CÀLCUL
Conjunts Numèrics

Mercè Claverol

Departament de Matemàtiques–EEBE

Índex

Conjunts numèrics

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Naturals $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Enters $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Racionals $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.
- Reals $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

  Expressats amb decimals,

  * Els racionals $\mathbb{Q}$ o bé tenen un nombre finit de decimals, o bé un nombre infinit amb algun període.
  * Els irracionals $\mathbb{I}$ tenen infinites xifres decimals, sense cap període.
- Complexos $\mathbb{C} = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ (i se'n diu *unitat imaginària*).

Reals $\mathbb{R}$

Sigui $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Diem que:

- α és una fita superior de A si $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x \leq \alpha$ per a tot $x \in A$.
- β és una fita inferior de A si $\beta \in \mathbb{R}$ i $\beta \leq x$ per a tot $x \in A$.
- a és el màxim de A si $a \in A$ i $x \leq a$ per a tot $x \in A$. Not. $a =$ màx(A)
- b és el mínim de A si $b \in A$ i $b \leq x$ per a tot $x \in A$. Not. $b =$ mín(A)
- M és el suprem de A si M és fita superior de A i qualsevol altra fita superior satisfà que $M \leq M'$. Not. $M =$ sup(A)
- P és l'ínfim de A si P és fita inferior de A i qualsevol altra fita inferior satisfà que $P' \leq P$. Not. $P =$ ínf(A)

  Notem per C_S i C_I al conjunt de fites superiors i inferiors de A, respectivament.

  $C_S \neq \emptyset \Longrightarrow A$ és fitat superiorment.

  $C_I \neq \emptyset \Longrightarrow A$ és fitat inferiorment.

  A és fitat si ho és superior i inferiorment.

Reals $\mathbb{R}$

Axioma del suprem per a $\mathbb{R}$

Tot conjunt $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ fitat superiorment té suprem,

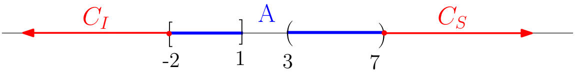
és a dir, existeix $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha =$sup(A)

Axioma de l'ínfim per a $\mathbb{R}$

Tot conjunt $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ fitat inferiorment té ínfim,

és a dir, existeix $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\beta =$ínf(A)

Exemple. Sigui $A = [-2, 1] \cup (3, 7) \subset \mathbb{R}$. Trobeu el conjunt de cotes superiors i inferiors, així com el suprem, ínfim, màxim i mínim, en cas d'existir.



$C_S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 7\}$
$C_I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}$

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ fitat

sup(A)=7 $\notin A \Longrightarrow \nexists$ màx(A)
ínf(A)=-2 $\in A \Longrightarrow$ mín(A)=-2

Complexos $\mathbb{C}$

Forma binòmica $\boxed{z = a + bi}$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $i = \sqrt{-1}$ és la unitat imaginària.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} i^{4k} = 1 \\ i^{4k+1} = i \\ i^{4k+2} = -1 \\ i^{4k+3} = -i \end{cases} \qquad m = 4k + r \Longrightarrow i^m = i^r.$$

Exemple: $i^{2021} = i^{4\cdot 505+1} = (i^4)^{505} \cdot i = 1^{505} \cdot i = i$

Donat $z = a + bi$,

- El conjugat de z és: $\quad \overline{z} = a - bi$

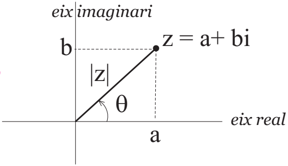
Observa que $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = z$

Complexos $\mathbb{C}$

Representació: cada $z \in \mathbb{C}$, es pot representar com a un punt en el pla complex:

$z = a + bi$
Part real: $\text{Re}(z) = a$
Part imaginària: $\text{Im}(z) = b$

$$a = |z| \cos \theta$$
$$b = |z| \sin \theta$$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ mòdul

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

- L'argument principal de z és l'únic θ, $\in (-\pi, \pi]$ tal que:

$$a = |z| \cos \theta, \; b = |z| \sin \theta$$

- L'argument és $arg(z)$=qualsevol dels elements del conjunt $\{\theta + 2k\pi, \, \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Complexos $\mathbb{C}$

Formes d'expressió.

$$z = \underbrace{a + b\,i}_{\text{binòmica}} = \underbrace{|z|\cos\theta + |z|\sin\theta i}_{\text{trigonomètrica}} = |z|(\cos\theta + \sin\theta i) = \underbrace{|z|e^{\theta i}}_{\text{exponencial}} = \underbrace{|z|_\theta}_{\text{polar}}$$

La forma exponencial prové de la fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. $\boxed{e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}}$

Com a conseqüència,

Fórmula de Moivre. $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) \quad k\in\mathbb{Z}$

Prenent $z = \cos\theta + \sin\theta i = e^{\theta i} \Longrightarrow z^k = e^{k\theta i} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$

Complexos. Operacions

	Binòmica $z = a + bi$	Exponencial $z = \|z\|e^{\theta i}$
	$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$	$z_1 = \|z_1\|e^{\theta_1 i}\ z_2 = \|z_2\|e^{\theta_2 i}$
$z_1 + z_2$	$a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$	–
$z_1 \cdot z_2$	$a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$	$\|z_1\|\|z_2\|e^{(\theta_1+\theta_2)i}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$ on $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$ $z_2\overline{z_2} = a_2^2 + b_2^2 = \|z_2\|^2$	$\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}e^{(\theta_1-\theta_2)i}$
z^n	$(a+bi)^n$	$\|z\|^n e^{n\theta i}$
$\sqrt[n]{z}$	–	$\{\sqrt[n]{\|z\|}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ $k = 0, 1, \cdots, n-1\}$

Argument. Complexos als eixos

- L'argument principal de z és l'únic $\theta \in (-\pi, \pi]$ t.q. $a = |z| \cos\theta$, $b = |z| \sin\theta$.
- I aleshores, l'argument és:

  $arg(z)$= qualsevol dels elements del conjunt $\{\theta + 2k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Alguns exemples senzills:

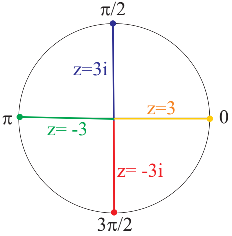
Imaginaris purs: $z = b\,i$, $b \in \mathbb{R}$

$$a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \theta = \pi/2 & \text{si} \quad b > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si} \quad b < 0 \end{cases}$$

Reals purs: $z = a \in \mathbb{R}$

$$b = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 & \text{si} \quad a > 0 \\ \theta = \pi & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

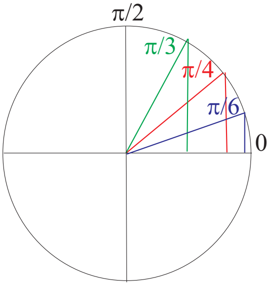
$$\begin{aligned} z &= \ \ 3 \ = 3e^{0i} \\ z &= \ \ 3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i} \\ z &= -3 \ = 3e^{\pi i} \\ z &= -3i = 3e^{\frac{3\pi}{2}i} = 3e^{\frac{-\pi}{2}i} \end{aligned}$$



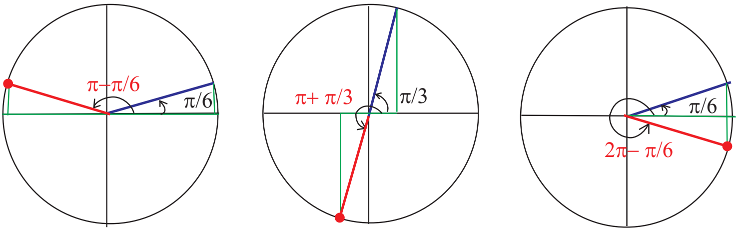
Raons trigonomètriques

Raons trigonomètriques dels angles principals al Q1:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞



Reducció al primer quadrant



$\alpha \in Q2$	$\alpha \in Q3$	$\alpha \in Q4$
$\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6})$	$\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3})$	$\cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6})$
$\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})$	$\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$	$\sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6})$

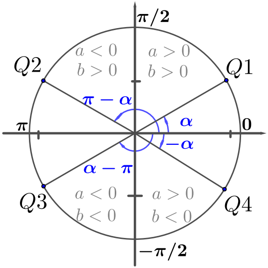
Trobar l'argument

Sigui $z = a + bi$ amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Sabem que $\tan\theta = b/a$

Com trobar $\arg(\mathbf{z}) = \theta$?

Busquem la relació de θ amb l'angle $\alpha \in Q1$ tal que: $\boxed{\tan\alpha = |b|/|a|}$

- $a > 0, b > 0 \Longrightarrow arg(z) = \alpha \in Q1$
- $a < 0, b > 0 \Longrightarrow arg(z) = \pi - \alpha \in Q2$
- $a < 0, b < 0 \Longrightarrow arg(z) = \pi + \alpha \in Q3$
  $arg(z) = \alpha - \pi$
- $a > 0, b < 0 \Longrightarrow arg(z) = 2\pi - \alpha \in Q4$
  $arg(z) = -\pi$

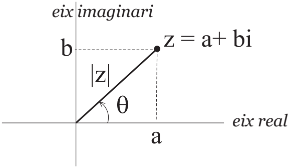


Hem donat l'argument $\theta \in [0, 2\pi)$ i en $(-\pi, \pi]$

- si $\theta \in Q_1$ o Q_2 també és l'argument principal.
- si $\theta \in Q_3$ o Q_4, hem de restar 2π per trobar l'argument principal $\in (-\pi, \pi]$.

Pas entre formes

Forma binòmica $\boxed{z = a + b\,i}$ **Forma trigonomètrica** $\boxed{z = |z|\cos\theta + |z|\sin\theta\, i}$



Binòmica⟶Exponencial o polar:

Mòdul:	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$
Argument θ:	$\tan\theta = \frac{b}{a}$,
	principal: $-\pi < \theta \leq \pi$

Forma exponencial $\boxed{z = |z|e^{\theta i}}$ **Polar** $\boxed{z = |z|_\theta}$

Exponencial o polar⟶Binòmica $\boxed{a = |z|\cos\theta, \quad b = |z|\sin\theta}$

Pas de binòmica a exponencial o polar

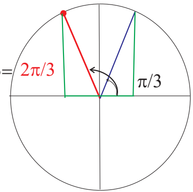
- Pas de binòmica a exponencial o polar

Mòdul: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
Argument θ: $\tan\theta = \frac{b}{a}$

Exemple 1.

$$z = -1+\sqrt{3}i \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

$$a=-1<0,\ b=\sqrt{3}>0 \Longrightarrow \theta\in Q2$$
$$\tan\alpha = \frac{|\sqrt{3}|}{|-1|} \Longrightarrow \alpha = \pi/3,$$



$$\Longrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow z = \boxed{2_{\frac{2\pi}{3}} \equiv 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

En aquest cas, l'argument $2\pi/3$ és el principal $(-\pi<\theta\le\pi)$.

Pas de binòmica a exponencial o polar

Pas de binòmica a exponencial o polar

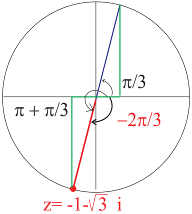
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mòdul: } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{Argument } \theta\text{: } \tan\theta = \frac{b}{a}\end{array}}$$

Exemple 2.

$$z = -1 - \sqrt{3}i \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$a = -1 < 0,\ b = -\sqrt{3} < 0 \Longrightarrow \theta \in Q3$$

$$\tan\alpha = \frac{|-\sqrt{3}|}{|-1|} \Longrightarrow \alpha = \pi/3,$$



$$\Longrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow z = \boxed{2_{\frac{4\pi}{3}} \equiv 2\,e^{i\,\frac{4\pi}{3}}}$$

Expressat amb l'argument principal $\theta \in (-\pi, \pi]$, $z = 2_{\frac{4\pi}{3} - 2\pi} = \boxed{2_{-\frac{2\pi}{3}} \equiv 2\,e^{-i\,\frac{2\pi}{3}}}$.

Pas de binòmica a exponencial o polar

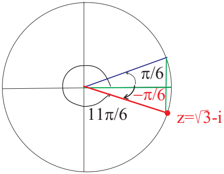
Pas de binòmica a exponencial o polar

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mòdul: } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{Argument } \theta\text{: } \tan\theta = \frac{b}{a}\end{array}}$$

Exemple 3.

$$z = \sqrt{3} - i \Longrightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{3} > 0,\ b = -1 < 0 \Longrightarrow \theta \in Q4 \\ \tan\alpha = \frac{|-1|}{|\sqrt{3}|} \Longrightarrow \alpha = \pi/6, \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

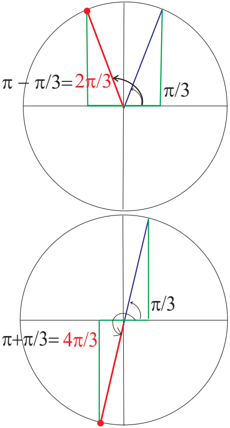


$$\Longrightarrow z = \boxed{2_{\frac{11\pi}{6}} \equiv 2\,e^{i\,\frac{11\pi}{6}}}$$

Expressat amb l'argument principal $\theta \in (-\pi, \pi]$, $z = 2_{\frac{11\pi}{6} - 2\pi} = \boxed{2_{-\frac{\pi}{6}} \equiv 2\,e^{-i\,\frac{\pi}{6}}}$

Pas d'exponencial o polar a binòmica

- Pas d'exponencial o polar a binòmica $\boxed{a = |z|\cos\theta,\ b = |z|\sin\theta}$



Exemple 1.

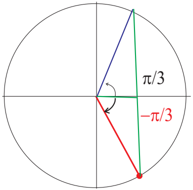
$$z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\cos(\frac{2\pi}{3}) + 2\sin(\frac{2\pi}{3})i =$$
$$= -2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2\sin(\frac{\pi}{3})i = -1 + \sqrt{3}i$$

Exemple 2.

$$z = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2\cos(\frac{4\pi}{3}) + 2\sin(\frac{4\pi}{3})i =$$
$$= -2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\sin(\frac{\pi}{3})i = -1 - \sqrt{3}i$$

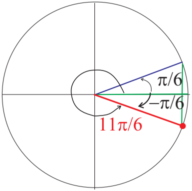
Pas d'exponencial o polar a binòmica

Pas d'exponencial o polar a binòmica $\boxed{a = |z| \cos \theta,\ b = |z| \sin \theta}$



Exemple 3.

$$z = 2_{\frac{-\pi}{3}} = 2\cos(\frac{-\pi}{3}) + 2\sin(\frac{-\pi}{3})i =$$
$$= 2\cos(\frac{\pi}{3}) - 2\sin(\frac{\pi}{3})i = 1 - \sqrt{3}i$$



Exemple 4.

$$z = 2_{\frac{11\pi}{6}} = 2\cos(\frac{11\pi}{6}) + 2\sin(\frac{11\pi}{6})i =$$
$$= 2\cos(\frac{\pi}{6}) - 2\sin(\frac{\pi}{6})i = \sqrt{3} - i$$

Pas d'exponencial o polar a binòmica

Pas d'exponencial o polar a binòmica $\boxed{a = |z| \cos\theta, \; b = |z| \sin\theta}$

Si l'angle és més gran que 2π aleshores el reduïm a la primera volta.

Exemple.

$$z = e^{59\frac{\pi}{6}i} = e^{8\pi i} e^{\frac{11}{6}\pi i} = e^{\frac{11}{6}\pi i} = e^{(\frac{11}{6}\pi - 2\pi)i} = e^{-\frac{\pi}{6}i} =$$

$$\Uparrow$$

$$59\frac{\pi}{6} = \frac{59}{6 \cdot 2}2\pi = \frac{12 \cdot 4 + 11}{12}2\pi = \frac{\cancel{12} \cdot 4}{\cancel{12}}2\pi + \frac{11}{12}2\pi = 8\pi + \frac{11}{6}\pi$$

$$= \cos(\frac{-\pi}{6}) + \sin(\frac{-\pi}{6})i = \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Arrels

Arrels $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\theta i}} = \{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n} i},\ k=0,\cdots,n-1\} =$

$$= \boxed{\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k=0,\cdots,n-1\}}$$

Observa que:

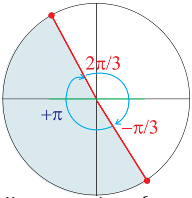
* Tot nombre complex té n arrels n-èsimes
* La diferència d'angles entre dues arrels consecutives és de $\frac{2\pi}{n}$

- Arrels quadrades $n=2$

Exemple. $\sqrt{-1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2e^{-\frac{2\pi}{3}i}} =$

$$= \{\sqrt{2}\, e^{(\frac{-\cancel{2}\pi}{3\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}})i},\ k=0,1\} =$$

$$= \{\sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi}{3}i},\ \sqrt{2}\, e^{(\frac{-\pi}{3}+\pi)i}\}$$



* En forma binòmica, les dues arrels quadrades d'un complex, $\{z_1,\ z_2\}$ són complexos oposats $z_2 = -z_1$.

Arrels

Arrels $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\theta i}} = \{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\theta+2k\pi}{n} i},\ k = 0, \cdots, n-1\} =$

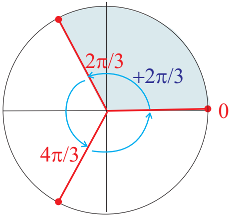
$$= \boxed{\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})i},\ k = 0, \cdots, n-1\}}$$

- Arrels cúbiques $n = 3$

Exemple. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27e^{0i}} =$

$= \{ \sqrt[3]{27}\, e^{(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3})i},\ k = 0, 1, 2\} =$

$= \{3e^{0i},\ 3e^{\frac{2\pi}{3} i},\ 3e^{\frac{4\pi}{3} i}\}$



Descomposició de polinomis

- $z_0 \in \mathbb{C}$ és arrel del polinomi $p(x) \Leftrightarrow p(z_0) = 0 \Leftrightarrow p(x)$ és divisible pel factor $x - z_0$
- La multiplicitat de z_0 com arrel de $p(x)$ és igual al nombre de vegades que el polinomi és divisible pel factor $x - z_0$

Un polinomi *mònic** de $\mathbb{R}[x]$ es diu irreductible (no pot descompondre's en més factors polinómics) si :

- O bé és de la forma $x - a$.
- O bé del tipus $x^2 + mx + n$ sense arrels reals i, en aquest cas, es pot escriure com $(x - a)^2 + b^2$ on $a \pm bi$ són les arrels a $\mathbb{C}$.

* Un polinomi és *mònic* si el coeficient de la potència màxima és 1.

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Tot polinomi $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grau n té n arrels complexes comptades amb la seva multiplicitat.
És a dir, si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - z_1)\cdots(x - z_n)$$

$z_1, \cdots, z_n$ són les n arrels complexes de $p(x)$

Teorema fonamental de l'Àlgebra

Cas particular

Si els coeficients $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ direm que $p \in \mathbb{R}[x]$. En aquest cas, si z és arrel complexa de p llavors $\bar{z}$ és també arrel amb la mateixa multiplicitat:

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{z}) = 0$$

Conseqüència: Si p té coeficients reals i és de grau senar té almenys una arrel real.

Exemples.

- $x^2 - ix + 2 = (x - 2i)(x + i)$
- $x^3 - 1 = (x - 1)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

Descomposició de polinomis

Exemples de descomposició a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$

- $p(x) = x^4 - 1$
  Les 4 arrels de $p(x)$ es corresponen amb les arrels quartes de 1:
  $$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = \overline{z_1} = i,\ z_4 = \overline{z_3} = -i.$$
  $$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) \text{ descomposició a } \mathbb{C}[x] \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \text{ descomposició a } \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

- $p(x) = x^4 + 1$
  Les arrels de $p(x)$ es corresponen amb les arrels quartes de -1:
  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$
  $z_3 = \overline{z_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_4 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$
  $$\begin{aligned} p(x) &= (x-z_1)(x-z_4)(x-z_2)(x-z_3) \text{ descomposició a } \mathbb{C}[x] \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \text{ descomposició a } \mathbb{R}[x] \end{aligned}$$

Descomposició de polinomis

- Descompon a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$ el polinomi: $x^3 - x^2 + 4x - 4$

  Per factoritzar-lo aplicarem Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1) & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

  Deduïm que $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4)$

  Observa que $x^2 + 4$ és factor irreductible a $\mathbb{R}[x]$ ja que no té arrels reals: $x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{-4} = \sqrt{4}i = \{\pm 2i\}$.

  Descomposició a $\mathbb{R}[x]$: $\boxed{(x-1)(x^2+4)}$

  Descomposició a $\mathbb{C}[x]$: $\boxed{(x-1)(x-2i)(x+2i)}$

Descomposició de polinomis

- Descompon a $\mathbb{C}[x]$ i a $\mathbb{R}[x]$ el polinomi: $3x^2 + 3ix + 6$

Observa que : $\quad 3x^2 + 3ix + 6 = 3(x^2 + ix + 2)$
A més, $x^2 + ix + 2 \notin \mathbb{R}[x]$ donat que els coeficients no són reals, per tant, ni és factor irreductible ni es pot descompondre a $\mathbb{R}[x]$.

Si resolem $x^2 + ix + 2 = 0$, trobem les arrels complexes:

$$x = \frac{-i \pm \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{9}i}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} = \begin{cases} \nearrow i \\ \searrow -2i \end{cases}$$

Descomposició a $\mathbb{C}[x]$: $3x^2 + 3ix + 6 = \boxed{3(x-i)(x+2i)}$

Observa que el polinomi $3x^2 + 3ix + 6$ no és mònic (el coeficient principal és 3) i, per tant, el 3 surt al resultat. A més, les arrels complexes no són conjugades doncs el polinomi no té coeficients reals.