力学系に対する相空間全構造計算の手法と応用

京都大学大学院理学研究科数学教室　宮路智行 *
Tomoyuki Miyaji
Department of Mathematics, Kyoto University

Conley の力学系の基本定理は，任意の力学系は回帰的な成分とそれらの間を結ぶ勾配的な成分とに分解されることを教えてくれる [6]．そのような力学系の大域的な相空間構造の位相的な記述が得られれば，時間発展を伴う現象を数理モデルを通してよりよく理解する助けとなるに違いない．このために，計算機援用解析が重要な役割を果たす．

力学系の相空間構造を解明するとき，分岐理論と数値分岐解析がしばしば役に立つ．そこでは個々の力学系だけでなく，力学系のパラメータ族を考え，既知の解（平衡点や周期軌道など）から出発して，パラメータを変化させながら追跡する．分岐点を検出すればそこから分岐する枝に切り替えて追跡することで既知の範囲を拡大していくことができる．そのためのソフトウェアとして AUTO[9] や MATCONT[8] などがよく知られており，広く活用されている．

ただし，そのような分岐解析による方法では，既知の枝から孤立したものは見つけられない．一方で，力学系相空間構造計算法ならば，相空間全体に対する集合指向な計算により，そのように孤立していても見つけることができる．

力学系の大域的構造に対する計算機による試みとして Dellnitz らのソフトウェア GAIO[7] が挙げられる．また，Conley の基本定理に対する計算機によるアプローチに関する研究がなされてきた ([11, 2])．Arai らは，それらの流れを汲みながらさらに推し進めて，これを計算機に実装する Conley-Morse database の方法論を確立した [1] [20]．力学系を回帰的成分 (Morse 集合) とそれらの間の勾配として表す Morse 分解を与え，

*〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 tmiyaji@math.kyoto-u.ac.jp

各 Morse 集合に Conley 指数によって安定性の情報を付与するものである．その計算については，精度保証付き数値計算 [18]，計算ホモロジー [10, 14]，および Conley 指数 [15, 21] を組み合わせた，洗練されたフレームワークが提案されている ([1], [3])．特に，パラメータ空間をもグリッド分割して隣接するグリッド要素同士で Conley-Morse グラフを比較し追跡することで，ダイナミクスの変化を検出するものである．

常微分方程式に対しては，Lohner 法 [13, 23] などの精度保証付き数値計算による ODE ソルバーを用いて時間 T 写像や Poincaré 写像を計算することでこれを利用できる [16]．そのような ODE ソルバーを含むライブラリとして CAPD ライブラリ [22] が挙げられる．ただし，精度保証付き ODE ソルバーは数学的に厳密な結果を得られるという利点の反面，多くの計算コストを要する．我々は計算コストを削減して現実的な時間で Morse 分解を得るため，浮動小数点数演算による近似解法による Morse 分解の方法を近年提案した [4, 5]．数学的な厳密さは犠牲となるが，力学系の大域的構造を理解する足がかりとして活用できるだろう．

以上のように，（パラメータ空間も含んだ）力学系の大域的構造を計算する手法の枠組はあるものの，ODE への応用など解決するべき課題が残っており，分岐解析ソフトウェアのように誰にでも利用できるというところまでは未だ至っていない．一方，近年は時系列データに対して Morse 分解の手法を応用する試みもなされている [12, 19, 17]．数理モデルやデータから現象をよりよく理解する方法論を確立していきたい．本講演では Morse 分解を計算するこれらの方法とその応用について議論した．

参考文献

[1] Arai, Z., Kalies, W., Kokubu, H., Mischaikow, K., Oka, H., and Pilarczyk, P., A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **8** (2009) 757–789.

[2] Ban, H. and Kalies, W., A Computational Approach to Conley's Decomposition Theorem, *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, **1** (2006), 312–319.

[3] Bush, J., Gameiro, M., Harker, S., Kokubu, H., Mischaikow, K., Obayashi, I., and Pilarczyk, P., Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics, *Chaos* **22** (2012) 047508.

[4] Chiba, Y., Miyaji, T., Ogawa, T., Computing Morse decomposition of ODEs via Runge-Kutta method, *JSIAM Letters* **13** (2021) 40–43.

[5] Chiba, Y., Miyaji, T., Ogawa, T., Erratum: Computing Morse decomposition of ODEs via Runge-Kutta method, *JSIAM Letters* **13** (2021) 88.

[6] Conley, C., *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.

[7] Dellnitz, M. et al., The algorithm behind GAIO − Set oriented numerical methods for dynamical systems, in: B. Fiedler(eds) Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical Systems, pp.145–174, Springer, 2001.

[8] Dhooge A., Govaerts W. and Kuznetsov Yu. A., MatCont: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs, *ACM TOMS* **29** (2003) 141–164.

[9] Doedel, E.J. and Oldeman, B.E., AUTO07-P: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, `http://indy.cs.concordia.ca/auto/`. (accessed 2023-01-27)

[10] Kaczynski, T., Mischaikow, K., Mrozek, M., Computational Homology, Springer, New York, 2004.

[11] Kalies, W.D., Mischaikow, K., and VanderVorst, R.C.A.M., An Algorithmic Approach to Chain Recurrence, *Found. Comput. Math.* **5** (2005) 409–449.

[12] Kokubu, H. and Obayashi, I., An attempt to understand global structure of dynamics in nonlinear phenomena, *Brain Neural Netw.* **22**(2) (2015), 68–77 (in Japanese).

[13] Lohner, R.J., Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems, in E. Kaucher et al.(eds.) *Computerarithmetic:*

Scientific Computation and Programming Languages, pp. 255–286, B.G. Teubner, Stuttgart, 1987.

[14] Mischaikow, K. and Gameiro, M., CHomP Computational Homology Project, `https://chomp.rutgers.edu/` (accessed 2023-01-24)

[15] Mischaikow, K. and Mrozek, M., Chapter 9 - Conley index, in B. Fiedler (ed) *Handbook of Dynamical Systems Volume 2*, pp. 393–460, Elsevier Science, 2002.

[16] Miyaji, T., Pilarczyk, P., Gameiro, M., Kokubu, H., Mischaikow, K., A study of rigorous ODE integrators for multi-scale set-oriented computations, *Appl. Numer. Math.* **107** (2016) 34–47.

[17] Miyaji, T., Sviridova, N., Aihara, K., Zhao, T., Nakano, A., Human photoplethysmogram through the Morse graph: Searching for the saddle point in experimental data, *Chaos* **29** (2019) 043121.

[18] Moore, R.E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[19] Morita, H., Inatsu, M., Kokubu, H., Topological Computation Analysis of Meteorological Time-Series Data, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **18** (2019) 1200–1222.

[20] Pilarczyk, P., Conley-Morse Graphs Computation Software, `https://www.pawelpilarczyk.com/cmgraphs/` (accessed 2023-01-27)

[21] Salamon, D., Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291**(1985) 1–41.

[22] Wilczak, D., The CAPD group. `http://capd.sourceforge.net/capdDynSys/` (Accessed 2023-01-24)

[23] Zgliczynski. P., C^1 Lohner algorithm, *Found. Comput. Math.*, **2**(2002) 429–465.