)
    return T

#Definido o valor mínimo de g_00 e seu respectivo valor de r
Tmax = 1e-9 #colocado um valor muito baixo para iniciar o laço for
T = TH(r)
for i in range(len(T)):
    if T[i] >= Tmax:
        Tmax = T[i]
        rmax = r[i]
print(rmax)
print(Tmax)
```