

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Караєв Артем Олександрович**

УДК 539.51(075.8)+ 532(075.8)+ 519.6

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**«ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ АКСІАЛЬНО-**  
**СИМЕТРИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ**  
**ТА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ»**

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»  
(Галузь знань 10 – Природничі науки)

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ А. О. Караєв

Наукові керівники:

Стрельнікова Олена Олександрівна, доктор технічних наук

Немченко Костянтин Едуардович, доктор фізико-математичних наук

Харків – 2023

## АНОТАЦІЯ

Караєв А.О. Ефективні методи аналізу аксіально-симетричних крайових задач теорії потенціалу та теорії пружності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 – прикладна фізика і наноматеріали. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики –, Харків, 2023.

Все більше ускладнення сучасної техніки, інженерних споруд та апаратури вимагає проведення комплексних наукових досліджень з фізики, механіки, хімії з метою з'ясування працездатності, надійності та міцності обладнання. Хоча натурні експерименти є необхідними для прийняття адекватних інженерних рішень, їх проведення є досить кошовною та не завжди безпечною процедурою. Тому на перший фланг сучасних наукових розробок виходять методи віртуального моделювання, комп'ютерної фізики та обчислювальної математики.

Значна кількість сучасного технічного обладнання при проектуванні вимагає кваліфікованих обчислень характеристик фізичних та механічних полів, що забезпечують високу надійність, міцність, стійкість руху елементів обладнання, що розглядаються. Хоча лише натурний експеримент дає змогу підтвердити або спростувати теоретичні моделі фізичних явищ, проведення таких експериментів в багатьох випадках є кошовною та не завжди безпечною процедурою. Тому головним в сучасних наукових дослідженнях стають віртуальні, або комп'ютерні експерименти, що дають змогу отримати необхідні фізичні характеристики шляхом проведення числових розрахунків. Для проведення розрахунків фізичних полів використовують математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь та їх систем із заданими початковими та граничними умовами.

Слід зауважити, що існує багато математичних моделей для розрахунку фізичних полів, які засновані на використанні диференціальних рівнянь еліптичного типу. К таким формулюванням приводять задачі вивчення руху рідини в резервуарах, визначення статичних та динамічних характеристик пружного тіла, задачі електростатики та ін. Однією з важливих науково-технічних проблем в галузі ракетно-космічної техніки є забезпечення стійкості ракет-носіїв на різних етапах польоту, включаючи маневри при низьких рівнях гравітації. Вказані задачі можна розв'язувати з використанням теорії потенціалу з подальшим зведенням до сингулярних інтегральних рівнянь. Це дає значні переваги у порівнянні з методами, що використовують різного роду сітки, які охоплюють розрахункову область в цілому, оскільки використання вказаних сингулярних інтегральних рівнянь потребує лише дискретизації межі розрахункової області. Але труднощі виникають при числовому аналізі, що пов'язано з наявністю особливостей різного типу в досліджуваних інтегралах.

Тому актуальними питаннями є розроблення нових ефективних комп'ютерних технологій для проведення віртуальних випробувань на основі комп'ютерного експерименту. Це вимагає створення нових числових схем та обчислювальних методів. Сучасний стан розвитку комп'ютерної техніки дозволяє досліджувати складні механічні системи та знаходити характеристики фізичних полів різної природи з використанням удосконалених математичних формулювань.

В дисертаційній роботі розв'язано важливу науково-технічну проблему, яка полягає в розробленні сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу практично важливих крайових задач теорії потенціалу та теорії пружності з урахуванням аксіальної симетрії.

Сформульовано неперервні та дискретні математичні моделі для проведення розрахунків фізичних полів в задачах визначення вібрацій вільної поверхні в оболонках обертання, розв'язання крайових задач електродинаміки, теорії пружності в аксіально-симетричному формулюванні.

Побудовано коректні та точні алгоритми числового моделювання задач прикладної фізики у напрямках гідродинаміки, електродинаміки та теорії пружності.

Створено математичний апарат для коректного обчислення сингулярних інтегралів матриць теорії потенціалу та теорії пружності (задач з еліптичним диференціальним оператором);

Побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах за різні рівні заповнення, різні рівні гравітаційного поля, у тому числі при малих рівнях гравітації;

Удосконалено метод сингулярних елементів для розв'язання задач визначення динамічних характеристик складених оболонок, частково заповнених рідиною.

Розроблено нову математичну модель для вивчення гравітаційно-капілярних хвиль.

Розроблено математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та некласичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення на основі методу граничних елементів.

Проведено числове дослідження задачі електростатики.

Досліджені коливання рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною.

Метод граничних елементів поширений на задачі про плескання в круглих тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках. Відмінною рисою таких оболонок обертання є кільцева форма їх вільних поверхонь. Розроблений метод дозволяє проводити чисельне моделювання вільних коливань рідини як для різної ширини кільця, так і для різних рівнів наповнення. Отримано аналітичний розв'язок коливань вільної рідини в коаксіальних циліндричних оболонках. Особливу увагу приділено граничному випадку нескінченно малої щілини.

Запропоновані математичні методи використано для аналізу та вирішення задач власних коливань палива у резервуарах з рідиною з наявною аксіальною симетрією у полі сили тяжіння із впливом капілярних ефектів.

Це дозволило створити основи комп'ютерної технології для дослідження динамічних характеристик складених паливних баків ракет-носіїв на різних стадіях польоту, як при значних перевантаженнях, так і при мікрогравітації, в тому числі, з урахуванням плескання палива. Порівняно з відомими аналогами та програмними комплексами запропонований метод дозволяє здійснювати більш точний динамічний аналіз паливних баків, при дослідженні коливань врахувати взаємний вплив деформацій пружних стінок баків та змінних під час місії форми вільної поверхні, рівня заповнення баків пального та рівня гравітації.

Одержані в дисертації результати можуть бути використані під час проектування елементів ракетно-технічної техніки, при відстроюванні елементів конструкцій, що містять рідину, від небажаних резонансних частот.

Запропоновано узагальнення методу для неосесиметричних граничних задач для рівняння Лапласа. Задіяні граничні умови Неймана, Діріхле та мішані граничні умови, у припущенні їх періодичної поведінки. Такі задачі виникають як допоміжні в багатьох практичних застосуваннях. Серед них проблеми, пов'язані з чисельним моделюванням коливань заповнених рідиною пружних оболонок обертання, зв'язані коливання пружних круглих пластин, покривають вільну поверхню рідини в контейнерах, зростання тріщини в пружному середовищі та ін. Спільною рисою цих проблем є необхідність отримання числового розв'язку рівняння Лапласа за різних граничних умов. Оскільки ці проблеми є допоміжними, необхідно отримати їх числові розв'язки з високою точністю. В роботі розроблено новий варіант МГЕ для осесиметричної розрахункової області із заданими періодичними функціями для граничних умов. Побудовано метод, який дозволяє узагальнити запропонований підхід до розв'язання неаксіально-симетричних задач. Цей метод ґрунтується на застосуванні розроблених автором підходів до обчислення спеціальних

еліптичних інтегралів, що присутні у ядрах операторів, та ефективного підходу для обчислення зовнішніх інтегралів, які мають логарифмічні особливості.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблені методи та алгоритми були впроваджені у навчальний процес кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Методи скінченних та граничних елементів» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»

Ряд результатів та рекомендацій прикладних досліджень дисертаційній роботі використано в Інституті проблем машинобудування ім. А. Підгорного при виконанні спільного українсько-індійського проекту «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних», договору про співпрацю між Вессекським технологічним інститутом, та в рамках гранту УНТЦ «Об'єктно-орієнтовані розрахункові моделі і програми для прогнозування пружних та фононних властивостей тривимірних нанокompозитів і метаматеріалів».

**Ключові слова:** гравітаційно-капілярні хвилі, коливання рідини в оболонках, потоки рідини, напружено-деформований стан пружних тіл, електростатика, крайові задачі, аксіально-симетричні моделі, методи скінченних та граничних елементів, паливні баки ракет-носіїв, циліндричні оболонки, оболонки обертання, коаксіальні оболонки, композити та нанокompозити, включення.

## **ABSTRACT**

Karaev A.O. Advanced analysis methods of axisymmetric boundary value problems of potential theory and elastostatics.

Thesis submitted for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Natural Sciences, Speciality 105 – Applied Physics and Nanomaterials. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2022.

Increasing complexity of modern technology, engineering structures, and equipment requires comprehensive scientific research in physics, mechanics, and chemistry in order to find out the performance, reliability, and durability of the equipment. Although field experiments are necessary for making adequate engineering decisions, their implementation is a rather expensive and not always safe procedure. Therefore, the methods of virtual modelling, computer physics and computational mathematics are at the forefront of modern scientific developments.

A significant amount of modern technical equipment during design requires qualified calculations of the physical and mechanical fields characteristics, which ensure high reliability, strength, stability of movement of the equipment elements under consideration. Although only natural experiments can confirm or disprove theoretical models of physical phenomena, conducting such experiments in many cases is an expensive and not always safe procedure. Therefore, the main thing in modern scientific research is virtual or computer experiments, which make it possible to obtain the necessary physical characteristics by performing numerical calculations. Mathematical models in the form of differential equations or their systems with specified initial and boundary conditions are used to perform calculations.

It should be noted that there are many mathematical models for calculating physical fields, which are based on the use of elliptic-type differential equations. Problems of studying the movement of liquid in tanks, determining the static and dynamic characteristics of elastic bodies, problems of electrostatics, etc., lead to such formulations. One of the important scientific and technical problems in the field of

rocket and space technology is ensuring the stability of launch vehicles at various stages of mission, including manoeuvres at low levels of gravity. These problems can be solved using the potential theory with subsequent reduction to singular integral equations. This gives significant advantages compared to methods using different types of grids that cover the computational domain as a whole, since the use of the specified singular integral equations requires only the discretization of the computational domain boundary. But difficulties arise during numerical analysis, which is due to the presence of different types of singularities in the studied integrals.

Therefore, the development of new effective computer technologies for performing virtual tests based on a computer experiment is an urgent issue. This requires the creation of new numerical schemes and computational methods. The current state of development of computer technology makes it possible to investigate complex mechanical systems and find the characteristics of physical fields of various nature using advanced mathematical formulations.

In the dissertation work, an important scientific and technical problem is solved, which consists in the development of a modern effective computational method for the analysis of practically important boundary value problems of the potential theory and the theory of elasticity, taking into account axial symmetry.

Continuous and discrete mathematical models have been formulated for calculating physical fields in problems of determining vibrations of a free surface in shells of rotation, solving boundary value problems of electrodynamics, and the theory of elasticity in an axially symmetric formulation.

Correct and accurate algorithms for numerical modelling of applied physics problems in the directions of hydrodynamics, electrodynamics, and elasticity theory have been built.

A mathematical apparatus was created for the correct calculation of the singular integrals in the matrices of the theory potential and the theory of elasticity (problems with an elliptic differential operator);



Mathematical models have been built for the study of free fluid oscillations in rigid tanks at different levels of filling, different levels of the gravitational field, including the low levels of gravity.

The method of singular elements for solving the problems of determining the dynamic characteristics of composite fluid-filled shells partially has been improved.

A new mathematical model for the study of gravity-capillary waves has been developed.

A mathematical model of a spatial representative element has been developed to study the averaged mechanical properties of composites and nanocomposites, taking into account classical and non-classical conditions on the interaction surfaces of matrix materials and inclusions based on the boundary element method.

A numerical study of the problem of electrostatics was carried out.

Fluid oscillations in coaxial and toroidal shells partially filled with liquid have been studied.

The method of boundary elements is extended to the problem of splashing in circular toroidal and coaxial cylindrical shells. A distinctive feature of such shells of rotation is the annular shape of their free surfaces. The developed method allows numerical modelling of free fluid oscillations both for different widths of the ring and for different levels of filling. An analytical solution of free fluid oscillations in coaxial cylindrical shells was obtained. Special attention is paid to the limiting case of an infinitesimal gap.

The proposed mathematical methods were used to analyse and solve the problems of self-oscillations of fuel in liquid tanks with existing axial symmetry in the gravity field under the influence of capillary effects.

This made it possible to create the foundations of computer technology for the analysis of free and impulsive blasts of storage tanks of launch vehicles at various stages of mission: during re-entry and in the minds of microgravity, including, with the improvement of splashing fire. Paired with similar analogues and software systems for proposing, the method allows for more accurate analysis of the pouring

of storm tanks, reversing the mutual inflow of spring deformations of the walls of the tanks and the replacement of the tanks.

The results obtained in the dissertation can be used during the design of elements of rocket technology, when tuning elements of structures containing liquid from unwanted resonant frequencies.

A generalization of the method for non-axisymmetric boundary value problems for the Laplace equation is proposed. Neumann's, Dirichlet's and mixed boundary conditions are used, assuming their periodic behaviour. Such problems arise as auxiliary in many practical applications. Among them are problems related to numerical modelling of oscillations of fluid-filled elastic shells of rotation, coupled oscillations of elastic circular plates covering the free surface of liquid in containers, crack growth in an elastic medium, etc. A common feature of these problems is the need to obtain a numerical solution of the Laplace equation under various boundary conditions. Since these problems are auxiliary, it is necessary to obtain their numerical solutions with very high accuracy. In the work, a new version of the BEM for an axisymmetric calculation domain with specified periodic functions for boundary conditions was developed. A method has been developed that allows us to generalize the proposed approach to solving non-axially symmetric problems. This method is based on the application of approaches developed by the author to the calculation of special elliptic integrals present in the kernels of operators, and an effective approach to the calculation of external integrals that have logarithmic features.

The results of the dissertation research, namely the theoretical material and the developed methods and algorithms, were implemented in the educational process of the Department of Information Technologies in Physical and Energy Systems of the Educational and Scientific Institute of Computer Physics and Energy of V. N. Karazin Kharkiv National University during lectures, laboratory and practical lessons from the courses "Finite and boundary element methods" for students of the 1st year of the master's degree in specialty 105 - "Applied physics and nanomaterials".

A number of results and recommendations of applied research were used in the dissertation work at the Institute of Mechanical Engineering Problems named after A. Pidgorny during the implementation of the joint Ukrainian-Indian project "Modern computational methods for the analysis of splashes in fuels", the cooperation agreement between the Wessex Institute of Technology, and within the framework of the grant of the National Technical University of Ukraine "Object-oriented calculation models and programs for predicting elastic and phonon properties three-dimensional nanocomposites and metamaterials".

**Keywords:** gravitational-capillarity waves, liquid vibrations in shells, fluid flows, stress-strain state of elastic bodies, boundary-value problems, axisymmetric models, finite and boundary element methods, fuel tanks of launch vehicles, cylindrical shells, shells of revolution, coaxial shells, composites and nanocomposites, inclusions.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

### Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. V. Gnitko, K. Degtyariov, A. Karaiev, E. Strelnikova. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019/1/30; 122: 13-25. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі теорії пружності твердих тіл за наявності мікро- та нано-включень; побудував числовий алгоритм знаходження власних частот коливань сферично-циліндричних резервуарів із рідиною).*

2. V. Gnitko, K. Degtyariov, A. Karaiev, E. Strelnikova. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019/9/13; 126: 189-200. (Scopus, United Kingdom, Q4).

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі коливань нев'язкої рідини в циліндричних резервуарах різних типів: циліндрично-сферичних, циліндрично-конічних тощо; застосував швидкий алгоритм методу сингулярних границь до розв'язання задачі власних функцій та власних частот вільних коливань рідини; створив квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів, що виникають при розв'язанні системи лінійних рівнянь у задачах теорії потенціалу)*

3. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020/2/20; 11(01): 2050003. (Scopus, Singapore, Q3)

*(Особистий внесок здобувача: дослідив та обчислив квадратурні формули для*

*розв'язання сингулярних інтегралів, що виникають при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих поверхневих сил та деформації твердих тіл у задачах теорії пружності)*

4. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1): 3-13. (Scopus, Germany, Q4)  
(*Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель коливань рідини в тороїдальних та коаксіальних циліндричних оболонках, зокрема розглянув та аналітично дослідив резонансні частоти коливань при малих радіусах тороїдальних оболонок; розробив числовий алгоритм знаходження власних частот та власних функцій коливань рідини в тороїдальних оболонках)*)

5. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Maria L Myronenko, Elena A Strelnikova. BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution. International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2021/3/4; 9(1): 38-50. (Scopus, United Kingdom, Q4)

(*Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель коливань рідини в циліндричних резервуарах за наявності впливу сил поверхневого натягу рідини та гравітаційного поля; розробив метод розділення задачі коливань рідини на виключно гравітаційну задачу та знайшов методом збурень розв'язок загальної гравітаційно-капілярної задачі, знаючи значення власних функцій виключно гравітаційної задачі)*)

6. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021/4; 101(4): e201800339. (Scopus, Germany, Q2)

(*Особистий внесок здобувача: отримав новий клас спеціальних функцій, названих спеціальними еліптичними інтегралами, що узагальнюють відомі класичні повні еліптичні інтеграли; отримав рекурентні формули, що дозволяють обчислити з будь-якою заданою точністю спеціальні еліптичні*

*інтеграли будь-якого порядку; використав отримані формули для числового розв'язання задач знаходження електричного потенціалу заряджених тіл та задач термопластичності)*

7. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Neelam Choudhary, Elena A Strelnikova. Boundary element method analysis of boundary value problems with periodic boundary conditions. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2021/8/24; 131: 31-44. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі коливальності рідини в циліндричних резервуарах з періодичними граничними умовами; використав отримані вище спеціальні еліптичні інтеграли для розв'язання сингулярних інтегралів, що породжені розгляданням періодичних функцій в ряди)*

8. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Kyryl G Degtyariov, Ivan A Vierushkin, Elena A Strelnikova. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2022/7/25; 134: 67-79. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: розробив квадратурні формули для розв'язання сингулярних інтегралів з логарифмічною особливістю; використав отримані формули для числового аналізу коливальності рідини в пружних резервуарах)*

### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

9. Караєв А.О., Стрельнікова О.О. Аксіально-симетричні полігармонічні сплайни в задачах теорії потенціалу // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 24.

10. Artem Karaiev and Elena Strelnikova. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells // 3 rd International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange (DSMIE-2020), June 9-12, 2020. Kharkiv, Ukraine. P.114.

11. Elena Sierikova, Elena Strelnikova, Denys Kriutchenko, Artem Karaiev.  
Coupled boundary and finite element method for stability analysis of launch vehicle  
// 3rd International Black Sea Modern Scientific Research Congress, March 23-24,  
2023 - Samsun, Turkiye. P. 228.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	20
РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ ПОБУДОВИ ЕФЕКТИВНИХ РОЗРАХУНКОВИХ СХЕМ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ.....	27
1.1 Огляд сучасних обчислювальних методів розв’язання крайових задач теорії потенціалу та лінійної теорії пружності .....	27
1.2 Особливості методу граничних елементів .....	30
1.3. Метод граничних супер-елементів.....	33
1.4 Аналіз плескань рідини в жорстких оболонках обертання із застосуванням МГЕ та МГСЕ .....	34
1.5. МГЕ та МГСЕ з задачах механіки композитів та нано-композитів.....	37
Висновки за розділом 1.....	41
РОЗДІЛ 2. МЕТОД СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СИСТЕМАХ З АКсіАЛЬНИМ ТИПОМ СИМЕТРІЇ.....	45
2.1. Третя тотожність Гріна.....	47
2.2. Третя тотожність Гріна у системах з аксіальною симетрією .....	56
2.3. Функція Гріна оператора Лапласа.....	57
2.4. Аксіально-симетричні функції Гріна оператора Лапласа.....	58
2.5 Метод сингулярних інтегральних рівнянь .....	68
2.6. Обчислення діагональних елементів матриці системи .....	74
2.7. Розкладення повного еліптичного інтеграла першого роду.....	86
2.8. Обчислення діагональних елементів.....	93
2.9. Інтеграли з логарифмічною особливістю .....	94
2.10. Ортогональні многочлени з логарифмічною вагою .....	95



	17
Висновки а розділом 2 .....	97
<b>РОЗДІЛ 3. ВИКОРИСТАННЯ АКсіАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛіГАРМОНіЧНИХ СПЛАЙНіВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕОДНОРіДНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФіЗИКИ.....</b>	<b>99</b>
3.1. Метод подвійного заміщення.....	102
3.2. Полігармонічні сплайни .....	103
3.3. Аксіально-симетричні полігармонічні сплакни.....	105
3.4. Спеціальні еліптичні інтеграли.....	107
3.5. Обчислення спеціальних еліптичних інтегралів.....	110
3.6. Обчислення повних еліптичних інтегралів з високою точністю .....	111
3.7. Повернення до аксіально-симетричних полі гармонічних сплайнів .....	113
3.8. Числові приклади .....	114
3.9. Потенціал нерівномірно зарядженої кулі з отвором .....	115
3.10. Задача Ванга.....	117
Висновки за розділом 3.....	119
<b>РОЗДІЛ 4. АКсіАЛЬНО-СИМЕТРИЧНі ЗАДАЧі ТЕОРіЇ ПРУЖНОСТі ....</b>	<b>121</b>
4.1 Інтегральне рівняння рівноваги ізотропних пружних тіл.....	125
4.2. Матриця Гріна рівняння рівноваги .....	131
4.3. Аксіально-симетрична матриця Гріна .....	136
4.4. Числові результати.....	140
4.5. Урахування поверхневих ефектів.....	144
Висновки за розділом. 4.....	146
<b>РОЗДІЛ 5 .....</b>	<b>148</b>

РОЗДІЛ 5. АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНІ ПОВЕРХНЕВІ ГРАВІТАЦІЙНО-КАПІЛЯРНІ ХВИЛІ, УТВОРЕНІ КОЛИВАННЯМ ОБМЕЖЕНОГО ОБ'ЄМУ РІДИНИ.....	148
5.1 Поле сили тяжіння.....	149
5.2 Потенціальний потік.....	150
5.3 Рівняння Бернуллі на вільній поверхні рідини. Поверхневий натяг .....	151
5.4 Середня кривизна аксіально-симетричної поверхні.....	152
5.5 Кінематичне рівняння на вільній поверхні.....	155
5.6. Система рівнянь для потенціалу швидкості.....	157
5.7. Вільні аксіально-симетричні гравітаційно-капілярні хвилі.....	159
5.8. Розкладання за гравітаційними стаціонарними станами .....	159
5.9 Аналітичний розв'язок у випадку прямого циліндра.....	165
5.11. Числові результати.....	172
5.12 Плескання рідини в круглих тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках .....	174
5.13 Виділення стаціонарних мод для задачі тороїдальних оболонок .....	179
5.14 Аналітичний розв'язок для тороїдальних оболонок .....	180
5.15 Аксіально-симетричні коливання в коаксіальних циліндричних оболонках .....	182
5.16 Аксіально-симетричні коливання в кругових тороїдальних оболонках	183
5.17 Задачі з періодичними граничними умовами.....	184
5.18 Аксіальні інтеграли з функціями Гріна та тригонометричними функціями.....	185
Висновки за розділом 5.....	188
ВИСНОВКИ.....	190

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	195
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.....	207

## ВСТУП

Все більше ускладнення сучасної техніки, інженерних споруд та апаратури вимагає проведення комплексних наукових досліджень з фізики, механіки, хімії з метою з'ясування працездатності, надійності та міцності обладнання. Хоча натурні експерименти є необхідними для прийняття адекватних інженерних рішень, їх проведення є досить кошовною та не завжди безпечною процедурою. Тому на перший фланг сучасних наукових розробок виходять методи віртуального моделювання, комп'ютерної фізики та обчислювальної математики.

### **Обґрунтування вибору теми дослідження.**

Значна кількість сучасного технічного обладнання при проектуванні вимагає кваліфікованих обчислень характеристик фізичних та механічних полів, що забезпечують високу надійність, міцність, стійкість руху елементів обладнання, що розглядаються. Хоча лише натурний експеримент дає змогу підтвердити або спростувати теоретичні моделі фізичних явищ, проведення таких експериментів в багатьох випадках є кошовною та не завжди безпечною процедурою. Тому головним в сучасних наукових дослідженнях стають віртуальні, або комп'ютерні експерименти, що дають змогу отримати необхідні фізичні характеристики шляхом проведення числових розрахунків. Для проведення розрахунків фізичних полів використовують математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь та їх систем із заданими початковими та граничними умовами. На теперішній час розроблено ефективні методи числового розв'язання диференціальних рівнянь в часткових похідних. Але більшість методів зорієнтовано на використання дискретних аналогів диференціальних рівнянь, що для забезпечення прийнятної точності потребує використання систем великої розмірності. Збільшення розмірності розв'язувальних систем призводить, у свою чергу, до втрати стійкості розрахункових схем та суттєвого збільшення розрахункового часу.

Слід зауважити, що існує багато математичних моделей для розрахунку фізичних полів, які засновані на використанні диференціальних рівнянь еліптичного типу. К таким формулюванням приводять задачі вивчення руху рідини в резервуарах, визначення статичних та динамічних характеристик пружного тіла, задачі електростатики та ін. Однією з важливих науково-технічних проблем в галузі ракетно-космічної техніки є забезпечення стійкості ракет-носіїв на різних етапах польоту, включаючи маневри при низьких рівнях гравітації. Вказані задачі можна розв'язувати з використанням теорії потенціалу з подальшим зведенням до сингулярних інтегральних рівнянь. Це дає значні переваги у порівнянні з методами, що використовують різного роду сітки, які охоплюють розрахункову область в цілому, оскільки використання вказаних сингулярних інтегральних рівнянь потребує лише дискретизації межі розрахункової області. Але труднощі виникають при числовому аналізі, що пов'язано з наявністю особливостей різного типу в досліджуваних інтегралах.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розроблення сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу крайових задач теорії потенціалу та теорії пружності з урахуванням аксіальної симетрії.

Для досягнення зазначеної мети в роботі були сформульовані та розв'язані такі основні наукові та прикладні задачі:

1. Розробити математичні моделі для аналізу міцносних та динамічних характеристик оболонок та оболонкових конструкцій, що частково заповнені рідиною.

2. Обґрунтувати доцільність зведення задач гідро-пружної взаємодії до граничних інтегральних рівнянь.

3. Побудувати математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах за різні рівні заповнення, різні рівні гравітаційного поля.

4. Керуючись тим, що крайові задачі теорії потенціалу та теорії пружності, мають багато спільних рис, розробити уніфіковані ефективні методи для обчислення елементів матриць, що мають особливості різного типу, та є

придатними для використання як в задачах теорії потенціалу, так і в задачах теорії пружності

5. Удосконалити метод сингулярних елементів

6. Розробити математичні моделі, що дозволяють враховувати як класичні, так і некласичні граничні умови на поверхнях взаємодії середовищ.

7. Розробити нову математичну модель для вивчення гравітаційно-капілярних хвиль.

8. На основі методу граничних елементів розробити математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та некласичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення.

9. Провести тестування розроблених методів та алгоритмів з метою доведення достовірності запропонованих підходів.

10. Провести числове дослідження задачі електростатики.

11. Здійснити числові дослідження частот та форм коливань рідини в складених баках різної форми, провести порівняння результатів, отриманих з урахуванням та без урахування поверхневого натягу.

12. Дослідити коливання рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною. Вивчити залежності динамічних характеристик від геометричних параметрів оболонок.

13. Провести числове дослідження осереднених механічних характеристик репрезентативної об'ємної комірки у вигляді циліндру із включенням у вигляді закругленого циліндру.

#### **Об'єкт та предмет дослідження.**

Об'єкт дослідження – фізико-механічні поля, що виникають в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу та лінійної теорії пружності.

Предмет дослідження – міцнісні та динамічні характеристики оболонок обертання, частково заповнених рідиною, та осереднені міцності характеристики об'ємних репрезентативних комірок композитів.

### **Методи дослідження.**

Модифіковані обчислювальні методи граничних елементів та їх поєднання, метод Фур'є.

### **Наукова новизна отриманих результатів.**

1. Розроблено новий ефективний метод розв'язання крайових задач теорії потенціалу та лінійній теорії пружності, заснований на використанні редукованого методу граничних елементів.

2. Запропоновано новий клас спеціальних функцій пов'язаних з узагальненими еліптичними інтегралами, досліджено їх властивості та розроблено числовий метод для їх розрахунку.

3. Запропоновано нові математичні моделі для врахування неklasичних граничних умов на поверхнях інтерфейсу для розв'язання аксіально-симетричних задач теорії пружності та динаміки коливань рідини в резервуарах при малих рівнях гравітації

4. Вперше, на основі методу граничних елементів з аксіальною симетрією розроблено математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та неklasичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення.

5. Здійснено уточнені числові дослідження частот та форм коливань рідини в складених баках різної форми з порівнянням результатів, отриманих з урахуванням та без урахування поверхневого натягу.

6. Проведено уточнене дослідження коливань рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною та знайдено залежності динамічних характеристик від геометричних параметрів оболонок.

7. На основі модифікованого методу граничних елементів з аксіальною симетрією проведено числове дослідження осереднених механічних

характеристик репрезентативної об'ємної комірки у вигляді циліндру із включенням у вигляді закругленого циліндру.

8. Вперше побудовано математичну модель для опису гравітаційно-капілярних хвиль.

### **Особистий внесок здобувача.**

Автором особисто виконано наступні види робіт:

1. Побудовано коректні та точні алгоритми числового моделювання задач прикладної фізики у напрямках гідродинаміки, електродинаміки та теорії пружності;

2. Запропоновано новий клас спеціальних функцій пов'язаних з узагальненими еліптичними інтегралами, досліджено їх властивості, отримані рекурентні формули та розроблено ефективний числовий метод для розрахунку побудованих спеціальних функцій

3. Створено математичний апарат для коректного обчислення сингулярних інтегралів матриць теорії потенціалу та теорії пружності (задач з еліптичним диференціальним оператором);

4. Побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах за різні рівні заповнення, різні рівні гравітаційного поля, у тому числі при малих рівнях гравітації;

5. Удосконалено метод сингулярних елементів;

6. Розроблено нову математичну модель для вивчення гравітаційно-капілярних хвиль;

7. Розроблено математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та некласичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення на основі методу граничних елементів;

8. Проведено числове дослідження задачі електростатики з використанням розроблених числових методів.



9. Досліджені коливання рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною.

10. Запропоновані математичні методи використано для аналізу та вирішення задач власних коливань палива у резервуарах з рідиною з наявною аксіальною симетрією у полі сили тяжіння із впливом капілярних ефектів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати роботи доповідались і обговорювались на:

1. Міжнародній конференції «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях (КМНТ-2018)», Харків;

2. XIX Міжнародному симпозиумі «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики», 2019, Харків;

3. Міжнародній науково-технічній конференції «Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019» (ФТПЕШВ-2019);

4. 3rd International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange, DSMIE 2020; Kharkiv; Ukraine.

5. 3rd International Black Sea Modern Scientific Research Congress; 2023 - Samsun, Turkiye.

### **Структура та обсяг дисертацій.**

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел з 128 найменування на 12 сторінках та 1 додатку на 3 сторінках, а також містить 10 рисунків та 11 таблиць. Загальний обсяг роботи складає 210 сторінок, включаючи 175 сторінок основного тексту.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.**

Дисертаційна робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна відповідно до плану науково-дослідних робіт навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики, зокрема, в межах науково-дослідної роботи № держреєстрації 0122U001482, тема наукового дослідження «Математичне моделювання теплових процесів в

анізотропних наноматеріалах», при виконанні якої здобувач приймав участь як виконавець.

Обґрунтованість і достовірність отриманих результатів дисертаційної роботи доведено шляхом співставлення з аналітичними, числовими та експериментальними даними інших дослідників, а також результатами, що характеризують збіжність та точність розробленого методу.

### **Практичне значення одержаних результатів.**

Одержані в дисертації результати можуть бути використані під час проектування елементів ракетно-технічної техніки, при відстроюванні елементів конструкцій, що містять рідину, від небажаних резонансних частот.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблені методи та алгоритми були впроваджені у навчальний процес:

кафедри комп'ютерної фізики навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Методи скінченних та граничних елементів» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали».

Ряд результатів та рекомендацій прикладних досліджень дисертаційній роботі використано в Інституті проблем машинобудування ім. А. Підгорного при виконанні спільного українсько-індійського проекту «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних баках», договору про співпрацю між Вессекським технологічним інститутом, та в рамках гранту УНТЦ «Об'єктно-орієнтовані розрахункові моделі і програми для прогнозування пружних та фононних властивостей тривимірних нанокompозитів і метаматеріалів», про що свідчить відповідний акт.

## РОЗДІЛ 1

# СУЧАСНИЙ СТАН ПИТАННЯ ПОБУДОВИ ЕФЕКТИВНИХ РОЗРАХУНКОВИХ СХЕМ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ

### 1.1 Огляд сучасних обчислювальних методів розв'язання крайових задач теорії потенціалу та лінійної теорії пружності

За останні десятиліття в інженерній практиці значний прогрес досягнуто в галузі створення високоефективних та надійних машин, конструкцій та апаратури, що працюють в умовах підвищених технологічних навантажень при взаємодії із середовищем. Великі успіхи в цьому напрямку пов'язані з отриманими фундаментальними результатами в фізиці та математиці, розвитком обчислювальних методів, оскільки без ретельного аналізу елементів конструкцій на міцність та динамічну стійкість подальший розвиток сучасної техніки був би неможливим.

Поява комп'ютерної техніки нового покоління викликала не лише інтенсивний розвиток передових обчислювальних методів для розв'язання крайових задач теоретичної фізики та математики, а й надала змогу формулювати набагато складніші прикладні завдання. Такі нові задачі характеризуються великою розмірністю розв'язувальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, неканонічними формами розрахункових областей, врахуванням нових фізичних ефектів. Це зазвичай призводить і до більш складних систем диференціальних рівнянь. З ускладненням розрахункових схем зростає й час розрахунків на самих потужних комп'ютерах. І знову грізний виклик "прокляття розмірності" стає все більш відчутним. Це вимагає врахування специфіки розрахункової області з метою зменшення вимірності розв'язувальних систем, хоча часто такі модифікації призводять до ускладнення математичного апарату, що використовується. Але суттєве скорочення часу обчислень нівелює цей недолік.

Реальні задачі прикладної фізики зазвичай моделюються диференціальними рівняннями в частинних похідних, які мають задовольнятися в деякій області  $G$ . Розв'язки диференціального рівняння відшукується при певних обмеженнях – граничних умовах, заданих на межі області  $\partial G$ . Якщо область  $G$  тривимірна, то  $\partial G$  являє собою поверхню, що її обмежує, у двовимірних задачах  $G$  – плоска область, а  $\partial G$  – криволінійний контур, що її охоплює. Зазначимо, що розв'язання нестационарних задач потребує також завдання початкових умов.

Слід зауважити, що велика кількість важливих технічних проблем зводяться до розв'язання саме крайових задач для диференціальних рівнянь, тобто коли зміна параметрів за часом є несуттєвою. За допомогою крайових задач можна описати такі процеси, як тепло- і масо-перенесення, дифузія, рух рідини (в тому числі за наявності вільної поверхні), підтоплення міських територій, забруднення навколишнього середовища, зміна рівня підйому ґрунтових вод, електромагнетизм, деформування твердого тіла [1-2]. Наприклад, розподіл тепла, що встановився, описується рівнянням Лапласа щодо температури, при цьому в коректно сформульованій задачі в кожній точці межі  $\partial G$  повинні бути задані температура або тепловий потік (градієнт температури), або їх комбінація. Зауважимо, що друга крайова задача (коли задано лише градієнт) вимагає завдання додаткових умов розв'язності. У статичних задачах теорії пружності диференціальні рівняння у частинних похідних – це рівняння пружної рівноваги; а в кожній точці межі  $\partial G$  задаються нормальні напруження або переміщення і дотичні напруження, або переміщення.

Для деяких крайових задач вдається знайти аналітичні розв'язки. Зазвичай у цих випадках як геометрія області, так і граничні умови досить прості, а визначальні рівняння у частинних похідних – лінійні. Отримано ряд аналітичних розв'язків, що відповідають точковому збуренню (або їх сукупності) в однорідному нескінченному середовищі. Ці збурення є тепловими

джерелами або стоками (у задачах теплопровідності), відповідають дії зосередженій силі (у задачах механіки деформованого твердого тіла) або джерелу або стоку рідини в задачах гідромеханіки. Такі розв'язки прийнято називати фундаментальними або сингулярними. Вони мають достатню гладкість всюди, крім точки збурення, в якій має місце особливість у поведінці рішення.

У практичних задачах, що виникають в інженерній практиці та прикладних науках, важко розраховувати на отримання аналітичних рішень, навіть якщо визначальні диференціальні рівняння лінійні, оскільки для цих задач характерна надзвичайна нерегулярність меж областей та (або) неоднорідність матеріалу; тому розв'язання такої задачі не може бути побудовано за допомогою елементарних математичних функцій. У цьому разі шукають наближені числові розв'язки. Теоретичні результати, спрямовані на розв'язання актуальних задач практики в різних галузях виробництва, примножуються розвитком комп'ютерної техніки, що відкриває нові можливості для розв'язання складних інженерних задач, створення та розвитку числових методів розв'язання задач прикладної фізики. У цій галузі наразі отримано значні результати.

Методи числового розв'язання крайових задач комп'ютерної фізики, умовно можна розділити на два великі класи: перший з них вимагає апроксимації рішення у всій області  $G$ , другий - вимагає апроксимації невідомих тільки на межі  $\partial G$  області  $G$ . До першого класу відносяться методи скінченних різниць і скінченних елементів, до другого – методи граничних інтегральних рівнянь та граничних елементів. Зауважимо, що обидва класи методів можна розглядати як різновиди методу зважених нев'язок.

Одним з перших обчислювальних методів, використаних для розв'язання крайових задач прикладної фізики, був метод скінченних різниць [3, 4]. Основи метода є такими. Область зміни неперервного аргументу замінюється скінченною сукупністю точок (вузлів), званих сіткою. Невідомі функції, що

треба знайти в цих точках, зазвичай називають сітковими функціями. Для обчислення частинних похідних шуканих функцій в диференціальних рівняннях та крайових умовах використовують різницеві співвідношення, що містять вже значення лише невідомих функцій. Для знаходження невідомих значень функцій у вузлах точках здобувають системи лінійних (або нелінійних) алгебраїчних рівнянь. Привабливість методів скінченних різниць полягає в можливості їх застосування до будь-якої системи диференціальних рівнянь, проте врахування граничних умов завдання часто є громіздкою і важко програмованою операцією. Проблема також значно ускладнюється, коли необхідно обчислювати різницеві аналоги частинних похідних.

В даний час найбільш популярним є підхід, що полягає в притаманному для фізики розбитті тіла на елементи скінченних розмірів – метод скінченних елементів (МСЕ). Кожний елемент приблизно описує поведінку фізичних полів в малій області тіла. Зазначимо, що умови неперервності накладаються зазвичай у вузлах елементів. МСЕ було вперше описано в роботі [5]. Подальше розвинення методу надано Р. Курантом [6], Дж. Аргіросом [7], М. Тернером, Р. Клаффом, Г. Мартіном, Л. Топп [8]. Потім з'явилися основні монографії, Г.Стренга, Дж. Фікса, Р.Галлагера, А.С. Сахарова та І. Альтенбаха та ін. Діапазон використання МСЕ, його ефективність, зручність і легкість врахування граничних умов сприяли тому, що метод став одним з найбільш застосованих при розв'язанні крайових задач прикладної фізики та механіки суцільного середовища. Як недоліки слід зазначити, по-перше, необхідність дискретизації всієї області дослідження, що неминуче призводить до великої кількості скінченних елементів, по-друге, велику ймовірність виникнення нереальних розривів значень деяких фізичних величин, що виражаються через старші похідні від невідомих функцій, між суміжними елементами.

## **1.2 Особливості методу граничних елементів**

Альтернативним підходом до розв'язання диференціальних рівнянь із частинними похідними є зведення їх до інтегральних рівнянь. Це один з

найбільш ефективних методів розв'язання крайових задач теоретичної фізики. При застосуванні цього підходу розглянуті диференціальні рівняння інтегрують якимось способом або перед переходом до дискретизації, або перед введенням апроксимації. Очікується, що в результаті такої операції буде отримано систему рівнянь, що включає значення змінних лише на межі області. Звідси випливає, що будь-яка схема дискретизації, що використовується, приведе до розбиття на елементи лише поверхонь (контурів), що обмежують розглянуту область  $G$ . Від цього і походить назва методу граничних рівнянь [9]. Цей метод часто називають методом потенціалу. Сам метод зведення крайових задач до граничних інтегральних рівнянь є досить простим. Необхідно мати лише фундаментальний розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, щоб шляхом задоволення граничних умов задачі отримати граничні інтегральні рівняння для визначення невідомих густин потенціалів. Головна перевага зазначеного методу полягає у зниженні на одиницю розмірності вихідної крайової задачі.

Спочатку методи граничних інтегральних рівнянь розглядалися як певний вид аналітичних методів, не пов'язаних з наближеними обчисленнями. Ці аналітичні методи набули популярності завдяки фундаментальним роботам Н.І. Мухелішвілі, С.Г. Міхліната ін, але вони не знайшли популярності серед інженерів. Зазначимо, що попередником деяких з цих дослідників був Келлог О.Д. [10], який застосовував інтегральні рівняння для розв'язання рівняння Лапласа.

Не можна сказати, що скорочення геометричної розмірності на одиницю, яке досягається переходом до граничних інтегральних рівнянь, не привертало уваги вчених та інженерів своїми прикладними можливостями.

Виразне розуміння перспектив розрахункових методів, заснованих на застосуванні граничних інтегральних рівнянь, властиві роботам Н.І. Мухелішвілі та його учнів А.Я. Горгадзе та А.К. Рухадзе. Вказані статті містять усі компоненти того методу, який нині називається «методом граничних елементів». Тут використовується й розбиття межі на елементи, й апроксимація шуканих функцій у межах цих граничних елементів, та зведення

інтегрального рівняння до системи алгебраїчних рівнянь, та розв'язання її з подальшим визначенням невідомих функцій на елементах межі, а також обчислення значень невідомих функцій у внутрішніх точках тіла.

Однак у ті роки трудомісткість розрахунків явно не сприяла розвитку методу. Сучасні можливості обчислювальної техніки дозволяють зробити рішучий крок до застосування цього складного апарату математичної фізики для розв'язання актуальних практичних задач.

Слід зауважити, що при числовому розв'язанні інтегральних рівнянь теорії потенціалу виникають труднощі, пов'язані з тим, що в них виникають сингулярні інтегралі з логарифмічною особливістю, деякі інтегралі слід розглядати в сенсі головного значення за Коші або Адамаром. Спочатку стандартний підхід до розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь полягав у їх регуляризації та подальшому числовому розв'язанні отриманих інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Однак такий підхід дуже трудомісткий. В даний час у числових розрахунках найбільшого поширення набули прямі методи розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь, які, минаючи етап регуляризації, приводять до скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них слід відзначити метод механічних квадратур, заснований на певних формулах для інтерполяційного полінома і ефективних квадратурних формулах для обчислення сингулярних інтегралів [11].

Теорію одновимірних сингулярних рівнянь вважають досить завершеною. Цього не можна сказати про теорію двовимірних сингулярних рівнянь. Але на цей час відомі фундаментальні розв'язки для великого класу диференціальних рівнянь, що дозволяє будувати інтегральні зображення і зводити задачі до інтегральних рівнянь. Найбільш простим і таким, що часто зустрічається на практиці, є фундаментальне рішення, яке зображає ядро ньютонівського потенціалу, що задовольняє гармонічному рівнянню. Рішення як рівняння Лапласа, та й багатьох бігармонічних рівнянь можуть бути зображені як комбінації гармонічних потенціалів. Цим досягається можливість зведення



бігармонічних крайових задач до граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу.

Довгий час зусилля математиків, які займаються такими інтегральними рівняннями, були спрямовані на те, щоб шляхом спеціальних перетворень привести розглянуті рівняння до інтегральних рівнянь типу Фредгольма. Однак отримані при цьому результати не змогли задовольнити потреби практики в повному обсязі, оскільки виявилися малоефективними для числової реалізації. Зауважимо також, що отримані системи лінійних алгебраїчних рівнянь не мали матриць із істотно переважними діагоналями, що не сприяло побудові стійких обчислювальних схем.

Револьюційним кроком в розвитку методу граничних елементів (МГЕ) став вихід монографії Карлоса Бреббія із співавторами [11], в якій вперше були систематизовані основні поняття МГЕ, з'ясовано його зв'язок з іншими обчислювальними методами, вказано на переваги та недоліки.

### **1.3. Метод граничних супер-елементів**

Хоча МГЕ дає суттєве зменшення розмірності задачі, що досліджується, однак розвиток сучасної техніки потребує подальшого удосконалення математичних моделей та обчислювальних методів. Так, в [12-15] запропоновано так званий метод граничних супер-елементів, (МГСЕ), який є вдосконаленням методу колокацій з підобластями [11].

У МГСЕ розрахункову область ділять на кілька під-областей, і для кожної під-області формулюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь МГЕ. Тоді глобальна система рівнянь отримується шляхом підсумовування результатів по усім під-областям з використанням умов рівноваги в спільних вузлах поверхні інтерфейсу. Глобальна матриця системи на основі МГСЕ має блокований і розріджений характер, і тому для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна використовувати добре розроблені комп'ютерні методи та програмні коди для розріджених систем. Використання МГСЕ не тільки покращує як ефективність, так і швидкість обчислення, але також дає змогу

розв'язувати такі складні проблеми, як руйнування елементів конструкцій (шляхом поділу розрахункової області уздовж поверхонь тріщини [12]), взаємодію різних суцільних середовищ [13] та проблеми динаміки рідини для резервуарів з перегородками [14] за допомогою поділу розрахункової області уздовж поверхонь інтерфейсів і перегородок. У багатьох інженерних задачах і геометрія, і граничні умови є аксіально-симетричними відносно деякої осі. МГЕ спочатку був розроблений для задач теорії потенціалу [11], а пізніше поширений на проблеми пружності [15] через аналогію між фундаментальними розв'язками обох теорій. МГЕ для аксіально-симетричної теорії пружності вперше було застосовано Крузом та ін. [16], з використанням фундаментального розв'язку, отриманий Керманідісом [17]. Подальші застосування МГЕ до аксіально-симетричних проблем теорії пружності, термопружності та механіки руйнування були проведені Бакром [18]. Але застосування МГЕ та МГСЕ до аксіально-симетричних задач все ще не достатньо вивчено в літературі.

#### **1.4 Аналіз плескань рідини в жорстких оболонках обертання із застосуванням МГЕ та МГСЕ**

Проблема плескань рідини в контейнерах, резервуарах і баках є головною темою багатьох досліджень стосовно стійкості руху в останні десятиліття. Це явище притаманне руху вантажних танкерів, баків ракет-носіїв при маневруванні, руху рідини в контейнерах для збереження пiтної води внаслідок дії раптово прикладеного навантаження, наприклад, сейсмічного або імпульсного (що визвано падінням літака або терористичним актом). Тобто, феномен плескань з точки зору фізики є рухом вільної поверхні рідини, що міститься в баках, під дією раптово прикладеного навантаження. Праця Олсена [19] присвячена класифікації коливань рідини в резервуарах. Виділено три основні форми плескань, тобто повздовжні, вертикальні та обертальні плескання. Тобто, феномен плескання виявляється в широкому діапазоні застосування: в контейнерах для перевезення та схову зрідженого газу,

паливних баках літаків та ракет-носіїв, в резервуарах вантажних танкерів, а також в резервуарах-сховищах нафти та питної води.

З огляду літературних джерел можна зробити висновок, що особливо потужні плескання виникають саме в частково заповнених резервуарах, коли потужний рух рідини може створити надмірний локалізований тиск рідини на стінки резервуара, що може стати причиною до руйнування елементів конструкції, призвести до втрати стійкості, або сходження космічного апарату з розрахункової орбіти.

Проектування вказаних вище резервуарів вимагає ретельного дослідження поведінки рідини в ємності за різні умови експлуатації. Плескання є наслідком дії зовнішніх сил, результатом прискорення, що виникає під час раптового уповільнення або зупинки рухомої конструкції, що містить відсіки, частково заповнені рідиною. Особливу увагу привертає дослідження тиску на стінки резервуару, визначення його локальних максимумів [20]. Особливо актуальною є проблема плескань заповнювача у вантажних танкерах, коли навіть малі рухи резервуару призводять до потужних плескань, що ведуть до втрати стійкості руху та аварій.

Ряд досліджень щодо плескань рідини в резервуарах проаналізовано та узагальнено в фундаментальних монографіях Р.А. Ібрагіма [21, 22].

Перші наукові праці в цій галузі з'явилися в 1960-х роках та були присвячені вивченню плескань рідкого палива в ракетних двигунах. Сучасна ракетно-космічна техніка використовує переважно рідке паливо, тому характер поведінки рідини в паливних баках істотно впливає на динамічні характеристики польоту. Це явище послуговало стимулом підвищення інтересу щодо проблем плескань рідини в резервуарах ще на початку 60-х років пришлого сторіччя, коли почалось впровадження космічних програм СРСР і NASA (Gemini and Apollo programs). Відзначимо також піонерські праці Г. Абрамсона [23-25] в даному напрямку.

Треба відзначити, що потужний рух рідини треба вивчати в нелінійному формулюванні.

Так, в роботі [26] Чанга і Ванга застосували нелінійну теорію для визначення сили тиску на стінки кругових та призматичних резервуарів, що рухаються з прискоренням. Авторами встановлено, що на початковій стадії руху під дією імпульсного навантаження хвилі на вільній поверхні не виникають, а вся маса рідини переміщується на одну сторону контейнеру. Це дає надію на можливість вивчення цього феномену в лінійному формулюванні, принаймні на початкових стадіях руху. Далі, в роботах Г. Попова і співавторів [27, 28] досліджено вплив прискорення та кривини вільної поверхні при русі прямокутних контейнерів (плоска задача) та було встановлено, що динамічні характеристики суттєво залежать від співвідношення рівня заповнення та ширини контейнера. В цих роботах показано, що максимальна висота підйому спостерігається в квадратних контейнерах з рівнем заповнення 30 – 60%, а максимальні зусилля виникають при рівні заповнення в межах 75 – 93%. Аналогічно, Йє і Бірк в [29] дослідили розподіл тиску на стінки горизонтального циліндричного резервуару відразу після впливу ударного навантаження при рівні заповнення рідиною до 95%. Дослідження довело, що тиск на стінки резервуару зростає разом зі збільшенням рівня заповнення. Faltinsen в [30] вивчав короткочасні навантаження на резервуари з рідиною та надав опис п'яти різних фаз руху рідини з різними амплітудами. Чен и Чіанг в [31] провели числовий експеримент для двовимірного прямокутного резервуару з жорсткими стінками при сумісній дії горизонтального і вертикального прискорень. В цій роботі розглядалася нев'язка нестислива рідина, враховувався нелінійний характер руху. Також було доведено, що основна частота коливань суттєво залежить від ширини резервуару і рівня заповнення. Ефекти в'язкості досліджувано в роботі [32] Фальтінсена и Роджнебекке. Ними з'ясовано, що в'язкість проявляється при малих амплітудах та високому рівні заповнення. Однак, Бесс в [33] встановив умови, при яких ефектами в'язкості можна нехтувати й при досить великих амплітудах плескання.

Традиційні підходи для оцінки навантажень при плесканнях засновані на лінійній і нелінійній теорії потенціалу, натурних та модельних експериментах.

Останнім часом при таких дослідженнях все частіше використовуються методи комп'ютерної механіки рідини (Computational Fluid Dynamics, CFD). К цим роботам слід віднести [33, 34]. В цих працях доведено, що власні частоти коливань суттєво залежать від рівня заповнення. Разом з тим, методи і теорія потенціалу мають деякі переваги, але неспроможні надати аналіз систем при явищах фрагментації рідини або при злитті її окремих частин.

Але, якщо розглядаються припущення лінійної теорії, то застосування методів теорії потенціалу та числові розрахунки на основі МГЕ та МГСЕ є цілком прийнятним і дають змогу отримати достовірні числові результати.

Недостатньо дослідженими залишаються питання характеру коливань палива в баках ракет-носіїв при низькому рівні гравітації. Ці питання особливо важливі при вивченні стійкості руху космічних апаратів за умови проведення маневрів з метою виходу на розрахункову орбіту. Саме цей малий відрізок часу, коли ракета-носій практично перебуває в умовах практично нульової гравітації, і є визначним при аналізі стійкості літального апарату в цілому [35].

### **1.5. МГЕ та МГСЕ з задачах механіки композитів та нанокомпозитів.**

Пружні наноккомпозити через їх унікальні механічні властивості належать до сучасних технологічних інноваційних матеріалів, які широко використовуються на практиці як відповідальні внутрішні та зовнішні покриття багатьох інженерних споруд та систем завдяки їх внеску в значне зміцнення за збереження надійності відповідальних об'єктів. Подібні структури широко використовуються в техніці на самих різних масштабних рівнях: від багатошарової броні до тонких покриттів в оптиці і мікроелектроніці. Все актуальнішими стають проблеми адекватного опису механічної поведінки покриттів і проміжних шарів, в тому числі багатошарових, в зв'язку зі зменшенням розмірів використовуваних пристроїв, в першу чергу мікроелектронних і мікромеханічних приборах. Тому розробка нових методів для ефективного вивчення властивостей наноккомпозитів у всьому різноманітті їх

властивостей надзвичайно актуальна, беручи до уваги високу контрастність компонентів матеріалів в таких структурах, своєрідні розподіл частинок та властивості інтерфейсів, форми та структури нановключень і нановолокон.

Обчислювальний експеримент розглядається як потужний інструмент такого дослідження через здатність забезпечувати уніфіковану параметризацію пружних властивостей нанокompозитів у широкому спектрі характеристик матеріалу, геометричних та поверхневих особливостей. З іншого боку, числове моделювання може у багатьох випадках значно скоротити експериментальну роботу на основі числового аналізу з відповідним зменшенням обсягів та вартості експерименту.

Точність результатів числової симуляції впливає з належного вибору математичних моделей або теорій, які б адекватно описували розглянуті нанорозмірні структури. Якщо аналіз наноматеріалу або нанокompозиту зосереджений на вивченні взаємодії атомів або хімічних реакціях у наноматеріалах, то, безумовно, мають використовуватись математичні та фізичні моделі, які базуються молекулярній динаміці або застосовують апарат квантової механіки. Проте, якщо метою числової симуляції є дослідження впливу глобальних механічних взаємодій, зокрема на вивчення осереднених деформацій та напружень, статичні та динамічні механізми перенесення навантаження або ефективну жорсткість нанокompозитів, тоді підходи континуальної механіки, а саме механіки деформівного твердого тіла, можуть застосовуватися коректно для забезпечення такої інформації. Поліпшення цих моделей досягається їх об'єктною орієнтацією, тобто спрямуванням на конкретні наповнювачі матеріалу, розміри компонент, їх форму, та на істотну роль інтерфейсів у поведінці нанокompозитів. Зауважимо, що наразі найбільш коректним вважається використання математичних та фізичних моделей з неklasичними умовами на інтерфейсних поверхнях.

Треба зазначити, що наразі головним напрямком сучасної фізики наномасштабних досліджень є багаторівневий підхід, що дає змогу поширити область використання класичної континуальної механіки шляхом поєднання її

базових теоретичних принципів із застосуванням ефектів, які притаманні молекулярному рівню. Так, визначенню ефективних модулів наноматеріалів за наявності спеціального проміжного шару між контактуючими середовищами зараз приділяється досить багато уваги. Разом з тим, це завдання досить складне, тому виникає потреба в нехай наближених, але доступних для огляду і зручних для аналізу аналітичних розв'язках. Ці розв'язки можуть скласти базу для проведення тестувань нових алгоритмів. Одним із шляхів вирішення вказаної проблеми є використання поверхневої теорії пружності, що набула широкого поширення для опису фізичної та механічної поведінки нанооб'єктів. В останні роки для опису механічної поведінки нанооб'єктів широко застосовується узагальнена теорія пружності, яка використовує класичну теорію при розгляді основного об'єму матеріалу, і лише для поверхонь і меж розділу вводяться нестандартні властивості. У цьому напрямку піонерськими є роботи Гертіна і Мердока [36-37], де розроблено загальну теоретичну основу для інтерпретації як поверхневих, так і інтерфейсних напружень у наноструктурі.

При цьому вважається, що нанорозмірно структура може бути промодельована як репрезентативна об'ємна комірка, яка містить матрицю (основний матеріал) та включення (або систему включень). У цій математичній моделі інтерфейси між нанонеоднорідністю та навколишньою матрицею розглядаються як матеріалізовані поверхні з власною поверхневою пружністю та поверхневим натягом. Можуть бути використані як класичні, так і некласичні граничні умови на поверхнях взаємодії (інтерфейсу). Ті фактори, що відповідають некласичним умовам, обумовлюють появу розмірно-залежних залишкових напружень в околі інтерфейсів. Їх вплив стає визначальним для нанорозмірних матеріалів. Причиною цього є те, що молекули біля поверхонь інтерфейсів мають різні рівноважні позиції та енергетичні рівні стосовно внутрішніх енергетичних рівнів. Для структур з розмірами більше 100 нм відношення "поверхня до об'єму" є незначним, тому ефективні властивості матеріалу регулюються класичною енергією пружної деформації. Для менших розмірів енергія деформації може суттєво змінюватися інтерфейсними

ефектами, отже, як локальні, так і макроскопічні властивості матеріалу змінюються в такій мірі, щоб закладатися в основу застосувань у нанотехнологіях.

Зауважимо, що є спільна риса в дослідженнях нанокомпозитів із залученням теорії Гертіна – Мердока та дослідженнях коливань рідини в паливних баках при нульовому або низькому рівнях гравітації. В обох випадках використовується так звана мембранна аналогія, тобто поверхня інтерфейсу (поверхня розділу середовищ) моделюється надтонкою мембраною із специфічними особливостями.

На відміну від широкого фронту надзвичайно важливих експериментальних досліджень нанокомпозитів [38], у літературі присутнє лише обмежене число робіт з вивчення їх статичної та динамічної поведінки аналітичними і числовими методами. Це пояснюється ускладненими математичними моделями, які адекватно описують пружні властивості таких структур. У цьому напрямку найбільш продуктивними методами розв'язання відповідних задач є методи граничних та скінченних елементів у поєднанні з класичними методами гомогенізації.

Більшість відомих результатів у цій галузі пов'язано з двовимірними конфігураціями об'єктів, вони можуть бути класифіковані в такі категорії залежно від застосованих методів: розв'язання крайових задач прикладної фізики задач для 2D нанокомпозитів за допомогою методів комплексної змінної, мультипольного та хвильового розвинення [39-45], методів скінченних елементів [46-49]; та дослідження задач статички та динаміки двовимірних нанокомпозитів за допомогою методу граничних елементів [50, 51].

Що стосується тривимірних конфігурацій, то вони проаналізовані в основному за припущення наявності канонічних сферичних частинок у нанокомпозиті. Для цих форм нанонеоднорідностей доведено, що властивості поверхонь інтерфейсів, зокрема їх кривизни, можуть суттєво впливати як на пружні поля, так і на ефективні пружні модулі композиційних матеріалів.



Модель Гертіна-Мердока з пружною міжфазною поверхнею, що найчастіше використовується в останніх публікаціях щодо нанокompозитів [52, 53], вводить величину поверхневого натягу як важливої характеристики метаматеріалів і нанокompозитів. Запропоновано підходи, які використано для оцінки ефективних модулів пружності нанокompозиту з інтерфейсом Гертіна-Мердока, у рамках моделі рідко-наповненого середовища [54] та різні самоузгоджувальні схеми [55, 56]. Спільною рисою цих публікацій є використання моделі "поодинокі неоднорідності", (тобто схеми репрезентативного об'ємного елемента), тому ці результати виправдані лише для композитів з низьким вмістом дисперсних фазових часток. Що стосується досліджень локальних полів напружень, то відомо лише декілька окремих розв'язків (вони включають неповний набір параметрів поверхні або конкретні умови навантаження) для моделі поодинокі неоднорідності [57, 58]. Узагальнено метод мультипольних розвинень (ММР) [59, 60] для розв'язку крайової задачі теорії пружності при взаємодіючих сферичних неоднорідностей за наявності надтонкої поверхні Гертіна-Мердока. Цей підхід дає аналітичне рішення і є ефективним інструментом для дослідження вказаних проблем.

ММР при вивченні осереднених механічних властивостей нанокompозитів використано в [61-64]. Ефективні пружні модулі з використанням різних методів осереднення визначені в роботах [65-78].

Але ці методи ще не знайшли широкого застосування при вивченні тривимірних пружних матеріалів з нанорозмірними неоднорідностями загальних форм та властивостей інтерфейсних поверхонь. Це пояснюється необхідністю суттєвої модифікації вказаних методів, особливо при дослідженні 3D наноструктур з одиничними наночастками та системами наночасток неканонічної форми та при застосуванні некласичних умовам контакту.

## **Висновки за розділом 1**

Дослідження фізико-механічних процесів, що відбуваються при інтенсивному динамічному навантаженні інженерних об'єктів та споруд,

проводять як з використанням експериментальних та інженерних методів, так і з залученням сучасних числових методів для розв'язання диференціальних рівнянь математичної фізики, механіки суцільних середовищ, що описують фізико-механічні властивості конструктивних елементів. Вивчення таких процесів при інтенсивних механічних, температурних та статичних навантаженнях експериментальними методами призводить до значних матеріальних витрат, є не завжди безпечним і не дозволяє отримати детальну картину розподілу фізичних полів. Крім того, наприклад, натурне відновлення умов малої гравітації є надзвичайно складною технологічною проблемою в наземних умовах і дуже коштовною процедурою в разі проведення натурального експерименту, оскільки йдеться про пробний запуск космічного апарату, що може призвести до повного руйнування зразка.

Тому актуальними питаннями є розроблення нових ефективних комп'ютерних технологій для проведення віртуальних випробувань на основі комп'ютерного експерименту. Це вимагає створення нових числових схем та обчислювальних методів. Сучасний стан розвитку комп'ютерної техніки дозволяє досліджувати складні механічні системи та знаходити характеристики фізичних полів різної природи з використанням удосконалених математичних формулювань.

В результаті проведеного аналізу літературних джерел встановлено, що найбільш привабливими на теперішній час є методи, засновані та використанні теорії потенціалу, що дозволяє звести задачі, що розглядаються, до граничних інтегральних рівнянь.

Хоча граничні інтегральні формулювання для різних диференціальних рівнянь у частинних похідних змінюватимуться через наявність різних функцій Гріна, інтегральні рівняння теорії потенціалу та лінійної теорії пружності є подібними. Крім того, поведінка функції Гріна в особливих точках по суті однакова для цих задач. Слід зазначити, що ядра інтегральних операторів мають однакові особливості. Це дозволяє використовувати найпростіше граничне інтегральне рівняння, що отримано методом зважених нев'язок з

використанням рівняння Лапласа для подальшого узагальнення на більш складні класи диференціальних рівнянь.

Інтегральні рівняння для лінійних задач, що описують потенційний потік рідини, можуть бути сформульовані через застосування третьої тотожності Гріна, яка представляє гармонічну функцію як суму потенціалів простого та подвійного шарів. При цьому отримують інтегральне рівняння стосовно лише граничних значень гармонічної функції та значень її нормальної похідної. Аналогом третьої тотожності Гріна в теорії пружності є тотожність Сомільяни. Ця тотожність дає залежність між невідомими напруженнями та переміщеннями на границі розрахункової області.

При використанні інтегральних формулювань крайових задач на передній край виступають проблеми обчислення відповідних сингулярних інтегралів з високою точністю. Ці обчислення дозволять підвищити точність обчислення елементів матриці СЛАР, до розв'язання якої зазвичай зводяться крайові задачі з прикладної фізики. Наряду з підвищенням точності суттєвим є й час отримання розв'язку. Розроблення таких ефективних схем числового розв'язання дасть змогу побудувати нові та ефективні комп'ютерні технології для дослідження фізичних полів різної природи.

Таким чином, крайові задач теорії потенціалу та лінійної теорії пружності мають декілька важливих спільних рис. По-перше, ці задачі моделюються диференціальними рівняннями в частинних похідних еліптичного типу. Для їх зведення до систем лінійних алгебраїчних рівнянь використовують метод зважених нев'язок, що дозволяє отримати інтегральні формулювання. Використовується третя тотожність Гріна в теорії потенціалу та її аналог в теорії пружності – тотожність Соміліано. При цьому в обох випадках отримані інтегральні рівняння є сингулярними, а якщо враховується аксіальна симетричність, то рівняння, що розглядаються, можна звести до одновимірних. Тим самим, постає важлива задача з розроблення ефективного методу обчислення отриманих одновимірних інтегралів. Побудові такого методу присвячено першу частину дисертаційної праці.

Комп'ютерні технології дозволять конструктору проводити віртуальний аналіз необхідних характеристик об'єкту. При цьому надається можливість змінювати фізичні, механічні та геометричні параметри досліджуваного об'єкту. Розробки подібних технологій дозволяють істотно скоротити кількість коштовних натурних експериментів шляхом проведення віртуальних комп'ютерних випробувань. Це визначає актуальність теми даної дисертаційної роботи.

## РОЗДІЛ 2

### МЕТОД СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СИСТЕМАХ З АКСІАЛЬНИМ ТИПОМ СИМЕТРІЇ

Зазвичай математичною моделлю для опису фізичних процесів або явищ є система диференціальних рівнянь в частинних похідних з відповідними граничними та початковими умовами. Як вказано раніше, побудова аналітичних розв'язків таких систем можлива лише в обмежених випадках. Сучасні інженерні пристрої та конструкції мають вкрай складну геометричну форму, виготовляються з використанням неоднорідних матеріалів, таких як композити та нанокompозити. Тому не варто розраховувати на отримання простих формул у елементарних та навіть спеціальних функціях для знаходження розв'язків. Тому сучасний стан проектування конструктивних елементів вимагає використання комп'ютерних технологій. Як свідчить попередній аналіз сучасного стану прикладних аспектів фізики та математики, головна ідея комп'ютерних розрахунків полягає в побудові дискретних аналогів систем диференціальних рівнянь. Дискретизацію розрахункової області та визначальних рівнянь може бути здійснено різними методами, кожен з яких має свої переваги та недоліки. На теперішній час найбільш популярними є методи скінченних та граничних елементів. Найсуттєвіша перевага методів граничних елементів полягає в зниженні розмірності розрахункової області на одиницю. А ця перевага здобувається за рахунок побудови фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь або їх систем, що потребує застосування складного математичного апарату. Навіть якщо фундаментальні розв'язки відомі, вони за визначенням є сингулярними, тому й побудова ефективних методів стає складною математичною проблемою. Але переваги методів граничних елементів є настільки вагомими, особливо за необхідністю проведення постійного моніторингу стану технічного обладнання, що розвинення складного математичного апарату для побудови сучасних числових методів

привело до зростання уваги науковців та інженерів протягом останніх десятиріч.

Перш за все, для використання методів граничних елементів, необхідно побудувати відповідні фундаментальні розв'язки. Надалі, за допомогою побудованих фундаментальних розв'язків будуються інтегральні зображення невідомих величин. Зауважимо, що ці інтегральні подання задовольняють вихідній системі диференціальних рівнянь, і залишається лише задовільнити граничним умовам. Виконання цих умов на поверхнях (або контурах) розрахункової області призводить до необхідності розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь або їх систем. Зазначимо, що невідомі функції як раз знаходяться під знаком інтегралу. Тобто необхідне проведення дискретизації області інтегрування (розділення на граничні елементи) та подання невідомих функцій у вигляді рядів по відомим функціям з невідомими коефіцієнтами. Головні труднощі при цьому виникають при обчисленні інтегралів за так званими «особливими» або сингулярними елементами. Це саме ті елементи, що містять точку сингулярності. Зауважимо, що класичне визначення невласного інтегралу неможливо застосувати, якщо особливість має високий порядок. Тут застосовуються спеціальні визначення: у сенсі Коші або Адамара. Таким чином, побудова числових методів розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь потребує спеціальних формул для визначення інтегралів по сингулярним областям. Зазначимо, що для отримання таких формул використовують прості вирази для невідомих густин: це можуть бути сталі, багаточлени невисоких степенів. При цьому область інтегрування також буде спрощеною: це будуть відрізки прямих для одновимірних рівнянь, або плоскі елементи (трикутники, чотирикутники та ін.) при застосуванні двовимірних сингулярних рівнянь.

Тут дуже важливим є момент можливості спрощення області інтегрування за рахунок знання специфіки розрахункової області. Багато важливих практичних задач теоретичної фізики зводяться до розв'язання крайових задач для систем диференціальних рівнянь в аксіально-симетричних

розрахункових областях. Граничні умови при цьому можуть мати періодичний характер. До таких задач відносяться деякі проблеми теплопровідності, електростатики, гідромеханіки, теорії пружності, механіки композитів та нанокompозитів, теорії коливань рідини в областях з вільною поверхнею.

Використання специфіки розрахункових областей дає ще більше переваги в порівнянні з класичними методами.

Отримати необхідні сингулярні інтегральні рівняння дозволяють методи теорії потенціалу, що дають змогу побудувати необхідні інтегральні зображення невідомих функцій.

Одним з привабливих моментів при застосуванні теорії потенціалу є те, що різні фізичні явища описуються за допомогою подібних систем інтегральних рівнянь, тому для числового розв'язання використовуються однакові за структурою алгоритми.

Для розв'язання наведених вище задач математичної фізики будемо використати метод сингулярних інтегральних рівнянь. Цей метод є дискретним узагальненням відомої нам третьої тотожності Гріна. Про зв'язок цього методу з іншими схожими числовими методами математичної фізики і буде йти мова нижче.

## 2.1. Третя тотожність Гріна

Розглянемо стандартну задачу теорії потенціалу. Нехай нам необхідно знайти розподіл деякого скалярного поля  $u(\vec{r})$  усередині деякого об'єму  $V$ . На границі цього об'єму  $S_1$  нам відомі значення цієї величини, а на границі (тобто на поверхні)  $S_2$  нам відомі значення нормальних похідних цього поля  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Тобто маємо, що поверхня, яка обмежує розрахункову область, є  $S = S_1 \cup S_2$ . Отже, у математичному вигляді задача формулюється наступним чином

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{S_1} = u_1(\vec{r}), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_2} = q_2(\vec{r}). \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Зауважимо, що рівняння (2.1.1) описують мішану крайову задачу для рівняння Лапласа, тобто не потребує додаткових умов розв'язності. Для розв'язання даної задачі у загальному вигляді та для подальшої дискретизації її перейдемо до інтегрального аналога.

Введемо деяку функцію  $u^*(\vec{\xi}, \vec{r})$ , яку вважатимемо розв'язком наступного неоднорідного рівняння Лапласа

$$\Delta u^* = -4\pi\delta(\vec{\xi} - \vec{r}). \quad (2.1.2)$$

Нагадаємо, що функція  $\delta(\vec{\xi} - \vec{r})$  у математиці називається тривимірною дельта-функцією. Згадаємо основні властивості дельта функції для подальшої звучності у розрахунках із нею.

Дельта-функція входить до класу так званих узагальнених функцій, тобто вона не є неперервною функцією дійсної змінної у класичному вигляді, а є неперервним функціоналом у просторі диференційованих функцій. Для зручності розглянемо спочатку одновимірну дельта-функцію, а потім перенесемо та узагальнимо її властивості на тривимірний випадок.

Найчастіше з поняттям дельта-функції зіштовхуються в перший раз на курсах теоретичної фізики при спробі визначення густини точкового заряду. Так як точка не має об'єму, то її густина має бути усюди дорівнювати нулю крім тієї позиції, де вона розташована. Тому дельта-функцію можна визначити наступним чином

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0, \\ \infty, & x = x_0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Так як фізичний сенс густини полягає у тому, що її неперервне сумування за об'ємом має зводитися до маси тіла, або будь якої іншої фізичної адитивної величини, дельта-функція має задовольняти наступному інтегралу



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (2.1.4)$$

Із цього твердження витікає наступне. Якщо взяти інтеграл від добутку будь-якої неперервної функції із дельта функцією та проінтегрувати цей вираз за всією числовою прямою, він має бути перш за все не перервним. Перевіримо це

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx. \quad (2.1.5)$$

Тут  $f(x)$  є будь-якою неперервною функцією у точці  $x_0$ .

Значення дельта-функції у всіх точках, крім  $x_0$  є нульовим, тому весь інтеграл можна замінити наступним

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx + \\ &+ \int_{x_0 + \varepsilon}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Тут  $\varepsilon$  є деякою нескінченно малою величиною. Останні два інтеграла еквівалентні нулю, оскільки у інших точках числової прямої добуток значення дельта-функції, тобто нуля, на значення обраної функції  $f(x)$  є нульовим.

Перейдемо від інтегралів до границь.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx. \quad (2.1.7)$$

У ліміті  $\varepsilon \rightarrow 0$  межі інтегрування сходяться до однієї точки  $x_0$ , тому значення  $f(x_0)$  можна винести за знак інтегралу.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx. \quad (2.1.8)$$

Під знаком інтеграла залишилася лише дельта-функція, тому ми маємо повне право розширити інтервал інтегрування назад у нескінченність, так як за тією ж самої причиною додавання нулів не змінить значення інтеграла.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx. \quad (2.1.9)$$

Однак отриманий нами інтеграл за визначенням дорівнює одиниці, а отже ми довели фільтруючу властивість дельта-функції.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \quad (2.1.10)$$

В цілому для подальшого викладення теми нам достатньо і даного визначення, однак необхідно формалізувати узагальнення одновимірної дельта-функції на тривимірний випадок.

Визначимо тривимірну, або об'ємну дельта-функцію як добуток трьох одномірних.

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0). \quad (2.1.11)$$

Проінтегруємо отриманий вираз за всім об'ємом

$$\begin{aligned}
\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dx dy dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \quad (2.1.12) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - z_0) dz = 1.
\end{aligned}$$

Тобто все звелось до інтегрування дельта-функцій від незалежних змінних, добуток яких за визначенням одновимірних дельта-функцій дорівнює одиниці.

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = 1. \quad (2.1.13)$$

Узагальнимо і фільтруючу властивість. Введемо деяку неперервну у точці  $\vec{r}_0$  функцію  $f(\vec{r})$

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV. \quad (2.1.14)$$

Як і у минулому одновимірному випадку (2.1.4), обмежимо під знаком ліміту цей інтеграл до нескінченно малої околиці точки  $\vec{r}_0$  (наприклад, сферу нескінченно малого радіуса  $V_0$ ) та винесемо значення функції за знак інтегралу

$$\begin{aligned}
\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV &= \lim_{V_0 \rightarrow 0} \int_{V_0} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \\
&= f(\vec{r}_0) \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = f(\vec{r}_0).
\end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Наведених визначень достатньо для подальшого отримання інтегрального виду першого рівняння.

Помножимо рівняння Лапласа на  $u^*(\vec{\xi}, \vec{r})$

$$u^* \Delta u = 0. \quad (2.1.16)$$

Скористаємося тепер визначенням оператора Лапласа, тобто це дивергенція градієнта

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u. \quad (2.1.17)$$

Перейдемо до тензорного числення та скористаємося правилом похідної добутку

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \\ u^* \Delta u &= u^* \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = u^* \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Другий раз використаємо властивість похідної

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right) + u \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_k^2}. \quad (2.1.19)$$

За властивістю функції  $u^*$  її ласпласіан дорівнює дельта-функції

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( u^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right) - 4\pi u \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) = 0. \quad (2.1.20)$$

Перенесемо все у різні сторони та запишемо як оператори векторної алгебри

$$4\pi u(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) + \operatorname{div} u \nabla u^* = \operatorname{div} u^* \nabla u. \quad (2.1.21)$$

Тепер проінтегруємо отримане рівняння за всім об'ємом.

$$4\pi \int_V u(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) dV + \int_V \operatorname{div} u \nabla u^* dV = \int_V \operatorname{div} u^* \nabla u dV. \quad (2.1.22)$$

Згадаємо формулу Гауса-Остроградського

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} d\vec{S}. \quad (2.1.23)$$

Тобто об'ємний інтеграл від дивергенції векторного поля є рівним потоку цього поля скрізь замкнену поверхню, що обмежує цю область. Застосуємо цей факт для наших обчислень.

$$4\pi \int_V u(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) dV + \oint_S u \nabla u^* d\vec{S} = \oint_S u^* \nabla u d\vec{S}. \quad (2.1.24)$$

Перший інтеграл можна обчислити легко за допомогою фільтруючої властивості дельта-функції, однак слід трохи бути уважним та не поспішати з висновками. Дійсно, якщо точка  $\vec{\xi}$  знаходиться всередині об'єму, то

$$4\pi \int_V u(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) dV = 4\pi u(\vec{\xi}). \quad (2.1.25)$$

Якщо ж точка поза об'ємом, то все простіше

$$4\pi \int_V u(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) dV = 0. \quad (2.1.26)$$

А що робити, якщо розглянута точка лежить на границі, тобто на поверхні, що обмежує розглянутий об'єм? Для цього повернемось до одновимірного випадку та обчислимо цей інтеграл для нього.

Розглянемо інтеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx. \quad (2.1.26)$$

Доповнимо цей інтеграл до повного за дійсною числовою віссю

$$\int_{x_0}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx + \int_{-\infty}^{x_0} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (2.1.27)$$

Зробимо заміну змінної  $x - x_0 = y$

$$\int_0^{+\infty} \delta(y) dy + \int_{-\infty}^0 \delta(y) dy = 1. \quad (2.1.28)$$

Тепер у другому інтегралі замінимо  $y \rightarrow -y$  та скористаємося тим, що дельта-функція симетрична, тобто  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

$$\int_0^{+\infty} \delta(y) dy + \int_0^{+\infty} \delta(y) dy = 2 \int_0^{+\infty} \delta(y) dy = 1. \quad (2.1.29)$$

І виконаємо обернену заміну

$$2 \int_{x_0}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{2}. \quad (2.1.30)$$

Це правило можна узагальнити і на тривимірний випадок. Тоді отримуємо наступне правило для обчислення інтегралу від функції з дельта-функцією: якщо нуль дельта-функції знаходиться всередині тіла, то інтеграл дорівнює одиниці, якщо на границі – 0.5, поза межами об'єму – нуль.

Введемо коефіцієнт, що враховує розташування нуля дельта-функції

$$C(\vec{\xi}) = \begin{cases} 1, \vec{\xi} \in V, \\ \frac{1}{2}, \vec{\xi} \in \partial V, \\ 0, \vec{\xi} \notin V. \end{cases} \quad (2.1.31)$$

та отримаємо

$$4\pi C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \oint_S u \nabla u^* d\vec{S} = \oint_S u^* \nabla u d\vec{S}. \quad (2.1.32)$$

Перепишемо цю формулу у термінах нормальної похідної

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\vec{n}, \nabla u),$$

$$4\pi C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \oint_S \frac{\partial u^*(\vec{\xi}, \vec{r})}{\partial n(\vec{r})} u(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_S u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} dS(\vec{r}). \quad (2.1.33)$$

Введемо позначення

$$\frac{\partial u^*(\vec{\xi}, \vec{r})}{\partial n(\vec{r})} = q^*(\vec{\xi}, \vec{r}),$$

$$4\pi C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \oint_S q^*(\vec{\xi}, \vec{r})u(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_S u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} dS(\vec{r}). \quad (2.1.34)$$

Отримана формула називається третьою тотожністю Гріна. Це інтегральний вид рівняння Лапласа, та будь-якого іншого рівняння з еліптичним диференціальним оператором.

Велика кількість числових методів пов'язана з дискретизацією запропонованого рівняння, тому ми і розглянемо деякі з них. Перший основний крок у всіх методах однаковий – виділення певної кількості вузлових точок та певної кількості розглянутих проміжків. Але перш, ніж детально аналізувати

числові методи, знайдемо як перетворюються рівняння у випадку аксіальної симетрії.

## 2.2. Третя тотожність Гріна у системах з аксіальною симетрією

Аксіальним називається такий тип симетрії, при якому шукана функція не залежить від полярного кута  $\alpha$ . Задача зводиться до двох незалежних координат, аксіальної змінної  $z$  та радіальної змінної  $\rho$ .

У цьому випадку можна розписати поверхневий інтеграл

$$\oint_S dS = \oint_{\Gamma} \int_0^{2\pi} \rho d\alpha d\Gamma. \quad (2.2.1)$$

$\Gamma$  – переріз поверхні тіла у координатах  $\rho z$ .

Використаємо аксіальну симетрію для інтеграла з нормальною похідною функції Гріна

$$\begin{aligned} \oint_S q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u(\vec{r}) dS(\vec{r}) &= \oint_{\Gamma} \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u(\vec{r}) \rho d\alpha d\Gamma = \\ &= \oint_{\Gamma} u(\vec{r}) \rho d\Gamma \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Виконаємо аналогічну процедуру для інтеграла з функцією Гріна

$$\begin{aligned} \oint_S u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} dS(\vec{r}) &= \oint_{\Gamma} \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\alpha d\Gamma = \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\Gamma \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\alpha. \end{aligned}$$

Як ми бачимо, від кутової змінної залежать лише розв'язки неоднорідної задачі із дельта-функцією, тому можемо окремо їх позначити і використовувати в подальшому у більш звичному вигляді.



$$\begin{aligned}\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\alpha, \\ \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\alpha.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Використовуючи позначення (2.37), отримаємо наступне рівняння

$$4\pi C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \oint_{\Gamma} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\Gamma(\vec{r}).\tag{2.2.4}$$

Отримане рівняння і є аксіально-симетричним видом третьої тотожності Гріна.

### 2.3. Функція Гріна оператора Лапласа

Функція  $u^*(\vec{\xi}, \vec{r})$ , що є розв'язком неоднорідного рівняння Лапласа (2.1.2) із дельта-функцією, називається фундаментальним розв'язком системи (fundamental solution) або функцією Гріна оператора Лапласа.

Явний вид функції Гріна оператора Лапласа знаходиться з наступного рівняння

$$\Delta u^* = -4\pi\delta(\vec{r}).\tag{2.3.1}$$

Для розв'язання такої задачі необхідно виконати перетворення Фур'є. Після нескладних математичних перетворень та згорток вона може бути представлена в наступному виді

$$u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|}.\tag{2.3.2}$$

Тоді її нормальна похідна

$$\begin{aligned}
q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \frac{\partial u^*(\vec{\xi}, \vec{r})}{\partial n(\vec{r})} = (\vec{n}(\vec{r}), \nabla u^*(\vec{\xi}, \vec{r})) = n_k(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} = \\
&= -n_k(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \frac{\partial}{\partial x_k} |\vec{r} - \vec{\xi}| = -n_k(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} \frac{(\vec{r} - \vec{\xi})_k}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} = \\
&= \frac{(\vec{n}(\vec{r}), \vec{\xi} - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3}.
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

І остаточно

$$q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{(\vec{n}(\vec{r}), \vec{\xi} - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3}. \tag{2.3.4}$$

Отримаємо тепер аксіально-симетричні функції Гріна.

#### 2.4. Аксіально-симетричні функції Гріна оператора Лапласа

Для цього необхідно проінтегрувати їх за полярним кутом  $\alpha$ . Здобудемо відстань між двома точками у циліндричних координатах.

$$|\vec{r} - \vec{\xi}|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Зробимо заміну змінних

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \alpha, x_0 = \rho_0 \cos \alpha_0 \\ y = \rho \sin \alpha, y_0 = \rho_0 \sin \alpha_0 \end{array} \right|.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{\xi}|^2 &= (\rho \cos \alpha - \rho_0 \cos \alpha_0)^2 + (\rho \sin \alpha - \rho_0 \sin \alpha_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\
&= \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho_0^2 \cos^2 \alpha_0 - 2\rho\rho_0 \cos \alpha \cos \alpha_0 + \rho^2 \sin^2 \alpha + \\
&+ \rho_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2\rho\rho_0 \sin \alpha \sin \alpha_0 + (z - z_0)^2 = \\
&= \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0(\cos \alpha \cos \alpha_0 + \sin \alpha \sin \alpha_0) + (z - z_0)^2 = \\
&= \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2.
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Отримали наступний вид функції Гріна у циліндричних координатах

$$u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2}}. \quad (2.4.2)$$

Проінтегруємо цей вираз за кутовою змінною

$$\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{d(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2}}. \quad (2.4.3)$$

Зробимо заміну

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi - (\alpha - \alpha_0)}{2} \Rightarrow \alpha - \alpha_0 = \pi - 2\theta \\ d\alpha = -2d\theta \end{array} \right|.$$

Отримаємо наступне співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\pi - 2\theta) + (z - z_0)^2}} = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 + 2\rho\rho_0 \cos(2\theta)}} = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 + 2\rho\rho_0 \cos(2\theta)}} \end{aligned}$$

Після перетворень здобудемо

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 + 2\rho\rho_0 \cos^2 \theta - 2\rho\rho_0 \sin^2 \theta}} = \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 + 2\rho\rho_0 - 4\rho\rho_0 \sin^2 \theta}} = \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2 - 4\rho\rho_0 \sin^2 \theta}} = \\
&= \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} \sin^2 \theta}}.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Введемо новий параметр  $m$

$$m^2 = \frac{4\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{2.4.5}$$

Тоді

$$\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}. \tag{2.4.6}$$

Останній інтеграл є повним еліптичним інтегралом першого роду. Отже, аксіально-симетрична функція Гріна має наступний вигляд

$$\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}}. \tag{2.4.6}$$

Обчислимо тепер нормальну похідну функції Гріна в аксіально-симетричному випадку. Спочатку розкриємо знак скалярного добутку. Нагадаємо, що вектор нормалі не матиме кутової компоненти

$$(\vec{n}(\vec{r}), \vec{\xi} - \vec{r}) = n_x(x_0 - x) + n_y(y_0 - y) + n_z(z_0 - z). \tag{2.4.7}$$

Перейдемо в циліндричні координати

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z = n_\rho \vec{e}_\rho + n_\alpha \vec{e}_\alpha + n_z \vec{e}_z,$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \alpha \vec{e}_\rho - \sin \alpha \vec{e}_\alpha, \\ \vec{e}_y = \sin \alpha \vec{e}_\rho + \cos \alpha \vec{e}_\alpha. \end{cases}$$

Одержимо такий вираз

$$\begin{aligned} \vec{n} &= n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z = \\ &= n_x (\cos \alpha \vec{e}_\rho - \sin \alpha \vec{e}_\alpha) + n_y (\sin \alpha \vec{e}_\rho + \cos \alpha \vec{e}_\alpha) + n_z \vec{e}_z = \\ &= n_x \cos \alpha \vec{e}_\rho - n_x \sin \alpha \vec{e}_\alpha + n_y \sin \alpha \vec{e}_\rho + n_y \cos \alpha \vec{e}_\alpha + \\ &+ n_z \vec{e}_z = \\ &= (n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha) \vec{e}_\rho + (-n_x \sin \alpha + n_y \cos \alpha) \vec{e}_\alpha + \\ &+ n_z \vec{e}_z = n_\rho \vec{e}_\rho + n_\alpha \vec{e}_\alpha + n_z \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Тут

$$\begin{cases} n_\rho = n_x \cos \alpha + n_y \sin \alpha, \\ n_\alpha = -n_x \sin \alpha + n_y \cos \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n_\rho \\ n_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_\rho \\ n_\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} n_x = n_\rho \cos \alpha - n_\alpha \sin \alpha, \\ n_y = n_\rho \sin \alpha + n_\alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

Так як в нашому випадку  $n_\alpha = 0$ , то

$$\begin{cases} n_x = n_\rho \cos \alpha, \\ n_y = n_\rho \sin \alpha. \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Продовжимо перетворення із скалярним добутком

$$\begin{aligned}
(\vec{n}(\vec{r}), \vec{\xi} - \vec{r}) &= n_x(x_0 - x) + n_y(y_0 - y) + n_z(z_0 - z) = \\
&= n_\rho \cos \alpha (\rho_0 \cos \alpha_0 - \rho \cos \alpha) + \\
&+ n_\rho \sin \alpha (\rho_0 \sin \alpha_0 - \rho \sin \alpha) + n_z(z_0 - z) = \\
&= \rho_0 n_\rho \cos \alpha_0 \cos \alpha - \rho n_\rho \cos^2 \alpha + \rho_0 n_\rho \sin \alpha_0 \sin \alpha - \\
&- \rho n_\rho \sin^2 \alpha + n_z(z_0 - z) = \\
&= \rho_0 n_\rho \cos(\alpha - \alpha_0) - \rho n_\rho + n_z(z_0 - z).
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Нормальна похідна функції Гріна в циліндричних координатах наступна

$$q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{(\vec{n}(\vec{r}), \vec{\xi} - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} = \frac{\rho_0 n_\rho \cos(\alpha - \alpha_0) - \rho n_\rho + n_z(z_0 - z)}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.4.11}$$

Проінтегруємо даний вираз за кутовою змінною за повним кутом для отримання аксіально-симетричної нормальної похідної функції Гріна

$$\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 n_\rho \cos(\alpha - \alpha_0) - \rho n_\rho + n_z(z_0 - z)}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} d\alpha, \tag{2.4.12}$$

що дорівнює

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= (-\rho n_\rho + n_z(z_0 - z)) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \rho_0 n_\rho \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Обчислимо окремо другий інтеграл в цьому виразі. Позначимо його таким чином

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Зробимо перетворення

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{2\rho\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{-2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{1}{2\rho\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2) d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&\quad + \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Остаточню маємо

$$\begin{aligned}
I_2 &= \\
&= -\frac{1}{2\rho\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2}} + \\
&\quad + \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Перший інтеграл в (2.4.13) виражається через повний еліптичний інтеграл першого роду, як і було з аксіально-симетричною функцією Гріна

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2}} = \\
&= \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}}.
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \\
& = \left( -\rho n_\rho + \right. \\
& + n_z(z_0 - z) \left. \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} - \\
& - \frac{n_\rho}{\rho} \frac{2K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \\
& + n_\rho \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4.15) \\
& = - \frac{n_\rho}{\rho} \frac{2K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \\
& + \left( -\rho n_\rho + n_z(z_0 - z) + \right. \\
& + n_\rho \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} \left. \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Останній інтеграл обчислюємо, використовуючи вже отримані результати під час інтегрування функції Гріна за кутовою змінною

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
& = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{((\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2 - 4\rho\rho_0 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\
& = \frac{4}{((\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Окремо проаналізуємо цей інтеграл. Для початку продиференціюємо повний еліптичний інтеграл першого роду



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m \sin^2 \theta d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-m^2 \sin^2 \theta d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-m^2 \sin^2 \theta) d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= -\frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

З цього випливає, що розглянутий інтеграл можна виразити через повний еліптичний інтеграл першого роду та його похідну

$$\begin{aligned}
\frac{dK(m)}{dm} &= \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{m} K(m), \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} &= K(m) + m \frac{dK(m)}{dm}.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

За визначенням повного еліптичного інтеграла першого роду

$$\frac{dK(m)}{dm} = \frac{E(m)}{m(1-m^2)} - \frac{K(m)}{m}. \tag{2.4.18}$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = K(m) + \frac{E(m)}{1-m^2} - K(m) = \frac{E(m)}{1-m^2}. \tag{2.4.19}$$

Тобто цей інтеграл виражається через повний еліптичний інтеграл другого роду.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \\ &= \frac{4}{((\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{E(m)}{1 - m^2}. \end{aligned}$$

Використаємо визначення змінної  $m^2$

$$\begin{aligned} 1 - m^2 &= 1 - \frac{4\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} = \frac{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2 - 4\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} = \\ &= \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 - 4\rho\rho_0 + (z - z_0)^2}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} = \\ &= \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 + (z - z_0)^2}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} = \frac{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}. \end{aligned}$$

З цього випливає наступна рівність

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0) + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} &= \\ &= \frac{4}{((\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} E(m) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \frac{E(m)}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}. \end{aligned}$$

I, остаточно, вираз для нормальної похідної функції Гріна в аксіально-симетричному випадку наступний

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \\
&= -\frac{n_\rho}{\rho} \frac{2K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \\
&+ \left( -\rho n_\rho + n_z(z_0 - z) + \right. \\
&\left. + n_\rho \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} \right) \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \frac{E(m)}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2};
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Згрупуємо відповідні доданки за компонентами вектору нормалі.

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \\
&= n_\rho \left( -\frac{1}{\rho} \frac{2K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \right. \\
&+ \left. \left( -\rho + \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} \right) \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \frac{E(m)}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) + \\
&+ n_z(z_0 - z) \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \frac{E(m)}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$-\rho + \frac{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} = \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho^2 + (z - z_0)^2}{2\rho} = \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + (z - z_0)^2}{2\rho},$$

одержимо наступну формулу

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \left( \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + (z - z_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} E(m) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - K(m) \right] n_\rho + \frac{z_0 - z}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} E(m) n_z \right).
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Таким чином, ми отримали вирази для аксіально-симетричних функцій Гріна для задач теорії потенціалу. В наступному підрозділі поговоримо про побудову числового методу для розв'язання будь-якої задачі теорії потенціалу.

## 2.5 Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Повернемося до початкової задачі щодо визначення гармонічної функції  $u$  зі змішаними граничними умовами

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{S_1} = u_1(\vec{r}), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_2} = q_2(\vec{r}). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Нехай поверхня  $S = S_1 \cup S_2$  є аксіально-симетричною, а її межею є крива  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , причому криві  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  є профілями обертання поверхонь  $S_1$  та  $S_2$  навколо спільної осі відповідно. Дана задача сформульована в диференціальному вигляді, для переходу до її інтегрального аналога використовуємо аксіально-симетричну форму третьої тотожності Гріна. Запишемо цю тотожність в нашому випадку та розділимо контурний інтеграл, щоб отримати еквівалентне формулювання задачі в інтегральному виді.

$$4\pi C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \oint_{\Gamma} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\Gamma(\vec{r}).$$

$$\oint_{\Gamma} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u_1(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u_2(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}). \quad (2.5.2)$$

$$\oint_{\Gamma} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\Gamma(\vec{r}) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r})q_1(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r})q_2(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}).$$

Опишемо дані функції відповідно до постановки задачі. Нехай  $u_1(\vec{r})$  та  $q_2(\vec{r})$  – відомі значення функції та її нормальної похідної на границі об'єму,  $u_2(\vec{r})$  та  $q_1(\vec{r})$  – невідомі значення функції та її нормальної похідної на ділянках границі. Нехай  $\vec{\xi}$  – будь-яка точка на поверхні, що обмежує розглянутий об'єм, тобто точка на границі об'єму. Як було сказано вище, у такому випадку інтеграл від дельта-функції, а звідси і коефіцієнт  $C(\vec{\xi})$  дорівнюватиме  $\frac{1}{2}$ .

$$2\pi u(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u_1(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r})u_2(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r})q_1(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r})q_2(\vec{r})\rho d\Gamma(\vec{r}). \quad (2.5.3)$$

Проведемо процедуру дискретизації. Розділимо поверхню на  $N$  елементів таким чином, щоб на ділянці  $\Gamma_1$  утворилося  $m$  елементів, а на ділянці  $\Gamma_2$  –

$N - m$  відповідно. В такому випадку головний інтеграл розділиться на  $N$  окремих інтегралів, які можна записати у вигляді суми.

$$\begin{aligned}
2\pi u(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \sum_{k=m+1}^N \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) q_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^N \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

На кожному з цих елементів, які будемо називати граничними елементами, оберемо деяку точку  $\vec{r}_i$  будь-яким довільним чином так, що в решті решт у нас утворилася деяка множина точок  $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N | \vec{r}_i \in \Gamma_i$ . Підставляючи кожен раз цю точку у третю тотожність Гріна, отримуємо деяку систему інтегральних рівнянь, яка у загальному вигляді може бути сформульована наступним чином:

$$\begin{aligned}
2\pi u(\vec{r}_i) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \sum_{k=m+1}^N \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^N \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

У записаному рівнянні інтеграли з функціями  $u_1(\vec{r})$  та  $u_2(\vec{r})$  є відомими величинами, оскільки знаючи функцію Гріна, її нормальну похідну та явний вираз для цих відомих граничних значень, вони можуть бути знайдені шляхом

інтегрування у будь-якому виді, числовому чи аналітичному. Перенесемо відомі величини у праву частину, а невідомі залишимо зліва. Отримаємо

$$\begin{aligned}
 2\pi u(\vec{r}_i) - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \sum_{k=m+1}^N \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \\
 = - \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}).
 \end{aligned}
 \tag{2.5.6}$$

Тепер окремо попрацюємо над інтегралами з невідомими величинами. Аналітично такі інтеграли обчислити майже неможливо у прикладному сенсі цього слова, однак пригадаємо спочатку узагальнення першої теореми Коші про середнє значення та не будемо поспішати із висновками.

Формулюється ця теорема наступним чином. Нехай існують дві функції  $f(x)$  та  $g(x)$ , причому обидві ці функції вважаємо інтегрованими за Ріманом на проміжку  $[a, b]$ . Нехай існують деякі числа  $m$  та  $M$ , які є локальними мінімумом та максимумом функції  $f(x)$ , відповідно, а саме:  $m \leq f(x) \leq M$ . Функцію  $g(x)$  вважатимемо такою, що не змінює знак на цьому проміжку  $[a, b]$ . Нехай вона буде невід'ємною. Тоді існує таке число  $\mu$ , що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.
 \tag{2.5.7}$$

Так як це число  $\mu$  за величиною не виходить за межі локального мінімуму та максимуму, то існує така точка  $x_0$  в проміжку  $[a, b]$ , в якому функція  $f(x)$  набуває саме цього значення  $\mu$

$$\mu = f(x_0).
 \tag{2.5.8}$$

Невідомо, як знайти цю точку, однак ми точно знаємо, що вона існує. Наближено будемо вважати, що ця точка співпадає з нашими «вузловими» точками, які ми обрали ще вище як  $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N | \vec{r}_i \in \Gamma_i$ . Тобто, ці точки були обрані

таким чином, щоб інтеграл від невідомих функцій з функцією Гріна та її нормальною похідною можна було б розділити.

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = q_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}), k = 1 \dots m,$$

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = u_2(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}), k = m + 1 \dots N. \quad (2.5.9)$$

У такому випадку граничне рівняння для точки  $\vec{r}_i$  буде наступним:

$$2\pi u(\vec{r}_i) - \sum_{k=1}^m q_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^N u_2(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) =$$

$$= - \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) \dots N. \quad (2.5.10)$$

Вирази для функції Гріна та її нормальної похідної нам відомі, тому інтеграли від неї обчислювані. Введемо позначення

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \tilde{U}_k^*(\vec{r}_i) = \tilde{U}_{ik}^*,$$

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \tilde{Q}_k^*(\vec{r}_i) = \tilde{Q}_{ik}^*.$$

Використовуючи їх, маємо



$$\begin{aligned}
2\pi u(\vec{r}_i) - \sum_{k=1}^m q_1(\vec{r}_k) \tilde{U}_k^*(\vec{r}_i) + \sum_{k=m+1}^N u_2(\vec{r}_k) \tilde{Q}_k^*(\vec{r}_i) = \\
= \int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) - \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Позначимо праву частину (2.5.11) теж як

$$\int_{\Gamma_2} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) q_2(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) - \int_{\Gamma_1} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) u_1(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = P(\vec{r}_i) = P_i. \tag{2.5.12}$$

Зробимо ще деякі позначення для того, щоб можна було записати рівняння в матричному виді

$$q_1(\vec{r}_k) = q_{1k}, u_2(\vec{r}_k) = u_{2k}. \tag{2.5.13}$$

Нехай  $i = 1 \dots m$ . Тоді

$$\tilde{Q}_{ik}^* u_{2k} - \tilde{U}_{ik}^* q_{1k} = \delta_{ik} (P_i - 2\pi u_{1k}). \tag{2.5.14}$$

Якщо ж  $i = m + 1 \dots N$ , тоді

$$(2\pi \delta_{ik} + \tilde{Q}_{ik}^*) u_{2k} - \tilde{U}_{ik}^* q_{1k} = \delta_{ik} P_i. \tag{2.5.15}$$

Отримуємо  $N$  рівнянь для  $N$  невідомих, розв'язавши які ми знаходимо усі невідомі значення функції та її нормальної похідної на границі розглянутої аксіально-симетричної області.

Знаючи ж усі значення функції та її нормальної похідної на границі, знайти внутрішні значення стає легкою задачею, використовуючи функцію Гріна та її нормальну похідну

$$4\pi C(\vec{\xi}) u(\vec{\xi}) + \oint_{\Gamma} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho d\Gamma(\vec{r}). \tag{2.5.16}$$

Однією з задач, що постають перед спеціалістами з числового розв'язання інтегральних рівнянь з частинними похідними, є саме спосіб обрання вузлової точки на розглянутих проміжках. При дрібній дискретизації це питання є не таким актуальним, а от при малій кількості граничних елементів спосіб обрання вузлової точки має впливати на результат задачі. У даному дослідженні під час числових експериментів обиралися різні вузли, але зазвичай точку, що розглядається, обирали всередині проміжку.

Усі інтеграли, що є елементами матриці системи, знаходяться чисельно без особливих проблем, крім діагонального випадку, який буде розглянуто окремо. Для обчислення інтегралів із функціями Гріна в аксіально-симетричному випадку використовувалися шеститочкові вузлові квадратури Гауса.

## 2.6. Обчислення діагональних елементів матриці системи

При обчисленні діагональних елементів матриці системи виникають труднощі, оскільки інтеграли, що необхідно обчислити, містять повні еліптичні інтеграли першого роду, які, як ми знаємо, обертаються на нескінченність у точці, в якій вузлова точка сама співпадає з точкою інтегрування на розглянутому проміжку. Для обчислення таких інтегралів необхідно провести окремі дослідження, які і були виконані під час даної роботи.

Розглянемо діагональний елемент матриці

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = \int_{\Gamma_k} \frac{4K(m)\rho d\Gamma(\vec{r})}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}} \quad (2.6.1)$$

Будемо досліджувати випадок, коли граничний елемент є відрізком прямої, а розглянутий вузол – центром цього відрізка. На розглянутому відрізку є дві точки – точка інтегрування  $\vec{r} = (\rho, z)$  та вузлова точка  $\vec{r}_k = (\rho_k, z_k)$ . Знайдемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки

$$z - z_k = k(\rho - \rho_k). \quad (2.6.2)$$

Тут  $k$  – кутовий коефіцієнт прямої, який легко знайти, знаючи кінці відрізка. Наприклад, нехай кінці відрізка знаходяться у точках  $\vec{r}_A = (\rho_A, z_A)$  та  $\vec{r}_B = (\rho_B, z_B)$ , тоді кутовий коефіцієнт обчислюється наступним чином:

$$k = \frac{z_B - z_A}{\rho_B - \rho_A}. \quad (2.6.3)$$

Зробимо деяке уточнення, перш ніж продовжувати далі. Зараз ми розглядаємо горизонтальні ( $k = 0$ ) або будь-які відрізки, у яких значення кутового коефіцієнту невелике, або вони самі по собі не є вертикальними. Останній випадок буде розглянуто окремо.

У такому випадку можна записати диференціал кривої, що виражається наступним чином:

$$\begin{aligned} (d\Gamma(\vec{r}))^2 &= (d\rho)^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + (d(k(\rho - \rho_k) + z_k))^2 = \\ &= (d\rho)^2 + (kd\rho)^2 = (d\rho)^2 + k^2(d\rho)^2 = (1 + k^2)(d\rho)^2. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Тут

$$d\Gamma(\vec{r}) = \sqrt{1 + k^2} d\rho. \quad (2.6.5)$$

Еліптичний інтеграл першого роду залежить від змінної  $m$ , в той час як змінна інтегрування в нас  $\rho$ . Знайдемо зв'язок між ними, точніше не між  $m$  та  $\rho$ , а між  $m'$  та  $\rho$ . Тут

$$\begin{aligned} m'^2 &= 1 - m^2 = 1 - \frac{4\rho\rho_k}{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2} = \\ &= \frac{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2 - 4\rho\rho_k}{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2} = \frac{(\rho - \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Скористаємося тим, що розглянутий інтегрований проміжок є відрізком прямої. Тоді

$$m'^2 = \frac{(\rho - \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2} = \frac{(1 + k^2)(\rho - \rho_k)^2}{(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}. \quad (2.6.7)$$

Тепер знайдемо зв'язок між змінними. Маємо

$$(1 + k^2)(\rho - \rho_k)^2 = m'^2((\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2). \quad (2.6.8)$$

Виконаємо відповідні перетворення

$$\begin{aligned} (1 + k^2)\rho^2 - 2\rho_k(1 + k^2)\rho + (1 + k^2)\rho_k^2 &= \\ &= m'^2\rho^2 + 2m'^2\rho_k\rho + m'^2\rho_k^2 + m'^2k^2\rho^2 - 2m'^2k^2\rho_k\rho + \\ &+ m'^2k^2\rho_k^2 \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Далі одержимо

$$\begin{aligned} (1 + k^2)\rho^2 - 2(1 + k^2)\rho_k\rho + (1 + k^2)\rho_k^2 &= \\ &= (1 + k^2)m'^2\rho^2 + 2(1 - k^2)m'^2\rho_k\rho + (1 + k^2)m'^2\rho_k^2, \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} (1 + k^2)(1 - m'^2)\rho^2 - 2(1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2)\rho_k\rho + \\ + (1 + k^2)(1 - m'^2)\rho_k^2 = 0. \end{aligned}$$

Отримане рівняння є квадратним. Знайдемо його дискримінант

$$\begin{aligned} D &= 4(1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2)^2\rho_k^2 - 4(1 + k^2)^2(1 - m'^2)^2\rho_k^2 = \\ &= 4\left((1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - ((1 + k^2)(1 - m'^2))^2\right)\rho_k^2 = \\ &= 4(1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2 - \\ &\quad - (1 + k^2)(1 - m'^2))((1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2) + \\ &\quad + (1 + k^2)(1 - m'^2))\rho_k^2. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Виконаємо спрощення у дискримінанті

$$\begin{aligned}
1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2 - (1 + k^2)(1 - m'^2) &= \\
&= 1 + k^2 + m'^2 - m'^2k^2 - 1 + m'^2 - k^2 + m'^2k^2 = 2m'^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2) + (1 + k^2)(1 - m'^2) &= & (2.6.12) \\
&= 1 + k^2 + m'^2 - m'^2k^2 + 1 - m'^2 + k^2 - m'^2k^2 = \\
&= 2 + 2k^2 - 2m'^2k^2 = 2 + 2k^2(1 - m'^2) = \\
&= 2(1 + k^2(1 - m'^2)).
\end{aligned}$$

Підставимо вирази у дискримінант та знаходимо корені рівняння

$$D = 16m'^2(1 + k^2(1 - m'^2))\rho_k^2,$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2} &= \frac{1}{2(1 + k^2)(1 - m'^2)} \left( 2(1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2)\rho_k \pm \right. & (2.6.13) \\
&\quad \left. \pm 4m'\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}\rho_k \right) = \\
&= \frac{1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2 \pm 2m'\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}}{(1 + k^2)(1 - m'^2)} \rho_k.
\end{aligned}$$

Поданий вираз можна представити в альтернативній формі, яка буде зручна в деяких випадках

$$\begin{aligned}
\left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right)^2 &= \\
&= 1 + k^2(1 - m'^2) + m'^2 \pm 2m'\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} = & (2.6.14) \\
&= 1 + k^2 - k^2m'^2 + m'^2 \pm 2m'\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} = \\
&= 1 + k^2 + (1 - k^2)m'^2 \pm 2m'\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}.
\end{aligned}$$

В альтернативній формі вираз виглядає наступним чином

$$\rho_{1,2} = \frac{\left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right)^2}{(1 + k^2)(1 - m'^2)} \rho_k. \quad (2.6.15)$$

Необхідно окремо проаналізувати можливе розташування двох можливих точок на відрізку інтегрування, для цього знайдемо умову, при якій множник перед виразом буде меншим за одиницю, тобто

$$\frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)} < 1. \quad (2.6.16)$$

Виконаємо стандартні дії при аналізі математичних нерівностей

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2 &< (1+k^2)(1-m'^2), \\ 1+k^2+(1-k^2)m'^2 \pm 2m'\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} &< (1+k^2)(1-m'^2), \\ \pm 2m'\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} &< (1+k^2)(1-m'^2) - 1+k^2+(1-k^2)m'^2, \\ \pm 2m'\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} &< 1-m'^2+k^2-m'^2k^2 - 1+k^2+m'^2-m'^2k^2, \\ \pm 2m'\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} &< 2k^2-2m'^2k^2, \\ \pm m'\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} &< k^2(1-m'^2). \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

З останнього рівняння видно, що якщо обрати знак мінус, то точка інтегрування знаходиться перед точкою спостереження, а якщо знак плюс – то за нею. Цей факт необхідно враховувати при інтегруванні та розбивати відповідний проміжок на два окремих проміжки.

Знайдемо диференціал для виконання заміни. Отримаємо

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{d\rho}{dm'} dm' = \rho_k \frac{d}{dm'} \left( \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)} \right) dm' = \\ &= \frac{\rho_k}{(1+k^2)} \frac{d}{dm'} \left( \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{1-m'^2} \right) dm'. \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Тобто

$$\begin{aligned}
d\rho = \frac{\rho_k}{(1+k^2)} \frac{1}{(1-m'^2)^2} & \left( 2(1-m'^2) \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm \right. \right. \\
& \left. \left. \pm m' \right) \left( \frac{-k^2 m'}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \pm 1 \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right)^2 m' \right) dm'.
\end{aligned} \tag{2.6.19}$$

З урахуванням рівностей, отриманих вище, маємо

$$\begin{aligned}
& 2(1-m'^2) \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right) \left( \frac{-k^2 m'}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \pm 1 \right) + \\
& + 2 \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right)^2 m' = \\
& = 2 \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm \right. \\
& \left. \pm m' \right) \left( (1-m'^2) \left( \frac{-k^2 m'}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \pm 1 \right) + \right. \\
& \left. + \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right) m' \right) = \\
& = \frac{2 \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right)}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \left( (1-m'^2) \left( -k^2 m' \pm \right. \right. \\
& \left. \left. \pm \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \right) + \right. \\
& \left. + \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m' \right) m' \right)
\end{aligned}$$

І остаточно

$$\begin{aligned}
& (1 - m'^2) \left( -k^2 m' \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \right) + \\
& + \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right) m' = \\
& = -k^2 m' \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + k^2 m'^3 \mp m'^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + \\
& + m' + m' k^2 (1 - m'^2) \pm m'^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} = \\
& = -k^2 m' \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + k^2 m'^3 + m' + m' k^2 - k^2 m'^3 = \\
& = \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + m' = \left( m' \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \right),
\end{aligned}$$

$$d\rho =$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\rho_k}{(1 + k^2)} \frac{1}{(1 - m'^2)^2} \frac{2 \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right) \left( m' \pm \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \right)}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} dm', \\
& d\rho = \frac{\pm 2 \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right)^2 \rho_k dm'}{(1 + k^2)(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}}
\end{aligned}$$

В інтегралі стоїть доданок  $\rho d\rho$

$$\rho d\rho = \frac{\pm 2 \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' \right)^4}{(1 + k^2)^2 (1 - m'^2)^3 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} \rho_k^2 dm'. \quad (2.6.20)$$

Вводимо усі отримані результати в інтеграл, що є діагональним елементом матриці системи



$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) &= \int_{\Gamma_k} \frac{4K(m)\rho d\Gamma(\vec{r})}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}} = \\
&= \sqrt{1 + k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_k} \frac{4K(m)\rho d\rho}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}} = |\rho \rightarrow m'| = \\
&= -\frac{8\sqrt{1 + k^2}\rho_k^2}{(1 + k^2)^2} \int_{m'_A}^0 \frac{K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}} \frac{(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m')^4 dm'}{(1 - m'^2)^3 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} + \\
&+ \frac{8\sqrt{1 + k^2}\rho_k^2}{(1 + k^2)^2} \int_0^{m'_B} \frac{K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}} \frac{(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + m')^4 dm'}{(1 - m'^2)^3 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}}
\end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\rho + \rho_k &= \frac{(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m')^2}{(1 + k^2)(1 - m'^2)} \rho_k + \rho_k = \\
&= \left( \frac{(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m')^2}{(1 + k^2)(1 - m'^2)} + 1 \right) \rho_k.
\end{aligned} \tag{2.6.21}$$

Вираз у знаменнику можна розкласти наступним чином

$$\begin{aligned}
(1 + k^2)(1 - m'^2) &= 1 - m'^2 + k^2 - k^2 m'^2 = 1 + k^2(1 - m'^2) - m'^2 = \\
&= (\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m') (\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + m').
\end{aligned}$$

Підставимо це співвідношення у вираз (2.101)

$$\frac{(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m')^2}{(1 + k^2)(1 - m'^2)} \rho_k = \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'} \rho_k.$$

Розкриємо тепер дужки

$$\begin{aligned}
\rho + \rho_k &= \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'} \rho_k + \rho_k = \\
&= \left( \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' + \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'} \right) \rho_k = \\
&= \frac{2\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \rho_k}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'}.
\end{aligned}$$

Отримаємо аналогічний вираз зі знаком мінус

$$\begin{aligned}
\rho - \rho_k &= \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'} \rho_k - \rho_k = \\
&= \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m' - \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'} \rho_k = \\
&= \frac{\pm 2m' \rho_k}{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'}.
\end{aligned}$$

Проведемо алгебраїчні дії у наступних виразах

$$\begin{aligned}
(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2 &= \\
&= \frac{4(1 + k^2(1 - m'^2))\rho_k^2}{\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'\right)^2} + \frac{4k^2m'^2\rho_k^2}{\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'\right)^2} = \\
&= \frac{4(1 + k^2 - k^2m'^2 + k^2m'^2)\rho_k^2}{\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'\right)^2} = \frac{4(1 + k^2)\rho_k^2}{\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \mp m'\right)^2} = \\
&= \frac{4(1 + k^2)\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'\right)^2 \rho_k^2}{(1 + k^2)^2(1 - m'^2)^2} = \\
&= \frac{4\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'\right)^2 \rho_k^2}{(1 + k^2)(1 - m'^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ми отримали зв'язок між змінними  $\rho$  та  $m'$  у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}} = \frac{\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}}{2\left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'\right)\rho_k}$$

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + k^2(\rho - \rho_k)^2}} = \frac{\pm \left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} \pm m'\right)^3}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} \rho_k dm'.$$

І далі знаходимо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) &= \int_{\Gamma_k} \frac{4K(m) \rho d\Gamma(\vec{r})}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}} = \\ &= \sqrt{1 + k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_k} \frac{4K(m) \rho d\rho}{\sqrt{(\rho + \rho_k)^2 + (z - z_k)^2}} = |\rho \rightarrow m'| = \\ &= -\frac{4\rho_k}{1 + k^2} \int_{m'_A}^0 \frac{K(m) \left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m'\right)^3}{(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} dm' + \\ &+ \frac{4\rho_k}{1 + k^2} \int_0^{m'_B} \frac{K(m) \left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + m'\right)^3}{(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} dm' = \\ &= \frac{4\rho_k}{1 + k^2} \left[ \int_0^{m'_A} \frac{K(m) \left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m'\right)^3}{(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} dm' + \right. \\ &\left. + \int_0^{m'_B} \frac{K(m) \left(\sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} + m'\right)^3}{(1 - m'^2)^2 \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} dm' \right]. \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

Виконаємо аналогічну процедуру для інтегралів з нормальною похідною від функції Гріна

$$\int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}). \tag{2.6.23}$$

Спочатку спростимо вираз для нормальної похідної в випадку, коли вузлова точка лежить із точкою інтегрування на одній прямій, тобто

$$\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \left( \frac{1}{2\rho} \left[ \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + (z - z_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} E(m) - K(m) \right] n_\rho + \frac{z_0 - z}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} E(m) n_z \right). \quad (2.6.24)$$

Одиничний вектор нормалі на ділянці прямої можна виразити наступним чином:

$$\vec{n} = \frac{\pm(k, -1)}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad (2.6.25)$$

$$\vec{n} = (-kn_z, n_z).$$

Підставимо ці вирази у члени рівняння (2.104)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\rho} \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + (z - z_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} n_\rho + \frac{z_0 - z}{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2} n_z = \\ & = -\frac{1}{2\rho} \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2} kn_z - \\ & - \frac{\rho - \rho_0}{(\rho - \rho_0)^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2} kn_z = \\ & = -\frac{kn_z}{2\rho} \frac{\rho_0^2 - \rho^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2 + 2\rho^2 - 2\rho\rho_0}{(\rho - \rho_0)^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2} = \\ & = -\frac{kn_z}{2\rho} \frac{(\rho - \rho_0)^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2}{(\rho - \rho_0)^2 + k^2(\rho - \rho_0)^2} = -\frac{kn_z}{2\rho} = \frac{n_\rho}{2\rho}. \end{aligned}$$

Отримуємо наступне спрощення:

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \frac{4}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \left( \frac{n_\rho}{2\rho} E(m) - \frac{n_\rho}{2\rho} K(m) \right) = \\ &= \frac{2n_\rho}{\rho} \frac{(E(m) - K(m))}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}}. \end{aligned}$$

Або, остаточно

$$\tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}(1-m'^2)^2 n_\rho (E(m) - K(m))}{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^3 \rho_k^2}. \quad (2.6.26)$$

Підставимо отриманий лаконічний вираз в інтеграл (2.6.22). Як і у минулому випадку, цей інтеграл розпадається на два

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) &= \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \tilde{q}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\rho(\vec{r}) = \\ &= 2n_\rho \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{(E(m) - K(m))}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} d\rho(\vec{r}) = \\ &= 2n_\rho \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{E(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} d\rho(\vec{r}) - \\ &\quad - 2n_\rho \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{K(m)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} d\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

Окремо спростимо наступний вираз

$$\frac{d\rho(\vec{r})}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{\pm \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right) dm'}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}}$$

Отримуємо фінальну формулу для інтеграла від нормальної похідної функції Гріна

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_k, \vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) = & \\
= 2n_\rho \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{E(m)}{\sqrt{(\rho+\rho_0)^2 + (z-z_0)^2}} d\rho(\vec{r}) - & \\
- 2n_\rho \int_0^{m'_A} \frac{K(m) \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} - m' \right) dm'}{(1-m'^2)\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} - & \\
- 2n_\rho \int_0^{m'_B} \frac{K(m) \left( \sqrt{1+k^2(1-m'^2)} + m' \right) dm'}{(1-m'^2)\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}}. &
\end{aligned} \tag{2.6.27}$$

Як ми бачимо, задача обчислення сингулярного інтеграла зводиться до задачі обчислення інтегралів з повним еліптичним інтегралом першого роду, оскільки саме він містить ті особливості, що роблять інтеграл сингулярним.

## 2.7. Розкладення повного еліптичного інтеграла першого роду

Було показано, що при наближенні повного еліптичного інтеграла до одиниці, його можна розкласти у наступний ряд [108]

$$\begin{aligned}
K(m) = \ln \frac{4}{m'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) m'^2 + & \\
+ \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) m'^4 + & \\
+ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6}\right) m'^6 + \dots &
\end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Нагадаємо вираз для приведенного аргументу

$$m'^2 = 1 - m^2$$

Узагальнимо цей вираз. Для цього зберемо разом члени з логарифмом

$$\begin{aligned} \ln \frac{4}{m'} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m'^6 + \dots \right) = \\ = \ln \frac{4}{m'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n}. \end{aligned}$$

Отриманий ряд є зображенням повного еліптичного інтегралу I роду.

Дійсно

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} \quad (2.7.2)$$

Знайдемо його похідну будь-якого порядку

$$\frac{d^n K(k)}{dk^{2n}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \frac{d^n}{dk^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (2.7.3)$$

Останній отриманий інтеграл є стандартним

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!}. \quad (2.7.4)$$

Обчислимо вираз для похідної повного еліптичного інтеграла першого роду у нулі

$$\left. \frac{d^n K(k)}{dk^{2n}} \right|_{k^2=0} = \frac{\pi ((2n-1)!!)^2}{2 \cdot 2^n (2n)!!}. \quad (2.7.5)$$

Тоді розкладення у ряд Тейлора наступне

$$K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{n!} \left. \frac{d^n K(k)}{dk^{2n}} \right|_{k^2=0} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n}. \quad (2.7.6)$$

Скористаємося властивістю подвійного факторіала  $2^n n! = (2n)!!$ .

Вираз при логарифмі стає наступним:

$$\begin{aligned} \ln \frac{4}{m'} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m'^6 + \dots \right) = \\ = \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{m'} K(m'). \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Узагальнимо тепер решту коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{1 \cdot 2} m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4}\right) m'^4 + \\ + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6}\right) m'^6 = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(2i-1)}. \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Останню суму можна суттєво спростити, використовуючи властивості дігамма-функції, що є похідною від логарифму Ейлерової гамма-функції, а саме

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}, \\ \psi(n+1) &= -C + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \\ \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) &= -C + 2 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} - \ln 2 \right). \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Спростимо вирази для сум з рівняння вище

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(2i-1)} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(n+1) + \ln 4. \quad (2.7.10)$$

Розберемося окремо з сумами у рівнянні (2.7.8)



$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{1 \cdot 2} m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4}\right) m'^4 + \\
& + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6}\right) m'^6 = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} \left(\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(n+1) + \ln 4\right).
\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

Підсумуємо розписане вище

$$\begin{aligned}
K(m) &= \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{m'} K(m') + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln 4\right).
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

Трохи перекомбінуємо члени

$$\ln 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} = \frac{2}{\pi} \ln 4 K(m') - \ln 4. \tag{2.7.13}$$

Переформатуємо суму так, щоб почати сумачію з нуля

$$\begin{aligned}
& \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 4, \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m'^{2n} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) - \ln 4.
\end{aligned} \tag{2.7.14}$$

Компактний вид розкладання є наступним:

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} K(m') + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left( \psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right). \quad (2.7.15)$$

Остання формула вже використовувалася в дослідженнях і обчисленнях, однак з теоретичної точки зору у цьому виразі ще багато чого можна вдосконалити.

Остання сума може бути представлена у вигляді наступного інтеграла.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left( \psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) = \\ = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

Доведемо це твердження.

Виконаємо знову розкладання в ряд Тейлора в околиці нуля

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dm'^{2n}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx \Big|_{m'^2=0} = \\ = \int_0^1 \ln \frac{1}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n}{dm'^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-m'^2 x^2}} \Big|_{m'^2=0} = \\ = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \int_0^1 \ln \frac{1}{x} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \quad (2.7.17)$$

Останній інтеграл теж є табличним, тобто

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{x} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!! \pi}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \left( \ln 2 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right). \quad (2.7.18)$$

Останню суму можна суттєво спростити

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

Узагальнимо його через дігамма-функцію

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + \frac{1}{2} \left( \psi \left( n + \frac{1}{2} \right) - \psi(n+1) \right). \quad (2.7.20)$$

В результаті перетворень маємо

$$\int_0^1 \ln \frac{1-x^{2n}}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} \frac{((2n-1)!!)^2}{2^n(2n)!!} \left( \psi(n+1) - \psi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (2.7.21)$$

Підставимо це в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left( \psi(n+1) - \psi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.7.22)$$

Що й треба було довести.

Виконаємо ще кілька математичних перетворень.

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}. \quad (2.7.23)$$

Скористаємося властивістю гамма-функції

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{2^{1-2z}\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$
(2.7.24)

Приведемо до ладу дігамма-функції

$$\begin{aligned} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{d}{dn} \ln \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{d}{dn} \ln \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \\ &= -\frac{d}{dn} \ln \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = -\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dn} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$
(2.7.25)

Вираз під знаком суми суттєво спрощується

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\right)^2 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dn} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \frac{d}{dn} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$
(2.7.26)

А цей вираз вже можна представити через похідну від гамма-функції

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \frac{d}{dn} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\right)^2.$$
(2.7.27)

Попрацюємо з цим виразом і многочленом

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} m'^{2n} \frac{d}{dn} \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 = \\
& = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn} \left[ \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n} \right] + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 \frac{d}{dn} m'^{2n} = \\
& = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dn} \left[ \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n} \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{m'} \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n}.
\end{aligned}$$

Обчислюючи суму, отримуємо

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dn} \left[ \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n} \right] - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{m'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n}. \quad (2.7.28)$$

Ця сума приводить знову до повного еліптичного інтеграла першого роду

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} = \frac{2}{\pi} K(m'). \quad (2.7.29)$$

Тепер зберемо всі отримані тотожності

$$K(m) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dn} \left[ \left( \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \right)^2 m'^{2n} \right]. \quad (2.7.30)$$

В дослідженнях, виконаних під час роботи над даною темою, було доведено ефективність використання отриманого розкладання.

## 2.8. Обчислення діагональних елементів

Використовуючи отримане розкладання повного еліптичного інтегралу можна звести сингулярні інтеграли з повним еліптичним інтегралом першого роду до інтегралів від більш простих функцій. Дійсно,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{m'_A} \frac{K(m) \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m' \right) dm'}{(1 - m'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} = \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^{m'_A} \frac{K(m') \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m' \right) \ln \frac{1}{m'} dm'}{(1 - m'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \left( \psi(n + 1) - \right. \\
& \left. - \psi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) \int_0^{m'_A} \frac{m'^{2n} \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m' \right) dm'}{(1 - m'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}}, \\
& \int_0^{m'_A} \frac{K(m') \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m' \right) \ln \frac{1}{m'} dm'}{(1 - m'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} = \left| \begin{array}{l} k' = \frac{m'}{m'_A} \\ dm' = m'_A dk' \end{array} \right| = \\
& = \ln \frac{1}{m'_A} \int_0^{m'_A} \frac{K(m') \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)} - m' \right) dm'}{(1 - m'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2)}} + \\
& + m'_A \int_0^1 \frac{K(m'_A k') \left( \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2 k'^2)} - m'_A k' \right) \ln \frac{1}{k'} dk'}{(1 - m'^2 k'^2) \sqrt{1 + k^2(1 - m'^2 k'^2)}}. \tag{2.8.1}
\end{aligned}$$

Отже, обчислення діагональних елементів звелось до обчислення інтеграла з логарифмічною вагою.

## 2.9. Інтеграли з логарифмічною особливістю

Розглянемо наступний інтеграл

$$\int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx. \tag{2.9.1}$$

Вважаємо, що функція, яка стоїть поруч із логарифмом, є неперервною, або містить точку розриву першого роду на проміжку від нуля до одиниці.

При наявності збіжності цих інтегралів можна створити квадратурні формули для їх обчислення.

Будь-яку неперервну функцію можна розкласти у ряд Тейлора, а отже фундаментальними є наступні інтеграли

$$\int_0^1 x^n \ln \frac{1}{x} dx. \quad (2.9.2)$$

Записаний інтеграл називається невласним інтегралом Рімана другого роду.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \ln \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^n \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln \frac{1}{x} dx^{n+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( x^{n+1} \ln \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 x^n dx \right) = \frac{1}{(n+1)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{n+1} \Big|_{\varepsilon}^1 = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Отже, цей інтеграл збігається. Скористаємося стандартною процедурою створення квадратурних формул, тобто знаходження їх виразів через ваги і корені ортогональних многочленів із логарифмічною вагою.

## 2.10. Ортогональні многочлени з логарифмічною вагою

Будемо вважати ортогональними многочленами  $\{P_n(x)\}_{x=0}^n$  з логарифмічною вагою наступні

$$\int_0^1 P_i(x) P_k(x) \ln \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \|P_i(x)\|^2, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \quad (2.10.1)$$

Узагальнимо цей запис визначником, складеним із моментних інтегралів

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 & \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (2.10.2)$$

Представлення перших многочленів є такими

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x - \frac{1}{4} \\ P_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = \frac{7}{144}x^2 - \frac{5}{144}x + \frac{17}{5184} \end{array} \right. \quad (2.10.3)$$

Таблиця 2.1.

**Вагові коефіцієнти і корені ортогональних многочленів з логарифмічною вагою**

$n$	$w_i$ (Вагові коефіцієнти)	$x_i$ (Корені многочленів)
2	0.71853931	0.11200880
	0.28146068	0.60227691
3	0.51340455	0.063890792
	0.39198004	0.36899706
	0.094615406	0.76688030
4	0.38346406	0.041448480
	0.38687532	0.24527491



	0.19043513	0.55616545
	0.039225487	0.84898239
5	0.29789346	0.029134472
	0.34977622	0.17397721
	0.23448829	0.41170251
	0.098930460	0.67731417
	0.018911552	0.89477136
6	0.23876366	0.021634005
	0.30828657	0.12958339
	0.24531742	0.31402045
	0.14200875	0.53865721
	0.055454622	0.75691533
	0.010168958	0.92266884

Таким чином, побудовано ефективний метод обчислення інтегралів з логарифмічною вагою.

### **Висновки за розділом 2**

В цьому розділі сформульовано основну крайову задачу, до якої в подальшому буде зведено цілу низку задач прикладної фізики. Це змішана крайова задача для еліптичного рівняння. За допомогою ряду перетворень цю задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння. Розглянуто цікавий випадок аксіально-симетричних задач. При цьому отримали одновимірні сингулярні інтегральні рівняння, що дозволяє знову зменшити розмірність задачі, що розглядається. До таких задач відносяться проблеми коливань рідини в частково заповнених оболонках обертання, деякі задачі електростатики, задачі знаходження осереднених характеристик композитів та нанокompозитів при застосуванні концепції репрезентативного об'ємного елементу.

Отримані в явному вигляді ядра одновимірних інтегральних операторів, що відповідають аксіально-симетричним задачам. З'ясовані типи особливостей отриманих сингулярних операторів, побудовано ефективні алгоритми обчислення елементів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що продукується використанням методу граничних елементів. Особливу увагу приділено числовому визначенню діагональних елементів. Побудовано квадратурні формули для обчислення інтегралів із логарифмічною вагою, при цьому розглядались ортогональні багаточлени із логарифмічною вагою, які були отримані у явному вигляді.

## РОЗДІЛ 3

### ВИКОРИСТАННЯ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Метод граничних елементів [11] став ефективною та популярною альтернативою методам скінченних елементів і скінченних різниць, тому що однією з найбільших переваг використання методу граничних елементів [79-81] або інших методів, заснованих на розгляданні границь областей, є те, що нам потрібно провести дискретизацію, тобто розбити на окремі елементи лише границю тіла, а не весь об'єм. Якщо розглядати застосування методу граничних елементів до неоднорідних задач або задач із граничними значеннями з об'ємними силами, ефектами, що залежать від часу, або певним класом нелінійностей, то це, як правило, призводить до інтегральних рівнянь, які містять додаткові об'ємні інтеграли. Щоб обчислити ці інтеграли, область інтегрування потрібно розділити на внутрішні осередки, тому метод граничних елементів втрачає свою істотну перевагу лише граничної дискретизації. Типові підходи для обчислення об'ємних інтегралів передбачують дискретизацію внутрішньої частини області, апроксимацію неоднорідних функцій у внутрішній частині області за допомогою інтерполяції Лагранжа та використання числових квадратурних формул.

Узагальнення методу граничних елементів для цього випадку називається методом об'ємного інтегрального рівняння (VIEM). Головним недоліком цього методу є його повністю щільна системна матриця. Таким чином, вимоги до пам'яті та кількість операцій для вирішення системних рівнянь різко зростають. Оскільки інтегрування здійснюється в трьох просторових напрямках, витрати на обчислення зростають у третьому порядку щодо кількості точок інтегрування. Повністю щільна системна матриця методу об'ємних інтегральних рівнянь виникає тому, що всі елементи об'єму пов'язані один з одним. У більшості випадків саму матрицю не потрібно отримувати в явному

вигляді, вона використовується лише для обчислення матричних добутків, наприклад, для ітераційного розв'язання лінійної системи рівнянь. Підхід до подолання цих перешкод полягає у застосуванні відповідної техніки зменшення порядку матриці, або приведення її до більш розрідженого виду. Його можна використовувати для обчислення векторно-матричних добутків під час ітераційного розв'язання лінійної системи рівнянь.

Порівняно з методом граничних елементів із лише поверхневими елементами, у методі об'ємних інтегральних рівнянь набагато важливіше спростити систему, щоб кількість зв'язків між елементами стала якомога меншою. Відправною точкою методів швидкого підсумовування був запропонований Рохліним [82] швидкий мультипольний метод (FMM), який зосереджувався на швидкому множенні матриць типу Ністрона на вектор.

Багато варіантів швидкого мультипольного методу було адаптовано до різних типів функцій ядра; їх можна [83] застосувати до задач пружності. Метод панельної кластеризації, розроблений Хакбушем і Новаком [84], був запропонований для швидкого матриць-векторного множення матриць колокації. Тиртишников [85] та інші запропонували апроксимації низького рангу на основі кількох оригінальних записів матриці. У Бухау [86] та ін. було показано, що за допомогою швидкого мультипольного методу обчислювальні складності в обчисленнях методу граничних елементів зменшуються від  $O(N^2)$  до приблизно  $O(N)$ . В алгоритмі швидкого мультипольного методу матричні добутки можуть бути розбиті на ближню частину за рахунок елементів, які знаходяться близько один до одного, і дальню частину для решти елементів.

Використовуючи ці результати, було розроблено адаптивний алгоритм перехресної апроксимації (ACA) [87, 88] для обчислення низькорангових апроксимацій у випадку матриць Ністрона та колокаційних матриць. Цей метод зараз використовується в таких сферах, як електромагнетизм [86, 89] в поєднанні з алгебраїчними мультисітками [90]. Метою роботи низки вчених [91] було доведення, що алгоритм перехресної апроксимації також можна застосувати до матриць Галеркіна. На відміну від інших методів, таких як

швидкий мультіпольний метод, панельне кластеризування тощо, апроксимації низького рангу не утворюються шляхом заміни ядерної функції інтегрального оператора. Алгоритм використовує кілька початкових записів матриці для обчислення матриці низького рангу. Для цього не потрібно будувати всю матрицю заздалегідь.

Як було введено в і вдосконалено в [92], базиси вейвлетів пропонують [93, 94] додатковий інструмент для швидкого розв'язання інтегральних рівнянь. Фактично, дискретизація Галеркіна з вейвлет-базами призводить до квазірозріджених матриць, тобто більшість елементів матриці є незначними і можуть розглядатися як нульові. Відкидання цих нерелевантних записів матриці називається стисненням матриці. Що стосується граничних інтегральних рівнянь, значні зусилля були витрачені на побудову відповідних вейвлет-базисів на поверхні. Методи вейвлет-перетворення також застосовуються до системи рівнянь, намагаючись прискорити процес розв'язування. Мета полягає в тому, щоб розрідити матрицю, що пришвидшить розв'язок матричного рівняння. Можна використовувати кілька різних типів вейвлетів. Серед них є клас ортогональних вейвлетів Добеші [92].

Як було зазначено, для обчислення об'ємних інтегралів розрахункову область потрібно дискретизувати на внутрішні підобласті. Щоб подолати цей недолік, пропонуються деякі методи перетворення об'ємних інтегралів в еквівалентні граничні інтеграли, які часто використовуються в методі граничних елементів.

Метод радіального інтегрування (RIM) використовується для перетворення об'ємних інтегралів, що з'являються в крайових задачах, на еквівалентні граничні інтеграли. Ці підходи дозволяють нам розв'язувати та розглядати лише граничні інтегральні рівняння. Новий ефективний метод перетворення, RIM, був розроблений Гао [95], який не тільки може перетворювати будь-які складні інтеграли області до граничних уніфікованим способом без використання конкретних рішень, але також може усунути різноманітні сингулярності, що виникають в області інтегралів.

Протягом останніх десятиліть багато досліджень у галузі методу граничних елементів було присвячено вирішенню питання зведення об'ємних інтегралів до поверхневих. Одним із найпоширеніших методів у галузі перетворення об'ємних інтегралів в поверхневі є метод подвійного заміщення (DRM), представлений у [96]. Ця техніка пропонує деякі переваги порівняно з попередніми підходами в деяких конкретних застосуваннях, як продемонстровано у роботах П.В. Партрідж, К.А. Бреббія, Л.К. Вробелла [97]. З тих пір ця ідея була широко розвинена в багатьох дослідженнях, таких як метод подвійної взаємності граничних елементів (DRBEM) [98-100], розділення змінних DRBEM [101] і перетворення Лапласа DRBEM [102].

### 3.1. Метод подвійного заміщення

Даний підрозділ присвячений вдосконаленню методу подвійного заміщення з використанням полігармонічних радіальних базисних функцій спеціального виду за допомогою аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів. Це відкриває нові можливості для підвищення точності обчислень і суттєвого зниження обчислювальних витрат на час розрахунку.

Розглянемо стандартне рівняння Пуассона. Рівнянням Пуассона називається рівняння Лапласа із наявною правою частиною

$$\Delta u(\vec{r}) = -4\pi f(\vec{r}). \quad (3.1.1)$$

Невідому функцію  $u(\vec{r})$  можна представити у вигляді суми однорідного і частинного розв'язків  $u = u_0 + u_p$ . Однорідна функція  $u_0$  є гармонічною, а частинний розв'язок  $u_p$  задовольняє рівнянню Пуассона.

Неоднорідний член  $f(\vec{r})$  ми наближуємо за допомогою радіально-базисних функцій, які зосереджені у деяких  $L$  точках всередині об'єму розглянутої області та  $N$  точках на межі області

$$f(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|), \quad (3.1.2)$$

$\varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$  є радіально-базисними функціями.

Точки  $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^{L+N}$  знаходяться всередині об'єму, точки  $\{\vec{r}_i\}_{i=L+1}^{L+N}$  зовні.

Частинний розв'язок також може бути наближений за допомогою радіально-базисних функцій [106]

$$u_p(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|). \quad (3.1.3)$$

Зв'язок між функціями  $\varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$  та  $\psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$  задається за допомогою рівняння Пуассона. Дійсно

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u_0 + \Delta u_p = \Delta \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \Delta \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = -4\pi f(\vec{r}) = \\ &= -4\pi \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) \\ \Delta \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) &= -4\pi \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|). \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Існує велика кількість радіально-базисних функцій, широко використаних в аналізі, такі як гаусові, квадратичні, мультіквадратичні, обернено квадратичні. У даному дослідженні ми застосовуємо полігармонічні сплайни.

### 3.2. Полігармонічні сплайни

Полігармонічний сплайн представляє собою лінійну комбінацію полігармонічних радіально-базисних функцій та поліноміального члена, що може бути представлений наступним чином [104, 105]:

$$f(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) + \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 y + \beta_3 x. \quad (3.2.1)$$

Поліноміальний член покращує точність наближення для полігармонічних сплайнів, а також покращує екстраполяцію від центру області та граничних точок.

Полігармонічні радіально-базисні функції визначаються наступним співвідношенням:

$$\varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \begin{cases} |\vec{r} - \vec{r}_i|^k, k = 1, 3, \dots \\ |\vec{r} - \vec{r}_i|^k \ln|\vec{r} - \vec{r}_i|, k = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Ми розглядаємо полігармонічні сплайни з непарним степенем. Щоб знайти функції  $\psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$ , нам необхідно розв'язати рівняння, що представлене відповідним рівнянням із радіальною частиною неоднорідного рівняння Лапласа таким чином:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = -4\pi r^{2k-1}. \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = -4\pi r^{2k+1},$$

$$r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} = -\frac{4\pi r^{2k+2}}{2(k+1)} + A,$$

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = -\frac{4\pi r^{2k}}{2(k+1)} + \frac{A}{r^2},$$

$$\psi(r) = -\frac{2\pi r^{2k+1}}{(k+1)(2k+1)} - \frac{A}{r} + B. \quad (3.2.4)$$

Оберемо наступний розв'язок вказаного рівняння

$$\psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = -\frac{2\pi r^{2k+1}}{(k+1)(2k+1)}. \quad (3.2.5)$$

Таким чином, частинний розв'язок отримуємо у наступному вигляді:



$$u_p(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) - \frac{2\pi}{3} [\beta_0(z^2 + y^2 + x^2) + \beta_1 z^3 + \beta_2 y^3 + \beta_3 x^3]. \quad (3.2.6)$$

Перевіримо вираз для Лапласіана

$$\Delta u_p(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \Delta \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) - \frac{2\pi}{3} [\beta_0 \Delta(z^2 + y^2 + x^2) + \beta_1 \Delta z^3 + \beta_2 \Delta y^3 + \beta_3 \Delta x^3]. \quad (3.2.7)$$

Невідомі коефіцієнти  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  можуть бути знайдені для функції  $f(\vec{r})$  через стандартні інтерполяційні умови та умови ортогональності.

### 3.3. Аксіально-симетричні полігармонічні сплайни

Для того, щоб отримати вирази для аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів, нам необхідно проінтегрувати полігармонічні радіально-базисні функції за азимутальною змінною  $\Theta$ . Ця ідея була використана великою кількістю авторів [106, 107], однак вони розглядали лише полігармонічний сплайн першого порядку. В даному дослідженні отримано аналітичні вирази для будь-якого порядку сплайна. Це дозволить нам у майбутньому узагальнити метод для більш складних та нелінійних граничних умов.

В аксіально-симетричному випадку функція  $f(\vec{r})$  не залежить від змінної  $\Theta$ . Тому інтеграл від цієї функції є інтегралом від константи

$$\int_0^{2\pi} f(\vec{r}) d\Theta = 2\pi f(\vec{r}). \quad (3.3.1)$$

Подамо вирази для радіально-базисних функцій з (3.2.1) та (3.2.5)

$$f(\vec{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \int_0^{2\pi} \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) d\Theta + \beta_0 + \beta_1 z. \quad (3.3.2)$$

$$u_p(\vec{r}) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \int_0^{2\pi} \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) d\Theta - \frac{2\pi}{3} [\beta_0(z^2 + y^2 + x^2) + \beta_1 z^3]. \quad (3.3.3)$$

Позначимо аксіально-симетричні радіально-базисні функції в інтегральній формі тим же чином, як ми і позначали відповідні згорнуті функції Гріна у теорії потенціалу, а саме

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) &= \int_0^{2\pi} \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) d\Theta, \\ \tilde{\psi}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) &= \int_0^{2\pi} \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) d\Theta. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Обчислимо відповідні інтеграли (3.3.4). Нагадаємо, що відстань між двома точками в циліндричній системі координат задається наступним співвідношенням:

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 + (z - z_i)^2 - 2\rho\rho_i \cos(\Theta - \Theta_i)}. \quad (3.3.5)$$

Наступним кроком є обчислення інтеграла

$$\tilde{\varphi}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) = \int_0^{2\pi} (\rho^2 + \rho_i^2 + (z - z_i)^2 - 2\rho\rho_i \cos(\Theta - \Theta_i))^{\frac{2k-1}{2}} d\Theta. \quad (3.3.6)$$

Виконаємо нескладні аналітичні перетворення, аналогічні тим, які ми виконували для отримання аксіально-симетричних функцій Гріна рівняння Лапласа

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} (\rho^2 + \rho_i^2 + (z - z_i)^2 - 2\rho\rho_i \cos(\Theta - \Theta_i))^{\frac{2k-1}{2}} d\Theta = \\
& = \left| \theta = \frac{\pi - (\Theta - \Theta_i)}{2} \Rightarrow \Theta - \Theta_i = \pi - 2\theta \right|_{d\Theta = -2d\theta} = \\
& = 4[(\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\frac{2k-1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-1}{2}} d\theta.
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Необхідно ретельно дослідити цей інтеграл, щоб знайти спосіб його обчислення з високою точністю, оскільки саме від точності обчислень внутрішніх інтегралів залежить точність розв'язку крайової задачі в цілому.

### 3.4. Спеціальні еліптичні інтеграли

У попередньому розгляді відкривається новий вид інтегралів, подібних до класичних еліптичних. Введемо спеціальні еліптичні інтеграли наступним чином:

$$E_k(m) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-1}{2}} d\theta. \tag{3.4.1}$$

Якщо  $k = 0$  то цей вираз (3.19) перетворюється на повний еліптичний інтеграл першого роду, якщо  $k = 1$ , то на повний еліптичний інтеграл другого роду [108]. Графіки перших семи спеціальних еліптичних інтегралів представлені на рисунку.

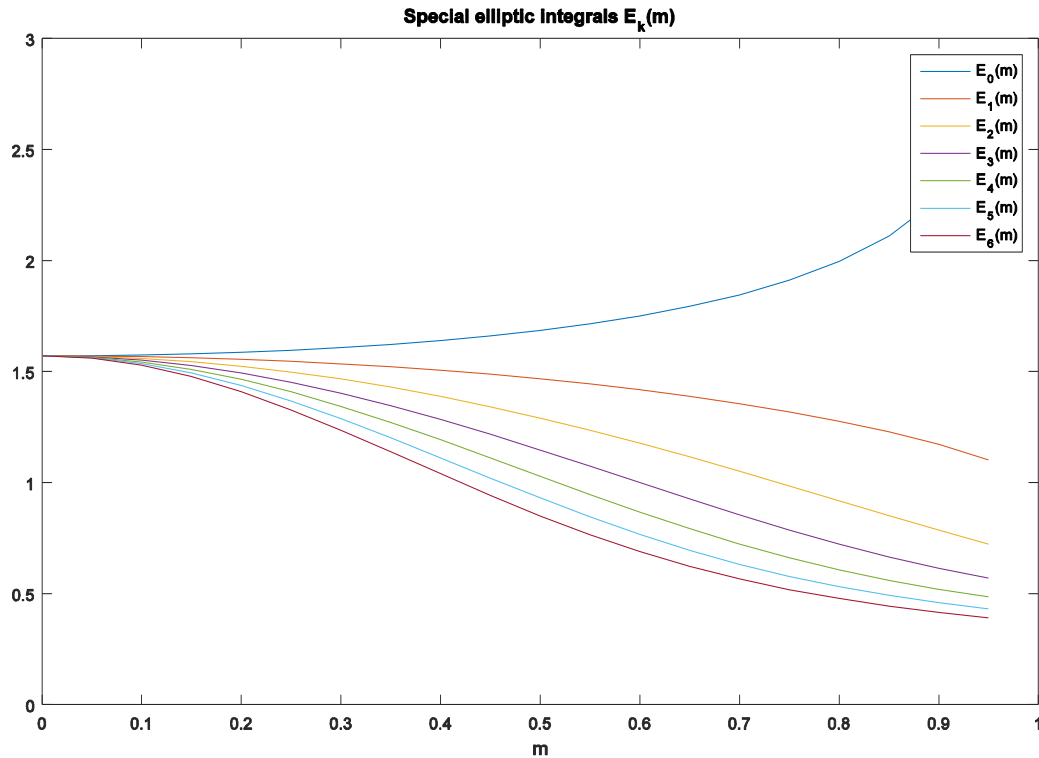


Рис. 3.1. Перші сім спеціальних еліптичних інтегралів

Цей вираз можна представити через гіпергеометричну функцію

$$E_k(m) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - k, \frac{1}{2}; 1; m^2\right). \quad (3.4.2)$$

Використовуючи стандартний взаємозв'язок [108] між гіпергеометричними функціями

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z),$$

ми отримуємо вираз, що показує зв'язок між спеціальними еліптичними інтегралами від додатного та від'ємного порядку

$$E_k(m) = \frac{\pi}{2} (1 - m^2)^k {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2}; 1; m^2\right) = (1 - m^2)^k E_{-k}(m). \quad (3.4.3)$$

Використовуючи цю формулу (3.21), спробуємо отримати рекурентну формулу для обчислення спеціального еліптичного інтеграла через інтеграли з сусідніми індексами. Спершу отримаємо вираз для похідної від інтегралу (3.21)

$$\frac{dE_k(m)}{dm} = -(2k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} m \sin^2 \theta (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-3}{2}} d\theta. \quad (3.4.4)$$

Інтеграл від синуса можна обчислити за допомогою попереднього спеціального еліптичного інтеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} m \sin^2 \theta (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-3}{2}} d\theta &= \\ &= \frac{1}{m} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-3}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2k-1}{2}} d\theta \right] = \\ &= \frac{1}{m} (E_{k-1}(m) - E_k(m)). \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Отримуємо наступний зв'язок:

$$\frac{dE_k(m)}{dm} = \frac{2k-1}{m} (E_k(m) - E_{k-1}(m)). \quad (3.4.6)$$

Таким же способом можна отримати похідну від правої частини у виразі зв'язку між інтегралами додатного і від'ємного порядків

$$\frac{dE_k(m)}{dm} = \frac{2k+1}{m} \left( \frac{E_{k+1}(m)}{1-m^2} - E_k(m) \right) - \frac{2km}{1-m^2} E_k(m). \quad (3.4.7)$$

Зіставляючи усі отримані формули (3.4.6) та (3.4.7), знаходимо рекурентний зв'язок

$$(2k+1)E_{k+1}(m) = 2k(2-m^2)E_k(m) - (2k-1)(1-m^2)E_{k-1}(m). \quad (3.4.8)$$

Спеціальні еліптичні інтеграли задовольняють диференціальному рівнянню другого порядку. Це рівняння можна отримати, співставляючи другу похідну із виразу (3.25) для першої (3.24)

$$\frac{d}{dm} \left[ m(1 - m^2) \frac{du(m)}{dm} + 2km^2u(m) \right] = (2k + 1)tu(m). \quad (3.4.9)$$

Знаючи це рівняння, знаходимо вираз для ряду

$$E_k(m) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n - k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(\Gamma(n + 1))^2} m^{2n}. \quad (3.4.10)$$

Тобто отримано вираз для спеціального еліптичного інтегралу у вигляді ряду за параметром  $m$ .

### 3.5. Обчислення спеціальних еліптичних інтегралів

Ефективне застосування еліптичних інтегралів у процедурі апроксимації вимагає відповідних формул для їх числового обчислення з високою точністю. Найпростішим підходом тут є використання числового інтегрування в рівнянні (3.19), але зі збільшенням порядку  $k$  інтегралів числова похибка також зростає. Іншим способом є використання рекурентної формули (3.4.8), але з деякими змінами.

Спеціальний еліптичний інтеграл порядку  $k$  можна виразити через його два попередні інтеграли. Таким чином, обчислення функцій з довільним порядком зводиться до обчислення комбінації перших двох членів послідовності з деякими поліномами. Цей результат отримано з рекурентного співвідношення.

$$E_k(m) = Q_k(m)E(m) + P_k(m)K(m). \quad (3.5.1)$$

Функції  $K(m)$  та  $E(m)$  є повними еліптичними інтегралами першого та другого роду відповідно,  $Q_k(m)$  та  $P_k(m)$  – деякі многочлени, які можуть бути визначені з рекурентної умови (3.4.8).

Наведемо вирази для перших спеціальних еліптичних інтегралів через повні еліптичні інтеграли

$$\begin{cases} E_0(m) = K(m), \\ E_1(m) = E(m), \\ E_2(m) = \frac{1}{(2 \cdot 2 - 1)!!} [2(2 - m^2)E(m) - (1 - m^2)K(m)], \\ E_3(m) = \frac{1}{(2 \cdot 3 - 1)!!} \left[ \begin{array}{l} (8(2 - m^2) - 9(1 - m^2))E(m) - \\ 4(2 - m^2)(1 - m^2)K(m) \end{array} \right]. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Тобто обчислення спеціальних еліптичних інтегралів довільного порядку може бути зведено до обчислення лише стандартних повних еліптичних інтегралів першого та другого роду, чому й присвячено наступний підрозділ.

### 3.6. Обчислення повних еліптичних інтегралів з високою точністю

Для високоточного обчислення повних еліптичних інтегралів першого та другого роду ми використовуємо відомий метод середнього арифметично-геометричного (СГМ) Гауса [109]. Тому розрахунок спеціальних еліптичних інтегралів довільних ступенів зводиться до обчислення еліптичних інтегралів першого та другого роду.

Середнє арифметико-геометричне визначається наступною послідовністю:

$$\begin{aligned} a_0 &= a & b_0 &= b \\ a_1 &= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) & b_1 &= \sqrt{a_0 b_0} \\ &\dots & &\dots \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$M(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (3.6.2)$$

Визначимо симетричну форму повного еліптичного інтеграла першого роду наступним чином:

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{a} K\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right). \quad (3.6.3)$$

Гаус вперше довів, що арифметико-геометричне перетворення не змінює симетричний еліптичний інтеграл першого роду, тому його можна обчислити за допомогою AGM за такою формулою:

$$\begin{aligned} I(a, b) &= I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \dots = I(M(a, b), M(a, b)) = \\ &= \frac{1}{M(a, b)} K(0) = \frac{\pi}{2M(a, b)}, \\ K(m) &= \frac{\pi}{2M(a, b)}. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Повний еліптичний інтеграл другого роду може теж бути записаний у симетричній формі

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{1}{a} E\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right). \quad (3.6.5)$$

Слід додати, що інтеграл  $J(a, b)$  можна виразити через  $I(a, b)$ , а отже і повний еліптичний інтеграл другого роду через відповідний інтеграл першого роду

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \left( a^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (a_n^2 - b_n^2) \right) I(a, b), \\ E(m) &= J\left(1, \sqrt{1 - m^2}\right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (a_n^2 - b_n^2) \right) K(m). \end{aligned} \quad (3.6.6)$$



Послідовність середнього арифметико-геометричного швидко збігається і дозволяє обчислювати еліптичні інтеграли з будь-якою заданою точністю.

### 3.7. Повернення до аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів

Підсумовуючи все вищесказане, аксіально-симетричні полігармонічні сплякни (3.15) можна виразити через спеціальні еліптичні інтеграли наступним чином:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) &= 4((\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{2k-1}{2}} E_k(m), \\ \tilde{\psi}(|\vec{r} - \vec{r}_i|) &= -\frac{8\pi}{(k+1)(2k+1)} ((\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{2k+1}{2}} E_{k+1}(m).\end{aligned}\quad (3.7.1)$$

Рівняння  $((\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{2k-1}{2}}$  описує коло з центром у точці  $(-\rho_i, z_i)$  та спеціальний еліптичний інтеграл троху коректує його.

Для використання отриманих формул (3.7.1) в методі подвійного заміщення нам необхідно знайти вирази для нормальної похідної від частинного розв'язку на границі тіла

$$q_p(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{L+N} \alpha_i \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(|\vec{r} - \vec{r}_i|)}{\partial n(\vec{r})} d\Theta - \frac{2\pi}{3} [2\beta_0(\rho n_\rho + z n_z) + 3\beta_1 n_z z^2]. \quad (3.7.2)$$

Нормальна похідна аксіально-симетричних полігармонічних радіально-базисних функцій отримана у наступній формі

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial n} = & -\frac{8\pi}{k+1} ((\rho + \rho_i)^2 + \\
& + (z - z_i)^2)^{\frac{2k+1}{2}} \left[ \frac{n_\rho}{2\rho} \left( \frac{\rho^2 - \rho_i^2 + (z - z_i)^2}{(\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2} E_k(m) + \right. \right. \\
& \left. \left. + E_{k+1}(m) \right) + \frac{(z - z_i)n_z}{(\rho + \rho_i)^2 + (z - z_i)^2} E_k(m) \right]. \tag{3.7.3}
\end{aligned}$$

Таким чином, отримані аналітичні вирази для аксіально-симетричних полігармонічних радіально-базисних функцій та їх нормальних поїдних.

### 3.8. Числові приклади

Щоб продемонструвати ефективність використання аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів у методі подвійного заміщення, розв'язано дві задачі, керуючись рівнянням Пуассона. Ми використовували метод подвійної взаємності із методом сингулярних граничних рівнянь у тому сенсі, що ми використовували метод подвійного заміщення для пошуку частинних рішень і метод сингулярних граничних інтегралів з постійною апроксимацією розподілу густини для пошуку однорідного рішення. Надано середні відносні похибки між точними та числовими розв'язками з використанням аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів та інформацію про обчислювальні ресурси, необхідні для вирішення цих задач. У реалізації використовується мова програмування C++, яка працює на кросплатформній IDE Code::Blocks з відкритим кодом на процесорі Intel Core i3-7020U 2,3 ГГц.

Середня відносна похибка обчислювалася наступною формулою:

$$\varepsilon_{rel} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left( \frac{u(\vec{r}_i) - \tilde{u}(\vec{r}_i)}{u(\vec{r}_i)} \right)^2}, \tag{3.8.1}$$

де  $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^L$  є точками спостереження всередині об'єму,  $u(\vec{r}_i)$  – точне рішення задачі,  $\tilde{u}(\vec{r}_i)$  – числові значення невідомої функції у точках спостереження.

### 3.9. Потенціал нерівномірно зарядженої кулі з отвором

Розглянемо кулю з концентричним отвором. Припустимо, що внутрішній радіус кульки  $R_1 = 0.5$ , а зовнішній  $R_2 = 1$ . Загальний заряд, розподілений за кулю дорівнює  $Q=1$ . Розглядаємо просторовий заряд як квадратичну функцію  $f(r) = 5Q \left(4\pi(R_2^5 - R_1^2)\right)^{-1} r^2$  відстані від центру кулі. Обчислювальна область представлена на рисунку кольоровою частиною.

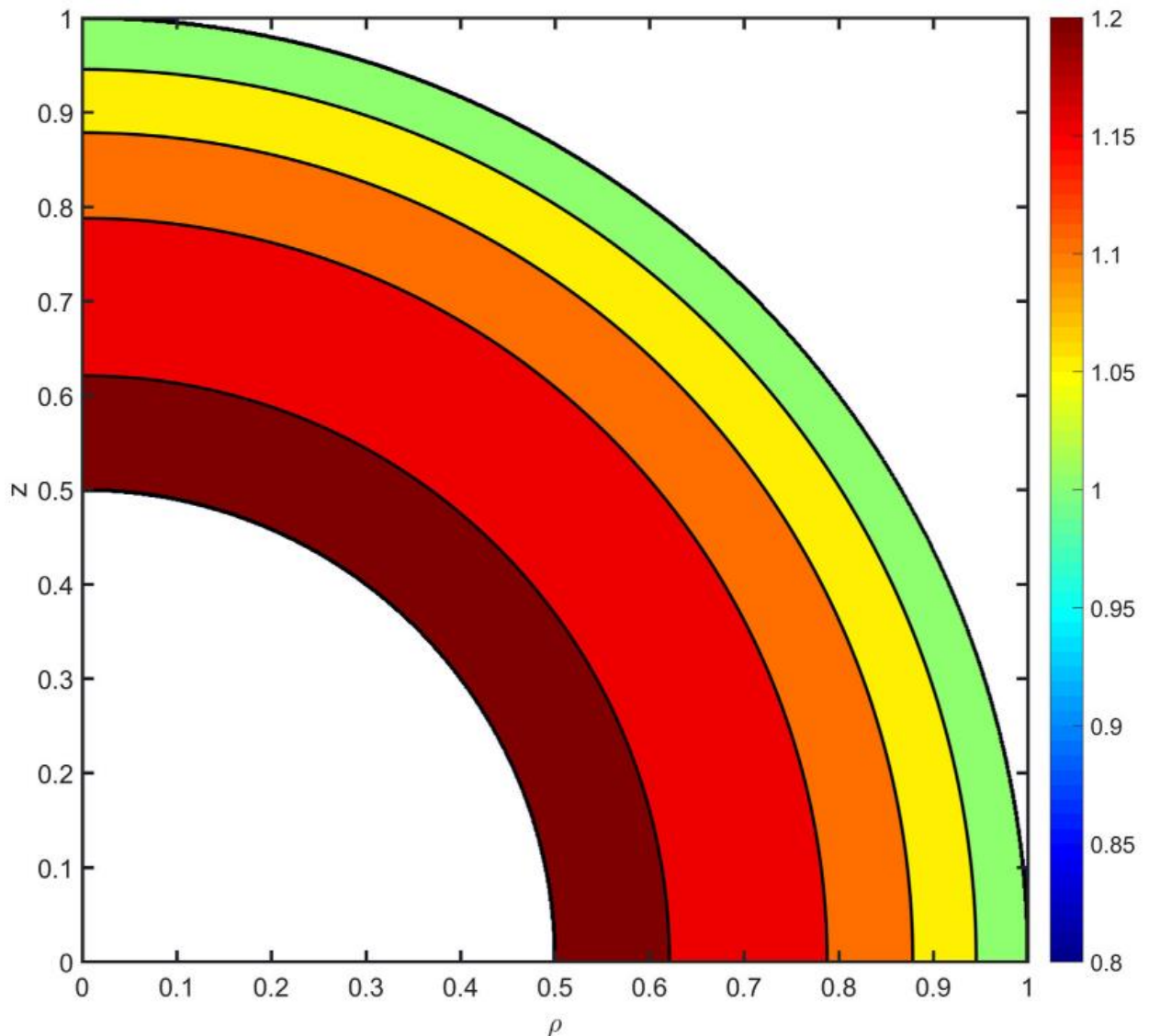


Рис 3.2. Обчислювальна площа та ізоповерхні для задачі про порожнисту кулю.

Точний розв'язок визначається наступною формулою

$$u(\vec{r}) = \frac{Q}{R_2^5 - R_1^5} \left[ \frac{5}{4} R_2^4 - \frac{R_1^5}{r} - \frac{1}{4} r^4 \right]. \quad (3.9.1)$$

У таблиці 3.1 надано час центрального процесора для різних значень кількості вузлів  $L$ .

Таблиця 3.1.

**Час центрального процесора для задачі кулі з отвором (в секундах).**

k	1	2	3	4	5	6	7
L=46	0.033	0.03	0.03	0.041	0.049	0.071	0.1
L=170	0.203	0.233	0.287	0.392	0.531	0.779	1.112
L=740	3.973	4.32	5.127	6.484	8.778	12.614	18.017
L=2962	146.822	156.575	166.703	195.404	232.661	279.168	364.757

Для розв'язання рівняння Пуассона за допомогою запропонованого підходу ми застосовуємо різну кількість граничних елементів у співвідношенні 1:1 між елементами на внутрішній і зовнішній границях. Вибирається різна кількість вузлів  $L = L_{in} + L_{b1} + L_{b2}$ , де  $L_{in}$  – вузли всередині області,  $L_{b1}$  – вузли на внутрішній межі, а  $L_{b2}$  – вузли на зовнішній межі. Зв'язки між середньою відносною похибкою та ступенем сплайна представлені на рисунку 3.3, час процесора представлено в таблиці 3.1 для різної кількості вузлів.

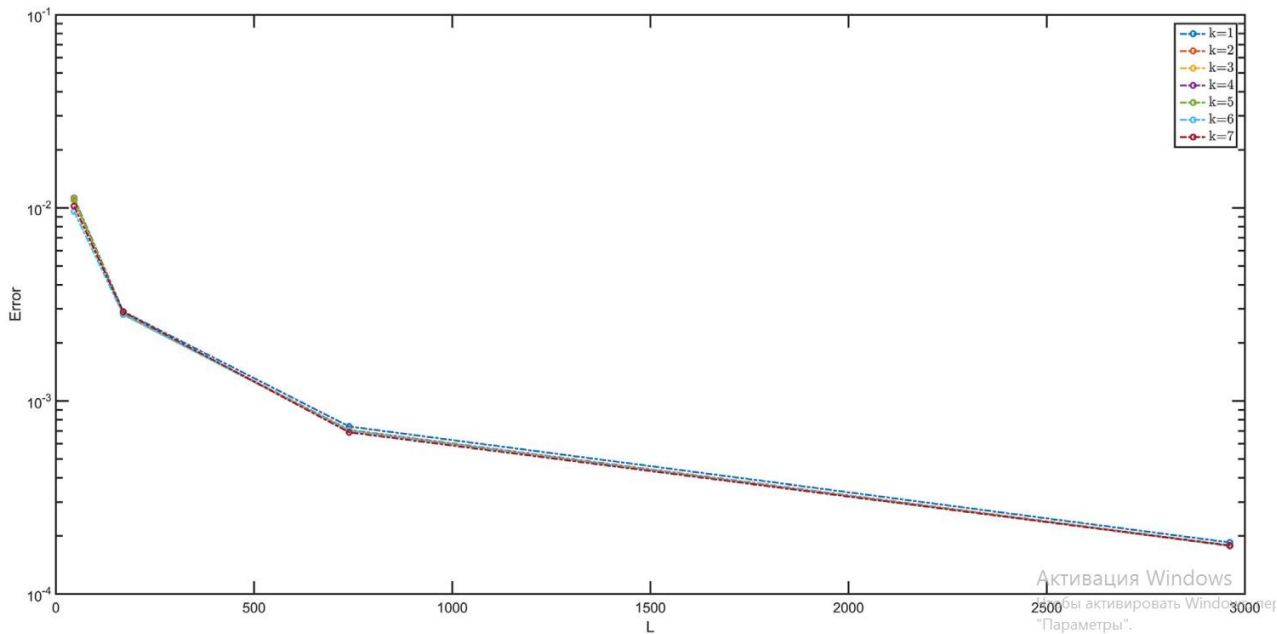


Рис 3.3. Середні відносні похибки для задачі про порожнисту кулю

З результатів, що подані на рисунку 3.3, робимо висновок про те, що всі розглянуті сплайни (лінії 1-7) демонструють однакову точність зі збільшенням кількості вузлів. Слід зазначити, що зростання точності сповільнюється, коли  $L > 740$ . Для однакової кількості вузлів процесорний час збільшується зі збільшенням порядку сплайна, оскільки обчислення сплайна високого порядку вимагає використання рекурентних формул.

### 3.10. Задача Ванга

Розглянемо задачу Пуассона в циліндричних координатах із дисертації Ванга [107]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\sin \rho}{\rho} e^{-z},$$

$$u|_{z=0} = \cos \rho, u|_{z=1} = e^{-1} \cos \rho, \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\rho=1} = -\sin 1 e^{-z}. \quad (3.10.1)$$

де розрахункова область задачі – циліндр з одиничними радіусом і одиничною висотою. Аналітичний розв’язок визначається як  $u(\rho, z) = \cos \rho e^{-z}$ . Щоб вирішити цю задачу чисельно за допомогою DR-BEM, ми починаємо з  $L_b = 15$  елементів на межі та  $L_{in} = 20$  вузлів інтерполяції всередині об’єму, а потім ми

поступово збільшуємо кількість вузлів до  $L_b = 120$  і  $L_{in} = 50$ , щоб продемонструвати збіжність запропонованого способу. Перші значення цих параметрів (15, 20) були використані в дисертації Ванга [30]. Формули Ванга для вирішення цієї проблеми подібні до поточних формул у випадку  $k=1$ . Порівняння з точним рішенням наведено на рисунку 3.2, процесорний час представлено в таблиці 3.1.

Слід зазначити, що задача Ванга є складним еталонним тестом для обчислювальних методів, оскільки функція в правій частині не існує в точці  $\rho=0$ .

Додамо для коректності, що ця задача також розглядалася в [106], але ми не можемо провести порівняння між її розв'язком і розв'язком, представленим у даній роботі, оскільки для отримання однорідного розв'язку використовувався метод фундаментальних розв'язків, порівняно із методом сингулярних граничних рівнянь у поточних дослідженнях.

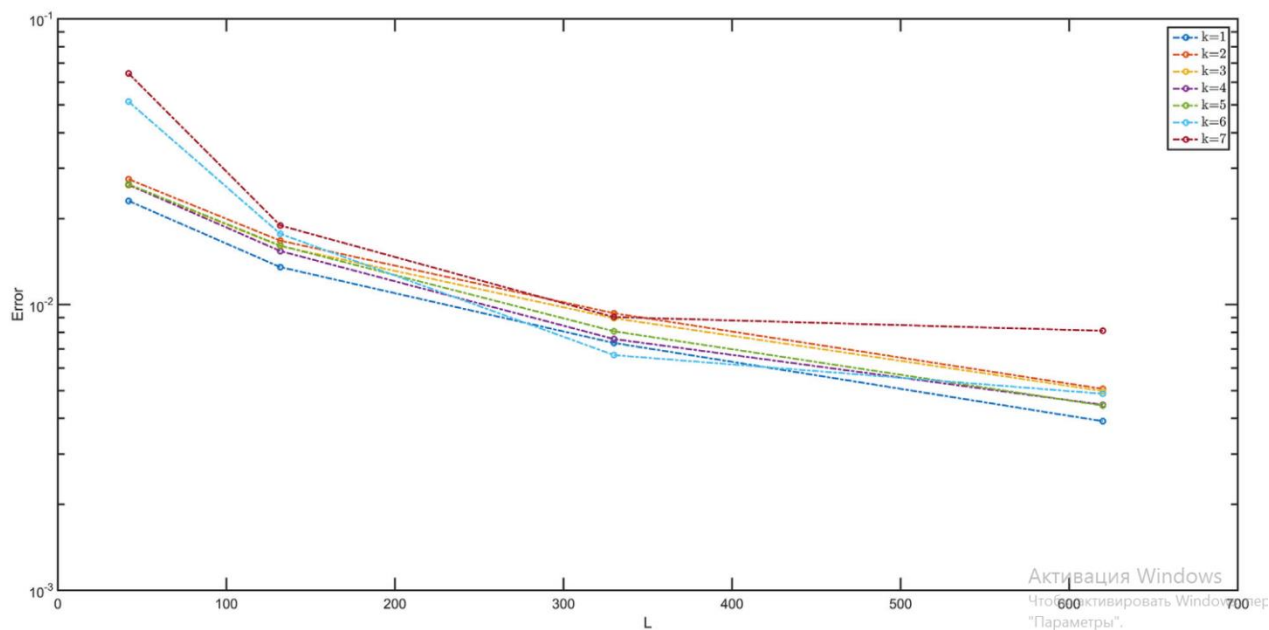


Рис. 3.4. Середні відносні похибки для задачі Ванга

Таблиця 3.2.

#### Час центрального процесора для задачі Ванга

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$L = 42$	0.021	0.02	0.021	0.027	0.028	0.031	0.043

$L = 132$	0.113	0.128	0.148	0.172	0.231	0.322	0.428
$L = 330$	0.733	0.823	0.94	1.146	1.569	1.934	2.79
$L = 620$	2.762	3.051	3.498	4.195	5.284	7.114	10.459

На відміну від попередньої задачі, в даній є розривна права частина (3.42), всі сплайни демонструють різну поведінку збіжності. Перший сплайн забезпечує найточніші результати. Це пов'язано з погіршенням точності для вузлів поблизу  $\rho=0$  для сплайнів високого порядку. Результати, отримані запропонованими методами, є менш точними порівняно з результатами Ванга, оскільки в дисертації Ванга використовується квадратична апроксимація невідомих функцій замість постійної в поточних дослідженнях.

### Висновки за розділом 3

Викладено аналіз числових та аналітичних методів для розв'язання неоднорідних крайових задач, що призводить до необхідності обчислення об'ємних інтегралів.

Вдосконалено метод подвійного заміщення з використанням полігармонічних радіальних базисних функцій спеціального виду за допомогою аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів. Введено новий клас спеціальних функцій, які зображують як новий вид інтегралів, подібних до класичних еліптичних. Отримано аналітичні вирази для будь-якого порядку сплайна, що дозволить у подальшому узагальнити метод для більш складних та нелінійних граничних умов. Доведено, що спеціальні еліптичні інтеграли задовольняють диференціальному рівнянню другого порядку, розв'язок якого подається у вигляді ряду. Обчислення цих спеціальних функцій з довільним порядком зводиться до обчислення комбінації перших двох членів послідовності з деякими поліномами, тобто отримані рекурентні формули, які дозволяють звести обчислення спеціальних еліптичних інтегралів лише до обчислення стандартних еліптичних інтегралів першого та другого роду. Для високоточного обчислення повних еліптичних інтегралів першого та другого

роду використано відомий метод середнього арифметично-геометричного (СГМ) Гауса.

Для тестових задач зі складними сингулярними правими частинами надано середні відносні похибки між точними та числовими розв'язками з використанням аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів та інформацію про обчислювальні ресурси, необхідні для вирішення цих задач.

Запропоновано новий клас спеціальних функцій пов'язаних з узагальненими еліптичними інтегралами, досліджено їх властивості та розроблено числовий метод для їх розрахунку.

Розроблені методи, числові алгоритми та програмні засоби створюють основу для вивчення фізичних полів різної природи, дають змогу побудувати еталонні тести; ефективність розробленого підходу найбільш чітко проявляється при дослідженні аксіально-симетричних задач теорії потенціалу та лінійної теорії пружності.



## РОЗДІЛ 4

### АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Пружні нанокompозити через їх унікальні механічні властивості належать до сучасних технологічних інноваційних матеріалів, які широко використовуються на практиці як відповідальні внутрішні та зовнішні покриття багатьох інженерних споруд та систем завдяки їх внеску в значне зміцнення за збереження легкості відповідальних об'єктів. Подібні структури широко використовуються в техніці на самих різних масштабних рівнях: від багатошарової броні до тонких покриттів в оптиці і мікроелектроніці. Все актуальнішими стають проблеми адекватного опису механічної поведінки покриттів і проміжних шарів, в тому числі багатошарових, в зв'язку зі зменшенням розмірів використовуваних пристроїв, в першу чергу мікроелектронних і мікромеханічних. Тому розробка нових методів для ефективного вивчення властивостей нанокompозитів у всьому різноманітті надзвичайно актуальна, беручи до уваги високу контрастність компонентів матеріалів в таких структурах, своєрідні розподіл частинок та властивості інтерфейсів, форми та структури нановключень і нановолокон.

У даній роботі теоретично обґрунтовані та пристосовані для числової реалізації моделі тривимірних композитів, базовані на модифікованих співвідношеннях методів граничних та скінченних елементів для локального і цілісного опису та аналізу статичної поведінки тривимірних пружних нанокompозитів типу «матриця-наногранула» та «матриця-нановолокно».

Для створення комп'ютерної технології введено такі класи при об'єктно-орієнтованому програмуванні: клас включень, клас репрезентативних об'ємів, клас граничних умов.

Клас включень містить тіла обертання у вигляді кулі, циліндра зі закругленими торцями, сферичні та циліндричні оболонки обертання.

Клас репрезентативних об'ємів як підкласи містить клас включень та клас матриць. Як матриці обираються циліндри, шестигранні призми,

паралелепіеди. До класу репрезентативних об'ємів належать також мультиплікативні об'єми, що містять впорядковану систему включень.

Клас граничних умов, що виконуються на границі матриці та неоднорідності, містить класичні умови повного контакту та умови Гертена-Мердока.

Дослідження напружено-деформованого стану композитів з поодинокими включеннями або неоднорідностями проведені з використанням гранично-елементного та скінченно-елементного формулювань тривимірних статичних задач. Відмітимо, що важливою рисою гранично-елементної моделі є зменшення на одиницю розмірності розв'язуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь шляхом застосування умов неперервності переміщень з боку матриці та включення в граничних сингулярних інтегральних рівняннях. Повнота системи отриманих інтегральних рівнянь досягається розглядом заданого диференціального зв'язку між компонентами переміщень і стрибків напружень на нанорозмірній поверхні поділу матеріалів. Якщо оберемо нульові пружні характеристики нановключення, то здобудемо систему базових інтегральних і диференціальних співвідношень на поверхні нанопори в об'ємному репрезентативному елементі за умови статичного навантаження.

Скінченно- й гранично-елементні формулювання задачі отримані із застосуванням умов ідеального контакту на нанорозмірних поверхнях інтерфейсу.

З метою застосування розрахункових моделей ізольованих включень до подальшого обчислювального експерименту в 3D області застосовані деякі методи регуляризації граничних інтегральних рівнянь, що мають сингулярності різного типу у ядрах, які породжуються фундаментальними розв'язками відповідних статичних задач класичної механіки суцільного середовища. В рівняннях дискретної моделі проведено адитивне виділення сингулярностей у явному вигляді.

Побудовані спеціальні інтегральні зображення розв'язків аксіально-симетричних задач теорії пружності, що дають змогу виконувати як класичні,

так і узагальнені умови спряження на нанорозмірних поверхнях інтерфейсу з подальшим проведенням числового аналізу осереднених характеристик тривимірних нанокompозитів з ізольованим нановключенням, що має вигляд тіла обертання. Зауважимо, що неklasичні контактні умовами Гертіна-Мердока, з точки зору механіки розглядають поверхню інтерфейсу між матрицею і включенням властивостями як надтонку мембрану з поверхневим натягом, а з точки зору математики - потребують неперервності векторів переміщень при перетині поверхні інтерфейсу.

Двовимірні поверхневі сингулярні рівняння теорії пружності зведено до одновимірних, якщо розрахункова область є поверхнею обертання. При цьому з точки зору об'єктно-орієнтованого програмування маємо тут клас «пружне тіло», головною характеристикою якого є модулі Ламе, які фігурують в фундаментальних розв'язках статичних задач класичної континуальної механіки. Це дозволило запропонувати однакову процедуру для визначення осереднених характеристик, як для опису матриці, так і для нановключення.

Спочатку розглядається випадок розтягування репрезентативного об'єму вздовж лише однієї з координатних осей. Для точок, що належать матриці та включенню побудовано дві відповідних системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зусилля на поверхні інтерфейсу отримуються з кожної з цих систем як функції переміщень. Перевага підходу полягає в можливості застосовувати як класичні, так і неklasичні умови контакту (умови Гертіна-Мердока) на поверхні взаємодії. Стосовно доповнюючих диференціальних співвідношень між переміщеннями і стрибками напружень на поверхні інтерфейсу треба зауважити, що для їх дискретизації на введений сітці гранично-елементних вузлів можна задіяти скінченно-різницеві шаблони апроксимації просторових похідних першого і другого порядків, записаних у декартовій, сферичній і циліндричній системах координат для можливості розгляду нановключень різної геометричної конфігурації.

Для побудови ефективних алгоритмів числового дослідження отриманих одновимірних систем сингулярних інтегральних рівнянь проаналізовано

сингулярності в отриманих інтегральних операторах. Встановлено, що сингулярні ядра операторів осесиметричної задачі теорії пружності містять два основні типи особливостей: логарифмічну та особливість типу Коші. Встановлено, що всі компоненти ядер сингулярних операторів можна звести до гармонічних потенціалів простого та подвійного шару. У випадку поверхні обертання ці оператори зведені до виду, що містить еліптичні інтеграли I та II роду. Проаналізовано методи використання допоміжної поверхні інтерфейсу, а саме: зведення до одновимірних несингулярних інтегралів шляхом (при адитивному виділенні особливості) та метод анулювання ядра зі застосуванням допоміжного асимптотичного ядра. Для обчислення виразів з еліптичними інтегралами другого роду використано метод Гауса із застосуванням середнього арифметико-геометричне значення. Інтеграл з логарифмічною сингулярністю обчислюються за допомогою спеціальних квадратурних формул, точних для поліномів заданого степеню.

Числову симуляцію в МГЕ здійснюємо шляхом застосування для інтерполяції функцій форми другого порядку. При цьому апроксимація невідомих відбувається інтерполяційними многочленами. Використовується метод колокацій, коли виконання граничних інтегральних рівнянь здійснюється точно у вузлах сітки граничних елементів. Генерація дискретних аналогів рівнянь у вигляді систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що базується на цих процедурах, дає добре обумовлену матрицю завдяки домінуванню в ній діагональних коефіцієнтів. При цьому суміщення тих вузлів сітки, що належать сусіднім граничним елементам, забезпечено алгоритмом автоматичної переорієнтації одиничних дотичних векторів у цих вузлах у залежності від їх локального номера в кожному граничному елементі. Коефіцієнти присутньої у формулах матриці впливу задаються розв'язками задач розтягу та зсуву репрезентативного елемента з поодиноким нановключенням, де явно враховано наявність стрибків напружень на поверхнях інтерфейсу.

Відзначимо, що в описану вище схему треба залучати лише граничні значення зусиль з боку матриці та включення на поверхні розділу, що й є розрахунковими функціями у наведених гранично-інтегральних формулюваннях безпосередньо.

Таким чином, запропоновано гранично-інтегральну модель в аксіально-симетричному формулюванні для тривимірних задач статки нанокомпозитів. Застосовано круговий циліндру та циліндричну оболонку із закругленими краями як матрицю та включення, відповідно. 3D задачу зведено до розв'язання одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих та напружень та переміщень на поверхні розподілу. Зроблено наголос на аналогію із задачами теорії потенціалу для заповнених рідиною оболонок обертання при використанні мульті-доменного методу. Це дозволяє застосовувати тестові задачі з відомими розв'язками з теорії потенціалу для верифікації числових розв'язків одновимірних систем сингулярних інтегральних рівнянь теорії пружності.

Основою для побудови алгоритмів числового розв'язання граничних інтегральних рівнянь аксіально-симетричних задач теорії пружності розроблено є редукований методу граничних елементів. Після з'ясування характеру особливостей інтегральних операторів розроблені алгоритми обчислення інтегралів з особливістю типу Коші. Здійснено тестування побудованих алгоритмів шляхом порівняння з відомими аналітичними та числовими результатами. Розроблений алгоритм розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь в аксіально-симетричному формулюванні є розрахунковою базою для визначення осереднених пружних модулів тривимірного композиту.

#### **4.1 Інтегральне рівняння рівноваги ізотропних пружних тіл**

Як ми знаємо з теорії пружності, рівняння рівноваги виглядає наступним чином

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (4.1.1)$$

$\vec{u}$  – вектор деформації,  $\lambda$  та  $\mu$  – коефіцієнти Ламе.

Граничні умови до цього рівняння задаються через вектор поверхневих сил, що діють на одиницю площини тіла

$$p_i = \sigma_{ik} n_k. \quad (4.1.2)$$

де  $\sigma_{ik}$  – тензор напруженості,  $n_k$  – вектор нормалі.

Тензор напруженості пов'язаний з тензором деформації лінійно, цей зв'язок і називається закон Гука

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll} \delta_{ik}. \quad (4.1.3)$$

Тензор деформації виражається через вектор деформації наступним чином

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (4.1.4)$$

Коефіцієнти Ламе пов'язані із коефіцієнтом Пуассона та модулем зсуву наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mu &= G, \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\sigma}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

де  $G$  – модуль зсуву,  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона.

Представимо рівняння рівноваги у термінах коефіцієнта Пуассона на модуля зсуву

$$G\Delta\vec{u} + \left( G + \frac{2G\sigma}{1-2\sigma} \right) \operatorname{div} \nabla\vec{u} = 0. \quad (4.1.6)$$

Скоротимо отримане рівняння на модуль зсуву і маємо

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{div} \nabla\vec{u} = 0. \quad (4.1.7)$$

Для застосування переваг методу, що був запропонований у минулих розділах, необхідно побудувати інтегральне рівняння рівноваги. Для цього традиційно введемо функцію Гріна рівняння рівноваги твердих тіл

$$\Delta \vec{u}^* + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \vec{u}^* = -\frac{2(1+\sigma)}{E} \vec{F} \delta(\vec{\xi} - \vec{r}). \quad (4.1.8)$$

Тут  $E$  – модуль Юнга.

Помножимо рівняння рівноваги на функцію Гріна та виконаємо стандартні диференціальні процедури

$$\mu u_i^* \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (4.1.9)$$

Застосуємо формулу похідної добутку

$$\begin{aligned} u_i^* \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \right) + u_i \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_k^2}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Окремо розпишемо наступний член рівняння

$$\begin{aligned} u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) + u_k \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_k \partial x_i}. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Отримані у рівняннях (4.1.10) та (4.1.11) підставимо у рівняння (4.1.9)

$$\begin{aligned}
\mu u_i^* \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_k} &= \\
&= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \right) \right] + \\
&+ (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) \right] + \\
&+ u_i \left[ \lambda \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k^*}{\partial x_k \partial x_i} \right].
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Застосуємо (4.1.8) до (4.1.12)

$$\begin{aligned}
\mu u_i^* \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_k} &= \\
&= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \right) \right] + \\
&+ (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) \right] - u_i F_i \delta(\xi_i - x_i).
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Розпишемо граничну умову (4.1.2) у термінах вектору деформації

$$p_i = \sigma_{ik} n_k = (2\mu u_{ik} + \lambda u_{ll} \delta_{ik}) n_k = \mu n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \mu n_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{4.1.14}$$

Перерозподілимо доданки у рівнянні (4.1.13)



$$\begin{aligned}
& \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} \right) \right] + \\
& + (\lambda + \mu) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) \right] = \\
& = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + u_i \mu \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right) - \quad (4.1.15) \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \mu \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_k \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Виконаємо наступні дії

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i^* \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k^* \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + u_i \mu \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} + u_k \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) + \quad (4.1.16) \\
& + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( u_i \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} - u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right).
\end{aligned}$$

Вираз у других дужках дорівнює нулю

$$\begin{aligned}
& u_i \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} - u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_k^*) - u_k^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} - u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k^* \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_k^*) - u_k \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} - u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_k^*) - \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_k^*) + u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - u_i^* \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0. \quad (4.1.17)
\end{aligned}$$

Враховуючи (4.1.15)-(4.1.17), отримуємо

$$\begin{aligned}
u_i^* \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_k^* \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= u_i^* \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i^* \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + u_i^* \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} = \\
&= u_i^* \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) = u_i^* (2\mu u_{ik} + \lambda \delta_{ik} u_{ll}) = \\
&= \sigma_{ik} u_i^*.
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Тензор напружень Гріна визначається наступним чином

$$u_i \mu \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + u_i \mu \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} + u_k \lambda \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \sigma_{ik}^* u_i. \tag{4.1.19}$$

Отже, рівняння (4.1.18) перетворюється на

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} u_i^* - \sigma_{ik}^* u_i) - u_i F_i \delta(\xi_i - x_i) = 0. \tag{4.1.20}$$

Проінтегруємо отримане рівняння за всім об'ємом тіла

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} u_i^* - \sigma_{ik}^* u_i) dV(x_i) = \int_V u_i F_i \delta(\xi_i - x_i) dV(x_i). \tag{4.1.21}$$

Скористаємося формулою Гауса-Остроградського

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} u_i^* - \sigma_{ik}^* u_i) dV(x_i) &= \oint_S (\sigma_{ik} u_i^* - \sigma_{ik}^* u_i) n_k dS(x_i) = \\
&= \oint_S (p_i u_i^* - p_i^* u_i) dS(x_i).
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Інтегральне рівняння стає наступним

$$\oint_S (p_i u_i^* - p_i^* u_i) dS(x_i) = C_{ik}(\xi_i) u_k(\xi_i) F_i. \tag{4.1.23}$$

Отримане рівняння залежить від зовнішньої сили  $\vec{F}$  у правій частині рівняння рівноваги. Щоб позбутися цієї залежності, перейдемо від функції Гріна до матриці Гріна

$$\begin{aligned} u_k^* &= G_{ik}^* F_i, \\ p_k^* &= p_{ik}^* F_i. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Застосуємо (4.1.24) у (4.1.23)

$$C_{ik}(\vec{\xi}_i) u_k(\vec{\xi}) + \oint_S p_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_S G_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) p_k(\vec{r}) dS(\vec{r}). \quad (4.1.25)$$

Введений нами матричний коефіцієнт визначається наступним чином

$$C_{ik}(\vec{\xi}_i) u_k(\vec{\xi}) = \int_V u_i(\vec{r}) \delta(\vec{\xi} - \vec{r}) dV(\vec{r}). \quad (4.1.26)$$

Таким чином, ми отримали інтегральний вид рівняння рівноваги в теорії пружності. Це рівняння досить схоже на інтегральне рівняння теорії потенціалу, однак на відміну від нього воно є векторним, а не скалярним, та тут використовуються матриці Гріна на відміну від звичайних відомих нам функцій Гріна.

## 4.2. Матриця Гріна рівняння рівноваги

Знайдемо матрицю Гріна рівняння рівноваги. Для цього необхідно знайти розв'язок наступного рівняння.

$$\mu \Delta \vec{u}^* + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}^* = -\vec{F} \delta(\vec{r}). \quad (4.2.1)$$

Будемо шукати цей розв'язок у вигляді наступної суми

$$\vec{u}^* = \vec{u}_0^* + \vec{u}_1^*. \quad (4.2.2)$$

де  $\vec{u}_0$  задовольняє векторному рівнянню Пуассона

$$\mu\Delta\vec{u}_0^* = -\vec{F}\delta(\vec{r}). \quad (4.2.3)$$

Для  $\vec{u}_1^*$  отримуємо наступну умову

$$\mu\Delta\vec{u}_1^* + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u}_1^* = -(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u}_0^*. \quad (4.2.4)$$

Як ми знаємо з торії потенціалу

$$\vec{u}_0^* = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\vec{F}}{r}. \quad (4.2.5)$$

Візьмемо ротор від рівняння вище

$$\Delta \operatorname{rot} \vec{u}_1^* = 0. \quad (4.2.6)$$

На нескінченності має виконуватися умова  $\operatorname{rot} \vec{u}_1^* = 0$ , однак функція, що обертається в нуль на нескінченності та всюди гармонічна, є нульовою функцією. Тому маємо наступну умову

$$\operatorname{rot} \vec{u}_1^* = 0. \quad (4.2.7)$$

Будемо шукати  $\vec{u}_1^*$  у вигляді градієнта певної функції

$$\vec{u}_1^* = \nabla\varphi. \quad (4.2.8)$$

Підставимо цей розв'язок у такий спосіб

$$\begin{aligned} \mu\Delta\nabla\varphi + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \nabla\varphi &= -(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u}_0^*, \\ \nabla(\mu\Delta\varphi + (\lambda + \mu)\Delta\varphi + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \vec{u}_0^*) &= 0, \\ \nabla((\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \vec{u}_0^*) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Вираз у дужках є константою, що має перетворюватися на нуль на нескінченності

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \vec{u}_0^* = 0, \quad (4.2.10)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{div} \vec{u}_0^*.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u}_0^* &= \operatorname{div} \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\vec{F}}{r} = \frac{1}{4\pi\mu} \operatorname{div} \frac{\vec{F}}{r}, \\ \operatorname{div} \frac{\vec{F}}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{F_k}{r} \right) = F_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} = -F_k \frac{x_k}{r^3} = -\frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r^3}, \\ \operatorname{div} \vec{u}_0^* &= -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Підставимо отримані вирази у рівняння (4.2.8)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \vec{F} \nabla \frac{1}{r}. \quad (4.2.12)$$

Шукаємо  $\varphi$  у вигляді

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \vec{F} \nabla \psi. \quad (4.2.13)$$

Де

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}. \quad (4.2.14)$$

Тоді

$$\psi = \frac{r}{2}. \quad (4.2.15)$$

Лапласіан цієї функції

$$\Delta\psi = \Delta \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \Delta r = \frac{1}{2} \operatorname{div} \nabla r = \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{r} = \frac{1}{2} \frac{3r - r}{r^2} = \frac{1}{r}. \quad (4.2.16)$$

Підставимо це у (4.2.14)

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \vec{F} \nabla \frac{r}{2} = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r}. \quad (4.2.17)$$

Обчислюємо  $\vec{u}_1^*$

$$\vec{u}_1^* = \nabla \varphi = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \nabla \frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r}. \quad (4.2.18)$$

Окремо знайдемо

$$\nabla \frac{(\vec{F}, \vec{r})}{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{F_k x_k}{r} = \frac{F_k \delta_{ik} r - F_k x_k \frac{x_i}{r}}{r^2} = \frac{F_i r^2 - F_k x_k x_i}{r^3}. \quad (4.2.19)$$

Маємо

$$\vec{u}_1^* = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{F}}{r^3}. \quad (4.2.20)$$

Тоді загальна функція Гріна буде представлена у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{u}^* &= \vec{u}_0^* + \vec{u}_1^* = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\vec{F}}{r} + \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{F}}{r^3} = \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[ 2 \frac{\vec{F}}{r} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{F}}{r^3} \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r^3} \left[ 2\vec{F}r^2 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left( (\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{F} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Спростивши вираз у дужках, отримуємо

$$\begin{aligned}
\vec{u}^* &= \vec{u}_0^* + \vec{u}_1^* = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r^3} \left[ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} + \left( 2 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \vec{F} r^2 \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r^3} \left[ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \vec{F} r^2 \right] = \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^3} [(\lambda + \mu)(\vec{F}, \vec{r}) \vec{r} + (\lambda + 3\mu) \vec{F} r^2].
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Отримаємо вираз для матриці Гріна

$$G_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{r^3} \frac{1}{\lambda + 2\mu} [(\lambda + \mu)x_i x_k + (\lambda + 3\mu)\delta_{ik} r^2]. \tag{4.2.23}$$

Знайдемо решту виразів. Тензор деформації Гріна

$$\begin{aligned}
u_{ik}^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right), \\
\frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (G_{im}^* F_m) = F_m \frac{\partial G_{im}^*}{\partial x_k}, \\
u_{ik}^* &= \frac{1}{2} \left( F_m \frac{\partial G_{im}^*}{\partial x_k} + F_m \frac{\partial G_{km}^*}{\partial x_i} \right).
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

Тензор напружень Гріна

$$\sigma_{ik}^* = 2\mu u_{ik}^* + \lambda \delta_{ik} u_{ll}^* = \mu F_m \frac{\partial G_{im}^*}{\partial x_k} + \mu F_m \frac{\partial G_{km}^*}{\partial x_i} + \lambda \delta_{ik} F_m \frac{\partial G_{lm}^*}{\partial x_l}. \tag{4.2.25}$$

Вектор поверхневих сил Гріна

$$\begin{aligned}
p_i^* &= \sigma_{ik}^* n_k = \left( \mu F_m \frac{\partial G_{im}^*}{\partial x_k} + \mu F_m \frac{\partial G_{km}^*}{\partial x_i} + \lambda \delta_{ik} F_m \frac{\partial G_{lm}^*}{\partial x_l} \right) n_k = \\
&= \mu F_m n_k \frac{\partial G_{im}^*}{\partial x_k} + \mu F_m n_k \frac{\partial G_{km}^*}{\partial x_i} + \lambda n_i F_m \frac{\partial G_{lm}^*}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Тензор поверхневих сил знаходимо з

$$p_i^* = p_{ik}^* F_k = \left( \mu n_m \frac{\partial G_{ik}^*}{\partial x_m} + \mu n_m \frac{\partial G_{mk}^*}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial G_{lk}^*}{\partial x_l} \right) F_k. \quad (4.2.27)$$

І маємо

$$p_{ik}^* = \mu n_m \frac{\partial G_{ik}^*}{\partial x_m} + \mu n_m \frac{\partial G_{mk}^*}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial G_{lk}^*}{\partial x_l}. \quad (4.2..28)$$

Перейдемо до аксіально-симетричного випадку.

### 4.3. Аксіально-симетрична матриця Гріна

Для отримання виразів аксіально-симетричної матриці Гріна необхідно зробити відповідне перетворення, відоме нам за задачами теорії потенціалу, у інтегральному рівнянні. Нагадаємо, що невідомі деформації та поверхневі сили вважаються аксіально-симетричними

$$C_{ik}(\vec{\xi}) u_k(\vec{\xi}) + \oint_S p_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_S G_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) p_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) \quad (4.3.1)$$

Як і в задачах теорії потенціалу, розділимо поверхневий інтеграл на контурний та кутовий за змінною  $\alpha$

$$\begin{aligned} \oint_S G_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) p_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) &= \oint_S G_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) T_{mk}(\vec{r}) p_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \\ &= \oint_{\Gamma} p_k(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} G_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) T_{mk}(\vec{r}) d\alpha \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Введемо, за аналогією з теорією потенціалу, матричні функції з позначкою тильда, тобто проінтегровані за кутом

$$\int_0^{2\pi} G_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) T_{mk}(\vec{r}) d\alpha = \tilde{G}_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \quad (4.3.3)$$



$$\int_0^{2\pi} p_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) T_{mk}(\vec{r}) d\alpha = \tilde{p}_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r})$$

З новими позначеннями зв'язок між поверхневими інтегралами та контурними буде наступним

$$\oint_S G_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) p_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \tilde{G}_{im}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) p_k(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r}) \quad (4.3.4)$$

$$\oint_S p_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_k(\vec{r}) dS(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \tilde{p}_{ik}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) u_k(\vec{r}) \rho d\Gamma(\vec{r})$$

Відповідно до особливостей аксіально-симетричних проблем доцільно трансформувати декартову систему координат  $(x, y, z)$  до циліндричної  $(\rho, \theta, z)$  за допомогою співвідношень:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta; \quad z = z \quad (4.3.5)$$

Ядра інтегральних операторів  $\tilde{G}_{im}^*$  і  $\tilde{p}_{ik}^*$  можуть бути зображені за допомогою повних еліптичних інтегралів. Основна процедура полягає в тому, щоб почати з стандартних інтегральних рівнянь методу граничних елементів, замінити декартові координати циліндричними, і провести інтегрування за змінною  $\theta$ , приймаючи до уваги, що

$$P = (\rho, \theta, z); \quad P_0 = (\rho_0, \theta_0, z_0);$$

$$|P - P_0| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.3.6)$$

Нехай  $n_r, n_z$  компоненти зовнішньої одиничної нормалі до поверхні  $\sigma$  в  $\rho$  та  $z$  напрямках, та  $E(k), K(k)$  є повними еліптичними інтегралами

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi \quad (4.3.7)$$

Матричні інтегральні оператори аксіально-симетричної пружності можуть бути виражені в термінах повних еліптичних інтегралів таким чином

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\sigma, \sigma) &= \mathbf{C} + \{T_{ij}(P, P_0)\}, \quad \mathbf{B}(\sigma, \sigma) = \{U_{ij}(P, P_0)\}, \quad i, j = \rho, z \\ T_{ij}(P, P_0) &= T_{ij}^1 E(k) + T_{ij}^2 K(k), \quad U_{ij}(P, P_0) = U_{ij}^1 E(k) + U_{ij}^2 K(k) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

У ядрах для переміщень тут присутні слабкі особливості. Ці ядра можна записати таким чином [54]:

$$\begin{aligned} U_{11}^1 &= \frac{-A}{\rho\rho_0\sqrt{c}} \left[ (3-4\nu)c + \hat{z}^2 \frac{a}{d} \right], \quad U_{11}^2 = \frac{A}{\rho\rho_0\sqrt{c}} \left[ (3-4\nu)a + \hat{z}^2 \right] \\ U_{12}^2 &= \frac{A\hat{z}}{\rho_0\sqrt{c}}, \dots, U_{12}^1 = -\frac{U_{12}^2 h}{d}, \quad U_{21}^2 = -\frac{A\hat{z}}{\rho\sqrt{c}}, \quad U_{21}^1 = \frac{U_{21}^2 f}{d}, \\ U_{22}^2 &= \frac{2A(3-4\nu)}{\sqrt{c}}, \quad U_{22}^1 = \frac{2A\hat{z}^2}{d\sqrt{c}}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$A = [16\pi^2 G(1-\nu)]^{-1}, \quad h = \rho^2 - \rho_0^2 + \hat{z}^2, \quad f = \rho_0^2 - \rho^2 + \hat{z}^2.$$

Аналогічно, ядра зусиль можна подати таким чином [54]

$$T_{ij}^k = 2G(T_{ij}^{kr} n_r + T_{ij}^{kz} n_z) \quad (4.3.10)$$

Тут

$$T_{ij}^k = 2G(T_{ij}^{kr} n_r + T_{ij}^{kz} n_z) \quad (4.3.11)$$

Компоненти матриці є наступними

$$\begin{aligned} T_{11}^{1r} &= \frac{A}{\rho_0\rho^2\sqrt{cd}} \left( 2\nu q + 3\rho^2 f + \left( 3m - \frac{2a^2 f}{cd} \right) \hat{z}^2 \right); \\ T_{11}^{1z} &= \frac{-A}{\rho_0\rho\sqrt{cd}} \left[ (2\nu-3)a + \left( \frac{4a^2}{cd} - 3 \right) \hat{z}^2 \right]; \\ T_{11}^{2r} &= \frac{A}{\rho_0\rho^2\sqrt{cd}} \left[ 2\nu m - \frac{3}{2}n + \frac{af\hat{z}^2}{cd} \right]; \quad T_{11}^{2z} = \frac{A\hat{z}}{\rho\rho_0\sqrt{c}} \left( 2\nu - 3 + \frac{a\hat{z}^2}{cd} \right); \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$q = \frac{3b^2}{2} + ar^2 - 2a^2; \quad m = 2a^2 - \rho_0^2; \quad n = 2\rho^2 + 3\hat{z}^2;$$

$$T_{12}^{1r} = T_{11}^{1z}; \quad T_{12}^{1z} = \frac{A}{\rho_0 \sqrt{c}} \left[ (2\nu - 1)h + \left( \frac{8f\rho_0^2}{cd} - 1 \right) \hat{z}^2 \right];$$

$$T_{12}^{2r} = T_{11}^{2z}; \quad T_{12}^{2z} = \frac{A\hat{z}}{\rho\rho_0 \sqrt{c}} \left( 2\nu - 1 + \frac{h\hat{z}^2}{cd} \right);$$

$$T_{21}^{1r} = \frac{A}{d\sqrt{c}} \left[ 4(1 + \nu) - \frac{a}{\rho^2} + \frac{8a\hat{z}^2}{cd} \right],$$

$$T_{21}^{1z} = \frac{A}{d\sqrt{c}} \left[ (1 - 2\nu)f + \left( \frac{4fa}{cd} - 3 \right) \hat{z}^2 \right], \quad T_{21}^{2r} = \frac{A\hat{z}}{\sqrt{c}} \left( \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{2\hat{z}^2}{cd} \right);$$

$$T_{21}^{2z} = \frac{A\hat{z}}{\rho_0 \sqrt{c}} \left( 2\nu - 1 - \frac{f\hat{z}^2}{cd} \right); \quad T_{22}^{1r} = T_{21}^{1z},$$

$$T_{22}^{1z} = \frac{2A\hat{z}}{d\sqrt{c}} \left( 1 - 2\nu + \frac{4a\hat{z}^2}{cd} \right), \quad T_{22}^{2r} = T_{21}^{2z}, \quad T_{22}^{2z} = \frac{2A\hat{z}^3}{\rho_0 \sqrt{c^3}}.$$

Компоненти  $U_{ij}^{1,2}$  і  $T_{ij}^2$  є регулярними функціями. В наведених вище компонентах наявна лише логарифмічна особливість внаслідок асимптотичного характеру  $K(k)$  при  $k \rightarrow 1$ . Спеціальне дослідження було проведено для обчислення інтегралів за допомогою ортогональних поліномів з логарифмічними вагами [41, 53].

Баласом в [55] було доведено, що компоненти  $T_{ij}^1$  містять доданки  $a_1 = [n_r(\rho - \rho_0) + n_z(z - z_0)]/d$ ,  $\forall i, j$  і  $a_2 = [n_z(\rho - \rho_0) - n_r(z - z_0)]/d$  для  $i \neq j$ . Оскільки в циліндричних координатах маємо

$$\rho = \rho(z), \quad n_z = -\rho' / \sqrt{1 + \rho'^2}, \quad n_r = 1 / \sqrt{1 + \rho'^2} \quad (4.3.13)$$

то при  $z \rightarrow z_0$  отримуємо, що  $a_1 \rightarrow 0$ , але

$$a_2 \rightarrow [(z - z_0)\sqrt{1 + \rho'^2}]^1 \quad (4.3.14)$$

Отже, компоненти  $T_{11}^1, T_{22}^1$  є регулярними функціями, в той час як компоненти  $T_{12}^1, T_{21}^1$  мають нескінченні розриви. Для їх числової симуляції застосовано метод, запропонований в [56].

Отже, отримані ключові співвідношення методу граничних елементів для дослідження аксіально-симетричного репрезентативного об'єму. Зауважимо, що система лінійних алгебраїчних рівнянь, що отримана шляхом застосування методу колокацій до розв'язання граничних інтегральних рівнянь, містить лише невідомі зусилля на поверхні інтерфейсу (поверхні неоднорідності). Цей підхід дозволяє різко зменшити розмір розв'язувальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Далі наведено приклад застосування гранично-елементної моделі тривимірного нанокompозиту. Метод граничних елементів застосовувався в аксіально-симетричному формулюванні.

#### 4.4. Числові результати

Ядра отриманих матриць Гріна мають схожий вигляд на ті, що були розглянуті в задачах теорії потенціалу: вони є суперпозицією повних еліптичних інтегралів I та II роду з деякими аксіально-симетричними функціями. Для перевірки запропонованого підходу було розв'язано задачі рівноваги теорії пружності.

Надалі розглянемо напружено-деформований стан пружного циліндра з неоднорідністю.

Розглянемо циліндр, закріплений на одному краї ( $z = 0,0$ ), рівномірно навантажений на іншому ( $z = 5,0$ ) і має включення у формі закругленого циліндра, рис.4.1.

Зовнішню межу матриці та її область позначимо відповідно  $S^M$  и  $\Omega^M$ . Зовнішню межу включення та його область позначимо як  $S^I$  та  $\Omega^I$ . Поверхня  $S^M = \partial\Omega^M$  є граничною поверхнею тіла, що включає межу включення  $S^I$ , рис. 4.1. Слід зазначити, що  $S^I = S_{int}$  є поверхнею інтерфейсу між двома середовищами.

Матеріал матриці  $\Omega^M$  задається модулем зсуву  $G^M$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu^M$  відповідно., тоді як матеріал включення  $\Omega^I$  характеризується механічними характеристиками  $G^I$  та  $\nu^I$ . Цей пружний циліндр з неоднорідністю розглядатиметься надалі як репрезентативний об'ємний елемент (РОЕ) для вивчення механічних властивостей композитів та нанокompозитів.

Рівняння еластостатики для матриці та включення мають такий вигляд:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^D = 0; \quad \boldsymbol{\sigma}^D = 2G^D \left[ \frac{\nu^D}{(1-2\nu^D) \text{tr}(\mathbf{e}^D) \mathbf{I}} + \mathbf{e}^D \right]; \quad 2\mathbf{e}^D =$$

$$\nabla \mathbf{u}^D + (\nabla \mathbf{u}^D); \quad \text{tr}(\mathbf{e}^D) = e_{ii}^D$$

де  $\mathbf{u}^D$  - вектор переміщення,  $G^D$  - модуль зсуву,  $\boldsymbol{\sigma}^D$  - тензор напружень,  $G^D = 0,5E^D / (1 + \nu^D)$  - тензор нескінченно малих деформацій. Тут і далі  $D = M, I$ . Співвідношення між зусиллями на поверхні тіла та його переміщеннями задається тотожністю Сомільяни таким чином:

$$\mathbf{C}\mathbf{u}^D = \iint_{S^D} \mathbf{U}^D(P, P_0) \mathbf{t}^D(P) dS^D - \iint_{S^D} \mathbf{T}^D(P, P_0) \mathbf{u}^D(P) dS^D$$

де точки  $P_0$  та  $P$  є точкою колокації та точкою на поверхні,  $\mathbf{C}^D$  є матрицею із сталих, що залежить від позиції точки  $P_0$  на поверхні  $S^D$ ,  $\mathbf{U}^D(P, P_0) = \{U_{ij}^D\}$  та  $\mathbf{T}^D(P, P_0) = \{T_{ij}^D\}$  є фундаментальними розв'язками Кельвіна

$$U_{ij}^D(P, P_0) = \frac{1}{16\pi(1-\nu^D)G^D r} [(3 - 4\nu^D)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}],$$

$$T_{ij}^D(P, P_0) = \frac{1}{8\pi(1-\nu^D)r^2} \left\{ [(1 - 2\nu^D)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1 - 2\nu^D)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}.$$

Тут  $r = (r_i r_i)^{1/2}$ ,  $r_i = x_i(P) - x_i(P_0)$ ,  $r_{,i} = \partial r / \partial x_i(P) = r_i / r$ .

Введемо матричні оператори таким чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^D(\sigma_1, \sigma_2) \mathbf{u}^D &= \iint_{\sigma_1} \mathbf{T}^D(P, P_0) \mathbf{u}^D(P) d\sigma_1, \quad \mathbf{B}^D(\sigma_1, \sigma_2) \mathbf{t}^D = \\ &= \iint_{\sigma_1} \mathbf{U}^D(P, P_0) \mathbf{t}^D(P) d\sigma_1, \quad P_0 \in \sigma_2 \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги, що

$$\mathbf{A}^D(\sigma_1, \sigma_1) \mathbf{u}^D = \mathbf{C}\mathbf{u}^D + \iint_{\sigma_1} \mathbf{T}^D(P, P_0) \mathbf{u}^D(P) d\sigma_1,$$

отримаємо базове співвідношення у вигляді

$$\mathbf{A}^D(\sigma, \sigma)\mathbf{u}^D = \mathbf{B}^D(\sigma, \sigma)\mathbf{t}^D.$$

Припустимо, що  $\partial\Omega^M = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ ; при цьому  $\Sigma_1$  є частиною  $\partial\Omega^M$  де задані переміщення, а  $\Sigma_2$  є частиною поверхні  $\partial\Omega^M$  де задані зусилля, та  $\Sigma_3 = S_{\text{int}} = \partial\Omega^I$  є поверхнею інтерфейсу.

Введення поверхонь  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , та  $\Sigma_3$  дає змогу визначити матричні оператори

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^M &= \mathbf{A}^M(\Sigma_i, \Sigma_j), \quad \mathbf{B}_{ij}^M = \mathbf{B}^M(\Sigma_i, \Sigma_j), \quad i, j = \overline{1,3}, \quad \mathbf{A}_{33}^I = \mathbf{A}^I(\Sigma_3, \Sigma_3), \\ \mathbf{B}_{33}^I &= \mathbf{B}^I(\Sigma_3, \Sigma_3). \end{aligned}$$

Позначимо як  $\mathbf{U}_i^M$  значення  $\mathbf{u}^M$  в вузлах поверхні  $\Sigma_i$ . Значення зусиль в цих же вузлах є  $\mathbf{T}_i^M (i=1,2,3)$ . Позначимо як  $\mathbf{U}_3^I$  та  $\mathbf{T}_3^I$  значення  $\mathbf{u}^I$  та  $\mathbf{t}^I$  в вузлах поверхні  $\Sigma_3$ . Таким чином, припускаємо, що вектори  $\mathbf{U}_1^M$  і  $\mathbf{T}_2^M$  є заданими. Далі отримуємо таку векторну систему чотирьох інтегральних рівнянь для визначення шості невідомих  $(\mathbf{T}_1^M, \mathbf{U}_2^M, \mathbf{U}_3^M, \mathbf{T}_3^M, \mathbf{U}_3^I, \mathbf{T}_3^I)$ :

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}_{i1}^M \mathbf{T}_1^M + \mathbf{A}_{i2}^M \mathbf{U}_2^M + \mathbf{A}_{i3}^M \mathbf{U}_3^M - \mathbf{B}_{i3}^M \mathbf{T}_3^M &= -\mathbf{A}_{i1}^M \mathbf{U}_1^M + \mathbf{B}_{i2}^M \mathbf{T}_2^M, \quad (4.4.1) \\ P_0 \in \Sigma_i \cap \Omega^M, \quad i &= 1,2,3; \\ \mathbf{A}_{33}^I \mathbf{U}_3^I - \mathbf{B}_{33}^I \mathbf{T}_3^I &= 0, \quad P_0 \in \Sigma_3 \cap \Omega^I. \end{aligned}$$

Як в класичних умовах, так і в умовах Гертіна-Мердока виконується умова неперервності переміщень на поверхні інтерфейсу  $S_{\text{int}}$

$$\mathbf{U}_3^M = \mathbf{U}_3^I. \quad (4.4.2)$$

Отримавши  $\mathbf{U}_3^I$  з четвертого рівняння в (4.69) та підставивши його в перші три рівняння в (4.69), маємо

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}_{i1}^M \mathbf{T}_1^M + \mathbf{A}_{i2}^M \mathbf{U}_2^M + \mathbf{C}_{i3} \mathbf{T}_3^I - \mathbf{B}_{i3}^M \mathbf{T}_3^M &= -\mathbf{A}_{i1}^M \mathbf{U}_1^M + \mathbf{B}_{i2}^M \mathbf{T}_2^M, \\ P_0 \in \Sigma_i \cap \Omega^M, \quad i &= 1,2,3 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

де  $\mathbf{C}_{i3} = \mathbf{A}_{i3}^M (\mathbf{A}_{33}^I)^{-1} \mathbf{B}_{33}^I$ . Отримавши  $\mathbf{T}_1^M$  і  $\mathbf{U}_2^M$  з рівнянь (4.71), приходимо до зв'язку між невідомими  $\mathbf{T}_3^M$  і  $\mathbf{T}_3^I$ :

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{T}_3^M + \mathbf{D}_2 \mathbf{T}_3^I = \mathbf{D}_3 \mathbf{U}_1^M + \mathbf{D}_4 \mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in S_{\text{int}}$$

У випадку ідеального контакту

$$\mathbf{T}_3^M = \mathbf{T}_3^I. \quad (4.4.4)$$

Таким чином, приходимо до такого фінального інтегрального рівняння

$$(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2)\mathbf{T}_i^I = \mathbf{D}_3\mathbf{U}_1^M + \mathbf{D}_4\mathbf{T}_2^M, \quad P_0 \in S_{int} \quad (4.4.5)$$

де невідомі  $\mathbf{T}_3^I$  відносяться лише до вузлів на поверхні інтерфейсу  $S_{int}$ .

Рівняння (4.70),(4.72) є умовами ідеального контакту.

Відношення висот циліндра і включення  $H_1/H_2 = 5$ , а відношення їх радіусів  $R_1/R_2 = 2$ , модулі пружності  $E_1=2,11 \cdot 10^6$  МПа,  $E_2=2,11 \cdot 10^7$  МПа, Пуассона коефіцієнти  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$ . Досліджено порушення напружено-деформованого стану в циліндрі, викликане наявністю цієї неоднорідності. Тут застосовано мульти-доменний підхід, а отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь містить невідомі переміщення лише вздовж поверхні розділу  $S_{int}$ , рис.4.1. Нехай тепер  $\Sigma_1$  і  $\Sigma_2$  — частини поверхні циліндра із заданими переміщеннями і зчепленнями відповідно,  $\Sigma_3 = S_{int} \cap \Sigma_1$  і  $\Sigma_4 = S_{int} \cap \Sigma_2$ . Систему (4.69) перепишемо для випадку заданих переміщень на краю пружного циліндра. А саме маємо

$$\begin{aligned} -B_{i1}Y_1 + A_{i2}X_2 + A_{i3}X_3 - B_{i3}Y_3 = B_{i2}Y_2, P_0 \in \Sigma_i, A_{43}X_3 + B_{43}Y_3 = 0, P_0 \in \\ \in \Sigma_4 \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Отже зв'язок між зусиллями та переміщеннями циліндра на поверхні розділу дорівнює  $Y_3 = -B_{43}^{-1}A_{43}X_3$ , і ми отримуємо остаточну систему рівнянь для пружного циліндра з включенням. Для числового моделювання використовуємо такі числа  $N_i$  одновимірних граничних елементів вздовж поверхонь  $\Sigma_i$  ( $i=1,2,3$ ) :  $N_1 = 150, N_2 = 30, N_3 = 240$ . На рис. 4.2 показано розподіли переміщень в пружному циліндрі вздовж поверхні розділу. На відміну від однорідного циліндра переміщення істотно нерівномірні.

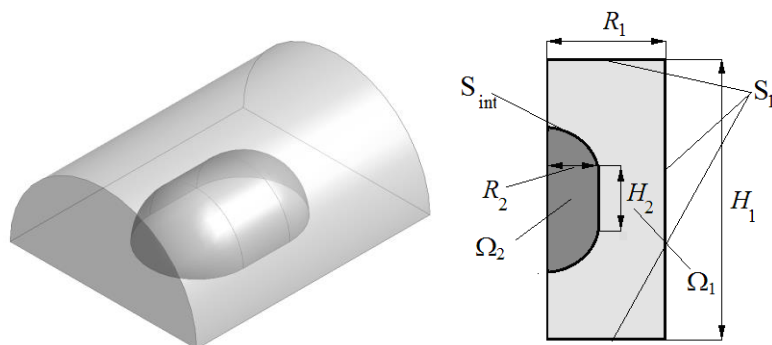


Рисунок 4.1: Пружний циліндр із включенням, його ескіз і підобласті

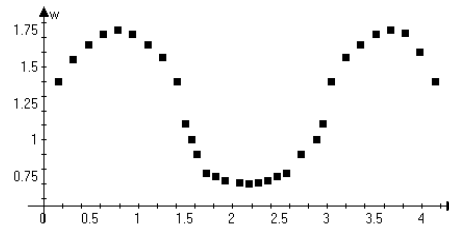


Рисунок 4.2: Переміщення поверхні розділу

Запропонований підхід дозволяє розробити математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитних і нанокompозитних матеріалів з врахуванням класичних та некласичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення.

#### 4.5. Врахування поверхневих ефектів.

Дослідження впливу розміру в наномасштабі проводиться за теорією Гуртіна-Мердока, яка описує нанорозмірний контакт між матрицею та включеннями. Це дає некласичні граничні умови на інтерфейсній поверхні  $S_{int}$ . Ця поверхня може бути досліджена як надтонка мембрана зі власними пружними характеристиками коефіцієнти Ламе  $\lambda^S$  і  $G^S$ , та заданий поверхневий натяг  $\tau_0$ . Її переміщення  $\mathbf{u}^S$ , деформації  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  та напруження  $\boldsymbol{\sigma}^S$  описуються співвідношеннями [60]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S \boldsymbol{\sigma}^S &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}^S = \\ &= \tau_0 \mathbf{I}_\tau + 2(G^S - \tau_0) \boldsymbol{\varepsilon}^S + (\lambda^S - \tau_0) (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^S) \mathbf{I}_\tau + \tau_0 \nabla_S \mathbf{u}^S \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Тут  $\mathbf{u}$  – вектор переміщень,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  і  $\boldsymbol{\sigma}$  тензори деформацій та напружень,  $\mathbf{f}$  – об’ємна сила,  $\nu$  та  $G = 0.5E / (1+\nu)$  коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву,  $E$  – модуль Юнга,  $e_{ii}$  – перший інваріант тензору деформацій.

Досліджувався циліндричний репрезентативний об’ємний елемент (РОЕ) з включенням у вигляді циліндра із закругленими торцями, рис. 4.1. Для числового моделювання обрано:  $E^I = 1000 \text{ GPa}$ ,  $E^M = 100, 20 \text{ GPa}$ ,  $\nu^I = \nu^M = 0.3$ ,



$H_1 = 100$  нм,  $H_2 = 40$  нм,  $R_1 = 10$  нм,  $R_2 = 50$  нм. Ці дані відповідають РОЕ з гексагональною основою  $a = 11$  нм, який досліджено у [61], з використанням МСЕ. Для оцінки поверхневих ефектів з неklasичними умовами в нашому числовому експерименті взято дані з [60]. А саме:  $\lambda^S = 3.48$ Н/м,  $G^S = -6.218$ Н/м,  $\tau_0 = 1,7$ Н/м. Надалі застосовано таку формулу оцінки ефективного пружного модуля  $E_z$  з роботи [61]:

$$E_z = (F \cdot H_1) / (\Delta H_1 \cdot S_b) \quad (4.5.2)$$

Тут  $F$  - осьове рівномірне навантаження,  $\Delta H_1$  - осьова деформація, отримана чисельно,  $S_b$  - площа основи репрезентативного об'єму. Порівняння результатів, отриманих МСЕ (шестикутний РОЕ) та методу граничних елементів (циліндричний РОЕ), наведено в Таблиці 4.1.

Таблиця 4.1.

#### Порівняння результатів для ефективних пружних модулів

$E^I/E^M$	$E_z/E^M$		
	МСЕ, [61]	МГЕ, ідеальний контакт	МГЕ, умови Гертіна-Мердока
10	1.0469	1.0524	1.1246
80	1.1971	1.2017	1.3091

Ці результати підтверджують ефективність як підходу МСЕ, так і МГЕ у випадку ідеальних умов контакту для репрезентативних об'ємів з поодиноким включенням. Вплив поверхневого ефекту збільшує ефективний пружний модуль  $E_z$  приблизно на 10%.

Як класичні, так і неklasичні граничні умови можна задавати на поверхні інтерфейсу. При використанні неklasичних умов поверхня інтерфейсу розглядається як надтонка мембрана із заданими властивостями матеріалу. Зусилля на цій поверхні визначаються за допомогою узагальнених рівнянь

Лапласа-Юнга. Відмінними рисами цих неklasичних граничних умов є врахування кривини поверхні та поверхневого натягу на поверхні інтерфейсу.

#### **Висновки за розділом 4**

Здійснено узагальнення розроблених вище підходів та алгоритмів для вивчення крайових задач лінійної теорії пружності. Хоча рівняння теорії потенціалу мають простіший вигляд у порівнянні з рівняннями теорії пружності, але існує велика кількість спільних рис, що дозволяє узагальнити запропоновані підходи. Так, існує просторовий аналог третьої тотожності Гріна, що дозволяє побудувати відповідне інтегральне зображення – це тотожність Соміліани. За допомогою цієї формули вдається звести тривимірні крайові задачі до двовимірних.

Далі, інтегрування за окружною координатою дозволяє звести отримані сингулярні інтегральні рівняння до одновимірних, при чому сингулярності в обох випадках ( в теорії потенціалу та в теорії пружності) є подібними. Це дає змогу використовувати розроблений вище підхід до обчислення цих сингулярних інтегралів за допомогою введених спеціальних функцій нового класу.

Використання багатодоменого підходу (методу суперелементів) дозволяє розглядати крайові задачі для областей з різних матеріалів, з класичними та неklasичними умовами на поверхнях інтерфейсів, що використовується при дослідженні середніх ефективних пружних характеристик композитів та нанокompозитів з використанням концепції репрезентативного об'ємного елемента.

Побудовано замкнуті системи рівнянь статичних задач теорії пружності щодо пружних композитів із включеннями в тривимірному формулюванні. Побудовані моделі дозволяють здійснити числове дослідження та ефективне прогнозування механічних властивостей тривимірних матричних композитів з різними параметрами. Для опису ефектів на нанорівні прийняті як класичні граничні умови, так і мембранна модель Гуртіна-Мердока, що включає

поверхневий натяг і поверхневу жорсткість, з виникненням недосконалих умов контакту між матрицею та неоднорідностями.

## РОЗДІЛ 5

### АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНІ ПОВЕРХНЕВІ ГРАВІТАЦІЙНО-КАПЛЯРНІ ХВИЛІ, УТВОРЕНІ КОЛИВАННЯМ ОБМЕЖЕНОГО ОБ'ЄМУ РІДИНИ

Розглянемо обмежений об'єм ідеальної рідини. Під ідеальною рідиною будемо вважати таку, що позбавлена в'язкості і теплопровідності, а також процесів, пов'язаних із ними. У такої рідини відсутнє внутрішнє тертя між шарами рідини, тобто вона неперервна і не має структури. У ході дослідження ми будемо використовувати обидва відомі нам підходи для опису руху рідини у гідродинаміці: формалізм Лагранжа та формалізм Ейлера.

Під формалізмом Лагранжа ми маємо на увазі звичайний для загальної фізики узагальнений метод класичної механіки, коли спостереження ведеться за конкретною частинкою з координатою  $\vec{r}(t)$ . Зміна з часом координати тіла є його швидкістю  $\vec{v}(t)$ , зв'язок між якими задається звичним для нас диференціальним правилом

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (5.1)$$

Формалізм Ейлера представляє собою спостереження не за конкретною частинкою рідини, а за деяким її нескінченно малим об'ємом. У конкретній точці об'єму визначається швидкість руху частинки у конкретний момент часу  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Тобто у цьому випадку ми маємо справу не з переміщенням великої кількості частинок, а з деяким розподілом фізичного поля швидкості за об'ємом.

Для подальшої реалізації моделі ідеальної рідини необхідно ввести фізичні поля тиску  $P(\vec{r}, t)$  та маси. Масу будемо визначати через її густину  $\rho_l(\vec{r}, t)$  як масу одиниці об'єму.

Система рівнянь, що описує рух ідеальної рідини є системою рівнянь Ейлера. Вона складається з рівняння неперервності та рівняння руху, що теж

має назву рівняння Ейлера. Рівняння неперервності виражає собою закон збереження маси у диференціальній формі, тобто зміна кількості рідини у замкненому об'ємі має бути відповідною до кількості рідини, що пройшла через границі об'єму. Рівняння Ейлера представляє собою узагальнений вид другого закону Ньютона.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l \vec{v}) = 0, \\ \rho_l \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \vec{f}_{1V}. \end{cases} \quad (5.2)$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  – векторно-диференціальний оператор «набла»,  $\vec{f}_{1V}$  – поле об'ємної сили, що діє на одиницю об'єму рідини.

### 5.1 Поле сили тяжіння

Розглянемо випадок, коли рідина перебуває у полі постійної об'ємної гравітаційної сили, що визначається гравітаційним потенціалом  $\vec{g}$ . У такому випадку на одиницю об'єму буде діяти сила тяжіння, що виражається наступним чином

$$\vec{f}_{1V} = \rho_l \vec{g}. \quad (5.1.1)$$

Ця сила є потенціальною, її можна розписати наступним чином

$$\rho_l \vec{g} = \rho_l \nabla(\vec{g}, \vec{r}). \quad (5.1.2)$$

Перевіримо це твердження. Для цього необхідно розкрити вираз у дужках. Зробимо це за допомогою відомих нам правил тензорної алгебри

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g_k x_k) = g_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = g_k \delta_{ik} = g_i. \quad (5.1.3)$$

Розглянемо другий доданок у рівнянні Ейлера та виконаємо для нього потенціальне перетворення:

$$\nabla v^2 = \nabla(\vec{v}, \vec{v}) = 2(\vec{v}, \nabla)\vec{v} \Rightarrow (\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2. \quad (5.1.4)$$

Таким чином, за допомогою останнього перетворення рівняння Ейлера можна представити у наступному вигляді

$$\rho_l \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) = -\nabla P + \rho_l \nabla(\vec{g}, \vec{r}). \quad (5.1.5)$$

Останнє рівняння можна звести до чисто градієнтного вигляду у випадку потенціального наближення, про що й буде йти мова далі.

## 5.2 Потенціальний потік

Потенціальне наближення використовується для течій, у яких можна нехтувати вихровою складовою, тобто якщо казати математичною мовою, то ротор вектору швидкості має дорівнювати нулю

$$\text{rot } \vec{v} = 0. \quad (5.2.1)$$

У цьому випадку вектор швидкості може бути представлений у вигляді градієнта деякої скалярної функції, оскільки як нам відомо

$$\text{rot } \nabla f = 0. \quad (5.2.2)$$

Введемо потенціал потоку рідини  $\varphi(\vec{r}, t)$ . Тоді вектор швидкості виражається через нього за допомогою простого градієнтного перетворення

$$\vec{v} = \nabla \varphi. \quad (5.2.3)$$

Рівняння Ейлера у цьому випадку суттєво спрощується

$$\rho_l \left( \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) = -\nabla P + \rho_l \nabla(\vec{g}, \vec{r}). \quad (5.2.4)$$

Або

$$\nabla \left( \rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_l \frac{1}{2} v^2 + P - \rho_l (\vec{g}, \vec{r}) \right) = 0. \quad (5.2.5)$$

Таким чином, вираз у дужках не залежить від координати та може бути лише функцією часу

$$\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_l v^2}{2} + P - \rho_l (\vec{g}, \vec{r}) = C(t). \quad (5.2.6)$$

Функція часу, що справа, може бути включена як адитивний член до потенціалу. Дійсно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} - C(t), \\ C(t) &= \frac{dB}{dt}, \\ \varphi' &= \varphi - B(t), \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \nabla \varphi = \nabla \varphi' + \nabla B(t) = \nabla \varphi'. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Тобто часова функція не змінює фізичного сенсу вектору швидкості. Не будемо в подальшому використовувати позначку штриха для такої трансформації.

$$\rho_l \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho_l v^2}{2} + P - \rho_l (\vec{g}, \vec{r}) = 0. \quad (5.2.8)$$

Отримане рівняння має назву рівняння Бернуллі. В енергетичному сенсі воно описує рівновагу між тиском вздовж лінії току рідини.

### **5.3 Рівняння Бернуллі на вільній поверхні рідини. Поверхневий натяг**

Якщо спроектувати рівняння Бернуллі на поверхню рідини, то необхідно враховувати додатковий тиск, що створюється силами поверхневого натягу. У

загальному випадку цей додатковий тиск описується рівнянням Юнга-Лапласа. Різниця тиску між зовнішнім та внутрішнім шаром на границі розділу рідина-газ визначається наступним чином

$$P_L = -2\sigma H = -\sigma \operatorname{div} \vec{n}. \quad (5.3.1)$$

Тут  $P_L$  – Лапласів тиск, тобто саме різниця тиску між зовнішнім і внутрішнім шаром рідини,  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу рідини,  $H$  – середня кривизна поверхні,  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до вільної поверхні рідини. Додаючи Лапласів тиск до рівняння Бернуллі, отримуємо умову рівноваги тиску рідини на поверхні

$$\rho_l \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{S_0} + \left. \frac{\rho_l v^2}{2} \right|_{S_0} + P|_{S_0} - 2\sigma H - \rho_l (\vec{g}, \vec{r}) = 0. \quad (5.3.2)$$

Отримане рівняння є одним з фундаментальних в описі явища гравітаційно-капілярних хвиль.

#### 5.4 Середня кривизна аксіально-симетричної поверхні

Отримаємо формулу визначення середньої кривизни аксіально-симетричної поверхні. Аксіально-симетричним називається такий тип симетрії, при якому геометричні параметри поверхні не залежать від полярного кута  $\alpha$ . В такому випадку зручно перейти в циліндричні координати та задати вільну поверхню як функцію координати  $z$  від координати  $\rho$

$$z = \zeta(\rho, t). \quad (5.4.1)$$

Тепер визначимо вектор нормалі до поверхні. Профіль вільної поверхні у площині  $PZ$  буде виглядати як звична нам крива у декартових координатах. Для того, щоб визначити вектор нормалі, необхідно задати рівняння дотичної до даної кривої. Як ми знаємо з математичного аналізу, дотична до кривої задається через її похідну. Кутовий коефіцієнт дотичної визначається як



$$k = \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}. \quad (5.4.2)$$

Рівняння дотичної буде мати наступний вигляд

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} (\rho - \rho_0), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \rho - z - \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \rho_0 + z_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

З останнього рівняння знаходимо нормований вектор нормалі

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}, 1\right). \quad (5.4.4)$$

Пам'ятаємо, що нормаль до точки поверхні має два взаємнопротилежні напрямки, цим і пояснюється знак  $\pm$ .

Обчислимо середню кривизну поверхні через дивергенцію цього вектору

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{n} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) = \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} - \right. \\
&\quad \left. - \rho \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \right. \\
&\quad \left. + \rho \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} \right).
\end{aligned}$$

В аксіально-симетричному випадку рівняння Бернуллі стає наступним

$$\rho_l \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s_0} + \left. \frac{\rho_l v^2}{2} \right|_{s_0} + P|_{s_0} - \sigma \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) + \rho_l g \zeta = 0. \quad (5.4.5)$$

Або

$$\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{s_0} + \left. \frac{v^2}{2g} \right|_{s_0} + \frac{1}{\rho_l g} P|_{s_0} - \lambda_c^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right)^2}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) + \zeta = 0. \quad (5.4.6)$$

$\lambda_c^2 = \frac{\sigma}{\rho_l g}$  – капілярна довжина хвилі.

### 5.5 Кінематичне рівняння на вільній поверхні

Для отримання кінематичного рівняння на вільній поверхні необхідно отримати зв'язок між потенціалом ейлерової швидкості  $\varphi(\vec{r}, t)$  та функцією, що описує вільну поверхню рідини  $\zeta = \zeta(\rho, t)$ . Нехай  $\vec{r}_L(t)$  – лагранжева координата точки на вільній поверхні. Під лагранжевою координатою маємо на увазі координату конкретної точки рідини, за якою ведеться спостереження, тобто координати точки у відомій нам механічній моделі Ньютона. Тоді  $\vec{v}_L(t)$  – лагранжева швидкість даної точки; тобто швидкість частинки, що знаходиться в даній точці, частинки, за якою ведеться спостереження тощо. Перейдемо від лагранжевих координат до ейлерових, тобто будемо слідкувати не за кожною конкретною точкою та її поведінкою з часом, а за зміною швидкості в нескінченно малому об'ємі на вільній поверхні рідини.

Нагадаю, що у представлений моделі ми використовуємо циліндричні координати з наявною аксіальною симетрією. Лагранжева координата точки визначається як похідна за часом від радіус-вектору точки

$$\vec{v}_L(t) = \frac{d\vec{r}_L}{dt}. \quad (5.5.1)$$

На вільній поверхні координати радіус-вектор точки має вигляд  $\vec{r} = (\rho(t), \zeta(\rho(t), t))$ .

Спроекуємо лагранжеву швидкість на вісь z

$$v_z = \frac{d\zeta(\rho(t), t)}{dt}. \quad (5.5.2)$$

Так як сама координат  $\rho$  залежить явно від часу, то таку похідну необхідно обчислювати за правилами взяття повної, або, як її ще називають у гідродинаміці, субстанціональної похідної

$$v_z = \frac{d\zeta(\rho(t), t)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (5.5.3)$$

Тут  $\frac{d\rho}{dt}$  є компонентом швидкості за координатою  $\rho$ .

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}. \quad (5.5.4)$$

Перейдемо від вектору швидкості до потенціалу швидкості

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}. \quad (5.5.5)$$

Виразимо звідси похідну за часом від координати

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}. \quad (5.5.6)$$

Останній вираз можна представити у матричній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2} \begin{pmatrix} n_\rho & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \varphi = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)^2} (\vec{n}, \nabla) \varphi. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Це дозволяє у подальшому використати сучасні програмні засоби, що застосовують матричні обчислення.

### 5.6. Система рівнянь для потенціалу швидкості

У контексті потенціального руху рівняння неперервності приймає вигляд рівняння Лапласа

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0. \quad (5.6.1)$$

Повна система рівнянь для потенціалу буде складатися з рівняння неперервності (рівняння Лапласа), кінематичного рівняння (5.5.7) та рівняння Бернуллі (5.4.6).

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}, \\ \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \zeta - \lambda_c^2 \Delta \zeta = 0. \end{cases} \quad (5.6.2)$$

Ця система не є замкненою відносно потенціалу, тому спробуємо знайти замкнене рівняння. Для цього продиференціюємо рівняння Бернуллі за часом

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \lambda_c^2 \Delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (5.6.3)$$

Розглянемо окремо першу похідну

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (5.6.4)$$

Використаємо кінематичну умову

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial t} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)}. \quad (5.6.5)$$

Другий член у даному рівнянні, як бачимо, є нелінійним, тому він відноситься до малого другого порядку, яким можна знехтувати.

Отже, похідна за часом від рівняння Бернуллі має наступний вигляд

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2 \Delta_p \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0. \quad (5.6.6)$$

У рівнянні вище використано оператор  $\Delta_p$ , що є «плоским» лапласіаном. Це зумовлено тим, що функція  $\zeta = \zeta(\rho, t)$  є двовірною, а функція  $\varphi$  тривимірною. Цей оператор можна представити наступним чином

$$\Delta_p = \Delta - (\vec{e}_z (\vec{e}_z, \nabla), \nabla). \quad (5.6.7)$$

Отримана система для потенціалу вже є замкненою

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2 \Delta_p \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0. \end{cases} \quad (5.6.8)$$

Розв'язавши дану систему з конкретними граничними умовами для конкретної геометрії, можна знайти розподіл потенціалу швидкості.

### 5.7. Вільні аксіально-симетричні гравітаційно-капілярні хвилі

Розглянемо рідину, що знаходиться в гравітаційному полі та має плоску вільну поверхню. Нехай під дією зовнішніх сил вільна поверхня зазнає невеликих збурень, тобто точки вільної поверхні починають рухатися під дією зовнішньої постійної сили. Цей рух вільної поверхні буде описуватися та спостерігатися у вигляді хвиль, які називаються гравітаційно-капілярні хвилі.

Розповсюдження гравітаційно-капілярних хвиль розглядається у жорстких циліндричних резервуарах із аксіальною симетрією. На рис. 5.1 зображено профіль поверхні. Нехай  $S_1$  бокові стінки циліндричної поверхні, вільна поверхня позначена як  $S_0$ . Введемо декартову систему координат та розташуємо незбурену вільну поверхню на відстані  $z = h$ .

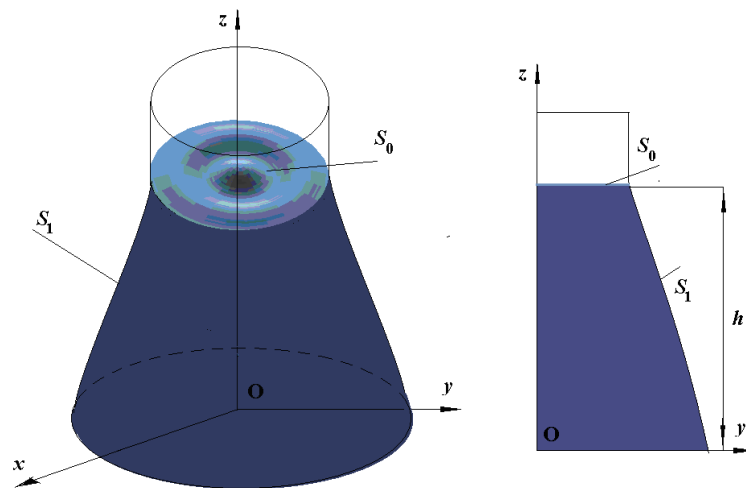


Рис. 5.1 Циліндричний резервуар із рідиною та його осьовий переріз

Спробуємо знайти потенціал швидкості з рівнянь для даної задачі.

### 5.8. Розкладання за гравітаційними стаціонарними станами

Окрім системи (5.6.8) у розглянуту задачу необхідно додати умову непротікання. Це означає, що нормальна компонента швидкості на поверхні  $S_1$  має дорівнювати нулю, а у контексті потенціалу це означає, що нормальна похідна потенціалу на бокових стінках резервуара буде дорівнювати нулю.

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \left. \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} - \lambda_c^2 \Delta_p \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0. \end{cases} \quad (5.8.1)$$

Друге рівняння містить поверхневий лапласіан від нормальної похідної потенціалу, тому відомими методами розв'язати цю задачу складно. Розділимо задачу на дві частини та спробуємо знайти стаціонарні стани чисто гравітаційної задачі. Знаючи гравітаційні стаціонарні стани, підставимо їх у загальне рівняння та із нього знайдемо гравітаційно-капілярні хвилі.

Розклад за гравітаційними стаціонарними станами означає, що ми представляємо потенціал швидкості у вигляді наступного ряду

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t}. \quad (5.8.2)$$

де  $\alpha_k$  – невідомі коефіцієнти,  $\omega_k$  – невідомі частоти гравітаційно-капілярної задачі,  $\psi_k^{(g)}$  – стаціонарні стани суто під дією гравітаційного поля, без урахування ефектів поверхневого натягу. Невідомі гравітаційні функції  $\{\psi_k^{(g)}(\vec{r})\}_{k=1}^{\infty}$  задовольняють наступній системі рівнянь

$$\begin{cases} \Delta\psi_k^{(g)} = 0, \\ \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \psi_k^{(g)}, \\ \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{S_1} = 0. \end{cases} \quad (5.8.3)$$

Друге рівняння системи отримуємо, якщо представимо гравітаційний потенціал у вигляді



$$\varphi_k^{(g)}(\vec{r}, t) = \psi_k^{(g)}(\vec{t}) e^{i\omega_k^{(g)} t}. \quad (5.8.4)$$

Підставимо цей потенціал у суто гравітаційне рівняння

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi_k^{(g)}}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\partial \varphi_k^{(g)}}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = 0. \quad (5.8.5)$$

Візьмемо похідну від рівняння (5.8.5) за часом

$$\frac{\partial \varphi_k^{(g)}(\vec{r}, t)}{\partial t} = i\omega_k^{(g)} \psi_k^{(g)}(\vec{t}) e^{i\omega_k^{(g)} t}. \quad (5.8.6)$$

Вираз для другої похідної наступний

$$\frac{\partial^2 \varphi_k^{(g)}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega_k^{(g)2} \psi_k^{(g)}(\vec{t}) e^{i\omega_k^{(g)} t}. \quad (5.8.7)$$

Нормальна похідна матиме вигляд

$$\frac{\partial \varphi_k^{(g)}}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} = \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} e^{i\omega_k^{(g)} t}. \quad (5.8.8)$$

Підставимо розкладання (5.8.2) у систему (5.8.3), враховуючи умови (5.8.7)-(5.8.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ -\frac{\omega_k^2}{g} \psi_k^{(g)} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \psi_k^{(g)} - \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \Delta_p \psi_k^{(g)} \Big|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} \right] e^{i\omega_k t} = 0. \quad (5.8.9)$$

Помножимо рівняння вище скалярно на іншу гравітаційну функцію  $\psi_l^{(g)}$ .

Отримаємо наступний вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ -\frac{\omega_k^2}{g} (\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} (\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) - \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} (\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) \right] e^{i\omega_k t} = 0. \quad (5.8.10)$$

Система стаціонарних функцій  $\{\psi_k^{(g)}(\vec{r})\}_{k=1}^{\infty}$  є ортогональною (що буде показано нижче на конкретному прикладі), тому

$$\begin{aligned} (\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) &= \delta_{lk} \|\psi_l^{(g)}\|^2, \\ \alpha_l \left[ -\frac{\omega_k^2}{g} \|\psi_l^{(g)}\|^2 + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \|\psi_l^{(g)}\|^2 \right] e^{i\omega_l t} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} (\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) e^{i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (5.8.11)$$

Розглянемо окремо поверхневий лапласіан. У циліндричних координатах він виглядає наступним чином

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \Delta_p \psi_k^{(g)} &= \Delta \psi_k^{(g)} - \frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (5.8.12)$$

Нагадаємо, що власні форми є гармонічними функціями  $\Delta \psi_k^{(g)} = 0$

$$\Delta_p \psi_k^{(g)} = -\frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2}. \quad (5.8.13)$$

Збурену вільну поверхню представимо у вигляді

$$\zeta(\rho, t) = h + \zeta^{(1)}(\rho, t). \quad (5.8.14)$$

Функція  $\zeta^{(1)}(\rho, t)$  є малою функцією першого порядку. Підставимо це у рівняння Бернуллі (5.8.1)

$$\zeta^{(1)}(\rho, t) - \lambda_c^2 \Delta \zeta^{(1)}(\rho, t) = -h - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5.8.15)$$

Як було сказано вище, ми розглядаємо функцію малою, а отже систему (5.8.3) можна розв'язувати на незбуреній поверхні  $\zeta(\rho, t) \approx h$ . Знаючи цей потенціал, можна знайти функцію збуреної поверхні із рівняння вище.

Повернемося до плоского лапсасіана. На незбуреній вільній поверхні вектор нормалі є постійним

$$\vec{n}|_{z=h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8.16)$$

Тому

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{\zeta=\zeta(\rho,t)} &\approx \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} \right|_{z=h}, \\ \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} \right|_{z=h} &= \frac{\omega_k^{(g)2}}{g}. \end{aligned} \quad (5.8.17)$$

Розглянемо тепер поверхневий лапсасіан

$$\Delta_p \psi_k^{(g)} = -\frac{\partial^2 \psi_k^{(g)}}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} \right) = -\frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} = -\frac{\omega_k^{(g)4}}{g^2} \psi_k^{(g)}. \quad (5.8.18)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} (\Delta_p \psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) e^{i\omega_k t} &= \\
 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_c^2 \frac{\omega_k^{(g)6}}{g^3} (\psi_k^{(g)}, \psi_l^{(g)}) e^{i\omega_k t} = \\
 &= -\alpha_l \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)6}}{g^3} \|\psi_l^{(g)}\|^2 e^{i\omega_l t},
 \end{aligned} \tag{5.8.19}$$

$$\alpha_l \left[ -\frac{\omega_k^2}{g} \|\psi_l^{(g)}\|^2 + \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \|\psi_l^{(g)}\|^2 \right] e^{i\omega_l t} = -\alpha_l \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)6}}{g^3} \|\psi_l^{(g)}\|^2 e^{i\omega_l t}.$$

Розділимо отриманий вираз на спільні множники та отримаємо вираз для обчислення гравітаційно-капілярних частот.

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \left[ 1 + \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)4}}{g^2} \right]. \tag{5.8.20}$$

Тобто, знаючи моди чисто гравітаційних збурень  $\omega_k^{(g)}$ , можна знайти моди гравітаційно-капілярних хвиль  $\omega_k$ .

$$\omega_k = \omega_k^{(g)} \sqrt{1 + \lambda_c^2 \frac{\omega_l^{(g)4}}{g^2}}. \tag{5.8.21}$$

Підставимо отримані результати у рівняння (5.8.19).

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t}, \tag{5.8.22}$$

$$\zeta^{(1)}(\rho, t) - \lambda_c^2 \Delta \zeta^{(1)}(\rho, t) = -h + \frac{i}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k \psi_k^{(g)}(\vec{r}) e^{i\omega_k t}.$$

Розглянемо окремий випадок для наглядного виду отриманих стаціонарних функцій.

### 5.9 Аналітичний розв'язок у випадку прямого циліндра

Розглянемо прямий циліндр із стінками  $\rho = R$ . У цьому випадку чисто гравітаційна задача представляється у наступному вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi_k^{(g)} = 0, \\ \left. \frac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{z=h} = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} \psi_k^{(g)}, \\ \left. \frac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{z=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial\psi_k^{(g)}}{\partial n} \right|_{\rho=R} = 0. \end{array} \right. \quad (5.9.1)$$

Як ми знаємо, рівняння Лапласа в аксіально-симетричному випадку має наступний загальний розв'язок

$$\psi_k^{(g)}(\rho, z) = (AJ_0(\lambda\rho) + BY_0(\lambda\rho))(C \operatorname{sh}(\lambda z) + D \operatorname{ch}(\lambda z)). \quad (5.9.2)$$

На осі циліндра функція не може обернутися в нуль, тому константа біля функції Неймана зануляється

$$\psi_k^{(g)}(0, z) \neq \infty \Rightarrow B = 0. \quad (5.9.3)$$

За умовою непротікання, нормальна похідна від функції на стінках циліндра має дорівнювати нулю, а отже обчислимо компоненти градієнта функції. Вираз для функції

$$\psi_k^{(g)}(\rho, z) = AJ_0(\lambda\rho) \operatorname{sh}(\lambda z) + BJ_0(\lambda\rho) \operatorname{ch}(\lambda z). \quad (5.9.4)$$

Компоненти градієнта

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial \rho} = -A\mu J_1(\lambda\rho) \operatorname{sh}(\lambda z) - B\mu J_1(\lambda\rho) \operatorname{ch}(\lambda z), \\ \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} = A\lambda J_0(\lambda\rho) \operatorname{ch}(\lambda z) + B\lambda J_0(\lambda\rho) \operatorname{sh}(\lambda z). \end{cases} \quad (5.9.5)$$

Використаємо граничні умови для знаходження нульової константи

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial z} \right|_{z=0} &= A\lambda J_0(\mu\rho) = 0 \Rightarrow A = 0, \\ \psi_k^{(g)}(\rho, z) &= B J_0(\lambda\rho) \operatorname{ch}(\lambda z), \end{aligned} \quad (5.9.6)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_k^{(g)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -B\mu J_1(\lambda R) \operatorname{ch}(\lambda z) = 0,$$

$$J_1(\lambda R) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\mu_k}{R}.$$

$\mu_k$  – корені функції Бесселя першого порядку.

Аналітичний розв'язок системи рівнянь, що буде використовуватися далі для порівняння із результатами, отриманими числовими методами, наступний

$$\psi_k^{(g)}(\rho, z) = B J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{R}z\right). \quad (5.9.7)$$

Скористаємося другим рівнянням системи (5.9.1) і знайдемо частоти вільних коливань

$$B\lambda J_0(\lambda\rho) \operatorname{sh}(\lambda z) = \frac{\omega_k^{(g)2}}{g} B J_0(\lambda\rho) \operatorname{ch}(\lambda z), \quad (5.9.8)$$

$$\frac{\omega_k^{(g)2}}{g} = \frac{\mu_k}{R} \operatorname{th}\left(\frac{\mu_k}{R}h\right).$$

Отриманий розв'язок є розв'язком суто гравітаційної задачі. Тоді за умовою (5.59) частоти гравітаційно-капілярних хвиль наступні

$$\frac{\omega_k^2}{g} = \frac{\mu_k}{R} \operatorname{th} \left( \frac{\mu_k}{R} h \right) \left[ 1 + \lambda_c^2 \frac{\mu_k^2}{R^2} \operatorname{th}^2 \left( \frac{\mu_k}{R} h \right) \right]. \quad (5.9.9)$$

Скористаємося приведеною числовою схемою для розв'язання задачі з будь якою формою резервуара та граничними умовами.

### 5.10 Використання методу сингулярних інтегральних рівнянь

Перш ніж проводити класичну дискретизацію, розділимо границю та потенціал на ній на дві групи.

$$\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \psi_0(\vec{r}), & \vec{r} \in S_0, \\ \psi_1(\vec{r}), & \vec{r} \in S_1. \end{cases} \quad (5.10.1)$$

Отримаємо два інтегральні рівняння на границі

$$\begin{aligned} 2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \oint_{S_0} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})\psi_0(\vec{r})dS(\vec{r}) + \int_{S_1} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})\psi_1(\vec{r})dS(\vec{r}) = \\ = \int_{S_0} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} dS(\vec{r}), \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

$$\begin{aligned} 2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \oint_{S_0} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})\psi_0(\vec{r})dS(\vec{r}) + \int_{S_1} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})\psi_1(\vec{r})dS(\vec{r}) = \\ = \int_{S_0} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} dS(\vec{r}). \end{aligned}$$

В аксіально-симетричному випадку

$$\oint_S f(\vec{r})dS(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \rho d\Gamma \int_0^{2\pi} f(\vec{r})d\alpha. \quad (5.10.3)$$

Використаємо це

$$\begin{aligned}
 2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha + \\
 + \int_{\Gamma_1} \psi_1(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha = \\
 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha,
 \end{aligned}
 \tag{5.10.4}$$

$$\begin{aligned}
 2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha + \\
 + \int_{\Gamma_1} \psi_1(\vec{r})\rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha = \\
 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \rho(\vec{r})d\Gamma(\vec{r}) \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r})d\alpha.
 \end{aligned}$$

Розіб'ємо границю вільної поверхні на  $m$  граничних елементів, а загальну кількість граничних елементів позначимо як  $n$ . Інтеграли від функції Гріна та її нормальної похідної за кутом позначимо як  $\tilde{u}^*$  та  $\tilde{q}^*$ . Тоді інтеграл за всією границею розпадається на  $n$  інтегралів за граничними елементами.



$$\begin{aligned}
2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \psi_0(\vec{r}) \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^n \int_{\Gamma_k} \psi_1(\vec{r}) \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}),
\end{aligned} \tag{5.10.5}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \psi_0(\vec{r}) \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^n \int_{\Gamma_k} \psi_1(\vec{r}) \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial n(\vec{r})} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Невідомими є лише значення потенціалу, тому скористаємось теоремою про середнє та винесемо потенціал у деяких точках за знак інтегралу.

$$\begin{aligned}
2\pi\psi_0(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^m \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^n \psi_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=1}^m \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}),
\end{aligned} \tag{5.10.6}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\psi_1(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^m \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) + \\
+ \sum_{k=m+1}^n \psi_1(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}) = \\
= \frac{\omega^2}{g} \sum_{k=1}^m \psi_0(\vec{r}_k) \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Обираємо на кожному граничному елементі т.з. точку колокації і створимо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих значень потенціалу.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
Q_{ik}^{00} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_0, \vec{r}_k \in S_0, \\
Q_{ik}^{01} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_0, \vec{r}_k \in S_1, \\
Q_{ik}^{10} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_1, \vec{r}_k \in S_0, \\
Q_{ik}^{11} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_1, \vec{r}_k \in S_1, \\
U_{ik}^{00} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{u}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_0, \vec{r}_k \in S_0, \\
Q_{ik}^{10} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{q}^*(\vec{r}_i, \vec{r}) \rho(\vec{r}) d\Gamma(\vec{r}), \vec{r}_i \in S_1, \vec{r}_k \in S_0.
\end{aligned} \tag{5.10.7}$$

Система лінійних рівнянь у матричній формі має наступний вигляд

$$\begin{aligned}
2\pi\delta_{ik}\psi_{0k} + Q_{ik}^{00}\psi_{0k} + Q_{ik}^{01}\psi_{1k} &= \frac{\omega^2}{g} U_{ik}^{00}\psi_{0k}, \\
2\pi\delta_{ik}\psi_{1k} + Q_{ik}^{10}\psi_{0k} + Q_{ik}^{11}\psi_{1k} &= \frac{\omega^2}{g} U_{ik}^{10}\psi_{0k}.
\end{aligned}
\tag{5.10.8}$$

Виражаємо  $\psi_{1k}$  із другого рівняння

$$\psi_{1k} = (2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1} \left( \frac{\omega^2}{g} U_{ik}^{10} - Q_{ik}^{10} \right) \psi_{0k}.
\tag{5.10.9}$$

Підставимо цей вираз у перше рівняння

$$\begin{aligned}
(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{00})\psi_{0k} + \frac{\omega^2}{g} Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1} U_{ik}^{10}\psi_{0k} - \\
- Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1} Q_{ik}^{10}\psi_{0k} = \frac{\omega^2}{g} U_{ik}^{00}\psi_{0k}.
\end{aligned}
\tag{5.10.10}$$

Звідси отримуємо задачу на власні вектори та власні значення, з якої і знаходимо частоти та потенціал.

$$\begin{aligned}
(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{00} - Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1} Q_{ik}^{10})\psi_{0k} = \\
= \frac{\omega^2}{g} (U_{ik}^{00} - Q_{ik}^{01}(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{11})^{-1} U_{ik}^{10})\psi_{0k}.
\end{aligned}
\tag{5.10.11}$$

Отримані рівняння будуть використані в подальших числових розрахунках.

### 5.11. Числові результати

Аксіально-симетричні гравітаційні функції стану та їх частоти були отримані числовим методом для циліндричних, конічних та сферичних резервуарів в постійному гравітаційному полі з урахуванням гравітаційно-капілярних ефектів. Для всіх розглянутих типів резервуарів рівень заповнення позначено як  $h$ .

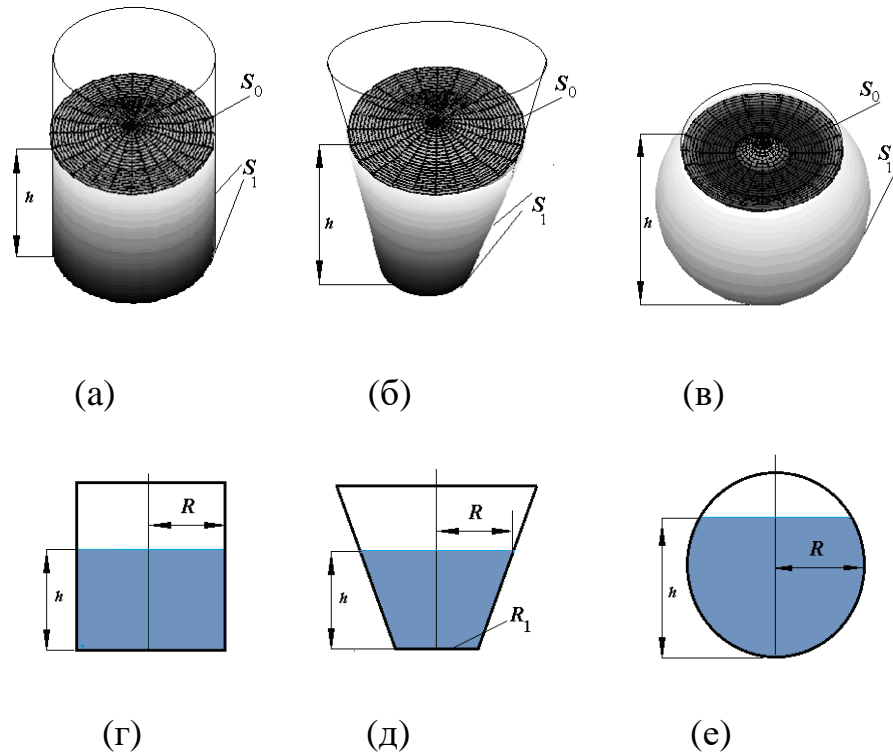


Рис.5.2 Частково заповнені аксіально-симетричні резервуари з рідиною

Чисельні розв'язки отримані, використовуючи метод граничних елементів, що був описаний вище. В даному дослідженні для циліндричних та конічних резервуарів було використано 100 граничних елементів на дні, та 100 граничних елементів уздовж лінії вільної поверхні. Для сферичних резервуарів використано 200 елементів уздовж сферичної частини та 150 елементів на вільній поверхні. Подальше збільшення кількості граничних елементів не приводило до суттєвих змін результатів.

Для перевірки запропонованого методу було проведено порівняння з аналітичним розв'язком (5.9.8), (5.9.9).

Порівняння аналітичного та числового розв'язків представлено у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1.

### Порівняння числового та аналітичного розв'язків

Метод	Частота $\omega_k^2 / g$				
	Порядок моди $k$				
	1	2	3	4	5
Запропонований МГЕ	3.884	7.365	10.235	15.703	20.956
Аналітичний розв'язок	3.888	7.361	11.226	15.689	20.939

Подалі ми вивчали плескання в конічних резервуарах. Ми розглядали наступні параметри геометричної форми:  $R = 1\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ .

У Таблицях 5.2 та 5.3 наведено частотні параметри для конічних резервуарів з урахуванням та без урахування капілярних ефектів.

Таблиця 5.2.

### Частоти для конічних резервуарів без урахування капілярних ефектів

Метод	Частота $\omega_k^{(g)2} / g$				
	$R_1, \text{ m}$				
	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
[19]	3.386	3.386	3.382	3.139	2.187
МГЕ	3.389	3.390	3.391	3.192	2.200

Таблиця 5.3.

### Частоти коливань для конічних резервуарів з урахування капілярних ефектів

Частота $\omega_k^{(g)2} / g$					
$R_1, \text{ m}$					
0.8		0.6		0.4	
0.2		0.1			

Плескання в сферичному резервуарі представлені в таблицях 5.4 і 5.5

Таблиця 5.4.

### Частоти аксіально-симетричних плескань в сферичному резервуарі

$k$	Метод	Частота $\omega_k^{(g)2} / g$				
		Рівень заповнення $h, \text{ m}$				

		0.2	0.6	1.0	1.8	1.99
1	[20]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.2151
	ВЕМ	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[20]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	52.0467
	ВЕМ	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

Таблиця 5.5.

### Частоти аксіально-симетричних плескань в сферичному резервуарі за різні рівні заповнення

$k$	Метод	Частота $\omega_k^{(g)^2} / g$				
		Рівень заповнення $h, m$				
		0.2	0.6	1.0	1.8	1.99
1	ВЕМ	3.4201	3.6997	3.7981	7.0763	54.0299
2	ВЕМ	10.0648	7.6524	7.3178	13.9011	192.8405

На рисунку 5.3 подані різні види оболонок обертання, що відрізняються формою днища.

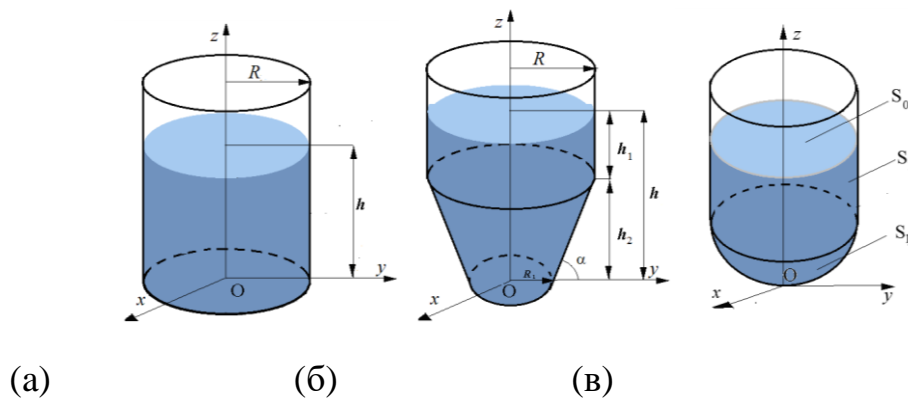


Рис. 5.3 Різні типи резервуарів с рідиною

Проведені вище розрахунки є важливими при дослідженні впливу форми днища на частоти власних коливань резервуарів з рідиною.

### 5.12 Плескання рідини в круглих тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках

Тороїдальні та коаксіальні циліндричні оболонки широко використовуються в різних інженерних галузях, таких як аерокосмічна техніка, сільськогосподарська техніка, транспорт, автомобільна промисловість і

трубопровідна промисловість, корпуси реакторів під тиском і термоядерний реактор, паливні баки та прискорювачі нейтронів. Проблеми розплескування рідини в таких ємностях мають велике значення для розробки передових обчислювальних методів зменшення ваги та розмірів конструкцій, оцінки динамічних впливів, а також рівня вібрацій на етапі проектування.

Польові дослідження для перевірки обладнання коштують дуже дорого, а інколи призводять до руйнування елементів обладнання. Таким чином, числове моделювання можна розглядати як корисний і надійний інструмент для віртуальних експериментів. Це чисельне дослідження дозволяє на етапі проектування знайти різні параметри колекторів і налаштувати структуру, що розглядається, від небажаних резонансних частот.

Грунтовні огляди явища плескання, включаючи аналітичні та експериментальні результати, були зроблені в роботах Ібрагіма [22] і Зінгоні [112]. Оскільки аналітичні методи неприйнятні для резервуарів зі складною геометричною формою, а також через неможливість проведення дорогих польових експериментів, чисельні методи дорого розробляються для розв'язування лінійних крайових задач про розплескування рідини.

Динамічний аналіз заповнених рідиною оболонкових конструкцій часто виконується за допомогою програм кінцевих і граничних елементів [113–115]. Незважаючи на численні практичні застосування тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонок, заповнених рідиною, наукової літератури в цій галузі не так багато. У [116] розглядаються коливання порожніх тороїдальних оболонок. Подальший розвиток методів оцінки вільних і вимушених коливань частково заповнених тороїдальних резервуарів досягнуто в [117–119].

Проблеми стійкості та коливань коаксіальних колових циліндричних резервуарів скінченної довжини досліджуються в [120–122], припускаючи, що область між циліндричними оболонками частково заповнена ідеальною та нестисливою рідиною.

Слід зазначити, що як аналітичні, так і числові методи зазнали труднощів і навіть втратили точність, коли радіуси вільних поверхонь стають переважно

малими. Наприклад, добре відомі аналітичні рішення для майже заповнених резервуарів з малими радіусами вільної поверхні, рішення так званих «задач підлідного лову». Тут треба розглядати нескінченно великий і глибокий океан, покритий льодом, з маленькою круглою ямою для риболовлі. Хлюпотіння в таких «контейнерах» вперше дослідив Маківер [123]. Тут наближення цього нескінченного випадку було зроблено за допомогою сферичного резервуара з маленьким круглим отвором на його вершині. Плескання в сферичних резервуарах для транспортних засобів зрідженого природного газу, включаючи малі радіуси вільної поверхні за допомогою аналітичного підходу, було досліджено Faltinsen і Timokha в [124], а для башт водопостачання Curadelli et al. [125]. Різні наближені методи [124, 126] для оцінки власних частот плескання починалися з відомих робіт Будянського [127] і Маківера [123]. Розглядаючи тороїдальні та коаксіальні циліндричні оболонки, можна спостерігати, що подібна проблема виникає, коли радіуси вільної поверхні досить малі. Для тороїдальних оболонок це відповідає майже повністю заповненим резервуарам, тоді як для коаксіальних циліндричних оболонок передбачається мінімальна ширина зазору. Подібну задачу розглядав Гнітько в роботі [128], де методом граничних елементів (МГЕ) досліджувалися коливання заповненого рідиною паливного бака з циліндричним і сферичним відсіками.

Для дослідження задачі плескань у круглих тороїдальних циліндричних оболонках ми розглядаємо той же формалізм, що і для дослідження гравітаційно-капілярних хвиль в попередніх прикладах: рідина вважається ідеальною та нестислою, її потік є нев'язким, що дозволяє вводити потенціал швидкості. Будемо вважати у цій задачі, що єдиною зовнішньою силою, що діє на систему є сила тяжіння, отже рівняння Ейлера та рівняння нестисливості можна представити у наступній формі



$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \\ \nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\rho_l}p - (\vec{g}, \vec{r})\right) = 0. \end{cases} \quad (5.12.1)$$

Рівняння Бернуллі в випадку малих збурень вільної поверхні у лінійалізованому вигляді має наступну форму:

$$p = -\rho_l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gz\right) + p_0. \quad (5.12.2)$$

Через  $p_0$ , як і раніше, в даному дослідженні представлений атмосферний тиск.

Основним рівнянням руху рідини є рівняння Лапласа в (5.12.1) для потенціалу  $\varphi$ . Отримавши розв'язок цього рівняння, можна отримати як швидкість рідини  $v$  як градієнт функції  $\varphi$ , так і тиск  $p$  з рівняння Бернуллі. (5.12.2). Тому необхідно сформулювати крайову задачу для рівняння Лапласа.

Розглянуто задачі про коливання рідини в тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках. Відмінною рисою таких оболонок обертання є кільцеподібна форма їх вільних поверхонь, як показано на рис. 5.4а).

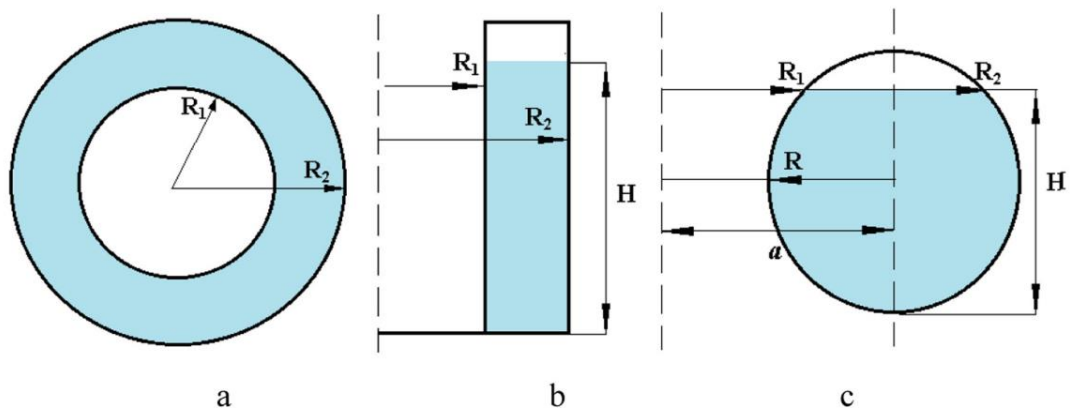


Рис.5.4 Ескіз вільної поверхні (а) і геометрія перерізу коаксіальної (b) і кругової тороїдальних оболонок (с)

Тут  $R_1$  і  $R_2$  - внутрішній і зовнішній радіуси вільної поверхні,  $H$  - рівень заповнення,  $R$  - радіус тороїдальної оболонки,  $a$  - відстань між віссю обертання круглої тороїдальної оболонки і центром обертового кола.

На змочених поверхнях оболонок, позначених  $S_1$ , задамо умову граничної непроникності [113]:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0. \quad (5.12.3)$$

На вільній оболонці рідини виконуються динамічні та кінематичні граничні умови

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ (p - p_0)|_{S_0} = 0. \end{cases} \quad (5.12.4)$$

Літерою  $\zeta$ , як і неоднократно було вказано вище, позначено функцію зміщення вільної поверхні рідини.

Тобто, для потенціалу швидкості  $\varphi$  і функції  $\zeta$  формулюється наступна крайова задача:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ (p - p_0)|_{S_0} = 0. \end{cases} \quad (5.12.5)$$

Динамічну умову можна перетворити і записати у наступному вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (5.12.6)$$

Так як для сформульованої задачі існують нульові власні значення, але вони будуть виключені за умови наступної ортогональності:

$$\int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_0 = 0. \quad (5.12.7)$$

Застосуємо отримані розкладання для визначення потенціалу швидкості в тороїдальних оболонках.

### 5.13 Виділення стаціонарних мод для задачі тороїдальних оболонок

Розкладемо потенціал швидкості  $\varphi$  у наступний ряд:

$$\varphi = \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k. \quad (5.13.1)$$

Для введених вище функцій  $\varphi_k$  розглядаються наступні крайові задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi_k = 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0, \\ \int_{S_0} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS_0 = 0. \end{array} \right. \quad (5.13.2)$$

Продиференціюємо четверте рівняння у співвідношенні (5.13.2) за  $t$  і підставимо туди вираз для  $\partial t$  із третього рівняння (5.13.2). Припустимо далі, що

$$\varphi_k(t, x, y, z) = e^{i\chi_k t} \varphi_k(x, y, z). \quad (5.13.3)$$

Це призводить до послідовності задач на власні значення з такими умовами на вільній поверхні для кожної первинної функції  $\varphi_k$ :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \quad (5.13.4)$$

з власними значеннями  $\frac{\chi_k^2}{g}$ .

Це впливає з рівняння (5.12.1), і третє співвідношення (5.12.2) про те, що невідому функцію  $\zeta$  можна отримати у вигляді

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \quad (5.13.5)$$

Ефективну чисельну процедуру розв'язування цих задач на власне значення за допомогою методу граничних елементів було запропоновано у розділах вище.

#### 5.14 Аналітичний розв'язок для тороїдальних оболонок

Загальний розв'язок аксіально-симетричного рівняння Лапласа в циліндричних координатах можна представити так

$$\varphi(\rho, z) = (AJ_0(\lambda\rho) + BY_0(\lambda\rho))(C \operatorname{sh}(\lambda z) + D \operatorname{ch}(\lambda z)). \quad (5.14.1)$$

Невідомі константи та власні значення можна знайти з граничних умов. Для визначення нормальної похідної отримано часткові похідні потенціалу швидкості.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} &= -\lambda(AJ_1(\lambda\rho) + BY_1(\lambda\rho))(C \operatorname{sh}(\lambda z) + D \operatorname{ch}(\lambda z)), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\lambda(AJ_0(\lambda\rho) + BY_0(\lambda\rho))(C \operatorname{ch}(\lambda z) + D \operatorname{sh}(\lambda z)),\end{aligned}\tag{5.14.2}$$

Оскільки в будь-якій точці бічної поверхні нормальна похідна потенціалу швидкості повинна дорівнювати нулю, то вибираємо три точки, а саме крайню нижню, ліву і праву.

Ці умови призводять до наступної системи з урахуванням  $C = 0$  через граничну умову на дні:

$$\begin{cases} AJ_1(\lambda a) + BY_1(\lambda a) = 0, \\ AJ_1(\lambda(a + d)) + BY_1(\lambda(a + d)) = 0. \end{cases}\tag{5.14.3}$$

Для нетривіального розв'язку цієї системи її визначник повинен дорівнювати нулю, тобто

$$J_1(\lambda(a + d))Y_1(\lambda a) - J_1(\lambda a)Y_1(\lambda(a + d)) = 0.\tag{5.14.4}$$

Власні значення  $\lambda$  визначаються саме з цього рівняння. Тоді потенціал швидкості для коаксіальних циліндричних оболонок став:

$$\varphi(\rho, z) = \left( Y_1(\lambda(a + d))J_0(\lambda\rho) - J_1(\lambda a)Y_1(\lambda\rho) \right) \operatorname{ch}(\lambda z).\tag{5.14.5}$$

Далі визначаємо власні частоти  $\omega$ . Для цього підставимо знайдений потенціал у кінематичну граничну умову. Тоді отримуємо наступну формулу.

$$\frac{\omega^2}{g} = \lambda \operatorname{th}(\lambda H).\tag{5.14.6}$$

Рівняння для власних значень можна записати в такій формі:

$$J_1(\lambda(a+d))Y_1(\lambda a) - J_1(\lambda a)Y_1(\lambda(a+d)) = 0. \quad (5.14.7)$$

де  $a$  - радіус внутрішньої стінки порожнистого циліндра, а  $d$  - ширина зазору між внутрішнім і зовнішнім радіусами.

### 5.15 Аксіально-симетричні коливання в коаксіальних циліндричних оболонках

Методом граничних елементів розглянуто коливання рідини в коаксіальних циліндричних оболонках. Ескіз цієї конструкції оболонки наведено на рис. 5.4. Конструкцію оболонки називають циліндричною системою координат  $(x, \theta, z)$ . Для підтвердження розробленого тут методу розглядається аналітичний еталонний тест. Розглянуто аксіально-симетричне плескання рідини в коаксіальних циліндричних оболонках з різними  $R_2$  і  $R_1$ ,  $H = 2$  м.

У таблиці 5.6 наведено значення частот рідини для різних зазорів між циліндричними оболонками.

Таблиця 5.6

#### Частоти рідини для різних коаксіальних циліндричних оболонок.

$R_1$ , м	$R_2$ , м	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	2	3.2014	6.3241	9.4668	12.6174	15.7742
1	1.5	6.3454	12.647	18.977	25.317	31.6718
1	1.25	16.664	28.76	41.687	54.0281	66.856
1	1.125	33.286	57.493	83.392	107.769	133.31
1	1.0625	66.671	114.08	165.47	213.872	265.15

Відмінності між аналітичними та чисельними розв'язками:  $e^{-4}$  для  $R_2 \in [1.125, 2]$  та  $e^{-3}$  для  $R_2 = 1.0625$ . У всіх варіантах ми використовуємо однакову кількість граничних елементів на вільних поверхнях. Для такого

малого радіуса, як  $R_2 = 1.0625$ , необхідно збільшити кількість елементів, щоб отримати таку ж точність.

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що зменшення зазору між циліндричними оболонками призводить до збільшення частот плескання за аналогією із «задачею підлідної риболовлі»

На рис. 5.5 показано три перші моди коливань рідини в коаксіальних циліндричних оболонках з  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 2$  м і  $H = 2$  м.

Моди коливань мають форму, подібну до функцій Бесселя.



Рис. 5.5 Аксіально-симетричні форми коливань рідини в коаксіальних циліндричних оболонках.

Число граничних елементів  $N_1 = 100, N_2 = 100, N_3 = 100$  по вертикальних стінках, дну і вільній поверхні відповідно. Подальше збільшення цих чисел не призводить до зміни точності.

### 5.16 Аксіально-симетричні коливання в кругових тороїдальних оболонках

За допомогою запропонованого методу граничних елементів розглянуто коливання рідини в тороїдальних оболонках. Ескіз цієї оболонки подано на рис. 5.5. Радіус тороїдальної оболонки  $R$  дорівнює 1 м для всіх розглянутих

випадків. Рівень наповнення різний; розглядаються малі значення ширини поверхні кільця.

У таблиці 2 нижче представлені значення рідинних частот для тороїдальних оболонок з різними параметрами.

Таблиця 5.7

**Частоти рідини для різних круглих тороїдальних оболонок**

$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
2	0.25	2.1555	3.9436	5.7753	7.57592	9.4084
2	-0.5	2.2132	4.0300	5.8605	7.66795	9.4965
2	0.5	4.3579	7.8623	11.579	15.1308	18.807
2	-0.9	4.4665	7.9844	11.668	15.2224	18.881
2	0.9	1.9650	3.5381	5.1208	6.6845	8.2670

Результати чисельного моделювання показують, що частоти більше залежать від ширини кільця вільної поверхні та однакові як для низьких, так і для високих рівнів заповнення.

**5.17 Задачі з періодичними граничними умовами**

Досліджуються неосесиметричні граничні задачі для рівняння Лапласа. Задіяні граничні умови Неймана, Діріхле та мішані граничні умови, у припущенні їх періодичної поведінки. Такі задачі виникають як допоміжні в багатьох практичних застосуваннях. Серед них проблеми, пов'язані з чисельним моделюванням коливань заповнених рідиною пружних оболонок обертання, зв'язані коливання пружних круглих пластин, що покривають вільну поверхню рідини в контейнерах, зростання тріщини в пружному середовищі та ін. Спільною рисою цих проблем є необхідність отримання чисельне розв'язання рівняння Лапласа за різних граничних умов. Оскільки ці проблеми є допоміжними, необхідно отримати їх числові рішення з високою точністю. Найбільший ефективним методом розв'язання цих завдань є метод граничних



елементів. Далі запропоновано варіант МГЕ для осесиметричної розрахункової області із заданими періодичними функціями для граничних умов.

Без втрати загальності постановка періодичної крайової задачі в циліндричних координатах може бути виражена в наступному вигляді

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{S_1} = f(\rho, z) \cos(l\alpha), \quad u|_{S_0} = 0 \quad (5.17.1)$$

де  $u$  – невідома функція,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $S_0$  – вільна поверхня,  $S_1$  – для поверхонь оболонки,  $f(\rho, z)$  – відома гранична функція,  $l$  – ціле число.

Зауважимо, що такі задачі виникають при розкладенні в ряд Фур'є розв'язків неаксіально-симетричних задач як в теорії потенціалу, так і в теорії пружності.

У цьому дослідженні завдяки граничним умовам у (5.17.1) ми можемо представити невідому функцію у наступному вигляді:

$$u(\mathbf{r}) = u(\rho, z) \cos(l\alpha) \quad (5.17.2)$$

Тут  $u(\rho, z)$  невідома аксіально-симетрична функція, а неаксіально-симетрична поведінка задачі враховується шляхом множення цієї функції на косинуси.

Граничне інтегральне рівняння приймає наступний вигляд

$$\begin{aligned} 2\pi u(\xi) + \int_{\Gamma_1} u(\rho, z) \rho d\Gamma(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} q^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha = \\ \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n}(\rho, z) \rho d\Gamma(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} u^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha + \\ + \int_{\Gamma_1} f(\rho, z) \rho d\Gamma(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} u^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (5.17.3)$$

Тому актуальним питанням тут є обчислення аксіальних інтегралів з функціями Гріна, помножених на тригонометричні функції.

## 5.18 Аксіальні інтеграли з функціями Гріна та тригонометричними функціями

Необхідно знайти спосіб обчислення наступних інтегралів:

$$\begin{aligned}
 I_u(\rho, \rho_0, z, z_0) &= \int_0^{2\pi} u^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha, \\
 I_q(\rho, \rho_0, z, z_0) &= \int_0^{2\pi} q^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha
 \end{aligned}
 \tag{5.18.1}$$

Використовуючи вирази (5.102), можна отримати наступний вираз для  $I_u$

:

$$\int_0^{2\pi} u^*(\xi, \mathbf{r}) \cos(l\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(l\alpha) d(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\alpha - \alpha_0)}}
 \tag{5.18.2}$$

З заміною

$$\theta = \frac{\alpha - \alpha_0 - \pi}{2} \Rightarrow \alpha - \alpha_0 = 2\theta + \pi
 \tag{5.18.3}$$

інтеграл перетворюється на

$$I_u(\rho, \rho_0, z, z_0) = \frac{4(-1)^l \cos(l\alpha_0)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2l\theta) d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}
 \tag{5.18.4}$$

Щоб обчислити цей інтеграл, нам потрібно розкласти функції косинусів у ряди. Цю процедуру можна виконати за формулою де Муавра

$$\begin{aligned}
 \cos(2l\theta) &= \operatorname{Re}[e^{2il\theta}] = \operatorname{Re}(\cos(2l\theta) + i \sin(2l\theta)) = \operatorname{Re}(\cos \theta + i \sin \theta)^{2l} = \\
 &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{2l} C_{2l}^k \cos^{2l-k} \theta \sin^k \theta (i)^k = \sum_{k=0}^{2l} C_{2l}^k \cos^{2l-k} \theta \sin^k \theta \operatorname{Re}(i)^k.
 \end{aligned}
 \tag{5.18.5}$$

Слід зазначити, що  $\operatorname{Re}(i)^k = 0, \forall k = 2n + 1$ .

Отже, змінюючи сумарні показники, можна отримати

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{2l} C_{2l}^k \cos^{2l-k} 2\theta \sin^k 2\theta \operatorname{Re}(i)^k = \left| \begin{array}{l} 2p = k \\ k = 0 \Rightarrow p = 0, k = 2l \Rightarrow p = l \end{array} \right| = \\
& = \sum_{p=0}^l (-1)^p C_{2l}^{2p} \cos^{2(l-p)} \theta \sin^{2p} \theta = \sum_{p=0}^l (-1)^p C_{2l}^{2p} (1 - \sin^2 \theta)^{l-p} \sin^{2p} \theta = \\
& = \sum_{p=0}^l (-1)^p C_{2l}^{2p} \sin^{2p} \theta \sum_{k=0}^{l-p} C_{l-p}^k (-1)^k \sin^{2k} \theta = \left| \begin{array}{l} s = p + k \\ k = 0 \Rightarrow s = p \\ k = l - p \Rightarrow s = l \end{array} \right| = \\
& = \sum_{p=0}^l \sum_{s=p}^l (-1)^s C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} \sin^{2s} \theta
\end{aligned} \tag{5.18.6}$$

Якщо ми додамо доданок  $\sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} \sin^{2s} \theta$  до внутрішньої суми, результат не зміниться через властивості гамма-функції Ейлера. Отже, ми можемо отримати вираз із незалежними індексами суми

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^l \sum_{s=p}^l (-1)^s C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} \sin^{2s} \theta = \sum_{p=0}^l \sum_{s=0}^l (-1)^s C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} \sin^{2s} \theta = \\
& = \sum_{s=0}^l (-1)^s \sin^{2s} \theta \sum_{p=0}^l C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s}.
\end{aligned} \tag{5.18.7}$$

Внутрішню суму тут можна розрахувати за допомогою методу підсумовування Єгоричева [14]

$$\sum_{p=0}^l C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} = \sum_{p=0}^s C_{2l}^{2p} C_{l-p}^{l-s} = \frac{4^s l}{l+s} C_{l+s}^{2s} \tag{5.18.8}$$

Отже, функція подвійного косинуса має наступне представлення

$$\cos(2l\theta) = \sum_{s=0}^l \frac{4^s (-1)^s l}{l+s} C_{l+s}^{2s} \sin^{2s} \theta \tag{5.18.9}$$

Використовуючи розкладання (5.18.9) до інтегралу  $I_u(\rho, \rho_0, z, z_0)$  можемо отримати наступне перетворення

$$\begin{aligned}
& I_u(\rho, \rho_0, z, z_0) = \\
& = \frac{4(-1)^l \cos(l\alpha_0)}{\sqrt{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k 4^k l}{k+l} C_{l+k}^{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} \theta d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}
\end{aligned} \tag{5.18.10}$$

Квадрати функцій синуса можна розкласти в ряд

$$\sin^{2k} \theta = \frac{1}{m^{2k}} \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s (1 - m^2 \sin^2 \theta)^s \quad (5.18.11)$$

Так ми отримуємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2k} \theta d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{m^{2k}} \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{\frac{2s-1}{2}} d\theta \quad (5.18.12)$$

У (5.18.12) видно, що інтеграли зводяться до спеціальних еліптичних інтегралів, введених у розділі 3.

Після обчислення внутрішніх інтегралів і в (5.18.12) застосовано метод граничних елементів (МГЕ) з постійною апроксимацією густин для отримання невідомих функцій з використанням спеціального підходу для обчислення зовнішніх інтегралів з логарифмічними особливостями.

Таким чином, побудовано метод, який дозволяє узагальнити запропонований підхід до розв'язання неаксіально-симетричних задач. Цей метод ґрунтується на застосуванні розроблених автором відходів до обчислення спеціальних еліптичних інтегралів, що присутні у ядрах операторів та ефективного підходу для обчислення зовнішніх інтегралів.

## Висновки за розділом 5

Розроблено методи врахування поверхневого натягу. Побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах за різні рівні заповнення, різні рівні гравітаційного поля.

Розроблено нову математичну модель для вивчення гравітаційно-капілярних хвиль, отримані числові результати.

Метод граничних елементів поширений на задачі про плескання в круглих тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках. Відмінною рисою таких оболонок обертання є кільцева форма їх вільних поверхонь. Розроблений метод дозволяє проводити числове моделювання вільних коливань рідини як для різної ширини кільця, так і для різних рівнів наповнення. Отримано аналітичний розв'язок коливань вільної рідини в

коаксіальних циліндричних оболонках. Особливу увагу приділено граничному випадку нескінченно малої щілини.

Побудовано метод, який дозволяє узагальнити запропонований підхід до розв'язання не аксіально-симетричних задач.

Проведено порівняння аналітичних та чисельних результатів, які підтвердили ефективність запропонованого обчислювального підходу.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано важливу науково-технічну проблему, яка полягає в розробленні сучасного ефективного обчислювального методу для аналізу практично важливих крайових задач теорії потенціалу та теорії пружності з урахуванням аксіальної симетрії.

Сформульовано неперервні та дискретні математичні моделі для проведення розрахунків фізичних полів в задачах визначення вібрацій вільної поверхні в оболонках обертання, розв'язання крайових задач електродинаміки, теорії пружності в аксіально-симетричному формулюванні.

Побудовано коректні та точні алгоритми числового моделювання задач прикладної фізики у напрямках гідродинаміки, електродинаміки та теорії пружності.

Запропоновано новий клас спеціальних функцій, пов'язаних з узагальненими еліптичними інтегралами, досліджено їх властивості, отримані рекурентні формули та розроблено ефективний числовий метод для розрахунку побудованих спеціальних функцій.

Вдосконалено метод подвійного заміщення з використанням полігармонічних радіальних базисних функцій спеціального виду за допомогою аксіально-симетричних полігармонічних сплайнів. Введено новий клас спеціальних функцій, які зображують як новий вид інтегралів, подібних до класичних еліптичних. Отримано аналітичні вирази для будь-якого порядку сплайна, що дозволить у подальшому узагальнити метод для більш складних та нелінійних граничних умов. Доведено, що спеціальні еліптичні інтеграли задовольняють диференціальному рівнянню другого порядку, розв'язок якого подається у вигляді ряду. Обчислення цих нових спеціальних функцій з довільним порядком зводиться до обчислення комбінації перших двох членів послідовності з деякими поліномами, тобто отримані рекурентні формули, які дозволяють звести обчислення спеціальних еліптичних інтегралів лише до обчислення стандартних еліптичних інтегралів першого та другого роду. Для

високоточного обчислення повних еліптичних інтегралів першого та другого роду використано відомий метод середнього арифметично-геометричного Гауса.

Створено математичний апарат для коректного обчислення сингулярних інтегралів матриць теорії потенціалу та теорії пружності (задач з еліптичним диференціальним оператором);

Побудовані математичні моделі для дослідження вільних коливань рідини в жорстких резервуарах за різні рівні заповнення, різні рівні гравітаційного поля, у тому числі при малих рівнях гравітації;

Удосконалено метод сингулярних елементів для розв'язання задач визначення динамічних характеристик складених оболонок, частково заповнених рідиною.

Розроблено нову математичну модель для вивчення гравітаційно-капілярних хвиль.

Розроблено математичну модель просторового репрезентативного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та некласичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення на основі методу граничних елементів.

Побудовано замкнуті системи рівнянь тривимірних статичних задач щодо поведінки пружних композитів з неоднорідностями. Отримані моделі забезпечують числове дослідження та ефективне прогнозування механічних властивостей тривимірних матричних нанокompозитів для повного діапазону параметрів структури. Для опису ефектів на нанорівні прийняті як класична модель, так і модель інтерфейсу Гуртіна-Мердока, яка включає в себе як поверхневий натяг, так і поверхневу жорсткість, з виникненням недосконалих умов контакту між матрицею та неоднорідностями.

Проведено числове дослідження задачі електростатики.

Досліджені коливання рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною.

Метод граничних елементів поширений на задачі про плескання в кругових тороїдальних і коаксіальних циліндричних оболонках. Відмінною рисою таких оболонок обертання є кільцева форма їх вільних поверхонь. Розроблений метод дозволяє проводити числове моделювання вільних коливань рідини як для різної ширини кільця, так і для різних рівнів наповнення. Отримано аналітичний розв'язок коливань вільної рідини в коаксіальних циліндричних оболонках. Особливу увагу приділено граничному випадку нескінченно малої щілини.

Побудовано метод, який дозволяє узагальнити запропонований підхід до розв'язання не аксіально-симетричних задач.

Запропоновані математичні методи використано для аналізу та вирішення задач власних коливань палива у резервуарах з рідиною з наявною аксіальною симетрією у полі сили тяжіння із впливом капілярних ефектів

Основні нові наукові елементи дослідження полягають у наступному.

Розроблено новий ефективний метод розв'язання крайових аксіально-симетричних задач теорії потенціалу та лінійній теорії пружності, заснований на використанні редукованого методу граничних елементів.

Запропоновано новий клас спеціальних функцій, пов'язаних з узагальненими еліптичними інтегралами, досліджено їх властивості, отримані рекурентні формули та розроблено ефективний числовий метод для їх розрахунку.

Запропоновано нові математичні моделі для врахування неklasичних граничних умов на поверхнях інтерфейсу для розв'язання аксіально-симетричних задач теорії пружності та динаміки коливань рідини в резервуарах при малих рівнях гравітації.

Вперше, на основі методу граничних елементів з аксіальною симетрією розроблено математичну модель просторового репрезентативного об'ємного елемента для вивчення осереднених механічних властивостей композитів та нанокompозитів, з врахуванням класичних та неklasичних умов на поверхнях взаємодії матеріалів матриці та включення.



Здійснено уточнені числові дослідження частот та форм коливань рідини в складених баках різної форми з порівнянням результатів, отриманих з урахуванням та без урахування поверхневого натягу.

Проведено уточнене дослідження коливань рідини в коаксіальних та тороїдальних оболонках, частково заповнених рідиною та знайдено залежності динамічних характеристик від геометричних параметрів оболонок.

На основі модифікованого методу граничних елементів з аксіальною симетрією проведено числове дослідження осереднених механічних характеристик репрезентативної об'ємної комірки у вигляді циліндру із включенням у вигляді закругленого циліндру. Виявлено вплив типу граничних умов на осереднені механічні характеристики.

Вперше побудовано математичну модель для опису гравітаційно-капілярних хвиль.

Таким чином, розроблено математичні моделі та методи комп'ютерного моделювання крайових задач прикладної фізики. Задачі з різних областей розв'язуються шляхом використання методів теорії потенціалу. Застосовані третя формула Гріна та її аналог для просторових задач теорії пружності – формула Соміліани. Це дало змогу перейти до двовимірних крайових задач із застосуванням сингулярних інтегральних рівнянь. Отримані рівняння мають однакові особливості в ядрах операторів. Як в теорії потенціалу, так і в теорії пружності виконано перехід до одновимірних сингулярних рівнянь шляхом інтегрування за окружною координатою. Запропонований новий клас спеціальних функцій дозволив побудувати нові ефективні схеми числового розв'язання. Ще одна риса, яка притаманна всім розв'язаним в роботі крайовим задачам, полягає в застосуванні неklasичних крайових умов на поверхнях інтерфейсу. Ці крайові умови характеризуються уявною надтонкою мембраною на поверхні розподілу середовищ, і описуються рівняннями Юнга-Лапласа та узагальненими рівняннями Юнга-Лапласа.

Достовірність отриманих результатів обґрунтовується співставленням даних автора з числовими та аналітичними розв'язками інших вчених,

доведенням збіжності запропонованих алгоритмів, ретельним аналізом точності обчислення допоміжних величин, у тому числі сингулярних інтегралів.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблені методи та алгоритми були впроваджені у навчальний процес кафедри комп'ютерної фізики навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Методи скінченних та граничних елементів» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали». Ряд результатів та рекомендацій прикладних досліджень дисертаційній роботі використано в Інституті проблем машинобудування ім. А. Підгорного при виконанні спільного українсько-індійського проекту «Сучасні обчислювальні методи для аналізу плескань в паливних баках», договору про співпрацю між Вессекським технологічним інститутом, та в рамках гранту УНТЦ «Об'єктно-орієнтовані розрахункові моделі і програми для прогнозування пружних та фононних властивостей тривимірних нанокompозитів і метаматеріалів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Chang Y.P., Kang C.S., Chen D.J. The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media // Int. J. Heat Mass Transfer. –1973. – №16. –P.1905 - 1918.
2. Mogilevskaya S. G., Linkov A. M. Complex fundamental solutions and complex variables boundary method in elasticity//Proc. IABEM Workshop: Fundamental Solutions in Boundary Elements. Formulation and Integration.– Spain: University of Seville, 1997.– P. 71-81.
3. Роман Кушнір, Ярослав П'янило, Андрій П'янило. Особливості застосування числового методу скінченних різниць при моделюванні фізичних процесів. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології 2005, вип. 2, с. 58-69.
4. Sladek J., Sladek V. Dynamic stress intensity factors studied by boundary integro-differential equations//Int. J.Numer. Meth. Engng.–1986.–Vol.23, №5.– P.919-928.
5. Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by framework method// J. of Applied Mechanics. – 1941.–Vol. , №8.– P. A169-175.
6. Courant R. Variational methods for solutions of problems of equilibrium and vibration// Bulletin of the American Mathematical Society. –1943.–№49.–P.1-23.
7. Argiris J.H. Energy theorems of structural analysis. Part I. General theory// Aircraft Engineering. – 1954.–Vol.26, № 308.– P. 347-356.
8. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp J.L. Stiffness and deflection analysis of complex structures//J. of Aeronautic Sciences.–1956.–№23.– P.805-823.
9. Tanaka M., Cruse T.A. Boundary Element Methods in Applied Mechanics// Proceedings of the First Japan Symposium on Boundary Element Methods .–Tokio: Tokio Press, 1988.– 556 p

10. Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. – New York : Dover, 1953.–234 p.
11. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
12. Wang, J. and Gao, X.W., Structural multi-scale boundary element method based on element subdivision technique, Chinese Journal of Computational Mechanics, 27(2), pp. 258-263, 2010.
13. Kane, J.H., Kashava Kumar, B.L., Saigal, S., An arbitrary condensing, noncondensing solution strategy for large scale, multi-zone boundary element analysis. Comput Meth Appl Mech Eng, 79, pp.219–44, 1990.
14. Zhang, Ch., Cui M., Wang, J., Gao, X.W., Sladek, J., Sladek, V., 3D crack analysis in functionally graded materials. Engineering Fracture Mechanics, 78, pp.585–604, 2011.
15. Gao, X.W., Yang, K., Thermal stress analysis of functionally graded material structures using boundary element method, Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43(1), pp.136-143, 2011.
16. Cruse T.A., Snow D.W., Wilson R.B., Numerical solutions in axisymmetric elasticity, Comput Struct 7(3), pp. 445–451, 1977.
17. Kermanidis, T. A., numerical solution for axially symmetrical elasticity problems. Int J Solids Struct; 11(4), pp. 493–500, 1975.
18. Bakr, Adib A., The Boundary Integral Equation Method in Axisymmetric Stress Analysis Problems. Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 213 p., 1986.
19. H. Olsen. “What is sloshing?” Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas, 1976.
20. L. Khezzar, A. C. Seibi, A. Goharzadeh. Water Sloshing in Rectangular Tanks – An Experimental Investigation & Numerical Simulation. International Journal of Engineering (IJE), Vol. 3, No. 2. pp. P. 174-184, 2010.

21. R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, and T. Ikeda. Recent Advances In Liquid Sloshing Dynamics. Applied Mechanics Reviews, Vol. 54, No. 2, pp. 133-199, 2001.
22. R.A. Ibrahim. "Liquid Sloshing Dynamics" Cambridge University Press, New York, 2005.
23. H.N. Abramson, W.-H. Chu and L.R. Garza; Liquid sloshing in spherical tanks; AIAA J. 1, pp. 384- 389; 1963
24. H.N. Abramson; Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers; Applied Mechanics Reviews, 16, pp. 501 - 506; 1963
25. H.N. Abramson; The dynamic behavior of liquids in moving containers; NASA SP-106; 1966
26. A.T. Chwang, and K.H. Wang. "Nonlinear Impulsive Force on an Accelerating Container" J. of Fluids Eng., Vol. 106, pp. 233-240, 1984.
27. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. 'Liquid Sloshing In Rectangular Road Containers, Computers Fluids, Vol. 21, No. 4, pp. 551-569, 1992.
28. G. Popov, S. Sankar, T.S. Sankar, and G.H. Vatitas. "Dynamics of liquid sloshing in horizontal cylindrical road containers," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 207, 1993.
29. Z. Ye, and A.M. Birk. Fluid Pressures in Partially Liquid-Filled Horizontal Cylindrical Vessels Undergoing Impact Acceleration, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 116 No. 4, pp. 449- 459, 1994.
30. O. Faltinsen, O. Rognebakke, N. Alexander, and A.N. Timokha. Resonant three dimensional nonlinear sloshing in a square-base basin, part 2. effect of higher modes, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 523, pp. 199–218, 2005.
31. B.F Chen, and H.W. Chiang. Complete 2D and Fully Nonlinear Analysis of ideal fluid in tanks, Journal of Engineering Mechanics, pp. 70-78, 1999.
32. O.M. Faltinsen, and O.F. Rognebakke. Sloshing, In NAV2000: International Conference on Ship and Ship Research, Venice, 2000.
33. R.L. Bass, J.E.B. Bowles, R.W. Trundell, J. Navickas, J.C. Peck, N. Yoshimura, S. Endo, and B.F.M. Pots. Modeling criteria for scaled LNG sloshing

experiments, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 107, pp. 272–280, 1985.

34. B. Godderidge, M. Tan, S. Turnock, and C. Earl. A Verification and Validation Study of the Application of Computational Fluid Dynamics to the Modelling of lateral Sloshing. Ship Science Report No 140, Fluid Structure Interaction Research Group, University of Southampton, 2006.

35. M.S. Celebi, and H. Akyildiz. Nonlinear Modeling of Liquid Sloshing in a Moving Rectangular Tank, Ocean Engineering, Vol. 29, pp. 1527-1553, 2001.

36. Gurtin M.E. A continuum theory of elastic material surfaces / M.E. Gurtin, A.I.Murdoch //Archive of Rational Mechanics Analysis. – 1975. –Vol. 57. – P. 291–323.

37. Gurtin M.E. Surface stress in solids / M.E. Gurtin, A.I. Murdoch //International Journal of Solids and Structures. – 1978. – Vol. 14. – P. 431–440.

38. Miller R.E. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements/ R.E. Miller, V.B. Shenoy // Nanotechnology. – 2000. – Vol. 11. – P. 139–147.

39. Luo, J. On the anti-plane shear of an elliptic nanoinhomogeneity / J. Luo, X. Wang //European Journal of Mechanics. Solids. – 2009. – Vol. 28. – P. 926-934.

40. Mogilevskaya S.G. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects/ S.G. Mogilevskaya, S.L. Crouch, H.K. Stolarski // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol. 56. – P. 2298-2327.

41. Chen T. Size-dependent elastic properties of unidi-rectional nano-composites with interface stresses/ T.Chen, G.J. Dvorak, C.C. Yu // Acta Mechanica. – 2007. – Vol.1. – P. 39-54.

42. Duan H.L. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: part I - theoretical framework / H.L. Duan, X. Yi., Z.P.Huang, J. Wang //Mechanics of Materials. – 2007. Vol. 39. P. 81–93.

43. Duan H.L. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: part II - application and scaling laws// *Mechanics of Materials*. – 2007. – Vol. 39. – P. 94–103.
44. Nazarenko L. Effective properties of short-fiber composites with Gurtin-Murdoch model of interphase/ L. Nazarenko, H. Stolarski, H. Altenbach // *International Journal of Solids and Structures*. –2016. – N 97-98. – P. 75–88.
45. Fang X.Q. Dynamic stress concentration around two interacting coated nanowires with surface/interface effect/ X.Q. Fang, L.L. Zhang, J.X. Liu // *Meccanica*. – 2013. –Vol. 48. – P. 287 – 296.
46. Tian L. Elastic field of an isotropic matrix with a nanoscale elliptical inhomogeneity/ L. Tian, R.K. Rajapakse // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 7988–8005.
47. Gao W. Finite element characterization of the size dependent mechanical behavior in nanosystems / W. Gao, S.W. Yu, G.Y. Huang // *Nanotechnology*. – 2006. – Vol. 17. – P. 1118-1122.
48. Javili A. A finite element framework for continua with boundary energies / A.Javili, P. Steinmann // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2010.– Vol. 199. – P. 755-765.
49. Wang W. Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects/ W. Wang, W. Zeng, J. Ding // *World Acad. Sci. Eng. Technol*. – 2010. – Vol. 46. – P. 12-20.
50. Dong C.Y. An integral equation formulation of two- and three-dimensional nanoscale inhomogeneities/ C.Y. Dong // *Computational Mechanics*. – 2012. – Vol. 49. – P. 309-318.
51. Dong C.Y. Boundary element analysis of nanoinhomogeneities of arbitrary shapes with surface and interface effects/ C.Y. Dong, E. Pan. // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2011. – Vol. 35. – P. 996-1002.
52. Parvanova S.L. Wave scattering by nanoheterogeneities embedded in an elastic matrix via BEM / S.L. Parvanova, G.D. Manolis, P.S. Dineva // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2015. – Vol. 56. – P. 57-69.

53. Wang J. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials / J. Wang, Z. Huang, H. Duan // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2011. – Vol. 24. – P. 52–82.
54. Dong C.Y. Boundary element analysis of three-dimensional nanoscale inhomogeneities / C.Y. Dong, G.L. Zhang // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. Vol. 50. – P. 201-208.
55. Yang F.Q. Size-dependent effective modulus of elastic composite materials: spherical nanoinclusions at dilute concentrations/ F.Q. Yang // *J. Appl. Phys.* – 2004. – Vol. 95. – P. 3516–3520.
56. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress / H.L. Duan, J. Wang, Z.P. Huang, B.L. Karihaloo // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2005. – Vol. 53. – P. 1574–1596.
57. Quang Le. Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases. / Le Quang, H. Q. He, // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2007. – Vol. 55. – P. 1889–1921.
58. Sharma P. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nanoinhomogeneities incorporating surface/interface energies / P. Sharma, S. Ganti // *Journal of Applied Mechanics*. – 2004. – Vol. 71. – P. 663–671.
59. He L.H. Impact of surface stress on stress concentration / L.H. He, Z.R. Li // *International Journal of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 6208–6219.
60. Elastic interaction of spherical nanoinhomogeneities with Gurtin–Murdoch type interfaces / V.I. Kushch, S.G. Mogilevskaya, H.K. Stolarski, S.L. Crouch // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2011. – Vol. 59. – P. 1702–1716.
61. Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces / V.I. Kushch, S.G. Mogilevskaya, H.K. Stolarski, S.L. Crouch // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. Vol. 50. – P. 1141-1153.



62. Mykhas'kiv V.V. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation / Mykhas'kiv, V.V., Stasyuk, B.M. // *Solid State Phenomena*. – 2017. – Vol. 258. – P. 452-455.
63. Kushch V.I. Elastic fields and effective stiffness tensor of spheroidal particle composite with imperfect interface / V.I. Kushch // *Mechanics of Materials*. – 2018. – Vol. 124. – P. 45–54.
64. Kushch V.I. Multiple spheroidal inclusions with surface stress as a model of nanoporous solid. / V.I. Kushch, S.V. Shmegeera V.V. Mykhas'kiv // *International Journal of Solids and Structures*. 2018 (in press) doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.07.001.
65. Kushch V.I. Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface / V.I. Kushch // *International Journal of Engineering Science*. – 2018. – Vol. 132. – P. 79–96.
66. Kushch V.I. Microstresses and effective elastic moduli of a solid reinforced by periodically distributed spheroidal inclusions/ V.I. Kushch // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – Vol. 34. – P. 1353–1366.
67. Kushch V.I. Elastic equilibrium of a medium containing finite number of aligned spheroidal inclusions /V.I. Kushch // *International Journal of Solids and Structures*. – 1996. – Vol. 33. – P. 1175–1189.
68. Kushch V.I. *Micromechanics of Composites: Multipole Expansion Approach* / V.I. Kushch. – Elsevier: 2013. – 208 p.
69. Kushch V.I. Effective elastic moduli of a particulate composite in terms of the dipole moments and property contribution tensors/ V.I. Kushch, I. Sevostianov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2015. – Vol. 53. – P. 1–11.
70. Kushch V.I. The “rigorous” Maxwell homogenization scheme in 2D elasticity: Effective stiffness tensor of composite with elliptic inhomogeneities / V.I. Kushch, I. Sevostianov // *Mechanics of Materials*. – 2016. – Vol. 103. – P. 44–54.

71. McCartney L.N. Maxwell's far-field methodology predicting elastic properties of multiphase composites reinforced with aligned transversely isotropic spheroids / L.N. McCartney // *Phil. Mag.* – 2010. – Vol. 90. – P. 4175–4207.
72. Караєв А.О. Метод граничних елементів в аксіально -симетричних задачах теорії пружності / А.О. Караєв, О.О. Стрельнікова // *Вісник Херсонського національного університету.* – 2017. –Vol. 3(62), – С. 94-98.
73. Караєв А.О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу / А.О. Караєв, О.О. Стрельнікова // *Прикладні питання математичного моделювання .* – 2018. –N 1 – С. 10-18.
74. Mori S. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions / S. Mori, K. Tanaka// *Acta Metall.* – 1973. – Vol. 21. – P. 571–574.
75. Hori M. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids / M. Hori, S. Nemat-Nasser // *Mechanics of Materials.* – 1999. –Vol. 31. – P. 667–682.
76. Benveniste Y. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity / Y. Benveniste, T. Miloh // *Mechanics of Materials.* – 2001. – Vol. 33. – P.309–323.
77. Rizzo F. J. A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions / F. J. Rizzo, D. J. Shippy // *Mech. Res. Comm.* – 1979. – Vol. 6. – P. 99-103.
78. Sharma P. Interfacial elasticity corrections to size-dependent strain-state of embedded quantum dots/ P. Sharma, S. Ganti // *Physica Status Solidi.* – 2002. – Vol. 234. – P. 10–12.
79. Karaiev, A.O., Strelnikova, E.A.: Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. *Int. J. Model. Simulat. Scientific Comput.* 11(1), 2050003 (2020)
80. Gnitko, V.I., Degtyariv, K.G., Karaiev, A.O., Strelnikova, E.A.: Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquidfilled shells. *WIT Trans. Eng. Sci.* 126, 189–200 (2019)

81. Rizzo, F.J., Shippy, D.J.: A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.* 6, 99–103 (1979)
82. Rokhlin, V.: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.* 60(2), 187–207 (1985)
83. Og, J., Steinbach, O., Wendland, W.L.: Applications of a fast multipole Galerkin boundary element method in linear elastostatics. *Comput. Vis. Sci.* 8, 201–209 (2005)
84. Hackbusch, W., Nowak, Z.P.: On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.* 54(4), 463–491 (1989)
85. Goreinov, S.A., Tyrtyshnikov, E.E., Zamarashkin, N.L.: A theory of pseudoskeleton approximations. *Linear Algebra Appl.* 261, 1–21 (1997)
86. Buchau, A., et al.: Comparison between different approaches for fast and efficient 3-D BEM computations. *IEEE Trans. Magn.* 39(3), 1107–1110 (2003)
87. Bebendorf, M.: Approximation of boundary element matrices. *Numer. Math.* 86, 565–589 (2000)
88. Bebendorf, M., Rjasanow, S.: Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing* 70(1), 1–24 (2008)
89. Kurz, S., Rain, O., Rjasanow, S.: The adaptive cross approximation technique for the 3D boundary element method. *IEEE Trans. Magn.* 38(2), 421–424 (2002)
90. Langer, U., Pusch, D.: Data-sparse algebraic multigrid methods for large scale boundary element equations. *Appl. Numer. Math.* 54, 406–424 (2005)
91. Bebendorf, M., Grzhibovskis, R.: Accelerating Galerkin BEM for linear elasticity using adaptive cross approximation. *Math. Meth. Appl. Sci.* 29, 1721–1747 (2006)
92. Beylkin, G., Coifman, R., Rokhlin, V.: The fast wavelet transform and numerical algorithms. *Pure Appl. Math.* 44, 141–183 (1991)
93. Dahmen, W., Proßdorf, S., Schneider, R.: Multiscale methods for pseudodifferential equations. *Wavelet Anal. Applications* 3, 191–235 (1993)

94. Schneider, R.: Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur Lösung großer vollbesetzter Gleichungssysteme. Stuttgart (1998)
95. Gao, X.W.: The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Eng. Anal. Boundary Elem.* 26, 905–916 (2002)
96. Nardini, D., Brebbia, C.A.: A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Boundary Elem. Methods Eng.* 26, 312–326 (1982)
97. Partridge, P.W., Brebbia, C.A., Wrobel, L.C.: The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Computational Mechanics Publications, Southampton (1992)
98. Liu, H.W.: Numerical modeling of the propagation of ocean waves. Ph.D. Thesis, University of Wollongong (2001)
99. Zakerdoost, H., Ghassemi, H., Iranmanesh, M.: Solution of boundary value problems using dual reciprocity boundary element method. *Adv. Appl. Math. Mechan.* 9(3), 680–697 (2017)
100. Brunton, I.L., Pullan, A.J.: A semi-analytic boundary element method for parabolic problem. *Eng. Anal. Boundary Elem.* 18(4), 253–254 (1996)
101. Yun, B.I., Ang, W.T.: A dual-reciprocity boundary element method for axisymmetric thermoelastostatic analysis of non-homogeneous materials. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36, 1776–1786 (2012)
102. Zhu, S.P., Liu, H.W.: On the application of the multiquadric bases in the conjunction with the LTDRM method to solve nonlinear diffusion equations. *Appl. Math. Computation* 96(2-3), 161–175 (1998)
103. Ochiai, Y.: Meshless large plastic deformation analysis considering with a friction coefficient by triple-reciprocity boundary element method. *Int. J. Comp. Meth. Exp. Meas.* 6, 989–999 (2018)
104. Harder, R.L., Desmarais, R.N.: Interpolation using surface splines. *J. Aircraft* 2, 189–191 (1972)

105. Duchon, J., Schempp, W., Zeller, K. (eds.): *Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces*. Springer, Berlin, Heidelberg (1977)
106. Chen, C.S., et al.: A mesh free approach to solving the axisymmetric Poisson's equation. *RANA: Rep. Appl. Numer. Anal.* 0308 (2003)
107. Wang, K.K.: BEM simulation for glass parisons. Ph.D. Thesis, TUE: Department of Mathematics and Computer Science (2002)
108. Gradstein, I.S., Ryzhik, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Product*. Elsevier (2007)
109. King, L.V.: *On The Direct Numerical Calculation of Elliptic Functions and Integrals*. Cambridge University Press (1924)
110. Le M-T., Huang S-C., Modeling and Estimating the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites by Finite Element Method *J. Eng. Technol. Educ.* 11(2), pp. 145-158, 2014
111. Miller, R.E., Shenoy, V.B., Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements, *Nanotechnology*, 11, pp. 139-147, 2000.
112. Zingoni, A.: Liquid-containment shells of revolution. A review of recent studies on strength, stability and dynamic. *Thin-Walled Struct.* 87, 102–114 (2015)
113. Gnitko, V., Degtyariv, K., Naumenko, V., Strelnikova, E.: BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. J. Comput. Methods Exp. Meas.* 5(3), 317–328 (2017)
114. Spyros, A.K., Papaprokopiou, D., Platyracho, M.A.: Finite element analysis of sloshing in horizontal-cylindrical industrial vessels under earthquake. *J. Press. Vessel Technol. Trans. ASME* 131, 05130101–05130111 (2009)
115. Gnitko, V., Marchenko, U., Naumenko, V., Strelnikova, E.: Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. In: *Proceedings of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods*, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, vol. 52, pp. 285–296 (2011)
116. Wang, X.H., Redekop, D.: Natural frequencies analysis of moderately-thick and thick toroidal shells. *Procedia Eng.* 14, 636–640 (2011)

117. Enoma, N., Egware, H.O., Itoje, H.J., Unueroh, U.G.: Membrane solutions for circular toroidal shells under internal hydrostatic pressure. *J. Multidiscip. Eng. Sci. Technol.* 2(10), 2895–2901 (2015)
118. Zua, L., Koussiosb, S., Beukersb, A.: A novel design solution for improving the performance of composite toroidal hydrogen storage tanks. *Int. J. Hydrog. Energy* 37, 14343–14350 (2012)
119. Zingoni, A., Mokhothu, B., Enoma, N.: A theoretical formulation for the stress analysis of multi-segmented spherical shells for high-volume liquid containment. *Eng. Struct.* 87, 21–31 (2015)
120. Jeong, K.-H.: Natural frequencies and mode shapes of two coaxial cylindrical shells coupled with bounded fluid. *J. Sound Vib.* 215(1), 105–124 (1998)
121. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V., Matveenko, V.P.: Numerical modeling of spatial vibrations of cylindrical shells partially filled by liquid. *Comput. Technol.* 18(2), 12–24 (2013)
122. Mikilyan, M., Marzocca, P.: Vibration and stability of coaxial cylindrical shells with a gap partially filled with liquid. *J. Aerosp. Eng.* 32(6), 12–26 (2019)
123. McIver, P.: Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech.* 201, 243–250 (1989)
124. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N.: *Sloshing*. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
125. Curadelli, O., Ambrosini, D., Mirasso, A., Amani, M.: Resonant frequencies in an elevated spherical container partially filled with water: FEM and measurement. *J. Fluids Struct.* 26(1), 148–159 (2010)
126. Kulczycki, T., Kwaśnicki, M., Siudeja, B.: The shape of the fundamental sloshing mode in axisymmetric containers. *J. Eng. Math.* 99(1), 157–193 (2016)
127. Budiansky, B.: Sloshing of liquid in circular canals and spherical tanks. *J. Aerosp. Sci.* 27 (3), 161–172 (1960)
128. Gnitko, V.V., Degtyariov, K.G., Naumenko, V.V., Strelnikova, E.A.: Coupled BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. J. Comput. Methods Exp. Meas.* 6(6), 976–988 (2018)

## ДОДАТОК А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. V Gnitko, K Degtyariv, A Karaiev, E Strelnikova. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019/1/30; 122: 13-25. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі теорії пружності твердих тіл за наявності мікро- та нано-включень; побудував числовий алгоритм знаходження власних частот коливань сферично-циліндричних резервуарів із рідиною)*

2. V Gnitko, K Degtyariv, A Karaiev, E Strelnikova. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019/9/13; 126: 189-200. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі коливань нев'язкої рідини в циліндричних резервуарах різних типів: циліндрично-сферичних, циліндрично-конічних тощо; застосував швидкий алгоритм методу сингулярних границь до розв'язання задачі власних функцій та власних частот вільних коливань рідини; створив квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів, що виникають при розв'язанні системи лінійних рівнянь у задачах теорії потенціалу)*

3. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020/2/20; 11(01): 2050003. (Scopus, Singapore, Q3)

*(Особистий внесок здобувача: дослідив та обчислив квадратурні формули для*

*розв'язання сингулярних інтегралів, що виникають при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих поверхневих сил та деформації твердих тіл у задачах теорії пружності)*

4. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1): 3-13. (Scopus, Germany, Q4)  
*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель коливань рідини в тороїдальних та коаксіальних циліндричних оболонках, зокрема розглянув та аналітично дослідив резонансні частоти коливань при малих радіусах тороїдальних оболонок; розробив числовий алгоритм знаходження власних частот та власних функцій коливань рідини в тороїдальних оболонках)*

5. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Maria L Myronenko, Elena A Strelnikova. BEM analysis of gravitational–capillarity waves on free surfaces of compound shells of revolution. International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2021/3/4; 9(1): 38-50. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель коливань рідини в циліндричних резервуарах за наявності впливу сил поверхневого натягу рідини та гравітаційного поля; розробив метод розділення задачі коливань рідини на виключно гравітаційну задачу та знайшов методом збурень розв'язок загальної гравітаційно-капілярної задачі, знаючи значення власних функцій виключно гравітаційної задачі)*

6. Artem Karaiev, Elena Strelnikova. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021/4; 101(4): e201800339. (Scopus, Germany, Q2)

*(Особистий внесок здобувача: отримав новий клас спеціальних функцій, названих спеціальними еліптичними інтегралами, що узагальнюють відомі класичні повні еліптичні інтеграли; отримав рекурентні формули, що дозволяють обчислити з будь-якою заданою точністю спеціальні еліптичні*



*інтеграли будь-якого порядку; використав отримані формули для числового розв'язання задач знаходження електричного потенціалу заряджених тіл та задач термопластичності)*

7. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Neelam Choudhary, Elena A Strelnikova. Boundary element method analysis of boundary value problems with periodic boundary conditions. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2021/8/24; 131: 31-44. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: побудував математичну модель задачі коливань рідини в циліндричних резервуарах з періодичними граничними умовами; використав отримані вище спеціальні еліптичні інтеграли для розв'язання сингулярних інтегралів, що породжені розгляданням періодичних функцій в ряди)*

8. Vasyl I Gnitko, Artem O Karaiev, Kyryl G Degtyariov, Ivan A Vierushkin, Elena A Strelnikova. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2022/7/25; 134: 67-79. (Scopus, United Kingdom, Q4)

*(Особистий внесок здобувача: розробив квадратурні формули для розв'язання сингулярних інтегралів з логарифмічною особливістю; використав отримані формули для числового аналізу коливань рідини в пружних резервуарах)*

#### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

9. Караєв А.О., Стрельнікова О.О. Аксіально-симетричні полігармонічні сплайни в задачах теорії потенціалу // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 24.

10. Artem Karaiev and Elena Strelnikova. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells // 3 rd International Conference on Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange (DSMIE-2020), June 9-12, 2020. Kharkiv, Ukraine. P.114.

11. Elena Sierikova, Elena Strelnikova, Denys Kriutchenko, Artem Karaiev.  
Coupled boundary and finite element method for stability analysis of launch vehicle  
// 3rd International Black Sea Modern Scientific Research Congress, March 23-24,  
2023 - Samsun, Turkiye. P. 228.

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ

створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:35:47 22.05.2023

Назва файлу з підписом: Дисертація\_Караєв\_2023Corr..pdf.p7s

Розмір файлу з підписом: 2.4 МБ

Назва файлу без підпису: Дисертація\_Караєв\_2023Corr..pdf

Розмір файлу без підпису: 2.4 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: КАРАЄВ АРТЕМ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

П.І.Б.: КАРАЄВ АРТЕМ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 3469008719

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 01:24:55  
12.05.2023

Сертифікат виданий: АЦСК АТ КБ «ПРИВАТБАНК»

Серійний номер: 2B6C7DF9A3891DA10400000003C7C1001E3F7703

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAAdES-X Long)

Сертифікат: Кваліфікований