# Application of quasiconformal surgery to some transcendental meromorphic functions( Abstract_要旨 )

AUTHOR(S):

Naba, Hiroto

（ 続紙 １ ）

| 京都大学 | 博士（　人間・環境学　） | 氏名 | 那波　弥人 |
|---|---|---|---|
| 論文題目 | Application of quasiconformal surgery to some transcendental meromorphic functions（超越有理型関数への擬等角手術の応用） | | |

（論文内容の要旨）

力学系理論とは時間と共に発展する系を数学の言葉で定式化したもの（＝力学系)について、特に長時間経過後の系の振る舞いを研究する分野である。本論文では時間を離散変数として設定した離散力学系で、相空間を複素平面、写像を超越整関数または更に一般に超越有理型関数とした複素力学系についての数学理論を展開している。特に本論文では擬等角手術という手法によって様々な力学系的性質を持つ超越整関数あるいは超越有理型関数を構成することがメインテーマとなっている。擬等角手術とは、構成したい力学系的性質を持つ擬正則写像を予め構成し、それを適切な擬等角写像で共役を取ることによって最終的に構成したい関数を得る、という手法である。

第1章では本論文で述べられる結果に関する状況設定が説明された後、定理の内容が述べられている。内容は大きく分けて次の3つである：

(1)Speiserクラスに属する超越整関数に対するFatou-宍倉不等式の最良性（定理A）、

(2)無理的中立不動点を持つ超越整関数について（定理B～H）、

(3)ある超越有理型関数が有界型Siegel円板を持つときのその境界について（定理I）。

第2章では定理の証明の準備として複素力学系理論に現れる基本的概念とその基本的性質、また定理に証明に必要な重要な手法について解説されている。具体的には以下のものである：

・複素力学系理論で重要な不変集合であるFatou集合とJulia集合の定義と基本性質、

・Speiserクラスの超越整関数（即ち、特異値を有限個しか持たない超越整関数）の基本性質、またその部分クラスである構造有限超越整関数の定義と性質、

・無理的中立不動点（即ち、Siegel点とCremer点）の定義と性質、

・擬等角写像、擬対称写像の定義と基本性質、実軸上の擬対称写像を上半平面上の擬等角写像へ拡張する手法として有名なBeualing-Ahlfors拡張について、

・擬等角手術の理論について。

第3章では定理Aの証明が述べられている。Speiserクラスに属する超越整関数 $f$ は特異値を有限個しか持たず、それ故にFatou集合の連結成分（Fatou成分という）として遊走領域を持たない。更に周期的なFatou成分は吸引域、放物型吸引域、Siegel円板の3種類に分類される。Fatou-宍倉不等式とはこれら3種類にCremerサイクルを加えた4種類のものが何個ずつあるかを数えた総数が $f$ の特異値の数以下である、と主張するものであ

る。この不等式の最良性とは、逆にこの不等式を満たすように吸引域、放物型吸引域、Siegel円板、Cremerサイクルの個数を与えたとき、それを実現するようなSpeiserクラスの超越整関数 f が存在することをいう。有理関数の場合にはこの不等式の最良性が宍倉によって証明されているが、超越整関数の場合にはCremerサイクルを与えられた個数だけ持つようなものの構成が有理関数の場合と同じ手法が使えず、難しい。ここでは有理的中立不動点でその非常に小さい近傍に周期点を持つような関数の列を構成し、その極限としてCremer点をもつ関数を構成している。

第4章では定理B～Hの証明が述べられている：

・定理B：超越整関数の族で原点が無理的中立不動点であるもので、原点がSiegel点であるための必要十分条件が「その乗数がBrjuno条件を満たすこと」であるようなものを構成した。

・定理C：Cremer点を持つ超越整関数でその乗数が「Cremer条件(d)」なる条件を満たすものを構成した（注：この条件はd次の有理関数に対してはCremer点を持つための十分条件であるが、超越整関数に対しては十分条件であるかどうかは全く知られていない。）

・定理D： P(z)exp(Q(z))（P,Qは多項式）の形の超越整関数で、原点以外の点をSiegel点とするSiegel円板を持ち、その境界が擬円となり、またその境界に臨界点が存在するようなものを構成した。

・定理E：超越整関数で、原点をSiegel点とするSiegel円板を持ち、その境界には臨界点が存在するが、境界は擬円ではないJordan閉曲線となるものを構成した。

・定理F：超越整関数で、原点をSiegel点とするSiegel円板を持ち、その境界には臨界点が存在しないものを構成した。

・定理G：超越整関数でJulia集合のLebesgue測度が0であるものを構成した。

・定理H：超越整関数でJulia集合のLebesgue測度が正となり、かつSiegel点を持つ（またはCremer点を持つ）ものを構成した。

なお、定理E～Hではいずれも定理Dにある形の超越整関数が構成されている。

第5章では定理Iの証明が述べられている。定理IではP(z)exp(Q(z))（Pは１次有理関数、Qは１次多項式）の形の超越有理型関数を扱っている。これが原点で有界型Siegel円板を持つとき、まず力学系としての標準型（1-パラメーター族となる）を求め、その上で以下のことを証明した：

・2つの臨界点が一致するようなパラメーターは可算無限個あり、このときSiegel円板の境界は擬円で臨界点を1個だけ含む。

・ある非可算個のパラメーター値において、Siegel円板の境界は擬円で臨界点を1個だけ含む。

・あるパラメーター値でSiegel円板の境界は擬円で臨界点をちょうど2個含む。

第6章ではconcluding remarksとして(1)～(3)に対する今後の課題と未解決問題が述べられている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

１変数複素力学系の理論においては多項式や有理関数を研究対象としたものが主流である。一方、超越整関数や超越有理型関数の力学系は相空間である複素平面がコンパクトではなく、また写像が無限対1であるために、前者の場合に使えるある種の有限性を用いた議論ができなくなり、それ故に著しい困難さを伴う。本論文はこのような後者の関数を研究対象としたものであり、擬等角手術の手法を用いて様々な力学系的性質を持つ超越整関数、超越有理型関数を構成することをメインテーマとしている。

本論文で得られた様々な結果の評価されるべき点は大きく分けて次の(1)～(3)にまとめられる。

(1)Speiserクラスに属する超越整関数に対するFatou-宍倉不等式の最良性（定理A）:

多項式や有理関数に対して成り立つFatou-宍倉不等式の類似の結果がSpeiserクラスに属する超越整関数に対して成り立つことはEremenkoとLyubichによって既に知られていた。ところがその最良性は未知であった。証明のある部分については擬等角手術の手法が設定を適切に変更することによって使えるものの、証明の困難さはCremer点の構成が多項式や有理関数のときの証明と同じ手法では達成できないことにあった。本論文では有理的中立不動点でその非常に小さい近傍に周期点を持つような関数の列を構成し、無理数の連分数近似の理論を援用しつつ、その極限としてCremer点をもつ関数を構成するという手法を新たに開発し、その証明に成功している。更にこの手法は既知である、多項式や有理関数に対するFatou-宍倉不等式の最良性の証明にも適用できる、即ち、この場合に対する新しい別証明を与えることは特筆すべきである。

(2)無理的中立不動点を持つ超越整関数の様々な例の構成（定理B～H）:

実に興味深い様々な超越整関数で無理的中立不動点を持つものが構成されている。基本的なアイデアは、超越整関数で多項式類似写像の構造を部分力学系として持ち、その多項式類似写像が所望の性質を持つものを構成する、というものである。定理Bでは超越整関数の族で原点が無理的中立不動点であるもので、原点がSiegel点であるための必要十分条件が「その乗数がBrjuno条件を満たすこと」であるようなものを構成している。２次多項式族に対してBrjuno条件が必要十分条件であることは、Yoccozによって証明された画期的な結果で彼のフィールズ賞受賞理由の１つになっている。ところがこの類似の結果はあまり見当たらず、特に超越整関数の場合にはGeyerによって$cz \cdot \exp(z)$なる族に対して成り立つことが知られている程度であった。本論文では多項式類似写像の構造を部分力学系として持つ超越整関数で、その多項式類似写像がYoccozの結果の類似が成り立つあるd次多項式族と共役となるようなものを構成する、という手法で証明している。これはコロンブスの卵的なものであるが大変興味深

いものであり、更に結果的にはGeyerの示したcz･exp(z)なる族を含む形で上記のような例を示せたのは、定理の見た目としても美しい。定理CではCremer点を持つ超越整関数でその乗数が「Cremer条件(d)」なる条件を満たすものを構成している。この条件はd次の有理関数に対してはCremer点を持つための十分条件であるが、一般の超越整関数に対しては十分条件であるかどうかは全く知られていない。このような乗数を持つCremer点が超越整関数で構成されたのは興味深い。定理D～HではP(z)exp(Q(z))（P,Qは多項式）の形の超越整関数でSiegel円板を持つもの、またCremer点を持つもので実に様々な例が構成されている。詳細は省略するがいずれも先行研究で示されていた例とは異なる、更には正反対の性質を持つもの、あるいは先行研究で示されていた結果を精密化したものとなっている。

(3)ある超越有理型関数が有界型Siegel円板を持つときのその境界について(定理I)：定理IではP(z)exp(Q(z))の形でPを１次有理関数、Qを１次多項式とした超越有理型関数を扱っている。これが原点で有界型Siegel円板を持つときにその境界の形状と境界上にある臨界点について議論している。Siegel円板の境界が擬円になるかどうか、また臨界点が境界上にあるかどうかは重要な研究テーマであり、多項式や有理関数の場合には深い結果が知られている。一方超越的な場合にはZakeriやKeenとZhangによる先行研究で上記のP,Qが多項式である超越整関数の場合が議論されている。本論文は同様の問題を超越有理型関数の場合に議論した恐らく世界初のものである。一般に超越有理型関数の場合は超越整関数の場合と比較すると極の存在が議論を一層困難にする。本論文では対象を上記の形の関数、即ち考え得る最も単純な場合に限定した上で、先行研究で得られていた結果がどの程度まで成り立つかを明らかにしている。手法としては特段に新しいものはないものの、極の存在故の困難さを避けつつ、超越有理型関数の場合に既存の方法がどこまで通用するかを具体的に明らかにしたことは評価に値する。

以上のことにより、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和5年1月16日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　令和　　　年　　　月　　　日以降