ARITHMETIC HILBERT-SAMUEL FUNCTIONS AND χ-VOLUMES OVER ADELIC CURVES(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Luo, Wenbin

（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	駱 文斌　（Luo, Wenbin）
論文題目	ARITHMETIC HILBERT-SAMUEL FUNCTIONS AND χ-VOLUMES OVER ADELIC CURVES （アデリック曲線上の算術的ヒルベルト・サミュエル関数と χ 体積）		

（論文内容の要旨）

近年，アラケロフ幾何の分野において大きく発展しているのが，陳・森脇によるアデリック曲線上のアラケロフ幾何である．これは，大域的な体のみに許されていた高さ関数の理論を多くの体に拡張する理論である．まずはそれについて簡単に述べたいと思う．パラメター空間とよばれる測度空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ と K の絶対値の集合 $\{|\cdot|_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ が存在して，任意の $a \in K^\times$ に対して，$\omega \in \Omega \mapsto \log|a|_\omega$ が Ω 上可積分であるとき，$((\Omega, \mathcal{A}, \nu), \{|\cdot|_\omega\}_{\omega\in\Omega})$ を K のアデリック曲線，または，K のアデリック構造という．さらに，いわゆる積公式

$$\int_\Omega \log|a|_\omega \nu(d\omega) = 0$$

が任意の $a \in K^\times$ で成立するとき，アデリック構造は固有とよぶ．このような固有なアデリック構造を多くの体がもつ．例えば，代数体，関数体，有理数体上有限生成な体，体とその自明な絶対値，可算濃度をもつ体等である．$\omega \in \Omega$ に対して，K の $|\cdot|_\omega$ に関する完備化を K_ω で表すことにする．E が K 上の有限次ベクトル空間であるとき，それぞれの $E_\omega := E \otimes_K K_\omega$ に K_ω 上のノルム $\|\cdot\|_\omega$ を考え，その集まり $\xi = \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ が然るべき条件を満たすとき，(E, ξ) をアデリックベクトル束とよぶ．アデリックベクトル束に対しては $\widehat{\deg}(E, \xi)$ が定義され，これをアラケロフ次数とよぶ．

さて X は K 上で定義された d 次元の幾何学的に被約な射影スキームとし，L は X 上の豊富な直線束とする．各 $\omega \in \Omega$ に対して，$X_\omega := X \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(K_\omega)$ の Berkovich の意味での解析化 X_ω^{an} 上で L_ω の半正な計量 φ_ω を考える．その集まり $\varphi = \{\varphi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ が然るべき条件を満たすとき，$\overline{L} = (L, \varphi)$ はアデリック直線束とよび，$(H^0(X, L^{\otimes n}), \{\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}\}_{\omega\in\Omega})$ は K 上のアデリックベクトル束になる．ここで，$\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}$ は $n\varphi_\omega$ から定まる最大値ノルムである．したがって，そのアラケロフ次数

$$\widehat{\deg}\left(H^0(X, L^{\otimes n}), \{\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}\}_{\omega\in\Omega}\right)$$

が定まる．これは，通常の代数多様体の場合のオイラー指数の類似物である．このとき，

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L, \varphi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\widehat{\deg}\left(H^0(X, L^{\otimes n}), \{\|\cdot\|_{n\varphi_\omega}\}_{\omega\in\Omega}\right)}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

で定まる数が χ-体積と呼ばれる量である．したがって，通常の代数多様体ではリーマン・ロッホの定理を考えると交点数て与えられるものである．同様のことが，陳・

森脇により，固有なアデリック曲線上でも成立することが知られている．この公式はアデリック曲線上のヒルベルト・サミュエル公式と呼ばれている．

上述のような背景の元，駱氏の学位論文は２つ部分からなる．一つ目は前述の χ-体積の連続性である．$\mathbb{Q}$-直線束のみを考えれば，これはアデリック曲線上のヒルベルト・サミュエル公式から導きだせるが，注目に値するのは，この事実をアデリック曲線上のヒルベルト・サミュエル公式を用いず証明している点である．さらに，$\mathbb{R}$-直線束の場合にまで拡張している点は特筆に値する．

２番目の部分が学位論文の主要部分である．d 次元の射影代数多様体上のネフな直線束 L と M があるとき，Siu によって証明されたのが

$$\mathrm{vol}(L-M) \geqslant (L^d) - d(L^{d-1}\cdot M)$$

というわゆる Siu の不等式である．これの関数体上でのアラケロフ幾何的な類似を考えようというのが，２番目のテーマである．Y は標数 0 の e 次元の正規な射影代数多様体とし，K はその関数体とする．Y 上のネフな直線束 $H_1,\ldots,H_{e-1}$ を固定すると K には自然に固有なアデリック構造 $S=((\Omega,\mathcal{A},\nu),\{|\cdot|_\omega\}_{\omega\in\Omega})$ が入る．この場合，アデリック構造のパラメター空間 Ω は Y の余次元 1 の点全体である．K 上の幾何学的に被役な d 次元の射影スキーム X と S に関する X 上の半正なアデリック直線束 $\overline{L}$ と $\overline{M}$ を与えた場合，上記の Siu の不等式のアデリック曲線 S 上での類似

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}-\overline{M}) \geqslant (\overline{L}^{d+1}) - (d+1)(\overline{L}^d\cdot\overline{M})$$

が成り立つことを駱氏は学位論文で示した．これは Yuan によって得られている代数体上での結果の関数体類似でもある．この不等式により，Gubler と Faber によって得られていた関数体上での等分布定理の別証明を与えることにも成功した．

これらの諸結果は，アラケロフ幾何の研究者に大きなインパクトを与えており，これからのますますの発展が期待できるものである．

（続紙 2）

（論文審査の結果の要旨）

有理点の複雑さを測る高さ関数は，従来，大域体（代数体，又は，有限体上超越次数が 1 の体）に限られていたが，Chen・森脇の研究により，多くの体のクラス（大域体，関数体，有理数体上有限生成な体，加算濃度の体）に拡張できるできることがわかってきた．この発展に伴って，代数体に限られていた高さ関数が関わる結果を，例えば算術的関数体（有理数体上有限性な体）にまで拡張する試みが現れてきている．例えば，カリフォルニア大学バークレー校の Vojta による Roth の定理の算術的関数体への拡張がある．また，プリンストン大学の S. Zhang や北京大学の X. Yuan によっても種々の研究が始まってる．さらに，Chen・森脇により，アデリック構造を持つ体上のアラケロフ幾何の基礎研究も進んでおり，Hilbert-Samuel 公式（Riemann-Roch 定理の漸近版），等分布定理，ボゴモロフ予想の一般化等の証明が完成している．今後，大きく発展していくと考えられている分野である．

学位論文の主結果は代数多様体で知られていた Siu の不等式を，関数体に関するアデリック曲線上でのアラケロフ幾何的類似を証明しようという試みで，その結果の応用して，関数体上での等分布定理を導き出せるほど強い不等式を与えている．この結果はアラケロフ幾何の専門家の間で高く評価されており，駱氏は今後のさらなる発展が期待される若手のホープとして注目されている．

駱氏の博士論文は，この分野の世界的権威であるパリ大学の Huayi Chen 教授に外部審査を求めた．その評価は

「In conclusion, Wenbin Luo’s thesis makes substantial advancements in difficult subjects of Arakelov geometry over adelic curves. The methods that he manages to create and employ have much potential in the further study of arithmetic invariants of adelic line bundles. I recommend strongly the defense of his thesis.」

であり，高い評価であった．また，学内の審査委員の審査結果も好評価であった．さらに，論文の主要部は，学術誌に投稿中であり，掲載が決まり次第，全文の公開ができると思われる．

以上のことより，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，令和 4 年 12 月 23 日，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月