三重周期極小曲面におけるMorse指数と符号数の関係について (部分多様体論と幾何解析の新展開)

庄田, 敏宏

三重周期極小曲面におけるMorse指数と符号数の関係について

関西大学・システム理工学部・数学科　庄田 敏宏 *
Toshihiro Shoda
Department of Mathematics,
Faculty of Engineering Science,
Kansai University

概 要

三重周期極小曲面は界面活性剤の膜の数学的モデルであることが知られており, 数学以外の分野でも多く研究されている. この10年間, 江尻典雄氏との共同研究によって, 三重周期極小曲面の幾何的量, 具体的には, Morse 指数・退化次数・符号数を計算し, 三重周期極小曲面全体の Moduli 空間の分類を試みてきた. その成果の一部として, 1990年代に物理学者たちによって構成された種数3の変形族に対する幾何的量を数値計算を用いて特定したというものがある. 本講演では, 種数4の有名な例である A. Schoen の I-WP 曲面に対する幾何的量を数学的に特定したという最新の結果を報告した. 本稿ではその概略を紹介したい.

1　状況設定, Morse指数と退化次数

$\widetilde{f}:\widetilde{M}\to\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ 内の三重周期極小曲面とする. この周期性の基本領域を $\mathbb{R}^3$ 内の格子 Λ と考え, 全空間を平坦トーラス $\mathbb{R}^3/\Lambda$ とすると, 平坦トーラス内の向き付けられた閉極小曲面 $f:M\to\mathbb{R}^3/\Lambda$ が得られる. したがって, 三重周期極小曲面は平坦トーラス内の向き付けられた閉極小曲

*本内容は, 科学研究費 (基盤研究 (C) 一般,「幾何学的不変量による周期的極小曲面のモジュライ空間の研究」課題番号 20K03616) の援助を受けており, また, 江尻典雄氏との共同研究に基づくものである.

面に対応するが, 後者は閉 Riemann 面という古典的な状況であるため, 変形理論を始めとした多くの理論が展開される対象であり, こちらの方を主対象とする. M の種数を γ とすると, Gauss-Bonnet の定理からの帰結にて, 全測地的でない場合は $\gamma \geq 3$ となる ([12] を参照のこと).

一般に, 平坦トーラス内の向き付けられた閉曲面 $f : M \to \mathbb{R}^3/\Lambda$ に対して, 平坦計量の f による誘導計量による面積関数

$$A(f) = \int_M dv$$

が定義される. $\{f_t\}$ を $f_0 = f$ なる, f の任意の変形とすると,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(f_t) = 0$$

なる f を**極小はめ込み**という. また, このときの $f(M)$ を**極小曲面**という. さらに, 単位法線ベクトル場 N と M 上の任意の滑らかな関数 u を用いて, 変分ベクトル場を $df_t/dt|_{t=0} = uN$ と限定しても以降の議論は一般性を失わないことが知られており, このとき, 面積関数の第 2 変分は, 誘導計量による Gauss 曲率 K を用いて,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} A(f_t) = \int_M (|\nabla u|^2 + 2Ku^2) dv = -\int_M (\Delta u - 2Ku) u dv$$

となる. これは 2 階の楕円型偏微分作用素 $\Delta - 2K$ の固有値問題

$$\Delta u - 2Ku + \lambda u = 0$$

と関連しており, λ を**固有値**, u をその**固有関数**という. 任意の滑らかな関数はこの固有関数たちのべき級数で展開できることが知られており, このことから, 負の固有値の存在が面積関数の第 2 変分が負となる方向の存在に対応する. 極小曲面は面積関数の臨界点を与える曲面であるが, 負の固有値がある場合はその固有関数の方向に曲面を変形すれば面積が減少する. したがって, 負の固有値の個数はその極小曲面の面積が減少する独立な方向の多さを表し, 面積最小の状態からの差を表す一つの試金石となる. このような視点から, 負の固有値の重複度も込めた個数を **Morse 指数**, 0 固有値の重複度を**退化次数**といい, 重要な幾何的量を与える. なお, 全空間である平坦トーラス内の平行移動を法方向に制限したものは退化次数を与えることが知られており, 退化次数は 3 以上であることが判る. 以上の内容は, 例えば, [15] を参照されたい.

2 Moduli 空間

平坦トーラス内の向き付けられた閉極小曲面 $f : M \to \mathbb{R}^3/\Lambda$ を記述する上で有力な手法は, f による誘導計量に適合した等温座標系によって M を Riemann 面と考えて議論することであり, このときの f を**共形極小はめ込み**という. 実際, 次の表現公式が知られている.

定理 1 (Weierstrass の表現公式)**.**
向き付けられた閉曲面から平坦トーラスへの共形極小はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^3/\Lambda$ は次のように表される:

$$f(p) = \Re \int_{p_0}^{p} (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

ここで, $p_0 \in M$ は定点, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は以下を満たす M 上の正則微分である.
(i) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は共通零点をもたない.
(ii) $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0$.
(iii) $\{\Re \int_C (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid C \in H_1(M)\} \subset \Lambda$.

(iii) は線積分 f の well-defined 性を保証するものであり, 次のような書き換えがある. $\{A_j, B_j\}_{j=1}^{\gamma}$ を M 上の標準ホモロジー基底とし,

$$\Omega := \begin{pmatrix} \int_{A_1} \omega_1 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_1 & \int_{B_1} \omega_1 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_1 \\ \int_{A_1} \omega_2 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_2 & \int_{B_1} \omega_2 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_2 \\ \int_{A_1} \omega_3 & \dots & \int_{A_\gamma} \omega_3 & \int_{B_1} \omega_3 & \dots & \int_{B_\gamma} \omega_3 \end{pmatrix}$$

なる $3 \times 2\gamma$ 複素行列を**複素周期行列**といい, $\Re\Omega$ を**実周期行列**ということにする. 実周期行列の各列は $\mathbb{R}^3$ 内のベクトルと見なすことができ, これらが 2γ 個ある. 必要があれば Λ をとり替えることによって, (iii) はこれら 2γ 個のベクトルたちが $\mathbb{R}^3$ 内の格子を定めることと同値である.

Moduli 空間の定式化は Pirola [13], Arezzo-Pirola [1] によるものと江尻 [4], [5] によるものがあるが, ここでは簡易的な記述を優先させて, 前者を用いる. (i), (ii) を満たす正則微分 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を用いて,

$$\mathcal{M} := \{((M, \{A_j, B_j\}_{j=1}^{\gamma}), \omega_1, \omega_2, \omega_3)\}$$

なる集合を考える. このとき,

$$P_{\mathbb{C}} : \mathcal{M} \ni ((M, \{A_j, B_j\}_{j=1}^{\gamma}), \omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \Omega \in \mathbb{C}^{6\gamma}$$
$$P_{\mathbb{R}} : \mathcal{M} \ni ((M, \{A_j, B_j\}_{j=1}^{\gamma}), \omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \Re\Omega \in \mathbb{R}^{6\gamma}$$

をそれぞれ**複素周期写像**, **実周期写像**という．なお, それぞれの行先の空間であるが, $\mathbb{C}^{6\gamma}$ は $3\times 2\gamma$ 複素行列全体, $\mathbb{R}^{6\gamma}$ は $3\times 2\gamma$ 実行列全体を意図している．

$\mathbb{C}^{6\gamma}$ には様々な幾何構造があるが, ここでは複素 Symplectic 幾何学の視点を採用する．$(z_1,\ldots,z_{3\gamma},w_1,\ldots,w_{3\gamma})$ を $\mathbb{C}^{6\gamma}$ の標準基底とすると, $\mathbb{C}^{6\gamma}$ には $\sum_{j=1}^{3\gamma} dw_j\wedge dz_j$ なる標準的な複素 Symplectic 形式がある．これを $3\times 2\gamma$ 複素行列の状況に書き直すと, $3\times\gamma$ 複素行列による分割を用いて,

$$\omega_{\mathbb{C}}((Z_1,Z_2),(W_1,W_2)) = \mathrm{trace}({}^tZ_2W_1 - {}^tZ_1W_2)$$

となる．ここで, いささか天下り的であるが, $\eta_{\mathbb{C}} := -i\omega_{\mathbb{C}}(*,\overline{**})$ とおくと, これは $\mathbb{C}^{6\gamma}$ 上の符号数 $(3\gamma,3\gamma)$ のエルミート内積を定める ([3] を参照のこと)．なお, エルミート行列の符号数とは, 正の固有値と負の固有値の重複度も込めた個数の組のことである．

$\mathcal{M}$ の元のうち, 退化次数が 3 のものは $P_{\mathbb{R}}$ が可微分同型を与えることが陰関数定理からの帰結である．このような $P_{\mathbb{R}}$ が可微分同型を与えるような点たちによって $\mathcal{M}$ が連結成分に分割される．$P_{\mathbb{C}}$ で $\eta_{\mathbb{C}}$ を各連結成分上に引き戻すことにより, その連結成分上に符号数 (p,q) のエルミート内積が定義される．これを極小曲面の**符号数**といい, Moduli 空間における新しい不変量となる．以上は [5] の内容に基づく．

前述した通り, 種数 3 は三重周期極小曲面の最小種数の状況であり, 1990 年代に物理学者たちによって, 多くの変形族が構成されている ([11], [10], rG 族・tG 族の数学的構成は [2] を参照のこと)．以下はそのような変形族たちの幾何的量を数値計算を用いて特定したものである．

定理 2 ([6], [7], [8])**.**
種数 3 の変形族, 具体的には, rPD 族, tP/tD 族, tCLP 族, H 族, rG 族, tG 族, mPCLP/mDCLP 族において, 各連結成分上の Morse 指数, 退化次数, 符号数の組は, $(1,3,(4,5))$, $(2,3,(5,4))$, $(3,3,(6,3))$ である．

3 Morse 指数と符号数の関係および I-WP 曲面の幾何的量

1970 年代に Schoen [14] が多くの三重周期極小曲面を構成しており, その中に I-WP 曲面がある．なお, [11] によると, これは Stessman 曲面ともいわれているようである．前節最後の定理を得るための手順を用いて, 既

に次の結果を得ており, 去る 2019 年 3 月に名城大学で行われた研究集会にて報告済みであった. ただし, 種数 3 の場合では生じない困難があり, Morse 指数の特定には至らず, 評価のみに留まっていた.

定理 3.
I-WP 曲面の退化次数は 3, 符号数は $(10, 2)$ であり, Morse 指数は $6, 7, 8$ のいずれかである.

Moduli 空間の分類に関しては符号数で十分であり, Morse 指数を特定する必要はないかもしれないが, 古典的に由緒正しい幾何的量ということで, Morse 指数の特定は重要課題であった. これに関しては以下の向きの概念を $\mathcal{M}$ に導入することによって, 偶発的かつ奇跡的に特定できたというのが本稿のメインの報告となる.

$\mathbb{R}^{6\gamma}$ には標準的な Kähler 形式 ω_0 があるが, $P_{\mathbb{R}}^*\omega_0$ によって各連結成分上に誘導される体積要素は, 標準座標 $(x_1, \ldots, x_{3\gamma}, y_1, \ldots, y_{3\gamma})$ および符号数 (p, q) なるエルミート行列 $(h_{\alpha\overline{\beta}})$ を用いて,

$$\det(h_{\alpha\overline{\beta}})dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{3\gamma} \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_{3\gamma}$$

と表される. このことから, $P_{\mathbb{R}}$ が向きを保つための必要十分条件は, $(-1)^q > 0$ であることである ([5] を参照のこと). この向きの概念を各連結成分上に導入し, Morse 指数と符号数の関係を解明した次の定理が今回の主結果になる.

定理 4 ([9])**.**
$\mathcal{M}$ の各連結成分上において, Morse 指数 ind と符号数 (p, q) には以下の関係がある.
(1) 種数 3 の場合 (超楕円型になる), $(-1)^{ind} = (-1)^q$ となる.
(2) 非超楕円型の場合, 種数が奇数であれば $(-1)^{ind} = (-1)^q$, 種数が偶数であれば $(-1)^{ind} = (-1)^{q+1}$ となる.
なお, 一般種数の超楕円型 Riemann 面の場合も似たような結果が成り立つのであるが, 設定が複雑になるのでここでは略す.

この結果から, I-WP 曲面の場合, $q = 2$ であり, 種数が偶数なので, $(-1)^{ind} = (-1)^3 = -1$ となるため, Morse 指数は奇数である. したがって, $6, 7, 8$ のうち, 奇数は 7 しかないので, 次の系を得る.

Corollary 5 ([9])**.**
I-WP 曲面の Morse 指数は 7 である.

参考文献

[1] C. Arezzo and G. P. Pirola, *On the existence of periodic minimal surfaces*, J. Algebraic. Geom. **8** (1999), 765–785.

[2] H. Chen, *Existence of the tetragonal and rhombohedral deformation families of the gyroid*, Indiana Univ. Math. J. **70** (2021), 1543–1576

[3] V. Cortés, *On Hyper Kähler Manifolds associated to Lagrangian Kähler Submanifolds of $T^*\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 3193–3205.

[4] N. Ejiri, *A differential-geometric Schottky problem, and minimal surfaces in tori*, Contemp. Math. **308** (2002), 101–144.

[5] N. Ejiri, *A generating function of a complex Lagrangian cone in $\mathbb{H}^n$*, to appear in Communications in Analysis and Geometry.

[6] N. Ejiri and T. Shoda, *The Morse index of a triply periodic minimal surface*, Differential Geom. Appl. **58** (2018), 177–201.

[7] N. Ejiri and T. Shoda, *The existence of rG Family and tG Family, and their geometric invariants*, Mathematics **8** (2020), 1693; doi:10.3390/math8101693.

[8] N. Ejiri and T. Shoda, *The geometric invariants for mP-CLP/mDCLP family*, to appear in Hokkaido Math. J.

[9] N. Ejiri and T. Shoda, *The Morse index and the signature of a minimal surface in a flat torus*, submitted.

[10] A. Fogden, M. Haeberlein, and S. T. Hyde, *Generalizations of the gyroid surface*, J. Phys. I France **3** (1993), 2371–2385.

[11] A. Fogden, and S. T. Hyde, *Parametrization of triply periodic minimal surfaces II. Regular class solutions*, Acta. Cryst. (1992), **A48**, 575–591.

[12] W. H. Meeks III, *The theory of triply periodic minimal surfaces*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), no. 3, 877–936.

[13] G. P. Pirola, *The infinitesimal variation of the spin abelian differentials and periodic minimal surfaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 393–426.

[14] A. Schoen, *Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections*, NASA. TN. D-**5541** May (1970).

[15] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.