



Utrecht University



Freudenthal Institute

# Computationeel denken in de wiskundeles: Hoe krijg je dat voor elkaar?

## Werkgroep NVvW 2021

Sylvia van Borkulo

# Video computationeel denken



## Voorbeeld CD & WD

$$231 + 492$$

(1)

$$\begin{array}{r} 231 \\ 492 \\ \hline \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 231 \\ 492 \\ \hline 3 \end{array}$$

(3)

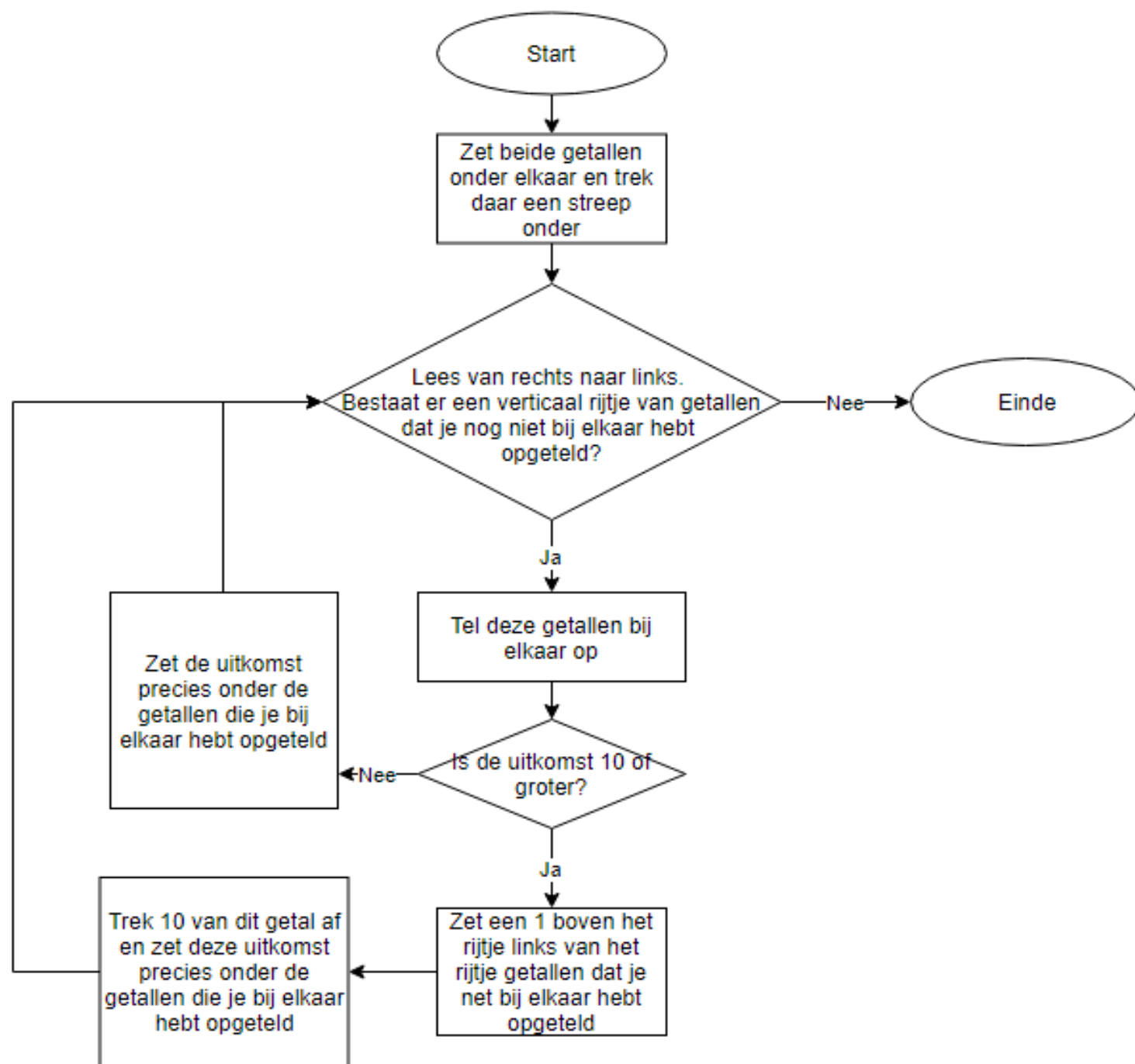
$$\begin{array}{r} 231 \\ 492 \\ \hline 23 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 231 \\ 492 \\ \hline 23 \end{array}$$

(5)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 231 \\ 492 \\ \hline 723 \end{array}$$



# **Inhoud presentatie**

1. Introductie CD
2. Onderzoek
3. Voorbeelden

# Computationeel denken

... is “in the air”, zowel nationaal als internationaal,

... maar is ook een “verzamel-begrip”.

**Computational thinking**

ICT-basisvaardigheden

Informatievaardigheden

Mediawijsheid

**Sector**

Pe

## Computational thinking

22-12-2015

**Digitale geletterdheid** is het geheel van **ICT-basisvaardigheden**, **mediawijsheid**, **informatievaardigheden** en **computational thinking**. Op deze pagina wordt **computational thinking** verder toegelicht.

**Computational thinking** is het procesmatig (her)formuleren van problemen op een zodanige manier dat het mogelijk wordt om met computertechnologie het probleem op te lossen. Het gaat daarbij om een verzameling van denkprocessen waarbij probleemformulering, gegevensorganisatie, -analyse en -representatie worden gebruikt voor het oplossen van problemen met behulp van ICT-technieken en -gereedschappen.

## **Definitie Wing (2006)**

CD heeft te maken met probleem oplossen, systemen ontwerpen en het begrijpen van menselijk gedrag, door concepten uit de informatica te gebruiken.

[...] Denken als een computer-programmeur betekent meer dan een computer kunnen programmeren. Het vereist denken op verschillende niveaus van abstractie.



# Operationele definitie CD

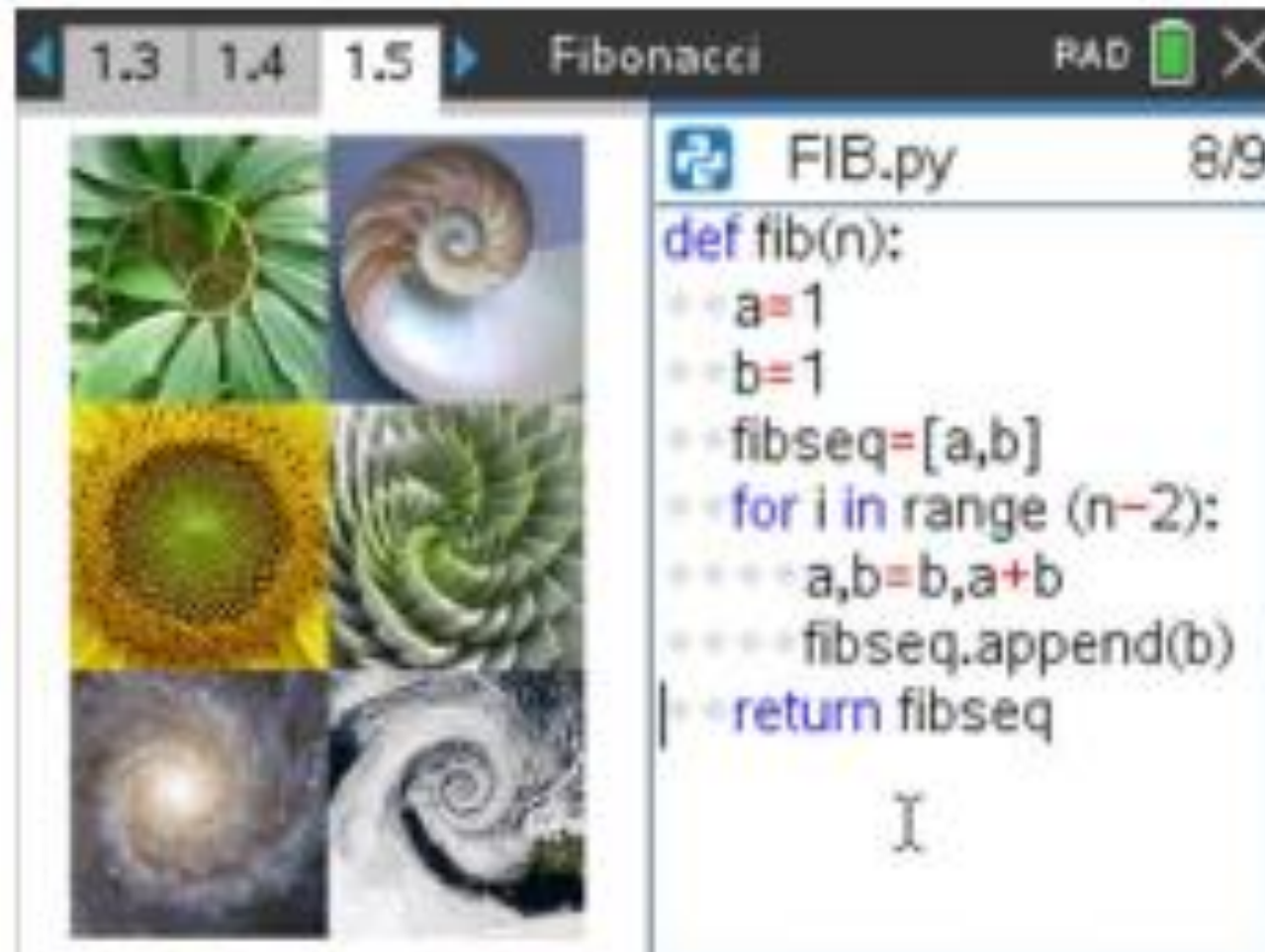
- a) problemen zo formuleren dat een computer kan helpen om oplossen,
- b) logisch organiseren en analyseren van data,
- c) representeren van data door abstracties zoals modellen en simulaties,
- d) automatiseren van oplossingen door AD (een serie geordende stappen),
- e) identificeren, analyseren en implementeren van mogelijke oplossingen met als doel om de meest efficiënte en effectieve combinatie van stappen en bronnen te gebruiken, en
- f) generaliseren naar andere problemen.

(Computer Science Teachers Association & Intern. Society for Technology in Ed., 2011)

## **CSTA & ISTE (2011): CD attitude**

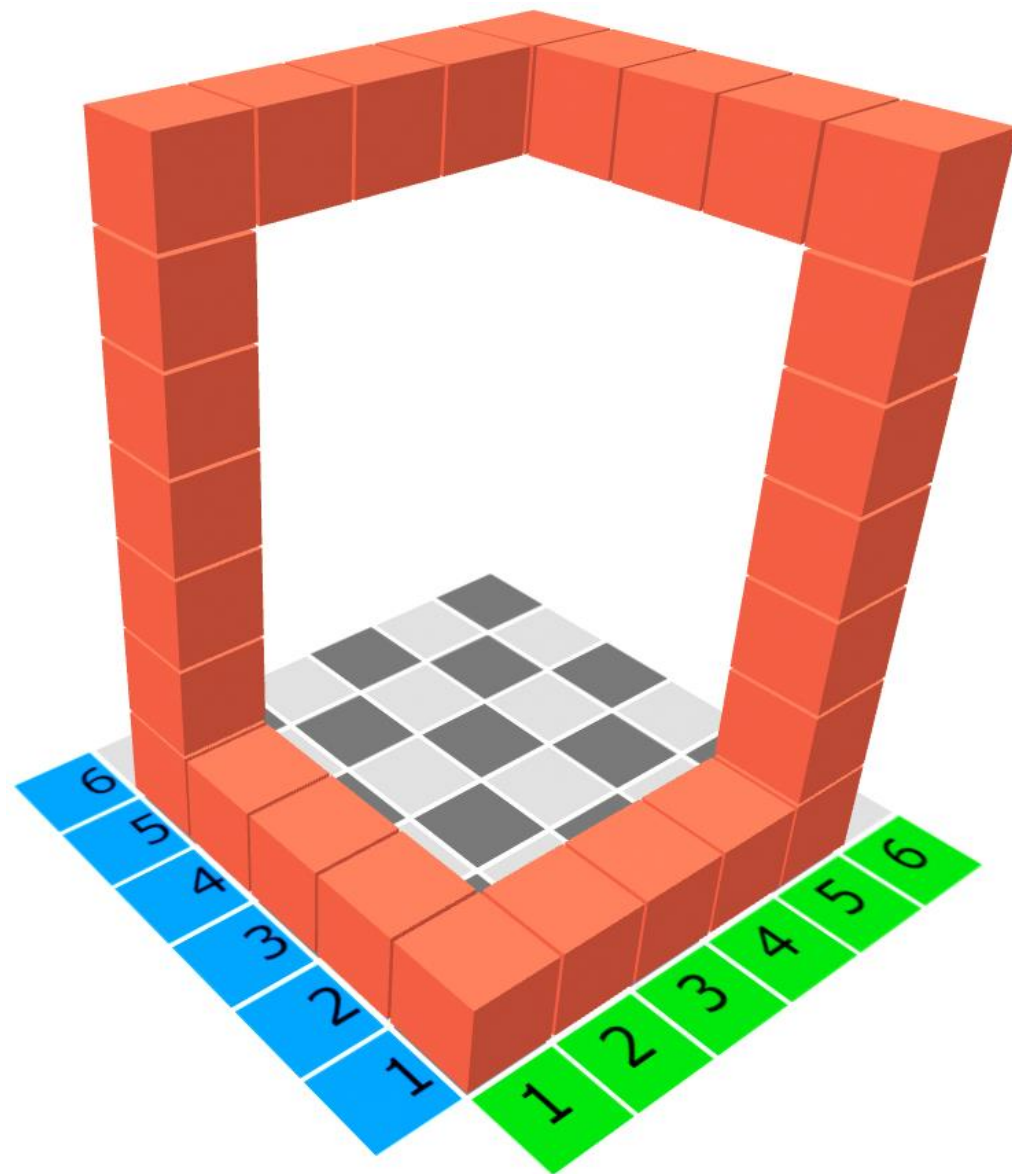
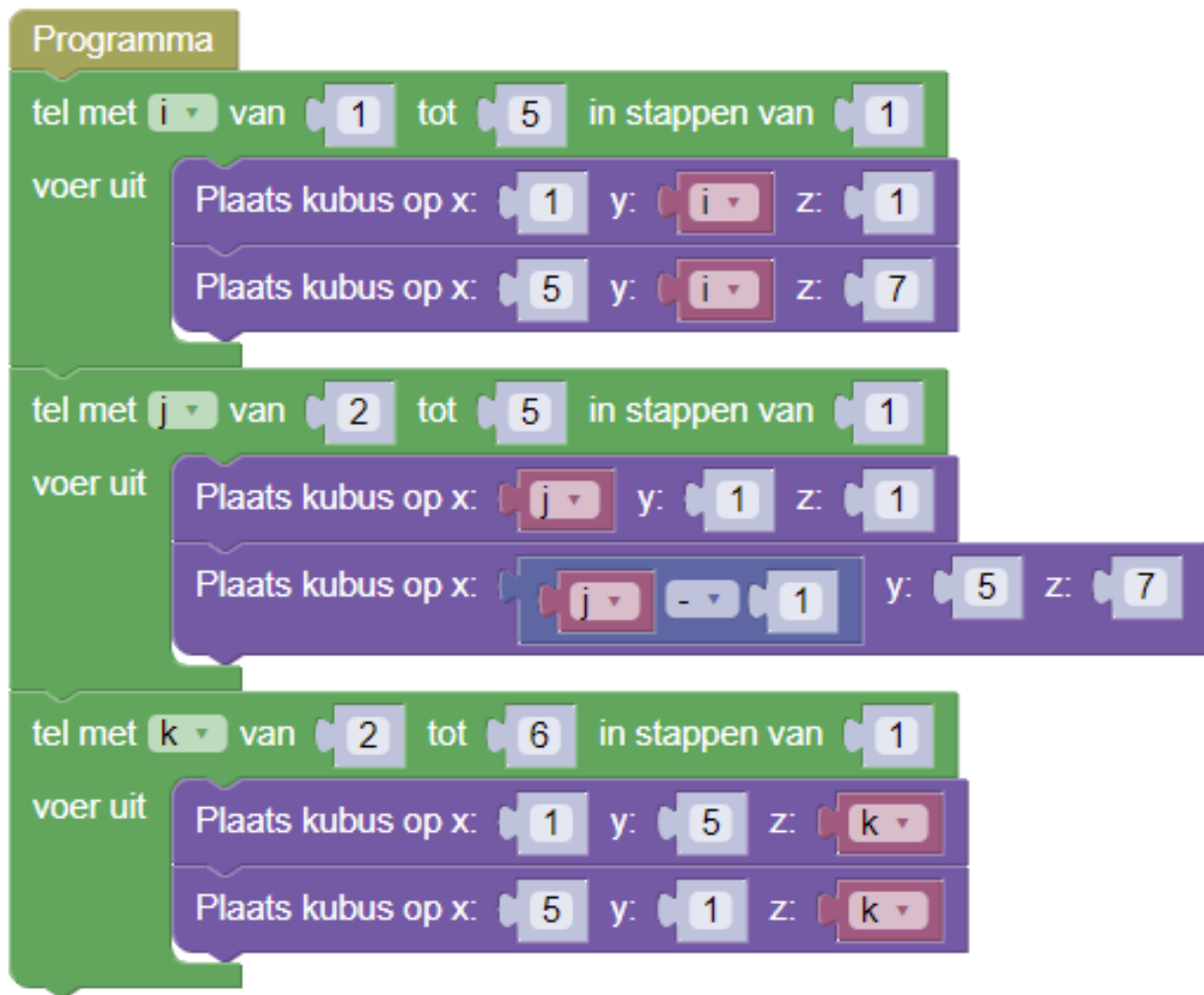
- a) Vertrouwen om met complexiteit om te gaan;
- b) Volharding bij moeilijke problemen;
- c) Tolerantie jegens ambiguïteit;
- d) Het vermogen om met open problemen om te gaan;
- e) Het vermogen om te communiceren en samen te werken met anderen om tot een oplossing te komen.

# Programmeren



The screenshot shows a Python IDE window titled "Fibonacci". The window has a tab labeled "1.5" and a status bar with "RAD" and a battery icon. On the left side, there is a grid of six images illustrating the Fibonacci sequence: a green succulent, a nautilus shell, a sunflower head, a green succulent, a galaxy, and a nautilus shell. On the right side, there is a code editor window titled "FIB.py" with 8/9 lines of code. The code defines a function `fib(n)` that returns a list of Fibonacci numbers up to the `n`-th term.

```
def fib(n):  
    a=1  
    b=1  
    fibseq=[a,b]  
    for i in range (n-2):  
        a,b=b,a+b  
        fibseq.append(b)  
    return fibseq
```





## Opdracht

## 05 Programma's voor het bouwen met blokken

Als een serie bouwopdrachten regelmatig vertoont, dan kun je handig gebruik maken van variabelen om het programma in te korten.

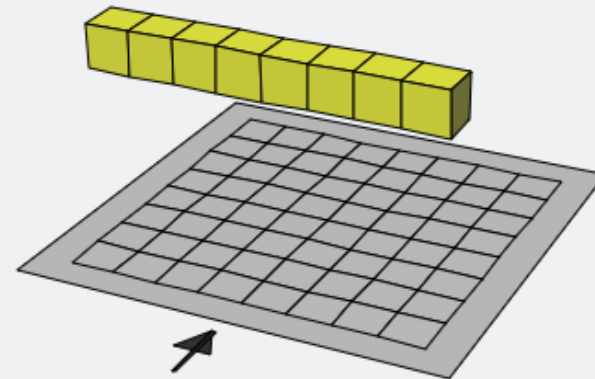
bouw 1,2,5	bouw 1,2,5
bouw 2,2,5	bouw 2,2,5
bouw 3,2,5	bouw 3,2,5
bouw 4,2,5	bouw 4,2,5
bouw 5,2,5	bouw 5,2,5
bouw 6,2,5	bouw 6,2,5
bouw 7,2,5	bouw 7,2,5
bouw 8,2,5	bouw 8,2,5

a = 1..8  
bouw a,2,5

## Bouwprogramma

```
a=1..8  
bouw a,2,5
```

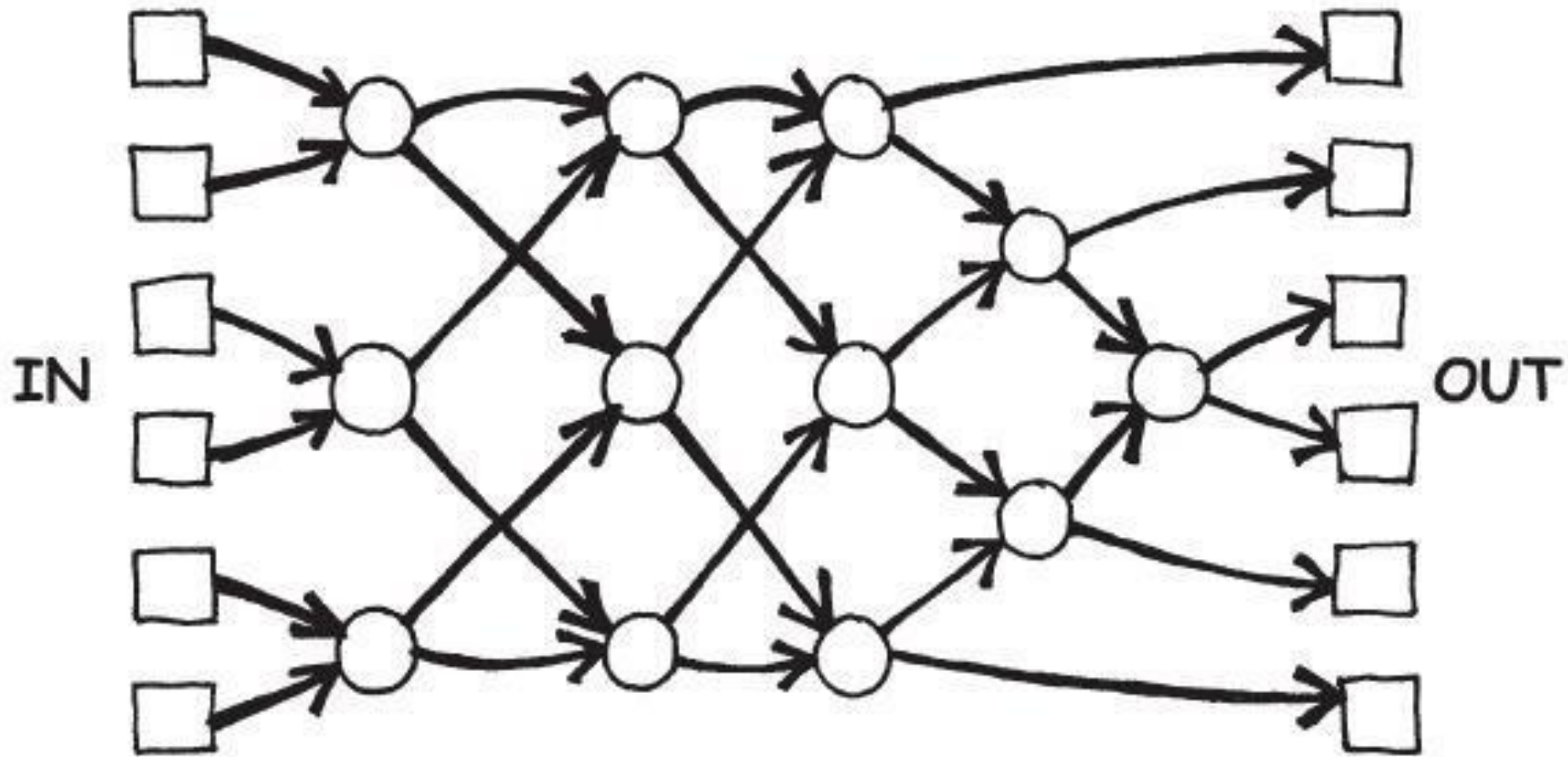
Uitvoeren



# Unplugged



# Unplugged

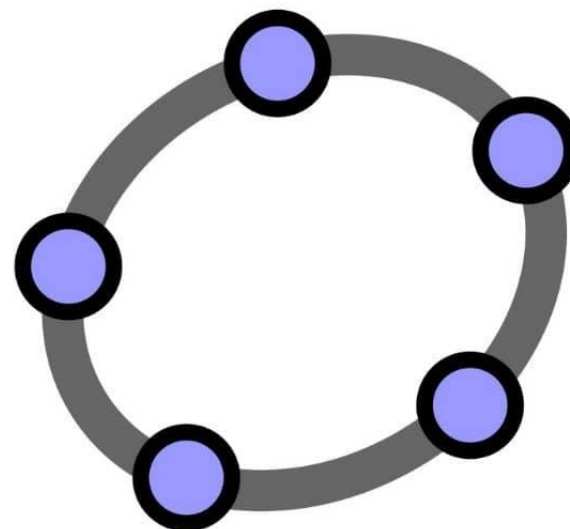


## CD met tools

Excel

GeoGebra

...





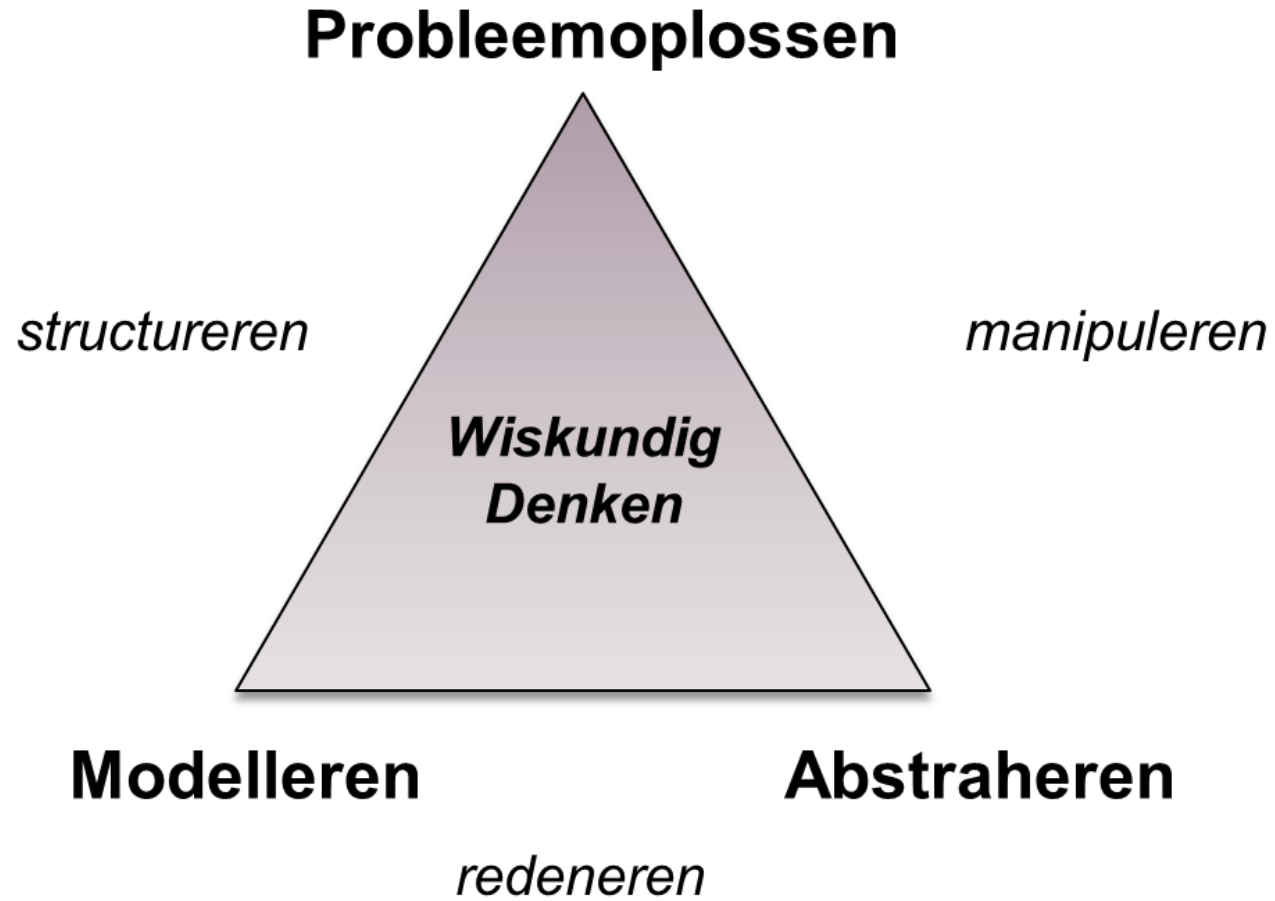
# Link met WD

Eindrapport vernieuwingscommissie cTWO (2013)

4

## Standpunt 4

Kernconcepten in het wiskundeonderwijs van havo en vwo zijn getal, formule, functie, verandering, ruimte en toeval. Centrale denkactiviteiten zijn modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren en bewijzen. Deze kernconcepten, denkactiviteiten en de bijbehorende vaardigheden moeten als lange leerlijnen door het gehele programma van havo-vwo lopen.



Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT: Inaugurele rede*. Retrieved from [https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie\\_Paul\\_Drijvers\\_facsimile\\_20150521.pdf](https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf)

## **Inhoud presentatie**

1. Introductie CD

**2. Onderzoek**

3. Voorbeelden

# Introductie onderzoeksproject

- Computationeel denken in het wiskunde-onderwijs
- Driejarig project
- Context: 5vwo

# Samenwerking

Universiteit Utrecht



Utrecht  
University

Radboud Universiteit

Radboud University



SLO

slo

Vijf scholen

Gesubsidieerd door NRO



NATIONAAL REGIEORGAAN  
ONDERWIJSONDERZOEK

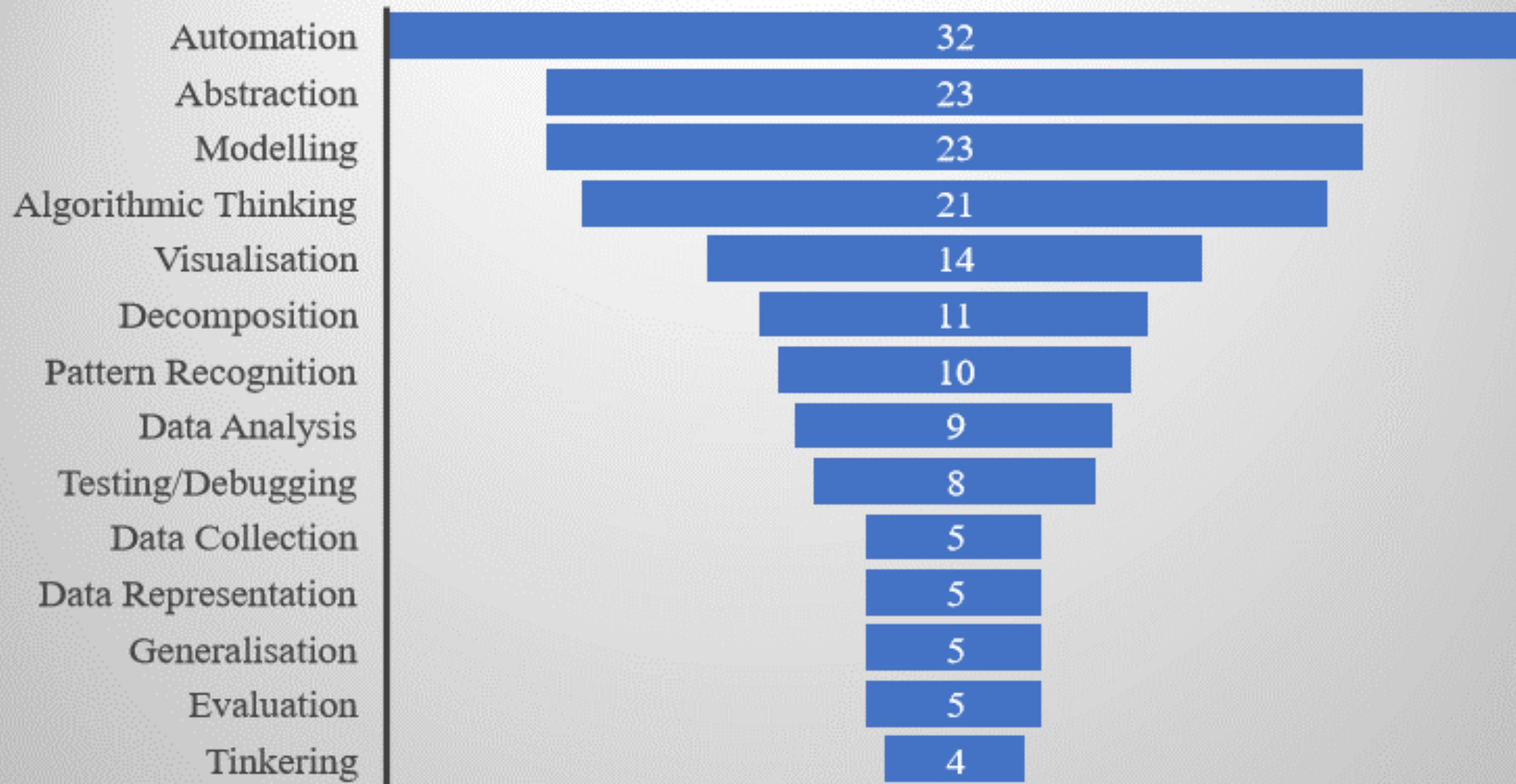
# Onderzoeksvraag

Hoe kan een onderwijsleerstrategie, gericht op het gebruik van digitale hulpmiddelen, 16-17 jaar oude vwo-leerlingen ondersteunen bij het ontwikkelen van computationele denkvaardigheden, verbonden met wiskundig denken in curricula voor zuivere en toegepaste wiskunde?

# Onderzoeksdeelvragen

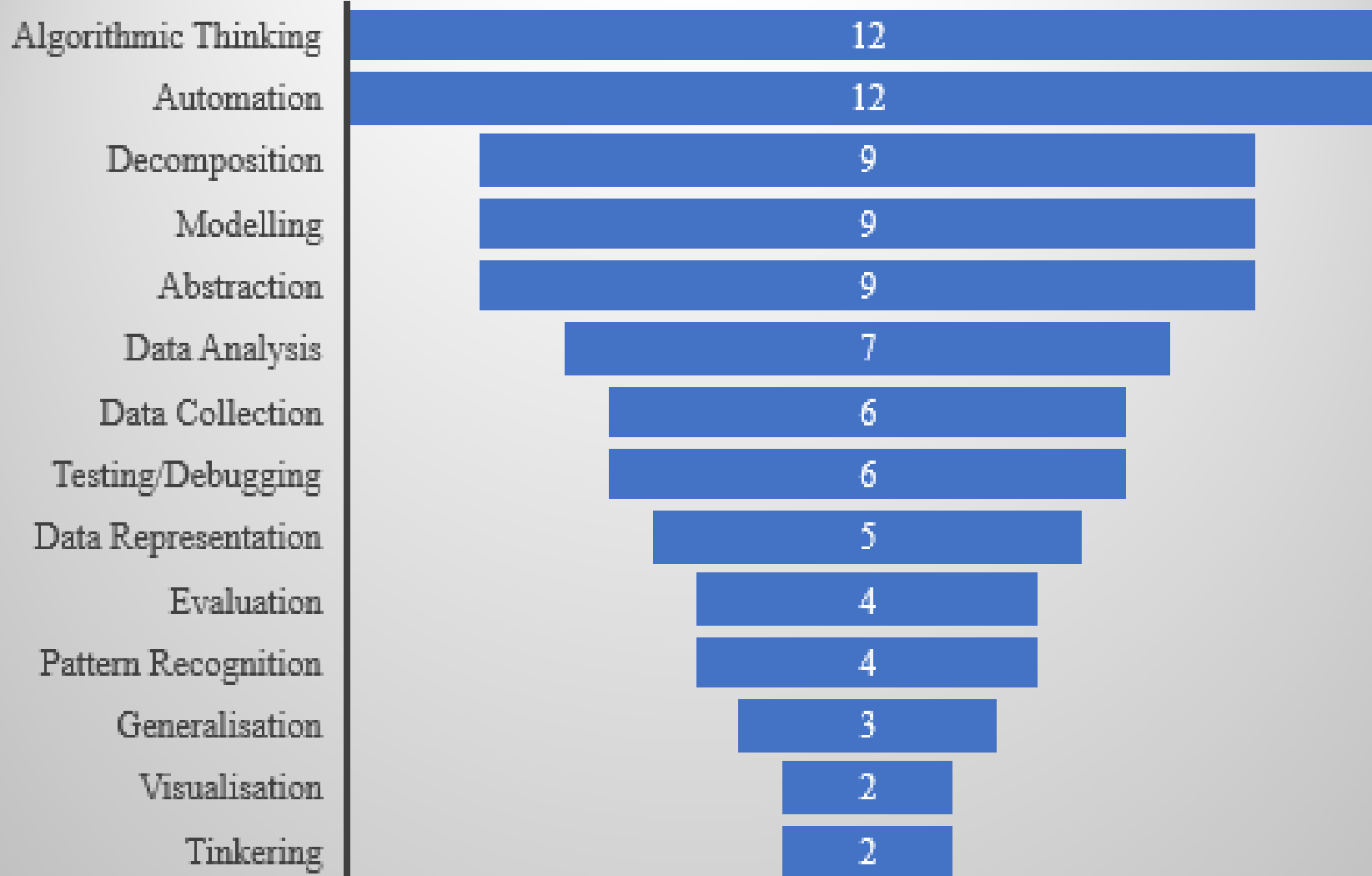
1. Wat zijn de gemeenschappelijke aspecten van CD en WD?
2. Hoe kunnen deze gemeenschappelijke aspecten bevorderd worden in leeractiviteiten (wiskunde A en B) waarin 5vwo-leerlingen digitale hulpmiddelen gebruiken?
3. Leiden zulke leeractiviteiten tot leeropbrengsten wat betreft CD en WD?

## Frequency of CT aspects in empirical papers





### Frequency of CT aspects in theoretical papers



# Interviews docenten

7 docenten

Semi-gestructureerd met vragen over:

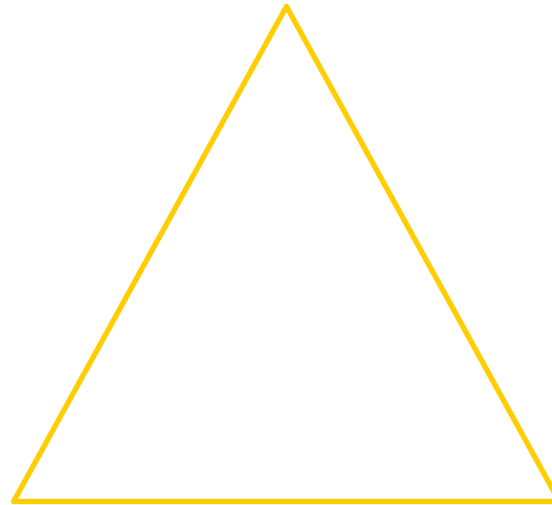
- hun ideeën over aspecten van CD
- relatie CD en WD
- CD in eigen lespraktijk
- digitale hulpmiddelen/programmeren

# Thema's in interviews

- Aspecten uit Delphi-studie zijn relevant en belangrijk.
- CD en WD zijn nauw verwant.
- Behoeftte aan voorbeelden.
- Het vraagt extra tijd.
- Programmeren is nuttig maar moet buiten de wiskundeles aangeboden worden.
- Het examenprogramma zou CD moeten opnemen.

# Uitgangspunt ontwerp lessenserie

computationeel denken

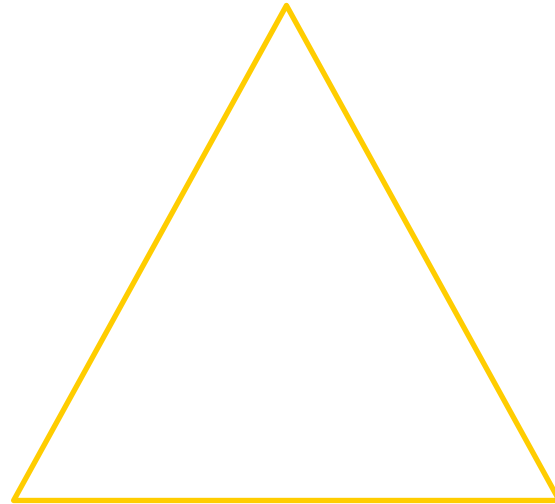


wiskundecurriculum

(ICT) tools voor wiskunde

# Wiskunde A

data-analyse en  
datarepresentatie



statistiek

Excel

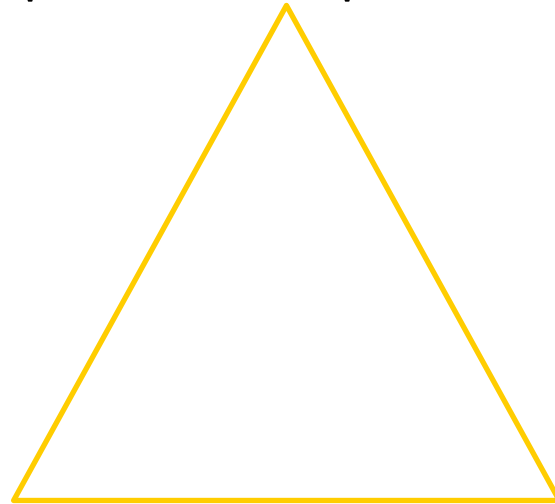
# Ontwerp lessenserie statistiek

Titanic: "Vrouwen en kinderen eerst?"

- Dataset verkennen, geschikt maken voor analyse
- Vraag preciezer maken, subvragen (decompositie)
- Bepalen wiskundig gereedschap
- Passende grafieken/tabellen (representatie)
- Resultaten evalueren

# Wiskunde B

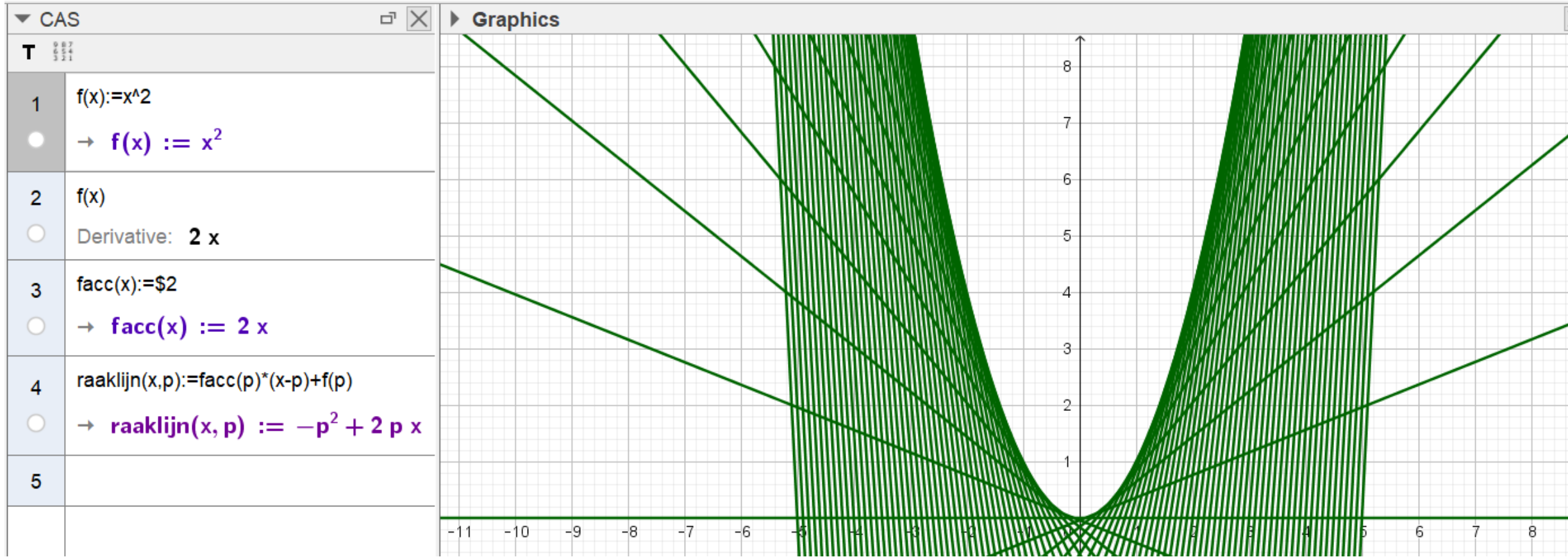
algoritmisch denken  
(probleemoplossen)



functies  
(algebra/analyse)

GeoGebra (CAS)

# Ontwerp lessenserie functies





## Onderzoek lessenserie wiskunde B

- CD aspecten zoals abstractie, decompositie, patroonherkenning, algoritmisch denken en generalisatie zijn kernbegrippen in het wiskunde-onderwijs (Kallia et al., 2021)
- Focus op twee elementen:
  - Algoritmisch denken
  - Generalisatie

# Onderzoeksvragen

- Hoe kunnen de aspecten algoritmisch denken en generalisatie bevorderd worden met GeoGebra in 6 vwo lessen over functies en raaklijnen?
- Welke moeilijkheden komen leerlingen tegen bij het maken van de opdrachten met GeoGebra?

# Methode

15 6 vwo leerlingen

Zes x 45 minuten les met GeoGebra

Data:

- Leerling-werkboeken
- Leerling-GeoGebra-bestanden
- Leerling-interviews
- Aantekeningen docent

# Voorbeeld uit werkboek

## Procedure opstellen voor een algemene raaklijn

- Unplugged
- *Generalisatie*
- *Stapsgewijs ontwerp* →
- *Object-definitie* →

• Stel  $l: y = m(x - p) + q$  is de raaklijn aan  $(p, p^2)$ .

•  $m = y'(p) = 2p$

•  $q = y_A = p^2$

• Dus  $l: y = 2p(x - p) + p^2$

*Generalisatie*

*Structuur en syntax:  
voorwaardes*

## Voorbeeld uit GeoGebra-bestand

gemene dynamische middelloodlijn

*Object-definitie*

$$M = (0.5 (x(A) + x(B)), 0.5 (y(A) + y(B)))$$

$$\rightarrow (2.5, 2)$$

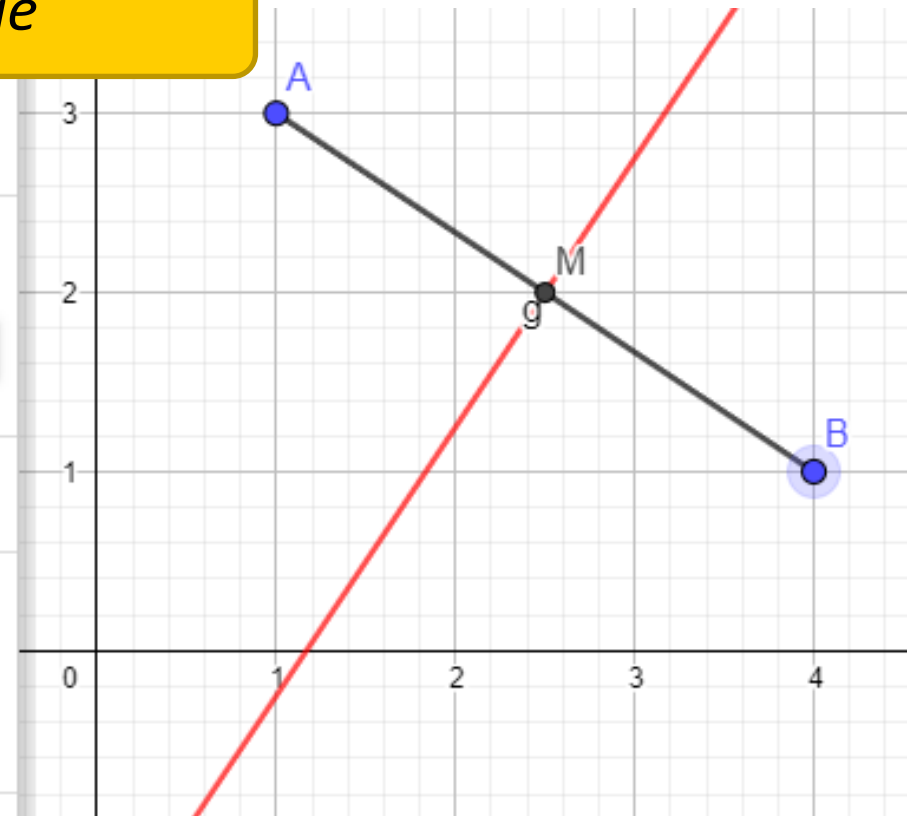
$$a = -\frac{x(B) - x(A)}{y(B) - y(A)}$$

$$\approx 1.5$$

$$h: y = 1.5x + 2 - 1.5 \cdot 2.5$$

$$p: \text{Als} \left( y(A) \stackrel{?}{=} y(B), x = x(M), y = -\frac{x(B) - x(A)}{y(B) - y(A)} x + y(M) + \frac{x(B) - x(A)}{y(B) - y(A)} x(M) \right)$$

$$\rightarrow y = 1.5x - 1.75$$



# Voorbeeld uit GeoGebrabestand

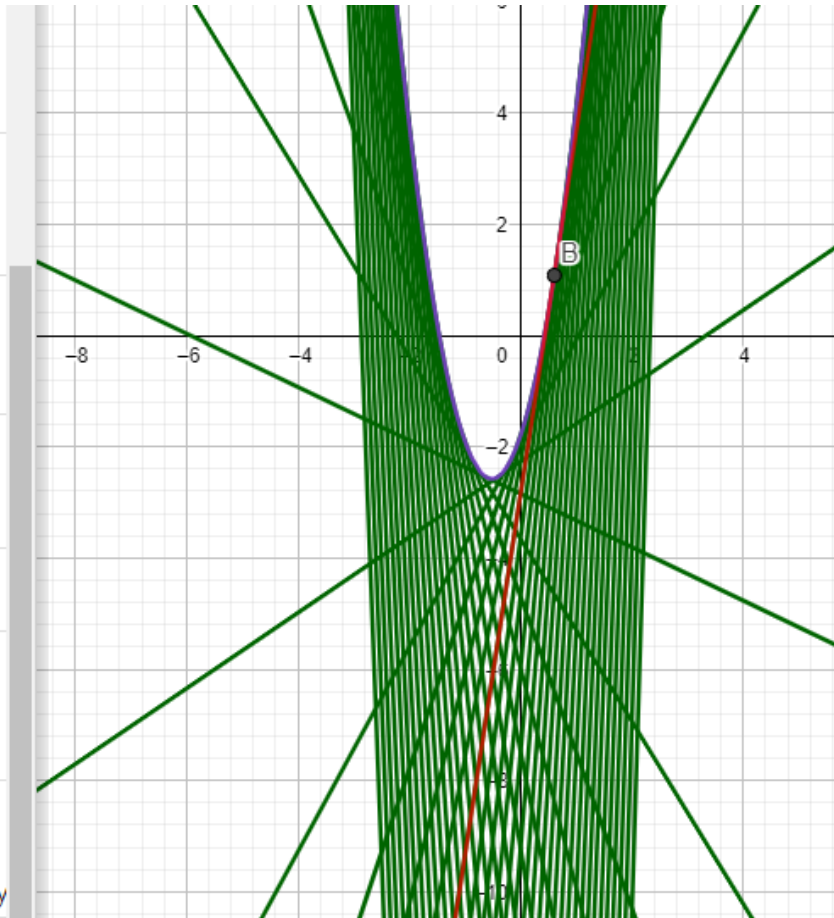
## Een reeks raaklijnen

- **Generalisatie**

- **Object-definitie**

- **AD: Iteratie**

○	$s(x) = 2ax + b$ → $2 \cdot 2.9x + 3$
●	$r(x) = ax^2 + bx + c$ → $2.9x^2 + 3x - 1.8$
●	$B = (d, ad^2 + bd + c)$ → $(0.61, 1.08)$
	$n = s(d)$ → $6.51$
●	$\ell : y = 6.51(x - 0.61) + 1.08$
○	$h(x) = 2p(x - p) + p^2$ → $2(-0.7)(x + 0.7) + (-0.7)^2$
●	$l_2 = \text{Rij}(y = (2ad + b)(x - d) + ad^2 + bd + c, d, -5, 5, 0.2)$ → $\{y = -26x - 74.3, y = -24.84x - 68.62, y = -23.68x - 63.16, y$



## Resultaten – Leerlingen over AD en generalisatie

- "(je stappen opschrijven) is makkelijker dan alles ineens in GeoGebra"
- "Ik werk stap voor stap op de computer (GeoGebra) en schrijf het daarna op, omdat ik dan weet dat het goed is"
- "Dat maakt het voor mij wel heel lastig, want het is niet persé dat ik slecht ben in wiskunde, maar wel in precisie. Dus dan schrijf ik het zelf of uit me hoofd al op of niet zoals het precies hoort, en dat gaat op papier altijd goed want dan kom je wel op het goede antwoord, maar achter zo'n computer gaat het dan he-le-maal mis."

## Resultaten – Docent over AD en generalisatie

- Positieve indruk, groot enthousiasme
- Positief over voortgang en begrip
- Dieper inzicht in variabelen

Quote uit docentlogboek:

"Velen hebben niet door dat als je  $a$  definieert, dat je dan vervolgens  $a$  kunt 'aanroepen'. Ze typen dus in de formule  $a$  gewoon weer opnieuw uit. Voor enkelen is het echt een 'eye opener geweest: "Oh, dat is handig zeg!"



ALS  $x_a = x_b$  DAN  $x = x_a$  ANDERS  
 $x = x_b$

$$p : \text{Als} \left( y(A) \stackrel{?}{=} y(B), x = x(M), y = -\frac{x(B) - x(A)}{y(B) - y(A)} x + 1 \right)$$

$$\rightarrow y = 1.5x - 1.75$$

## Resultaten – Moeilijkheden voor leerling

- "Met als-dan, dan moest je twee =-tekens gebruiken, dat soort dingen, en dat was iets dat ik moest vragen voordat ik eruit kwam."
- "Ik raak hier zo super-gefrustreerd van dat ik al bijna 3 keer de computer heb gegoooid. ... Dan typ ik een ding verkeerd in en dan zie ik niet wat ik verkeerd intoets en dan komt er opeens een oppervlakte en dan doe ik het drie keer en drie keer opnieuw komt er een oppervlakte en dan gaat er gewoon iets mis en dan zie ik niet wat er misgaat. En dan ja...."
- incorrect en correct als-dan

## Conclusie

- Leerlingen en docent waren positief over de lessenserie
- AD en generalisatie werden zinvol toegepast door leerlingen
- Plugged & unplugged bleek succesvol

Moeilijkheden waren gerelateerd aan

- software/syntax
- logisch redeneren

## **Inhoud presentatie**

1. Introductie CD

2. Onderzoek

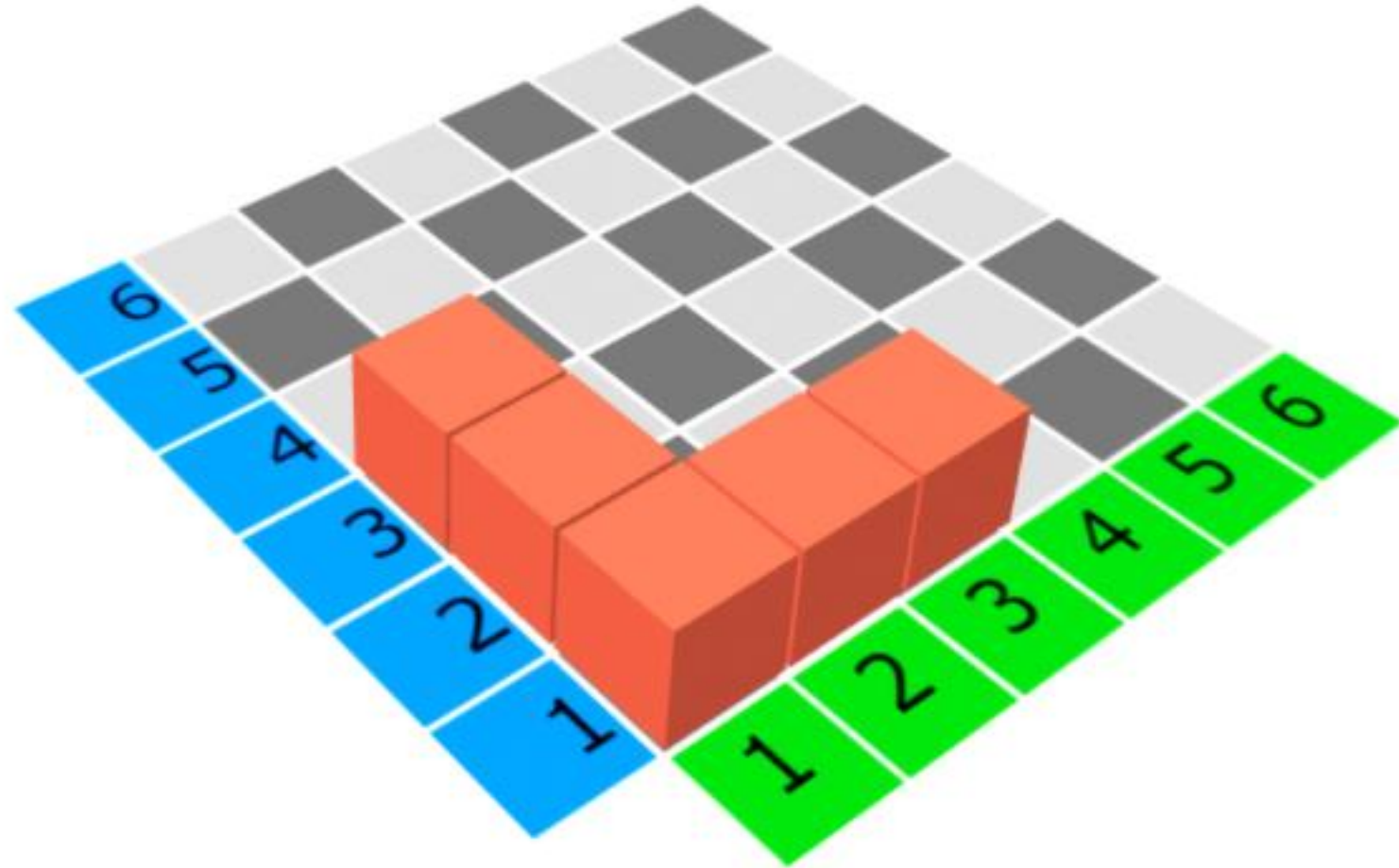
3. Zelf uitproberen

**Colette**



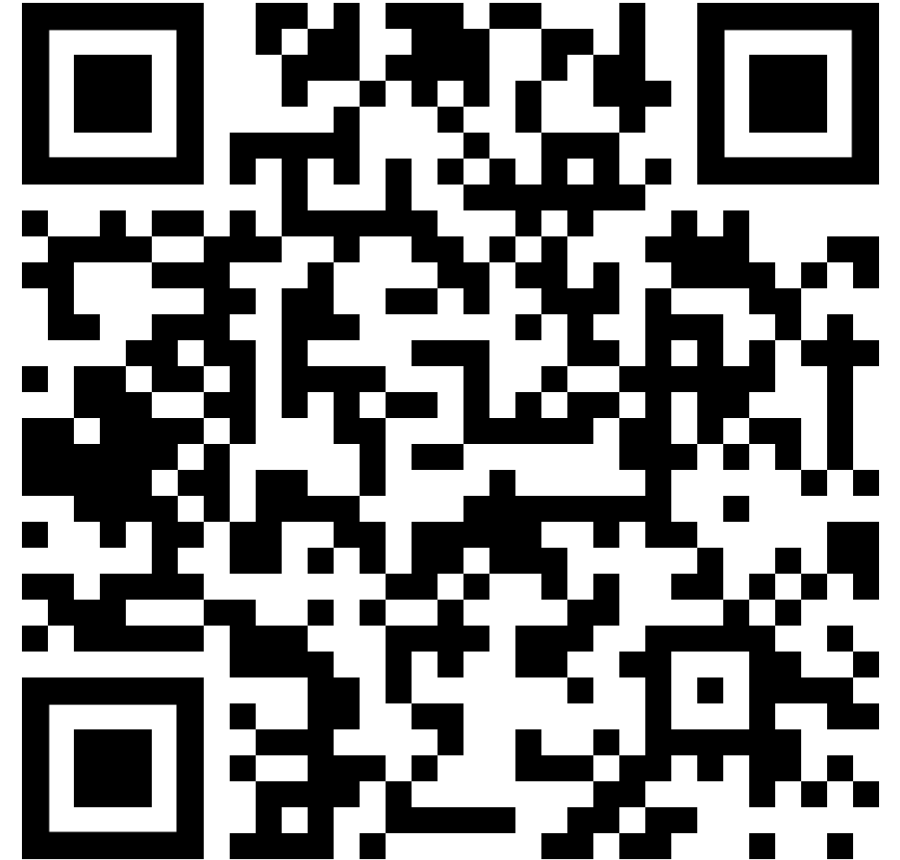
**C**omputational Thinking **L**earning **E**nvironment for  
**T**eachers in **E**urope  
A 21<sup>st</sup> Century Skill in Education

# Opdracht 1



# Opdracht 1

- Kubussen bouwen
- Hints



# Oplossing opdracht 1

Programma

Plaats kubus op x: 1 y: 1 z: 1

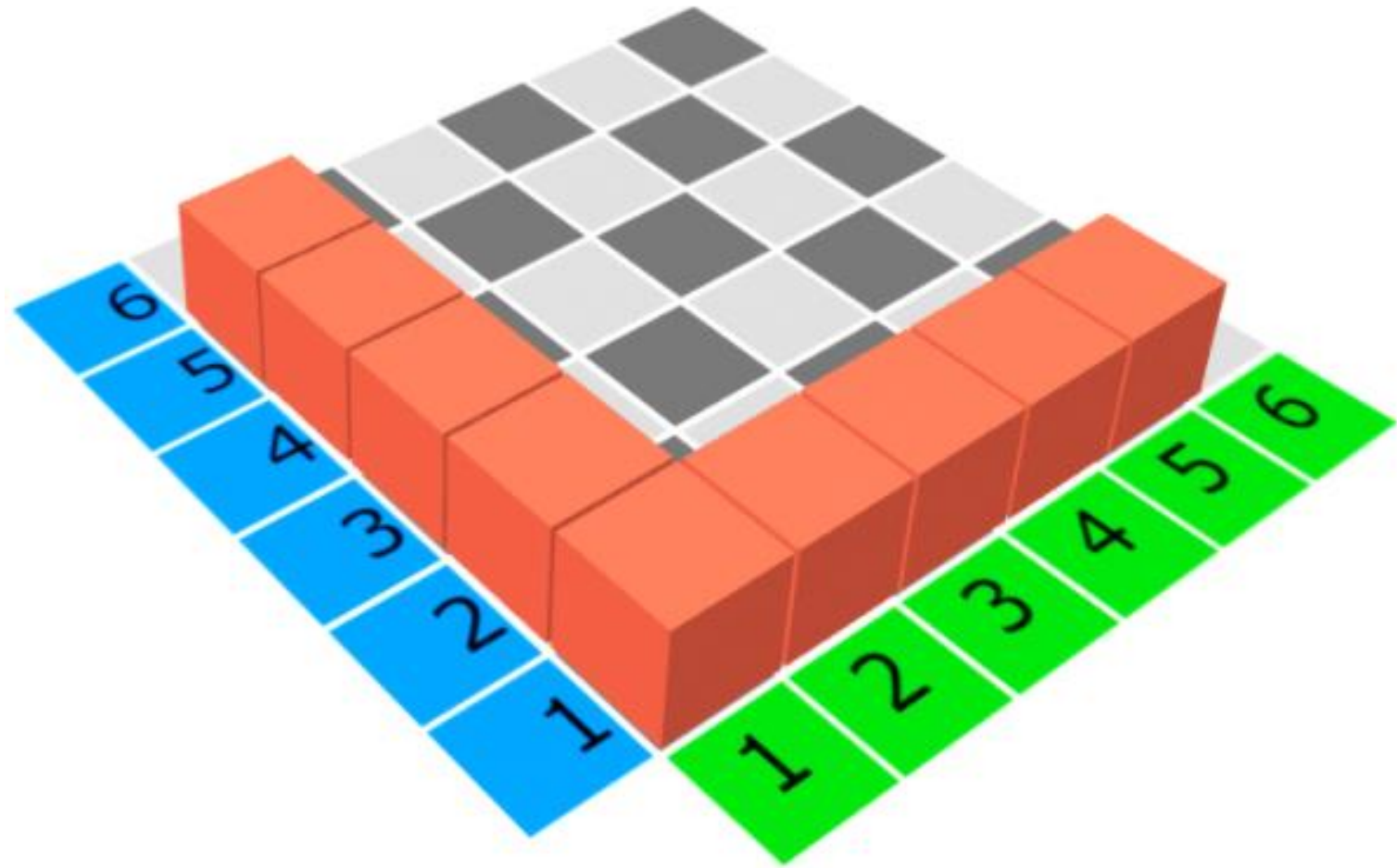
Plaats kubus op x: 1 y: 2 z: 1

Plaats kubus op x: 1 y: 3 z: 1

Plaats kubus op x: 2 y: 1 z: 1

Plaats kubus op x: 3 y: 1 z: 1

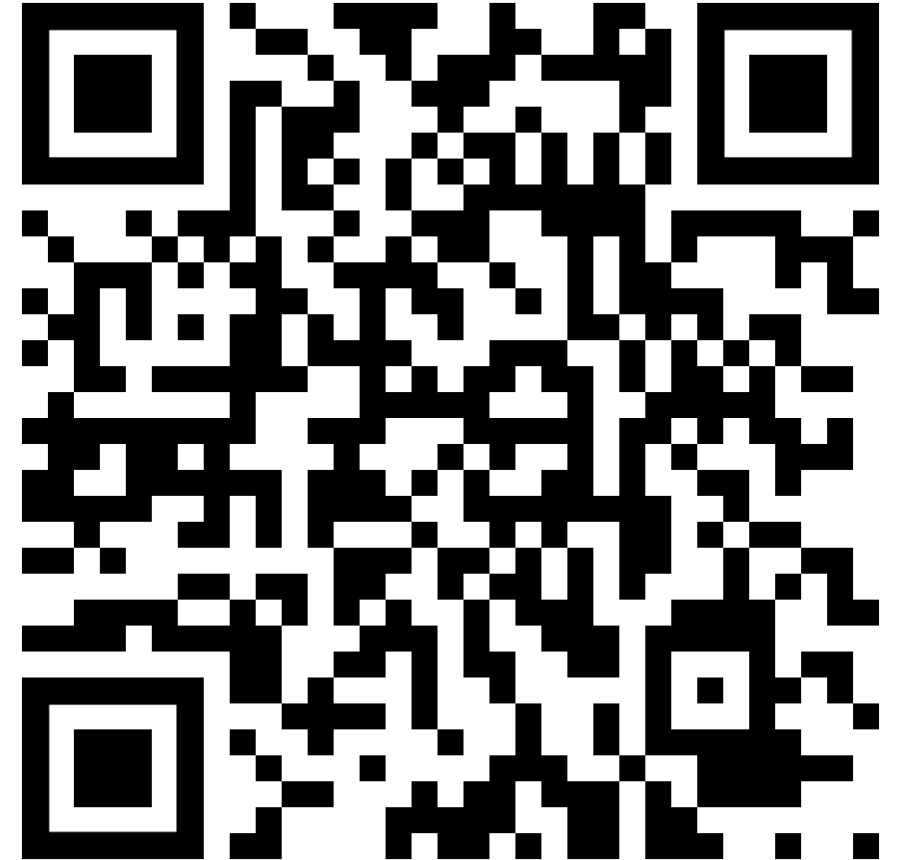
## Opdracht 2





## Opdracht 2

- blokken herhalen



## Oplossing opdracht 2

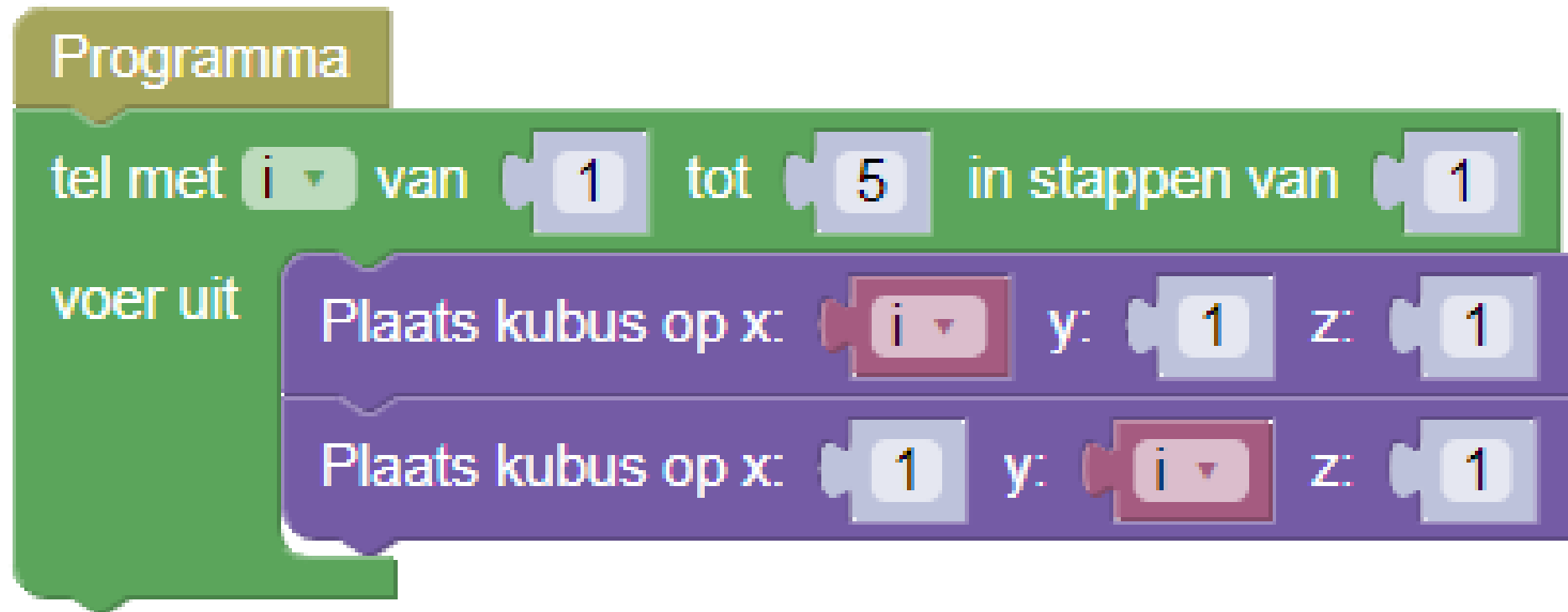
Programma

tel met  $i$  van 1 tot 5 in stappen van 1

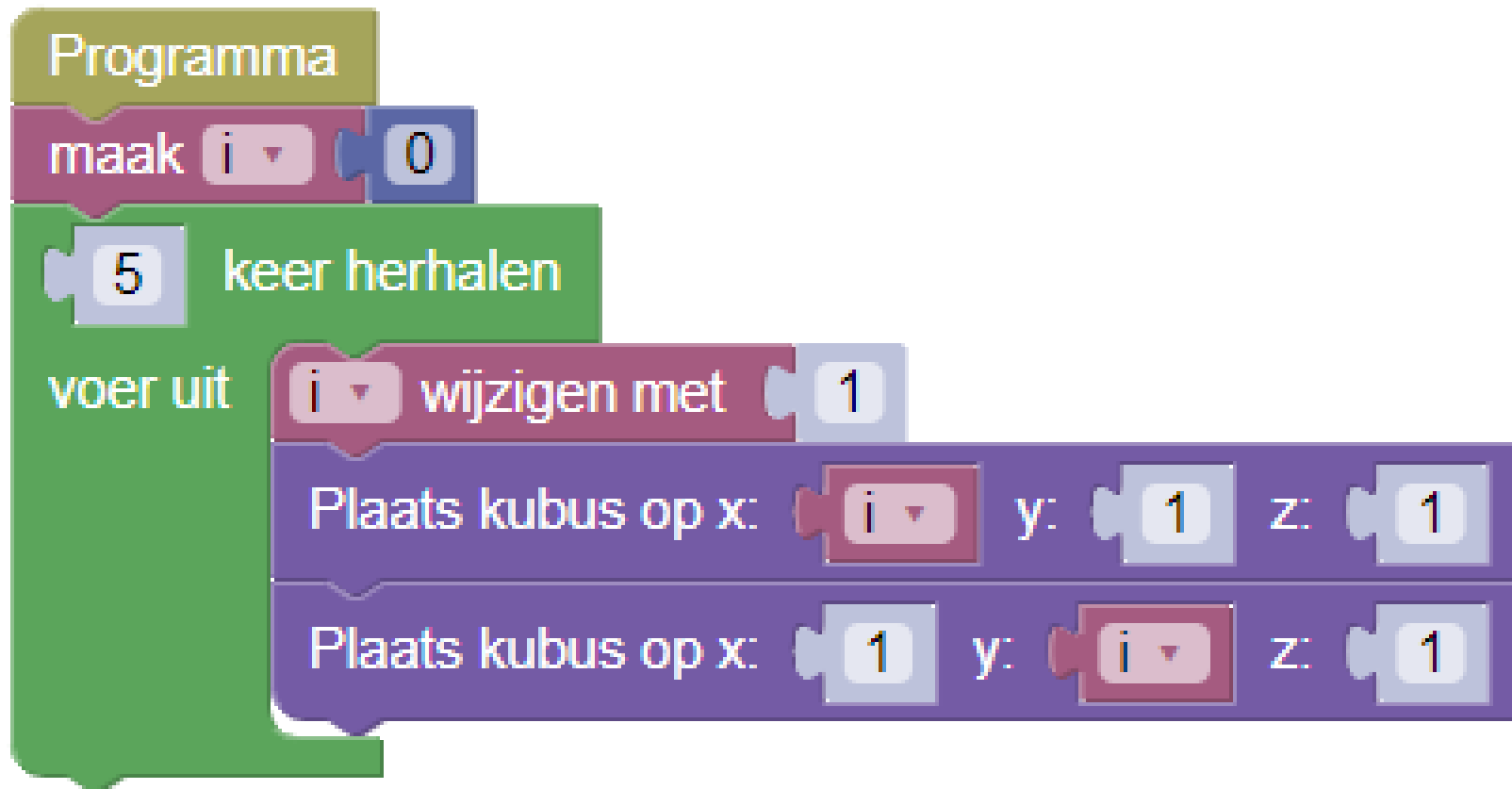
voer uit

Plaats kubus op x:  $i$  y: 1 z: 1

Plaats kubus op x: 1 y:  $i$  z: 1

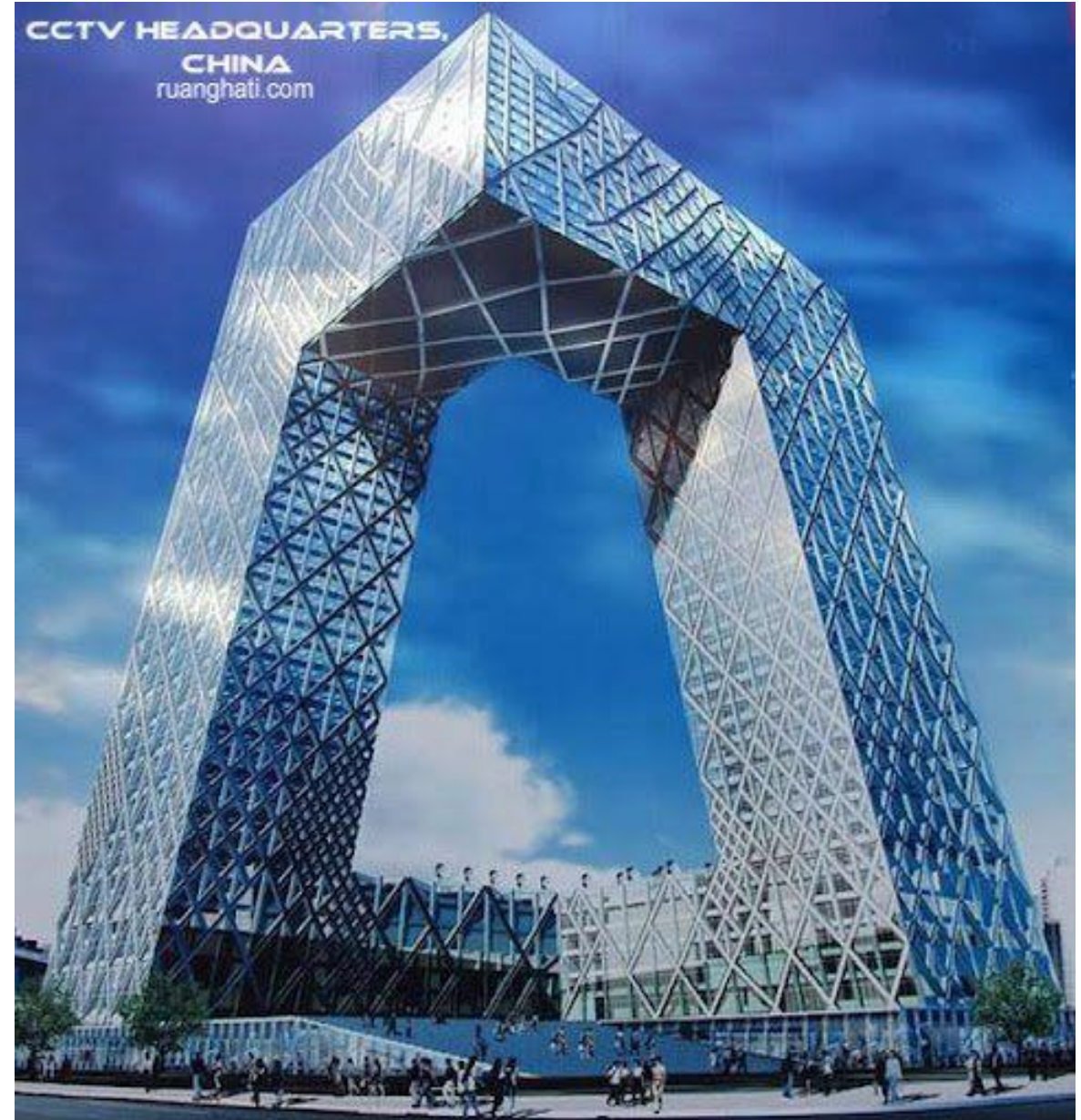


## Andere oplossing opdracht 2

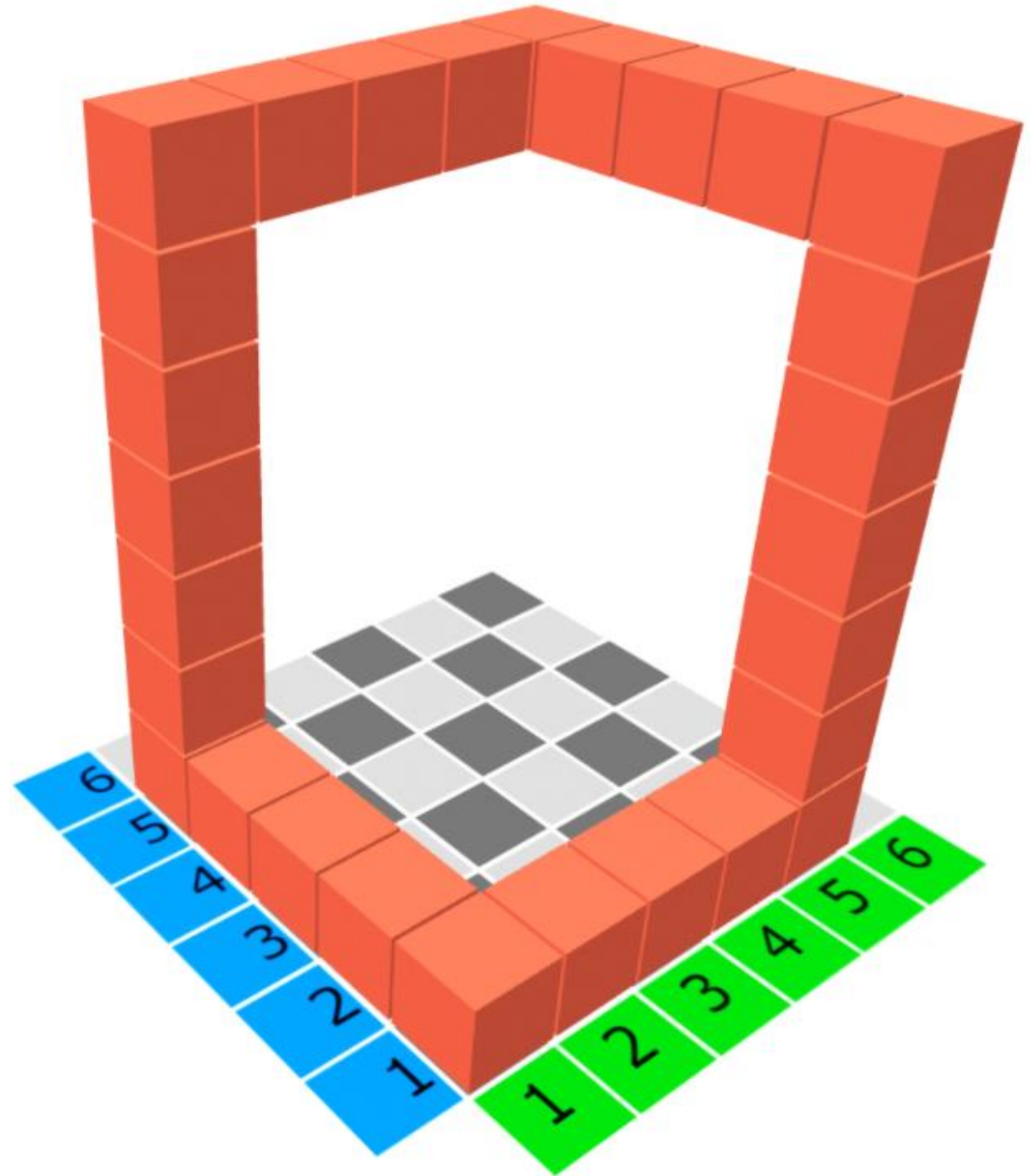


## Opdracht 3

CCTV headquarters  
in Peking  
van Rem Koolhaas

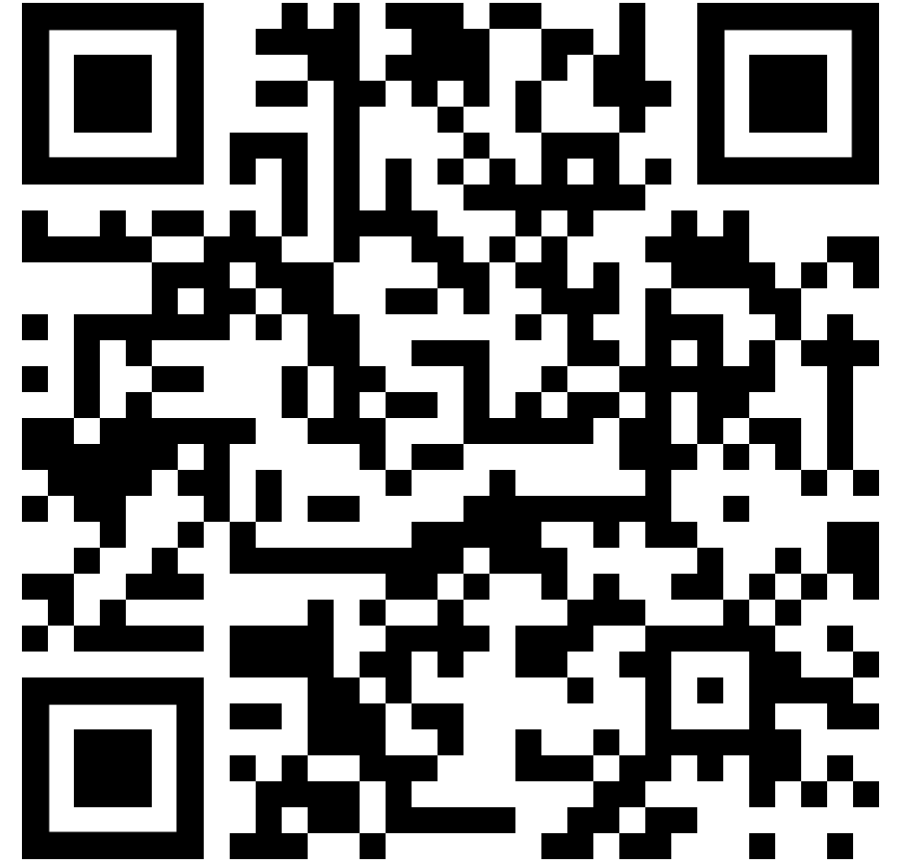


# Opdracht 3



# Opdracht 3

herhaal-blokken combineren



## Opdracht 3

Programma

tel met **i** van 1 tot 5 in stappen van 1

voer uit

Plaats kubus op x: **i** y: 1 z: 1

Plaats kubus op x: 1 y: **i** z: 1

tel met **j** van 1 tot 5 in stappen van 1

voer uit

Plaats kubus op x: **j** y: 5 z: 7

Plaats kubus op x: 5 y: **j** z: 7

tel met **k** van 2 tot 6 in stappen van 1

voer uit

Plaats kubus op x: 1 y: 5 z: **k**

Plaats kubus op x: 5 y: 1 z: **k**

# Extra opdracht

Bouw je eigen gebouw





## Numworx DWO – Blokken programmeren

<https://app.dwo.nl/vo/?hash=#s:696562>

