Åbo Akademi

FAKULTETEN FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

AVHANDLING PRO GRADU I MATEMATIK

B ri-funktioner

Skribent:
Jimmy HIMBERG, 41622

Handledare:
Christer GLADER

2023

Innehåll

1 Inledning **2**

2 Grundegenskaper **4**

2.1 B ri-funktioner av gradtal 0 5
2.2 B ri-funktioner av gradtal 1 7
2.3 B ri-funktioner av gradtal 2 9
2.4 Stödet för samt positivitet hos B ri-funktioner 11
2.5 Rekursionsformel 12
2.6 Derivering och integrering 14
2.7 Linjäritet 21

3 Interpolation med B ri-funktioner **24**

3.1 Interpolation i knutpunkterna 24
3.2 Exempel 27
3.3 Interpolationsmatris 33
3.4 Schoenberg-Whitney-teoremet 36
3.5 Exempel 38

4 Approximering med B ri-funktioner **42**

4.1 Schoenbergs process för kvadratiska versionen 42
4.2 Exempel 48

Kapitel 1

Inledning

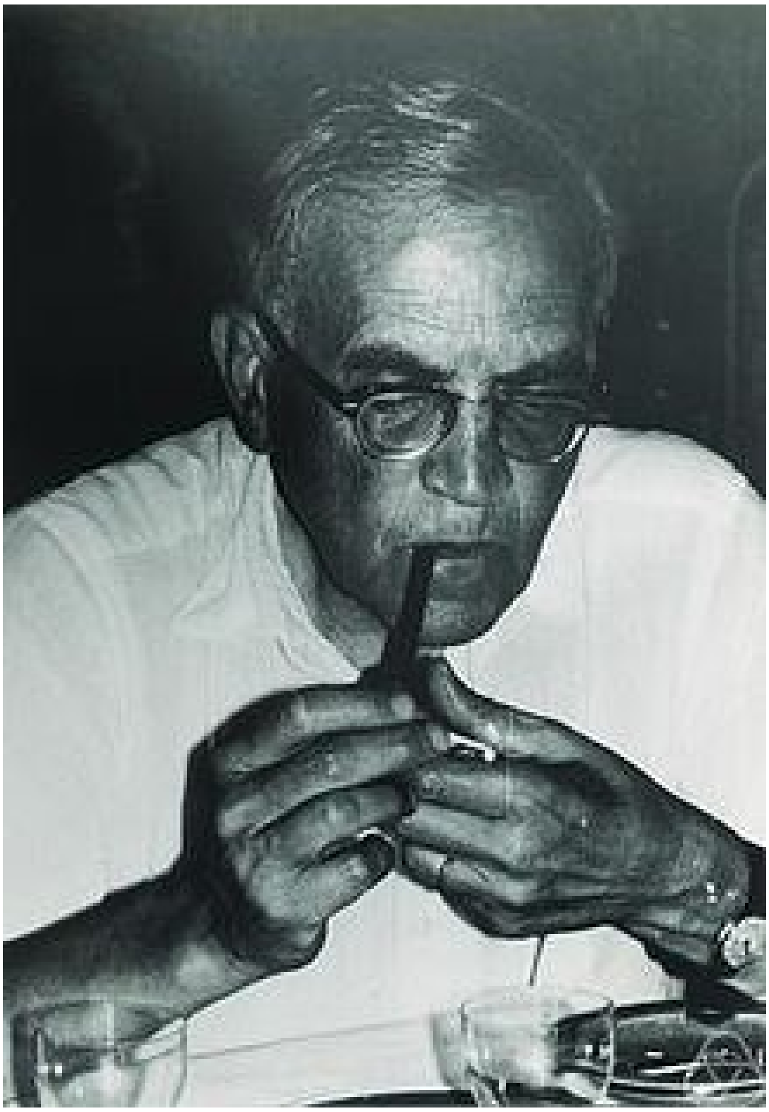
Verkligheten och matematiken går sällan hand i hand med varandra i mer komplicerade sammanhang. Därför är det nödvändigt att hitta olika sätt att approximativt lösa dessa komplexa problem. Numeriska metoder har använts för att lösa problemen under en lång tid. Ett av alternativen är att approximera och interpolera funktioner.

I denna pro gradu-avhandling behandlas B ri-funktioner, på engelska B-splines. Versalen ”B” i B ri-funktioner kommer från engelska ”basis”, alltså bas. Det här betyder att alla andra ri-funktioner kan bildas från B ri-funktioner. Se kandidatavhandlingen ”Interpolation med ri-funktioner”[1] för en mer genomgång av andra typer av ri-funktioner.

Inledningsvis presenteras grundläggande teori för B ri-funktioner för att senare ytterligare utveckla teorin. Presentationen av teorin är kompletterad med exempel för att underlätta förståelsen. Därefter övergår avhandlingen till det huvudsakliga ämnet, interpolation samt approximation med ri-funktioner.

Ett centralt teorem, Schoenberg-Whitney-teoremet, redogörs på ett omfattande sätt samt bevisas. Schoenberg utvecklade även en process, Schoenbergs process, som kan approximera olika funktioner. Utöver detta avslutas både kapitlen om interpolation och approximation med exempel av respektive slag.

Isaac Jacob Schoenberg (1903-1990) var en rumänsk-amerikansk matematiker som är bäst känd för sina upptäckter om ri-funktioner[2]. Han skrev cirka 175 handlingar, av vilka runt 50 var om ri-funktioner[3].



Figur 1.1: Isaac Jacob Schoenberg [3].

Denna avhandling utgår från Kincaids och Cheneys böcker *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, tredje upplagan [4] och *Numerial Mathematics and Computing*, andra upplaga [5].

Kapitel 2

Grundegenskaper

Mängden ri-funktioner av gradtal k med knutpunkterna $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{n-1},\alpha_n$ betecknas $S(k;\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$. Definitionen av ri-funktioner presenteras härnäst:

Definition 2.1. *$S(x) \in S(k;\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$ är en ri-funktion av gradtal k, ifall följande krav uppfylls:*

1. *$S(x)$ är ett polynom av gradtal $\leq k$ på intervallet $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$,*
2. *$S(x)$ är kontinuerlig på $[\alpha_0,\alpha_n]$ och för knutpunkterna gäller $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{n-1} < \alpha_n$,*
3. *$S(x) \in C^{k-1}[\alpha_0,\alpha_n]$, så att derivator upp till ordning k-1 är kontinuerliga på $[\alpha_0,\alpha_n]$.*

När en ri-funktion har definierats kan vi övergå till det väsentliga för denna avhandling, B ri-funktioner.
B ri-funktioner definieras i oändligt många knutpunkter. Knutpunkter definieras enligt följande:

$$\begin{cases} ... < \alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... \\ \lim_{i\to\infty} \alpha_i = \infty, \\ \lim_{i\to\infty} \alpha_{-i} = -\infty. \end{cases}$$

I praktiken krävs det endast ett ändligt antal knutpunkter när man använder sig av B ri-funktioner som basfunktioner för $S(k;\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$. Dock är det teoretiskt lättare att bevisa argumenten med definitionen ovan.

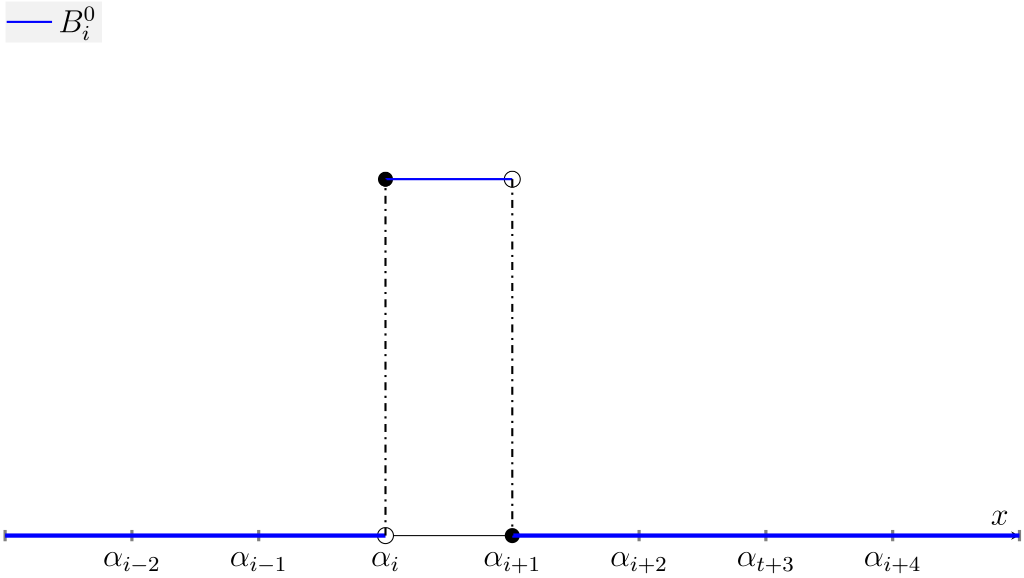
2.1 B ri-funktioner av gradtal 0

B ri-funktioner av gradtal 0 betecknas $B_i^0(x)$. I intervallet $[\alpha_i,\alpha_{i+1})$ är $B_i^0(x) = 1$, men utanför detta intervall är $B_i^0(x) = 0$. Den formella definitionen är:

Definition 2.2. *Funktionen $B_i^0(x)$ definieras för $x \in \mathbb{R}$ genom*

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, \text{ ifall } \alpha_i \leq x < \alpha_{i+1}, \\ 0, \text{ annars }. \end{cases}$$

Nedan illustreras definitionen:



Följande egenskaper kan observeras:

1. $B_i^0(x) \geq 0$ för alla i och alla x.

2. B_i^0 är diskontinuerlig i $x = \alpha_i$ och α_{i+1}, men är högerkontinuerlig i varje punkt.

3. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ för alla x.

Punkt 3 verifieras genom att välja ett x godtyckligt, så att $\alpha_n \leq x < \alpha_{n+1}$ för något n. Då gäller följande:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = B_n^0(x) = 1.$$

Detta innebär att en styckevis konstant funktion S definieras:

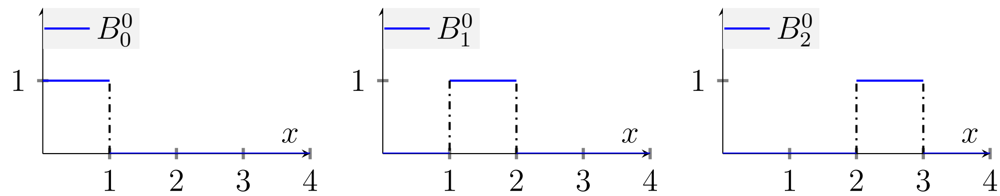
$$S(x) = \begin{cases} c_i, & \text{ifall } \alpha_i \leq x < \alpha_{i+1} \text{ där } (i \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Den kan omskrivas som en linjär kombination av B_i^0- funktioner

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^0(x).$$

B ri-funktioner av gradtal 0 illusteras i följande exempel:

Exempel 2.3. *Vi har 4 knutpunkter, så att* $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. *Detta ger 3 intervall [0,1), [1,2), [2,3). B ri-funktionerna kan betecknas:* $B_0^0(x) = 1$ *i intervallet [0,1) och annars 0,* $B_1^0 = 1$ *i [1,2), annars 0 och* $B_2^0 = 1$ *i [2,3), annars 0. Detta belyses i följande grafer.*



Definition 2.4. *B ri-funktioner av högre gradtal definieras rekursivt, med hjälp av funktionerna* B_i^0 *som startpunkter:*

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x - \alpha_i}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1} - x}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x), \tag{2.1}$$

där $k \geq 1$ *och* $i \in \mathbb{Z}$.

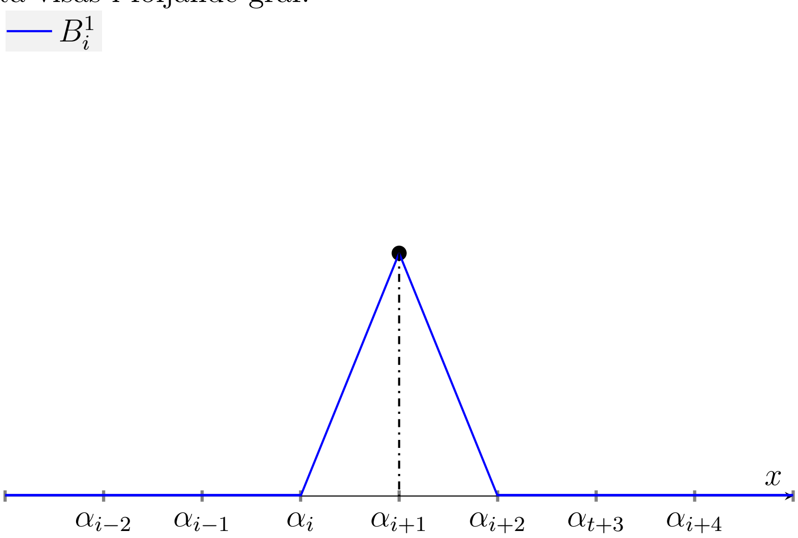
Funktionerna $B_i^k(x)$ kallas för B ri-funktioner av gradtal k. Av definitionen kan man observera att B_i^1 är styckevis linjär, B_i^2 är styckevis kvadratisk osv. Härnäst anpassas denna formel på B ri-funktioner av gradtal 1.

2.2 B ri-funktioner av gradtal 1

B ri-funktioner av gradtal 1 betyder att $k = 1$, vilket ger följande funktioner:

$$
\begin{aligned}
B_i^1(x) &= \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right) B_i^0(x) + \left(\frac{\alpha_{i+2}-x}{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^0(x) \\
&= \begin{cases} 0, \text{ ifall } x \geq \alpha_{i+2} \text{ eller } x < \alpha_i, \\ \frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}, \text{ ifall } \alpha_i < x < \alpha_{i+1}, \\ \frac{\alpha_{i+2}-x}{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}, \text{ ifall } \alpha_{i+1} \leq x < \alpha_{i+2}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Detta visas i följande graf:



Följande egenskaper kan noteras för B_i^1-funktionerna:

1. $B_i^1(x) \geq 0$ för alla i och x.
2. B_i^1 är kontinuerlig och deriverbar i varje punkt förutom i punkterna $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}$.
3. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = 1$ för alla x.

För att klargöra punkt 3, kan man ta godtyckligt $x \in \mathbb{R}$. När i växer, konvergerar α_i till ∞. Och när i minskar, konvergerar α_i till $-\infty$. Man kan hitta ett index j så att $\alpha_j \leq x < \alpha_{j+1}$. Detta ger $B_i^1(x) = 0$ för alla i, förutom möjligen

$i = j$ eller $i = j - 1$. Följaktligen:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^1(x) = B_{j-1}^1(x) + B_j^1(x)$$
$$= \left(\frac{x - \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) B_{j-1}^0 + \left(\frac{\alpha_{j+1} - x}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}\right) B_j^0 + \left(\frac{x - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}\right) B_j^0 + \left(\frac{\alpha_{j+2} - x}{\alpha_{j+2} - \alpha_{j+1}}\right) B_{j+1}^0$$
$$= \left(\frac{\alpha_{j+1} - x}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}\right) B_j^0 + \left(\frac{x - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}\right) B_j^0 = \frac{\alpha_{j+1} - x}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} + \frac{x - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}$$
$$= \frac{\alpha_{j+1} - x + x - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_j} = 1.$$

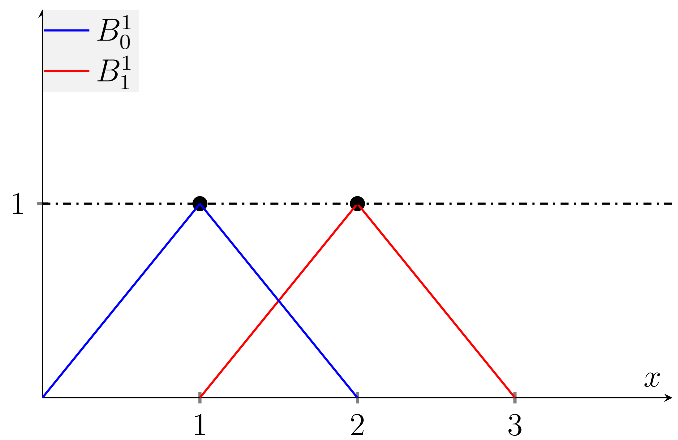
Exempel 2.5. *Som i exempel 2.3 används samma knutpunkter för att illustera B_i^1: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. Med formel (2.1) ovan beräknas de olika funktionerna:*

$$B_0^1(x) = \left(\frac{x - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}\right) B_0^0(x) + \left(\frac{\alpha_2 - x}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) B_1^0(x),$$
$$B_0^1(x) = \left(\frac{x - 0}{1 - 0}\right) B_0^0(x) + \left(\frac{2 - x}{2 - 1}\right) B_1^0(x),$$
$$B_0^1(x) = xB_0^0(x) + (2 - x)B_1^0(x).$$

Och

$$B_1^1(x) = \left(\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) B_1^0(x) + \left(\frac{\alpha_3 - x}{\alpha_3 - \alpha_2}\right) B_2^0(x),$$
$$B_1^1(x) = \left(\frac{x - 1}{2 - 1}\right) B_1^0(x) + \left(\frac{3 - x}{3 - 2}\right) B_2^0(x),$$
$$B_1^1(x) = (x - 1)B_1^0(x) + (3 - x)B_2^0(x).$$

Flera B ri-funktioner av gradtal 1 kan inte bildas, som ett resultat av antalet B ri-funktioner av gradtal 0. B_i^1 visas i grafen:

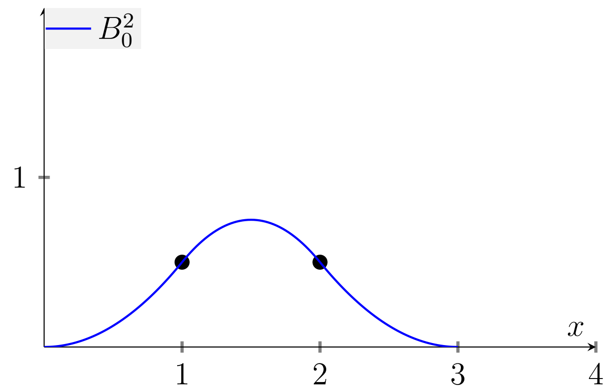


2.3 B ri-funktioner av gradtal 2

Exempel 2.6. *Med knutpunkter i exempel 2.3 kan man högst bilda en B ri-funktion av gradtal 2. Med hjälp av rekursionsformel (2.1) och exempel 2.5 fås:*

$$\begin{aligned}
B_0^2(x) &= \left(\frac{x-0}{2-0}\right) B_0^1(x) + \left(\frac{3-x}{3-1}\right) B_1^1(x) \\
&= \frac{1}{2} x B_0^1(x) + \frac{1}{2}(3-x) B_1^1(x) \\
&= \frac{1}{2} x \left[x B_0^0(x) + (2-x) B_1^0(x)\right] + \frac{1}{2}(3-x)\left[(x-1)B_1^0(x) + (3-x)B_2^0(x)\right] \\
&= \frac{1}{2} x^2 B_0^0(x) + (x - \frac{1}{2}x^2) B_1^0(x) + \frac{1}{2}(3x - 3 - x^2 + x) B_1^0(x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 B_2^0(x) \\
&= \frac{1}{2} x^2 B_0^0(x) + (x - \frac{1}{2}x^2) B_1^0(x) + \frac{1}{2}(-x^2 + 4x - 3) B_1^0 + \frac{1}{2}(3-x)^2 B_2^0(x) \\
&= \frac{1}{2} x^2 B_0^0(x) + (-x^2 + 3x - \frac{3}{2}) B_1^0(x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 B_2^0(x).
\end{aligned}$$

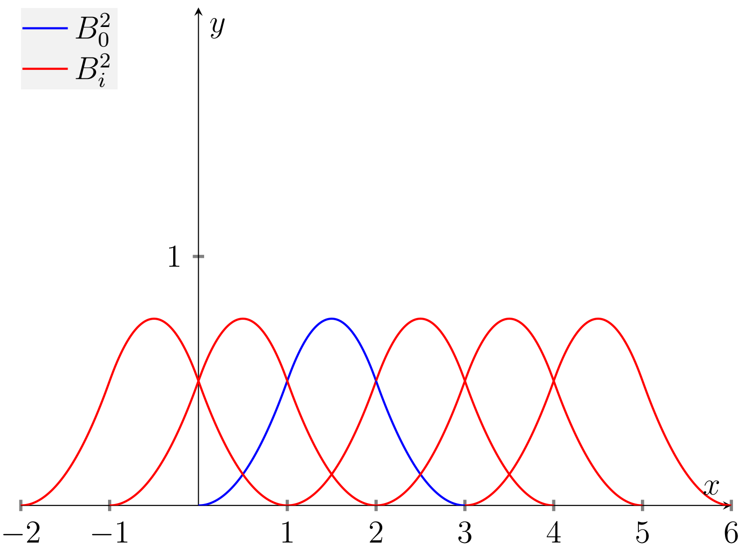
Detta betyder att i intervallet $[0,1[$ *är den* $\frac{1}{2}x^2$,*i* $[1,2[$ *är den* $(-x^2+3x-\frac{3}{2})$ *och i* $[2,3[$ *är den* $\frac{1}{2}(3-x)^2$. *Det vill säga:*



För att visa hur flera B_i^2 ser ut bredvid varandra, behövs det fler knutpunkter. Dessa beräknas analogt som ovan. För $B_{-2}^2, B_{-1}^2, B_1^2, B_2^2$ och B_3^2 fås följande funktioner:

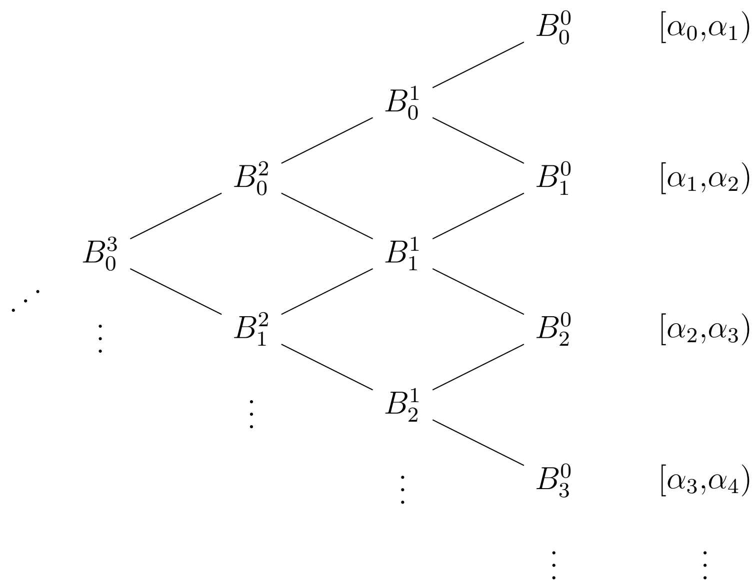
$$\begin{aligned}
B_{-2}^2(x) &= \frac{1}{2}(x+2)^2 B_{-2}^0(x) + (-x^2 - x + \frac{1}{2}) B_{-1}^0(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 B_0^0(x), \\
B_{-1}^2(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^2 B_{-1}^0(x) + (-x^2 + x + \frac{1}{2}) B_0^0(x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 B_1^0(x), \\
B_1^2(x) &= \frac{1}{2}(x-1)^2 B_1^0(x) + (-x^2 + 5x - \frac{11}{2}) B_2^0(x) + \frac{1}{2}(4-x)^2 B_3^0(x), \\
B_2^2(x) &= \frac{1}{2}(x-2)^2 B_2^0(x) + (-x^2 + 7x - \frac{23}{2}) B_3^0(x) + \frac{1}{2}(5-x)^2 B_4^0(x), \\
B_3^2(x) &= \frac{1}{2}(x-3)^2 B_3^0(x) + (-x^2 + 9x - \frac{39}{2}) B_4^0(x) + \frac{1}{2}(6-x)^2 B_5^0(x).
\end{aligned}$$

Dessa funktioner illusteras nedan i rött och B_0^2 i blått:



Av denna bild ser man hur grafen förskjuts åt olika håll, tack vare de jämna intervallen. Dock kan en annan allmän iakttagelse göras: varje intervall har 3 grafer som avbildas i området. Mer allmänt kan man konstatera att för B_i^k fås $k+1$ grafer inom ett intervall.

För högre gradtal krävs det flera knutpunkter. Nedan visas ett schema, där det framgår vilka gradtal som behövs för olika gradtal:



I figuren ovan kan följande observeras: för att bilda B_i^k krävs det $k+2$ knutpunkter. Denna iakttagelse betonades redan i exempel 2.5; där det fanns 4 knutpunkter kunde man endast bilda en B_i^2-funktion.

2.4 Stödet för samt positivitet hos B ri-funktioner

Definition 2.7. *Stödet för f definieras av en mängd av punkter x för vilka det gäller att $f(x) \neq 0$.*

Lemma 2.8. *Stödet för B ri-funktioner:*

$$B_i^k(x) = 0 \text{ , ifall } x \notin [\alpha_i, \alpha_{i+k+1}) \text{ och } k \geq 0.$$

Bevis. Enligt (2.2) är detta sant när $k = 0$. Induktionsantagandet görs för $k-1$, $k \geq 1$. Påståendet visas gälla för k. Ifall $x \notin [\alpha_i, \alpha_{i+k+1})$, då är $x \notin [\alpha_i, \alpha_{i+k})$ och $x \notin [\alpha_{i+1}, \alpha_{i+k+1})$. Induktionsantagandet ger: $B_i^{k-1}(x) = 0$ ifall x är utanför $[\alpha_i, \alpha_{i+k})$ och $B_{i+1}^{k-1} = 0$ ifall x är utanför $[\alpha_{i+1}, \alpha_{i+k+1})$. Detta ger:

$$B_i^k = \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1-x}}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x) = 0,$$

ifall $x \notin [\alpha_i,\alpha_{i+k+1})$. Fullständig induktion bevisar lemmat. □

Lemma 2.9. *Positivitet hos B ri-funktioner:*

$$B_i^k(x) > 0 \text{ , ifall } x \in (\alpha_i,\alpha_{i+k+1}) \text{ och } k \geq 0.$$

Bevis. För $k = 0$ stämmer det som tidigare nämnts. Induktionsantagandet gör att när $k \geq 1$ gäller att $k-1$, när $x \in (\alpha_i, \alpha_{i+k})$ att $B_i^{k-1} > 0$ och när $x \in (\alpha_{i+1},\alpha_{i+k+1})$ att $B_{i+1}^{k-1} > 0$. För faktorerna $\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}$ och $\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}$ som multipliceras med B_i^{k-1} respektive B_{i+1}^{k-1} gäller att endera av termerna är större eller lika med 0 och den andra större än 0, när $\alpha_i < x < \alpha_{i+k+1}$. Följaktligen:

$$B_i^k = \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x) > 0,$$

då $x \in (\alpha_i, \alpha_{i+k+1})$. Fullständig induktion bevisar lemmat. □

2.5 Rekursionsformel

Eftersom B ri-funktioner B_i^k tillämpas som basfunktioner till alla ri-funktioner av gradtal k, är det betydelsefullt att undersöka linjära kombinationer av formen $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x)$ samt bevisa att mängden $\{B_i^k\}_{i=-\infty}^{\infty}$ är linjärt oberoende.

Lemma 2.10. *Rekursionsformel.*
För alla $k \geq 0$ gäller:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[c_i \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) + c_{i-1} \left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) \right] B_i^{k-1}(x).$$

Bevis. Ekvationen (2.1) används och serien manipuleras för att bevisa denna formel.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left[\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \right] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left(\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}} \right) B_{i+1}^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) B_i^{k-1}(x) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{i-1} \left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) B_i^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[c_i \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) + c_{i-1} \left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) \right] B_i^{k-1}(x).
\end{aligned}$$

□

I lemmat ovan kan koefficienten c_i vara konstant eller en funktion. För ett fixt gradtal k används c_i, dock används beteckningen, C_i^k för gradtalet k svarande mot B ri-funktioner. Med hjälp av lemmat 2.10 kan man evaluera värdet av formen:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x) B_i^k(x).$$

Antag att funktionerna C_i^k är givna. Substituera c_i och c_{i-1} med $C_i^k(x)$ respektive $C_{i-1}^k(x)$ i lemma 2.10, vilket ger:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[C_i^k(x) \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) + C_{i-1}^k(x) \left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) \right] B_i^{k-1}(x).$$

Och definierar

$$C_i^{k-1}(x) = C_i^k(x) \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right) + C_{i-1}^k(x) \left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i} \right). \tag{2.2}$$

Med denna substitution (2.2) och lemma 2.10 erhålls:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x)B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^{k-1}(x)B_i^{k-1}(x).$$

Med upprepning av detta argument $k-1$ gånger, följer:

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k(x)B_i^k(x) = ... = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^0(x)B_i^0(x). \tag{2.3}$$

För $\alpha_n \leq x < \alpha_{n+1}$ gäller det att $f(x) = C_n^0$. För de övriga C_i^{j-1} fås med hjälp av ekvationen (2.2):

$$C_i^{j-1}(x) = C_i^j(x)\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) + C_{i-1}^j(x)\left(\frac{\alpha_{i+k}-x}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right). \tag{2.4}$$

Nu fås en algoritm för att bestämma C_n^0, som motsvarar en aning hur man konstruerar B ri-funktioner av högre gradtal. Ifall koefficiententerna C_i^k är givna, krävs det endast k+1 koefficienter $C_n^k, C_{n-1}^k, ..., C_{n-k}^k$ för att konstruera f(x) i intervallet $\alpha_n \leq x < \alpha_{n+1}$. Med hjälp av ekvationen ovan, kan en triangelformad ordning konstrueras:

$$\begin{array}{ccccc}
C_n^k & C_n^{k-1} & \cdots & C_n^1 & C_n^0 \\
 & & & & \\
C_{n-1}^k & C_{n-1}^{k-1} & \cdots & C_{n-1}^1 & \\
 & & & & \\
\vdots & \vdots & \iddots & & \\
 & & & & \\
C_{n-k+1}^k & C_{n-k+1}^{k-1} & & & \\
 & & & & \\
C_{n-k}^k & & & &
\end{array}$$

Observera att $C_i^k(x)$ är oberoende av x, däremot är $C_i^{j-1}(x)$ från ekvationen (2.4) beroende av x.

Lemma 2.11. *För alla $k \geq 0$ gäller:*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = 1 \textit{ för alla } x.$$

Bevis. För $k = 0$,1 har detta redan bevisats. Till en början konstateras $f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i^k B_i^k(x)$ där nu $C_i^k = 1$ för alla i. Med hjälp av ekvationen (2.4), fås att C_i^{k-1}, C_i^{k-2},...,C_i^0 också är lika med 1, enligt:

$$\begin{aligned} C_i^{k-1} &= 1\left(\frac{x - \alpha_i}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}\right) + 1\left(\frac{\alpha_{i+k} - x}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}\right) \\ &= \frac{x - \alpha_i + \alpha_{i+k} - x}{\alpha_{i+k} - \alpha_i} = 1. \end{aligned}$$

Genom att repetera detta argument fås $C_i^j = 1$ där $j = k, k-1$,...,0. Med stöd av formel (2.3) fås:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1.$$

□

2.6 Derivering och integrering

Derivering och integrering av B ri-funktioner är viktiga operationer. Detta eftersom B ri-funktioner kan ersätta komplicerade funktioner i olika sammanhang. Det som man kan observera från exemplen med de fyra knutpunkterna är att, när k ökar blir även jämnhet bättre för B ri-funktioner B_i^k. Med detta sagt kan man bevisa att B_i^k har k-1 stycken kontinuerliga derivator.

Lemma 2.12. *Derivatan av B ri-funktioner.*
Derivatan av B_i^k, $k \geq 1$, ges av formeln:

$$\frac{d}{dx} B_i^k(x) = \left(\frac{k}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x), \tag{2.5}$$

för alla x, utom $x = \alpha_i$, α_{i+1} och α_{i+2} i fallet $k = 1$.

Bevis. Induktion.
k=1, ekvationen (2.1) används, så fås:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_i^1(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)B_i^0(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha_{i+2}-x}{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^0(x) \\
&= \left(\frac{1}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)B_i^0(x) - \left(\frac{1}{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^0(x) \\
&= \frac{B_i^0(x)}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} - \frac{B_{i+1}^0(x)}{\alpha_{i+2}-\alpha_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

Induktionsantagandet: Att formeln gäller för k, $k \geq 1$. Inledningsvis används ekvationen (2.1):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}B_i^{k+1}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\right)B_i^k(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^k(x)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_i^k(x) + \frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\frac{d}{dx}B_i^k(x) \\
&+ \frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\frac{d}{dx}B_{i+1}^k(x) - \frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^k(x).
\end{aligned}
$$

Induktionsantagandet och ekvationen (2.1) används för termerna $B_i^k(x)$ samt $B_{i+1}^k(x)$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\left[\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right)B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x)\right] \\
&+ \frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\left[\left(\frac{k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right)B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x)\right] \\
&+ \frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\left[\left(\frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}\right)B_{i+2}^{k-1}(x)\right] \\
&- \frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\left[\left(\frac{x-\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}\right)B_{i+2}^{k-1}(x)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}B_i^{k-1}(x) + \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x) \\
&+ \frac{k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_i^{k-1}(x) - \frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_{i+1}^{k-1}(x) \\
&+ \frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x) - \frac{k}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+2}^{k-1}(x) \\
&- \frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\frac{x-\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x) - \frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}B_{i+2}^{k-1}(x).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Följande termer $B_i^{k-1}(x)$, $B_{i+2}^{k-1}(x)$ och $B_{i+1}^{k-1}(x)$ plockas ut för att lättare visa vad som sker:

$$
\begin{aligned}
B_i^{k-1}(x):\ & \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}B_i^{k-1}(x)+\frac{k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_i^{k-1}(x)\\
&=\frac{k(x-\alpha_i)+(x-\alpha_i)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k}-\alpha_i)}B_i^{k-1}(x)\\
&=\frac{(k+1)(x-\alpha_i)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k}-\alpha_i)}B_i^{k-1}(x)\\
B_{i+2}^{k-1}(x):\ & -\frac{k}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+2}^{k-1}(x)-\frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}B_{i+2}^{k-1}(x)\\
&=-\frac{k(\alpha_{i+k+2}-x)+(\alpha_{i+k+2}-x)}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+2}^{k-1}(x)\\
&=-\frac{(k+1)(\alpha_{i+k+2}-x)}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+2}^{k-1}(x)\\
B_{i+1}^{k-1}(x):\ & \frac{1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x)-\frac{1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\frac{x-\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x)\\
&-\frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_{i+1}^{k-1}(x)+\frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x).
\end{aligned}
$$

Från $B_{i+1}^{k-1}(x)$ tas de två sista termerna ut och bryter ut k fås:

$$
k\left[\frac{-x+\alpha_i}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}+\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}\right].
$$

Båda bråken förlängs så att man får liknämniga nämnare:

$$
k\left[\frac{-x\alpha_{i+k+2}+x\alpha_{i+1}+\alpha_i\alpha_{i+k+2}-\alpha_i\alpha_{i+1}+\alpha_{i+k+1}\alpha_{i+k+2}-\alpha_i\alpha_{i+k+2}-x\alpha_{i+k+1}+x\alpha_i}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}\right].
$$

Termen $\alpha_i\alpha_{i+k+2}$ summeras bort, dock adderas och subtraheras termen $\alpha_{i+1}\alpha_{i+k+1}$ till och efter gruppering erhålls:

$$
\begin{aligned}
&k\left[\frac{\alpha_{i+k+2}\alpha_{i+k+1}-x\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}\alpha_{i+k+1}+x\alpha_{i+1}+\alpha_{i+1}\alpha_{i+k+1}-x\alpha_{i+k+1}-\alpha_i\alpha_{i+1}+x\alpha_i}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}\right]\\
=&k\left[\frac{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+1}-x)+(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+1}-x)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}\right]\\
=&k\left[\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}-\frac{x-\alpha_{i+1}}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}\right]
\end{aligned}
$$

Med dessa modifikationer på ekvationen (2.6) fås följande:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(k+1)(x-\alpha_i)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k}-\alpha_i)}B_i^{k-1}(x)+\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)\\
&+\frac{k(\alpha_{i+k+1}-x)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)-\frac{k(x-\alpha_{i+1})}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)\\
&-\frac{x-\alpha_{i+1}}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)-\frac{(k+1)(\alpha_{i+k+2}-x)}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+2}^{k-1}(x)\\
&=\frac{(k+1)(x-\alpha_i)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k}-\alpha_i)}B_i^{k-1}(x)+\frac{(k+1)(\alpha_{i+k+1}-x)}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_i)(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)\\
&-\frac{(k+1)(x-\alpha_{i+1})}{(\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+1}^{k-1}(x)-\frac{(k+1)(\alpha_{i+k+2}-x)}{(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2})(\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1})}B_{i+2}^{k-1}(x)\\
&=\frac{k+1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}\left[\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}B_i^{k-1}(x)+\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x)\right]\\
&-\frac{k+1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}\left[\frac{x-\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^{k-1}(x)+\frac{\alpha_{i+k+2}-x}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+2}}B_{i+2}^{k-1}(x)\right]\\
&=\frac{k+1}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_i}B_i^k(x)-\frac{k+1}{\alpha_{i+k+2}-\alpha_{i+1}}B_{i+1}^k(x)
\end{aligned}
$$

Fullständig induktion ger att formeln gäller för alla k. □

En användbar formel kan formuleras för derivering av en linjär kombination av B ri-funktioner:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=-\infty}^{\infty}c_iB_i^k(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}d_iB_i^{k-1}(x)\ ,\ \text{där}\ d_i=k\left(\frac{c_i-c_{i-1}}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) \tag{2.7}$$

Härledningen av denna formel utförs med hjälp av definitionen av derivatan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \frac{d}{dx} B_i^k(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left[\left(\frac{k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x)\right] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_i k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{c_i k}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{c_i k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{c_{i-1} k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{c_i k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) - \left(\frac{c_{i-1} k}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right)\right] B_i^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} k\left(\frac{c_i - c_{i-1}}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i B_i^{k-1}(x).
\end{aligned}$$

Definition 2.13. *En funktion tillhör klassen $C^n(\mathbb{R})$, $n \geq 0$, ifall den är deriverbar n gånger samt att den n:te derivatan är kontinuerlig.*

Lemma 2.14. *Jämnhet av B ri-funktioner.*
B ri-funktionen B_i^k tillhör klassen $C^{k-1}(\mathbb{R})$ när $k \geq 1$.

Bevis. B_i^1 är kontinuerlig men inte deriverbar på hela $\mathbb{R}$, så $B_i^1 \in C^0(\mathbb{R})$. Antag som induktionsantagandet att $B_i^k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ för $k \geq 1$. Med stöd av lemma 2.12 fås att $\frac{d}{dx}B_i^{k+1} \in C^{k-1}(\mathbb{R})$. Detta på grund av att derivatan är en linjär kombination av B_i^k och B_{i+1}^k som tillhör C^{k-1} enligt induktionsantagandet. Då gäller $B_i^{k+1} \in C^k(\mathbb{R})$. Därmed gäller genom fullständig induktion att $B_i^k \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ för alla $k \geq 1$. □

Nu kan man bevisa att B ri-funktioner faktiskt är ri-funktioner. Kraven från definitionen 2.1 uppfyller att $B_i^1(x)$ är en ri-funktion i och med att $B_i^1(x)$ är kontinuerlig, styckevis linjär och har kontinuerliga derivator av ordning 0. Antag som induktionsantagandet att $B_i^{k-1}(x)$ är en ri-funktion av gradtal $k-1$. Alltså $B_i^{k-1}(x)$ är kontinuerlig, består av styckevisa polynom av gradtal $k-1$ och har kontinuerliga derivator av ordning $k-2$. Från rekursionsformeln (2.1)

$$B_i^k(x) = \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+k}-\alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) + \left(\frac{\alpha_{i+k+1}-x}{\alpha_{i+k+1}-\alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x),$$

fås att $B_i^k(x)$ är kontinuerlig och består av styckevisa $k : te$ gradens polynom. Lemma 2.12 ger följande

$$\frac{d}{dx}B_i^k(x) = \left(\frac{k}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}\right) B_i^{k-1}(x) - \left(\frac{k}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_{i+1}}\right) B_{i+1}^{k-1}(x),$$

och enligt induktionsantagandet, har högra ledet kontinuerliga derivator av ordning $k-2$. Detta medför att $B_i^k(x)$ har kontinuerliga derivator upp till ordning $k-1$. Fullständig induktion ger att $B_i^k(x)$ är en ri-funktion av gradtal k, $k \in \mathbb{N}$.

Som tidigare nämnts är även integraler av B ri-funktioner nyttiga, exempelvis vid numerisk integration.

Lemma 2.15. *Primitiv till en B ri-funktion.*
Det gäller för $k \geq 0$, att

$$\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)\,ds = \left(\frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}\right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x). \tag{2.8}$$

Bevis. Båda leden deriveras med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)\,ds = B_i^k(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}\right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x)\right] = \frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{d}{dx} B_j^{k+1}(x)$$

$$= \frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1} \sum_{j=i}^{\infty} \left[\frac{k+1}{\alpha_{j+k+1} - \alpha_j} B_j^k(x) - \frac{k+1}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}} B_{j+1}^k(x)\right]$$

$$= \frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}(k+1) \left[\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{j+k+1} - \alpha_j} B_j^k(x) - \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}} B_{j+1}^k(x)\right]$$

$$= (\alpha_{i+k+1} - \alpha_i) \left[\frac{B_i^k(x)}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i} + \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}} B_{j+1}^k(x) - \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}} B_{j+1}^k(x)\right]$$

$$= (\alpha_{i+k+1} - \alpha_i) \left[\frac{B_i^k(x)}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i} + \sum_{j=i}^{\infty} \left(\frac{B_{j+1}^k(x)}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}} - \frac{B_{j+1}^k(x)}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}}\right)\right]$$

$$= (\alpha_{i+k+1} - \alpha_i) \left[\frac{B_i^k(x)}{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i} + \sum_{j=i}^{\infty} \frac{0}{\alpha_{j+k+2} - \alpha_{j+1}}\right] = B_i^k(x).$$

Derivatan av båda leden är samma. Insättning av $x = \alpha_i$ i ekvationen (2.8) fås:

$$\int_{-\infty}^{\alpha_i} B_i^k(s)\,ds = 0,$$

ty $B_i^k(s) = 0$ i intervallet $(-\infty, \alpha_i)$, och

$$\left(\frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}\right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(\alpha_i) = \left(\frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}\right) \cdot 0 = 0,$$

eftersom $B_j^{k+1}(\alpha_i) = 0$ för $j \geq i$. $\square$

Med hjälp av lemma 2.15 kan vi uttrycka en annan användbar formel för en primitiv funktion till en ri-funktion $S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(s)\,ds &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \int_{-\infty}^{x} B_i^k(s)\,ds \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left(\frac{\alpha_{i+k+1} - \alpha_i}{k+1}\right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^{k+1}(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^{k+1}(x) \left[\frac{1}{k+1} \sum_{j=-\infty}^{i} c_j(\alpha_{j+k+1} - \alpha_j)\right] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i B_i^{k+1}(x)
\end{aligned}$$

alltså

$$\int_{-\infty}^{x} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(s)\,ds = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i B_i^{k+1}(x)$$

där

$$e_i = \frac{1}{k+1} \sum_{j=-\infty}^{i} c_j(\alpha_{j+k+1} - \alpha_j).$$

Ovan visades en formel för beräkning av en primitiv till $S(x)$, men man kan även erhålla en bestämd integral genom att välja ett specifikt värde på x. Om man väljer $x = \alpha_l$, erhålls:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\alpha_l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i^k(s)\,ds &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i B_i^{k+1}(\alpha_l) \\
&= \sum_{i=l-k-1}^{l} e_i B_i^{k+1}(\alpha_l).
\end{aligned}$$

2.7 Linjäritet

Ifall f är en funktion och K är en delmängd av dess definitionsmängd, så betecknas restriktion av f till K med $f|K$, således:

$$(f|K)(x) = f(x) \qquad\qquad (x \in K)$$

Detta är nyttigt när man jobbar med ri-funktioner tack vare att varje funktion $B_i^k|(\alpha_j, \alpha_{j+1})$ är ett polynom. Med att en mängd av funktioner f_i är linjärt oberoende på mängden K, avses att restriktionerna $f_i|K$ är linjärt oberoende på K. Om B ri-funktioner är begränsade till ett intervall mellan två knutpunkter (α_v, α_{v+1}), fås en mängd av polynomen av gradtal $\leq k$. Härnäst bevisas några lemman om linjärt oberoende.

Lemma 2.16. *Mängden av B ri-funktioner* $\{B_j^k, B_{j+1}^k,...,B_{j+k}^k\}$ *är linjärt oberoende på intervallet* $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$.

Bevis. $k = 0$
Detta innebär att $\{B_j^0\}$ är linjärt oberoende i intervallet (α_j,α_{j+1}), vilket är sant.
Antag som induktionsantagandet att detta gäller för indexet $k-1$, $k \geq 1$.
Låt $S = \sum_{i=0}^{k} c_{j+i} B_{j+i}^k$ och antag $S|(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1}) = 0$. Enligt formeln (2.7):

$$0 = S'|(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1}) = k \sum_{i=1}^{k} \frac{c_{j+i} - c_{j+i-1}}{\alpha_{j+i+k} - \alpha_{j+i}} B_{j+i}^{k-1}|(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1}).$$

För att få denna ekvation, utnyttjas det att $B_{j+k+1}^{k-1} = 0$ och $B_j^{k-1} = 0$ i intervallet $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$. Med hjälp av induktionsantagandet fås att $\{B_{j+1}^{k-1}, B_{j+2}^{k-1},..., B_{j+k}^{k-1}\}$ är linjärt oberoende i intervallet $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$. Detta resulterar i att alla koefficienter måste vara 0 och $c_{j+1} = c_{j+2} = ... = c_{j+k} = \lambda$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$. Enligt lemma 2.11 är $S(x) = \lambda$ i intervallet $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$. Men på grund av att vi antog att $S = 0$ i intervallet $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$, medför detta att $c_j = \cdots = c_{j+k} = \lambda = 0$. Fullständig induktion ger att $\{B_j^k, B_{j+1}^k,...,B_{j+k}^k\}$ är linjärt oberoende på $(\alpha_{k+j},\alpha_{k+j+1})$. $\square$

Lemma 2.17. *Mängden av B ri-funktioner* $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k,...,B_{n-1}^k\}$ *är linjärt oberoende i* (α_0,α_n).

Bevis. Låt $S = \sum_{i=-k}^{n-1} c_i B_i^k$ och antag att $S|(\alpha_0,\alpha_n) = 0$. Av detta följer: endast $B_{-k}^k, B_{-k+1}^k,...,B_0^k$ är ickenoll i det första delintervallet (α_0,α_1). Följaktligen:

$$0 = S|(\alpha_0,\alpha_1) = \sum_{i=-k}^{0} c_i B_i^k|(\alpha_0,\alpha_1).$$

Från lemma 2.16 fås att mängden $\{B_{-k}^k, B_{-k+1}^k,...,B_0^k\}$ är linjärt oberoende på (α_0,α_1), alltså är $c_i = 0$ då $-k \leq i \leq 0$ i ekvationen ovan. Ifall alla c_i är 0, är beviset klart. Antag att alla c_i inte är lika med 0. Låt index j vara så att $c_j \neq 0$, där $j \geq 1$. Därav $(\alpha_j,\alpha_{j+1}) \subseteq (\alpha_0,\alpha_n)$. För vilket som helst $x \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ fås en motsägelse:

$$0 = S(x) = \sum_{i=j}^{n-1} c_i B_i^k(x) = c_j B_j^k(x) \neq 0.$$

Av detta följer att alla c_i är 0. □

Teorem 1. *Basen för rummet S_n^k.*
En bas för rummet S_n^k ges av

$$\left\{B_i^k\middle|[\alpha_0,\alpha_n] : -k \leq i \leq n-1\right\}.$$

Därmed blir dimensionen $k+n$ för rummet S_n^k.

Bevis. Beviset går ut på att visa att en ri-funktion $S(x)$ av gradtal k med knutpunkterna $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ kan omskrivas i en linjärkombination:

$$S(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} c_i B_i^k(x).$$

Först konstateras det att funktionerna i teoremet tillhör rummet S_n^k för att ri-funktioner av gradtal k är givna i knutpunkterna. Sedan bevisas det att dimensionen av S_n^k är högst $k+n$. I själva verket visas att varje element i S_n^k kan skrivas i formen:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x-\alpha_i)_+^k. \tag{2.9}$$

I denna ekvation används trunkerade potenser:

$$(x-\alpha_i)_+^k = \begin{cases} (x-\alpha_i)^k & \text{ifall } x \geq \alpha_i, \\ 0 & \text{ifall } x < \alpha_i. \end{cases}$$

De trunkerade potenserna är 0 i intervallet $[\alpha_0,\alpha_1]$. I intervallet gäller även följande: $S(x)$ är ett polynom p_0 av gradtal k. Polynomet p_0 blir då $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ i och med att trunkerade potenserna är 0. I nästa intervall $[\alpha_1,\alpha_2]$ är $S(x)$ ett annat polynom, p_1. Genom kontinuitetskravet i knutpunkten α_1 fås:

$$(p_1 - p_0)^{(r)}(\alpha_1) = 0 \qquad (0 \leq r \leq k-1).$$

Gradtalet för $p_1 - p_0$ är högst k. Då är $(p_1 - p_0)(x) = b_1(x-\alpha_1)_+^k$ för något b_1. På intervallet $[\alpha_0,\alpha_2]$ fås följande form för S:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + b_1(x-\alpha_1)_+^k \qquad (\alpha_0 \leq x \leq \alpha_2).$$

Sedan kan detta upprepas för varje knutpunkt $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$. I intervallet $\alpha_0 \leq x \leq \alpha_3$, genereras $S(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + b_1(x-\alpha_1)_+^k + b_2(x-\alpha_2)_+^k$. Med denna upprepning fås till slut ekvationen (2.9).

Därmed spänner mängden $\{1,x,x^2,...,x^k,(x-\alpha_1)_+^k,...,(x-\alpha_{n-1})_+^k\}$ med $k+n$ element upp rummet S_n^k. Lemma 2.17 ger att mängden $\{B_i^k \big| [\alpha_0,\alpha_n] : -k \leq i \leq n-1\}$ är linjärt oberoende. Då de är $k+n$ till antalet utgör de en bas för S_n^k. $\square$

Kapitel 3

Interpolation med B ri-funktioner

I förra kapitlet presenterades viktiga egenskaper för B ri-funktioner. I detta kapitel ligger fokus på att interpolera med B ri-funktioner. B ri-funktioner kan interpoleras på två olika sätt, interpolation i knutpunkterna och alternativt inte i knutpunkterna. Först presenteras interpolation i knutpunkterna.

3.1 Interpolation i knutpunkterna

Ett allmänt problem man stöter på när man interpolerar med B ri-funktioner är att bestämma koefficienterna A_i i uttrycket:

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i B_{i-k}^k(x)$$

när datapunkterna är (α_i, y_i), $i = 1,2,...,n$, dvs. interpolationskravet är

$$S(\alpha_i) = y_i \quad , i = 1,2,...,n.$$

Ifall $k = 0$ gäller

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i^0(x).$$

Sätt $A_i = y_i$, så fås

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i B_i^0(x).$$

Då uppfylls interpolationskravet $S(\alpha_i) = y_i$, eftersom

$$B_i^0(\alpha_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

För $k = 1$ gäller motsvarande:

$$B_{i-1}^1(\alpha_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Således erhålls $S(x)$ genom

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i B_{i-1}^1(x)$$

och interpolationskravet $S(\alpha_i) = y_i$ uppfylls.
Om n stycken B_0^1, B_1^1,...,B_{n-1}^1 används, krävs det n+2 stycken knutpunkter α_0, α_1,...,α_{n+1}. Såvida knutpunkterna α_0 och α_{n+1} inte är bestämda, kan man lösa detta problem genom att välja α_0 så att α_1 är mittpunkten i intervallet $[\alpha_0,\alpha_2]$ samt välja α_{n+1} så att α_n är mittpunkten i $[\alpha_{n-1},\alpha_{n+1}]$.
I fallen $k = 0$,1 är A_i entydigt bestämt tack vare interpolationskravet. Dock gäller detta inte mera för $k \geq 2$. För fallet $k = 2$ kan man med hjälp av rekursionsformel (2.1) få följande B ri-funktion:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i B_{i-2}^2(\alpha_j) &= A_j B_{j-2}^2(\alpha_j) + A_{j+1} B_{j-1}^2(\alpha_j) \\
&= A_j \left[\frac{\alpha_j - \alpha_{j-2}}{\alpha_j - \alpha_{j-2}} B_{j-2}^1(\alpha_j) + \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}} B_{j-1}^1(\alpha_j) \right] \\
&+ A_{j+1} \left[\frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}} B_{j-1}^1(\alpha_j) + \frac{\alpha_{j+2} - \alpha_j}{\alpha_{j+2} - \alpha_j} B_j^1(\alpha_j) \right] \\
&\text{Där } B_{j-2}^1(\alpha_j) = 0 \text{ och } B_j^1(\alpha_j) = 0, \\
&= A_j \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}} B_{j-1}^1(\alpha_j) + A_{j+1} \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}} B_{j-1}^1(\alpha_j) \\
&\text{Där } B_{j-1}^1(\alpha_j) = 1, \\
&= \frac{1}{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}} \left[A_j(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + A_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \right]
\end{aligned}$$

För att uppfylla interpolationskravet $S(\alpha_i) = y_i$ erhålls följande villkor:

$$A_j(\alpha_{j+1} - \alpha_j) + A_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = y_j(\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{3.1}$$

Detta ekvationssystem löses med n stycken ekvationer och (n+1) stycken obekanta A_1,A_2,...,A_{n+1}. Ett alternativ att lösa detta system är att bestämma ett värde på A_1 och rekursivt lösa ut A_2,A_3,...,A_{n+1}. Genom att lösa ut A_{j+1} från ekvationen (3.1) erhålls

$$\begin{aligned}
A_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) &= y_j(\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}) - A_j(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \\
A_{j+1} &= y_j \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} - A_j \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \\
A_{j+1} &= y_j \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} + A_j \frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}.
\end{aligned}$$

Och substituterar:

$$\begin{cases} a_j = y_j \frac{\alpha_{j+1}-\alpha_{j-1}}{\alpha_j-\alpha_{j-1}}, \\ b_j = \frac{\alpha_j-\alpha_{j+1}}{\alpha_j-\alpha_{j-1}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

erhålls rekursionsformeln $A_{j+1} = a_j + b_j A_j$, $j = 1,...,n$. Notera att:

$$\begin{aligned}
A_2 &= a_1 + b_1 A_1 = c_1 + d_1 A_1 \quad \text{ifall } c_1 = a_1 \text{ och } d_1 = b_1, \\
A_3 &= a_2 + b_2 A_2 = a_2 + b_2(c_1 + A_1 d_1) \\
&= a_2 + b_2 c_1 + b_2 d_1 A_1 \\
&= c_2 + d_2 A_1 \quad \text{ifall } c_2 = a_2 + b_2 c_1 \text{ och } d_2 = b_2 d_1.
\end{aligned}$$

Antag att detta gäller för $A_k = c_{k-1} + d_{k-1} A_1$ när $k \geq 3$, där

$$\begin{cases} c_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} c_{k-2} \\ d_{k-1} = b_{k-1} d_{k-2}. \end{cases}$$

Med hjälp av antagandet erhålls:

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= a_k + b_k A_k \\
&= a_k + b_k[c_{k-1} + d_{k-1} A_1] \\
&= a_k + b_k c_{k-1} + b_k d_{k-1} A_1 \\
&= c_k + d_k A_1.
\end{aligned}$$

Sammanfattningvis kan A_j bestämmas rekursivt med

$$A_{j+1} = c_j + d_j A_1, \quad 1 \leq j \leq n \tag{3.3}$$

där

$$\begin{cases} c_1 = a_1, & d_1 = b_1, \\ c_j = a_j + b_j c_{j-1}, & d_j = b_j d_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq n. \end{cases} \tag{3.4}$$

A_1 kan bestämmas så att uttrycket

$$F(A_1,A_2,...,A_{n+1}) = A_1^2 + A_2^2 + ... + A_{n+1}^2$$

blir så litet som möjligt, för att koefficienterna A_i ska få relativt små belopp. Med hjälp av rekursionformeln (3.3) ovan fås:

$$F(A_1,A_2,...,A_{n+1}) = A_1^2 + (c_1 + d_1A_1)^2 + ... + (c_n + d_nA_1)^2.$$

För att få det minsta värdet på uttrycket deriveras det med avseende på A_1 och derivatan sätts till noll.

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dA_1} =& 2A_1 + 2(c_1 + d_1A_1)d_1 + ... + 2(c_n + d_nA_1)d_n = 0 \\
&\Leftrightarrow A_1 + c_1d_1 + d_1^2A_1 + ... + c_nd_n + d_n^2A_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow A_1 + d_1^2A_1 + ... + d_n^2A_1 = -c_1d_1 - ... - c_nd_n \qquad (3.5) \\
&\Leftrightarrow A_1(1 + d_1^2 + ... + d_n^2) = -c_1d_1 - ... - c_nd_n \\
&\Leftrightarrow A_1 = \frac{-c_1d_1 - ... - c_nd_n}{1 + d_1^2 + ... + d_n^2}.
\end{aligned}$$

Sedan kan $S(x) = \sum_{i=1}^{n+1} A_iB_{i-2}^2(x)$ bestämmas genom att beräkna a_j och b_j ur (3.2) och c_j,d_j ur (3.4) och A_2,...,A_{n+1} med hjälp av $A_{j+1} = c_j + d_jA_1$ efter att A_1 bestämts som ovan.

3.2 Exempel

Exempel 3.1. *Följande data är givna:*

$$f(0) = -0.5, \quad f(1) = 0.5, \quad f(2) = 2.0, \quad f(3) = 1.5,$$
$$f(4) = 0.7, \quad f(5) = 0.1, \quad f(6) = -1.1, \quad f(7) = -0.3.$$

Dessa data interpoleras med hjälp av kvadratiska B ri-funktioner. Till denna lösning krävs även $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_9$ och α_{10} som har värdena -2, -1, 8 respektive 9. Först beräknas a_j och b_j enligt ekvationen (3.2):

$$a_1 = y_1 \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} = -0.5 \cdot \frac{1-(-1)}{0-(-1)} = -1.0,\ a_2 = 1.0,\ a_3 = 4.0,$$

$$a_4 = 3.0,\ a_5 = 1.4,\ a_6 = 0.2,\ a_7 = -2.2,\ a_8 = -0.6.$$

$$b_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_0} = \frac{0-1}{0-(-1)} = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = -1,$$

$$b_4 = -1,\ b_5 = -1,\ b_6 = -1,\ b_7 = -1,\ b_8 = -1.$$

Därefter kan c_j och d_j beräknas ur (3.4):

$$c_1 = a_1 = -1.0,\ c_2 = a_2 + b_2 a_1 = 1 + (-1) \cdot (-1.0) = 2.0,$$
$$c_3 = 2.0,\ c_4 = 1.0,\ c_5 = 0.4,\ c_6 = -0.2,\ c_7 = -2.0,\ c_8 = 1.4.$$
$$d_1 = b_1 = -1,\ d_2 = b_2 d_1 = (-1) \cdot (-1) = 1,$$
$$d_3 = -1,\ d_4 = 1,\ d_5 = -1,\ d_6 = 1,\ d_7 = -1,\ d_8 = 1,$$

Därefter kan A_1 beräknas ur (3.5) och sedan de övriga $A_2, ..., A_9$ med hjälp av ekvationen (3.3).

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-c_1 d_1 - ... - c_8 d_8}{1 + d_1^2 + ... + d_8^2} \\
&= -\frac{1.0 + 2.0 - 2.0 + 1.0 - 0.4 - 0.2 + 2.0 + 1.4}{1 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} \\
&= -\frac{4.8}{9} = -\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
A_2 = c_1 + d_1 A_1 = -1.0 + (-1) \cdot (-\frac{8}{15}) = -\frac{7}{15}, \\
A_3 = c_2 + d_2 A_1 = 2.0 + 1 \cdot (-\frac{8}{15}) = \frac{22}{15}, \\
A_4 = c_3 + d_3 A_1 = 2.0 + (-1) \cdot (-\frac{8}{15}) = \frac{38}{15}, \\
A_5 = c_4 + d_4 A_1 = 1.0 + 1 \cdot (-\frac{8}{15}) = \frac{7}{15}, \\
A_6 = c_5 + d_5 A_1 = 0.4 + (-1) \cdot (-\frac{8}{15}) = \frac{14}{15}, \\
A_7 = c_6 + d_6 A_1 = -0.2 + 1 \cdot (-\frac{8}{15}) = -\frac{11}{15}, \\
A_8 = c_7 + d_7 A_1 = -2.0 + (-1) \cdot (-\frac{8}{15}) = -\frac{22}{15}, \\
A_9 = c_8 + d_8 A_1 = 1.4 + 1 \cdot (-\frac{8}{15}) = \frac{13}{15}.
\end{cases}$$

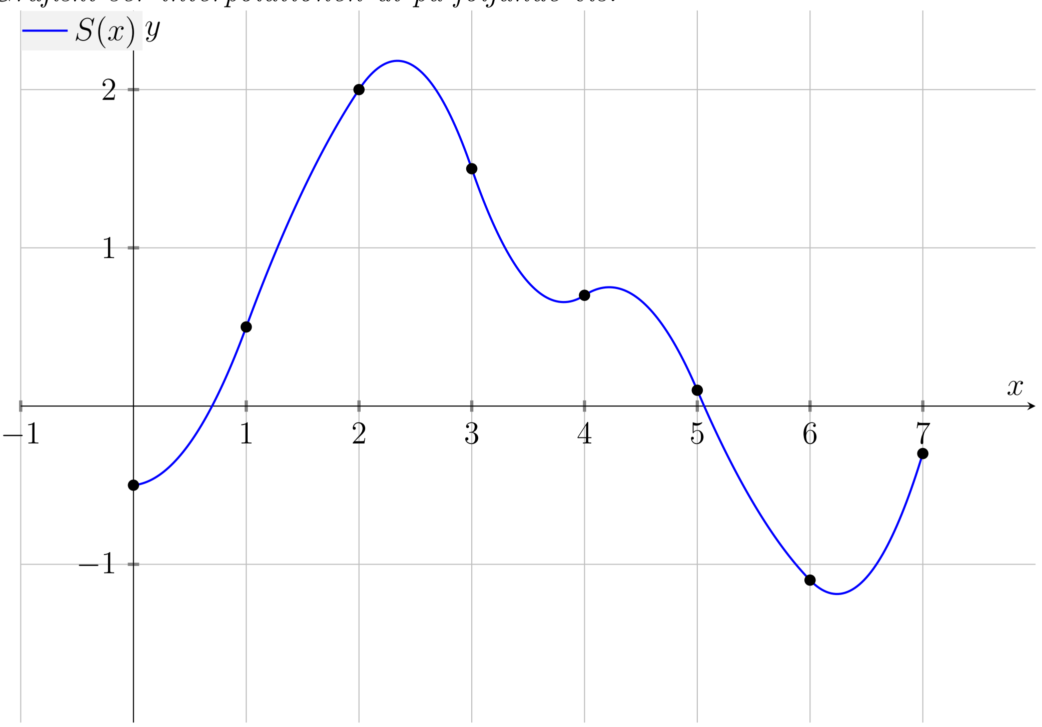
$S(x) = \sum_{i=1}^{9} A_i B_{i-2}^2(x) = A_1 B_{-1}^2(x) + A_2 B_0^2(x) + A_3 B_1^2(x) + A_4 B_2^2(x) + A_5 B_3^2(x) + A_6 B_4^2(x) + A_7 B_5^2(x) + A_8 B_6^2(x) + A_9 B_7^2(x)$ *kan sedan bestämmas. Alla B_{i-2}^2 beräknas enskilt för att lättare se vad som sker:*

$$\begin{cases} B^2_{-1}(x): \frac{1}{2}(x+2)^2 B^0_{-1}(x) + (-x^2 - x + \frac{1}{2})B^0_0(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 B^0_1(x), \\ B^2_0(x): \frac{1}{2}(x+1)^2 B^0_0(x) + (-x^2 + x + \frac{1}{2})B^0_1(x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 B^0_2(x), \\ B^2_1(x): \frac{1}{2}x^2 B^0_1(x) + (-x^2 + 3x - \frac{3}{2})B^0_2(x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 B^0_3(x), \\ B^2_2(x): \frac{1}{2}(x-1)^2 B^0_2(x) + (-x^2 + 5x - \frac{11}{2})B^0_3(x) + \frac{1}{2}(4-x)^2 B^0_4(x), \\ B^2_3(x): \frac{1}{2}(x-2)^2 B^0_3(x) + (-x^2 + 7x - \frac{23}{2})B^0_4(x) + \frac{1}{2}(5-x)^2 B^0_5(x), \\ B^2_4(x): \frac{1}{2}(x-3)^2 B^0_4(x) + (-x^2 + 9x - \frac{39}{2})B^0_5(x) + \frac{1}{2}(6-x)^2 B^0_6(x), \\ B^2_5(x): \frac{1}{2}(x-4)^2 B^0_5(x) + (-x^2 + 11x - \frac{59}{2})B^0_6(x) + \frac{1}{2}(7-x)^2 B^0_7(x), \\ B^2_6(x): \frac{1}{2}(x-5)^2 B^0_6(x) + (-x^2 + 13x - \frac{83}{2})B^0_7(x) + \frac{1}{2}(8-x)^2 B^0_8(x), \\ B^2_7(x): \frac{1}{2}(x-6)^2 B^0_7(x) + (-x^2 + 15x - \frac{111}{2})B^0_8(x) + \frac{1}{2}(9-x)^2 B^0_9(x). \end{cases}$$

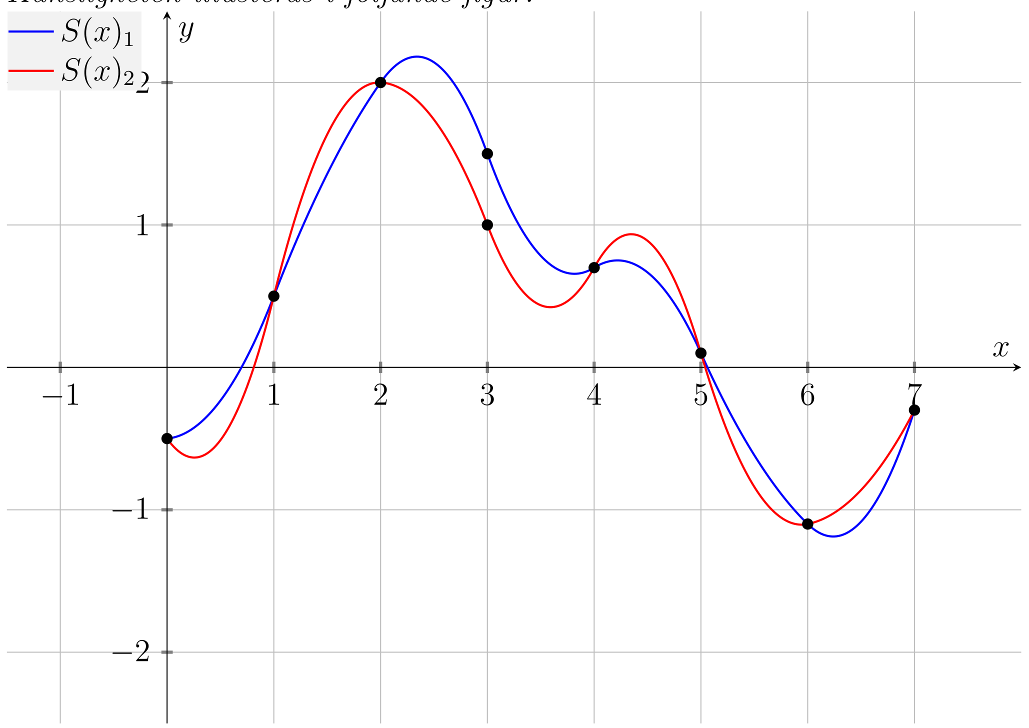
När detta gjorts, kan de olika faktorerna grupperas och hänsyn kan tas till värdet A_i, och då fås följande B ri-funktion för intervallet [0,7].

$$\begin{cases} S(x)|[0,1): -\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2 + (-\frac{7}{15})(-x^2 + x + \frac{1}{2}) + \frac{22}{15}\cdot\frac{1}{2}x^2, \\ S(x)|[1,2): -\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{22}{15}(-x^2 + 3x - \frac{3}{2}) + \frac{38}{15}\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2, \\ S(x)|[2,3): \frac{22}{15}\cdot\frac{1}{2}(3-x)^2 + \frac{38}{15}(-x^2 + 5x - \frac{11}{2}) + \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{2}(x-2)^2, \\ S(x)|[3,4): \frac{38}{15}\cdot\frac{1}{2}(4-x)^2 + \frac{7}{15}(-x^2 + 7x - \frac{23}{2}) + \frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}(x-3)^2, \\ S(x)|[4,5): \frac{7}{15}\cdot\frac{1}{2}(5-x)^2 + \frac{14}{15}(-x^2 + 9x - \frac{39}{2}) + (-\frac{11}{15})\cdot\frac{1}{2}(x-4)^2, \\ S(x)|[5,6): \frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}(6-x)^2 + (-\frac{11}{15})(-x^2 + 11x - \frac{59}{2}) + (-\frac{22}{15})\cdot\frac{1}{2}(x-5)^2, \\ S(x)|[6,7): (-\frac{11}{15})\cdot\frac{1}{2}(7-x)^2 + (-\frac{22}{15})(-x^2 + 13x - \frac{83}{2}) + \frac{13}{15}\cdot\frac{1}{2}(x-6)^2. \end{cases}$$

Grafiskt ser interpolationen ut på följande vis:



Den fjärde interpolationspunkten ändras till $f(3) = 1.0$ *för att visa metodens känslighet. Termerna* b_j *och* d_j *är oförändrade, men* a_j *och* c_j *ändrar värden, vilket också leder till att* A_j *ändras, så att* $A_1 = \frac{1}{45}$, $A_2 = -\frac{46}{45}, \ldots, A_9 = \frac{19}{45}$. *Känsligheten illusteras i följande figur:*



Denna metod är inte så pålitlig i och med att A_1 *uppskattas och rekursivt väljer* $A_2, ...A_9$. *Felet fortplantas tack vare att termerna väljs rekursivt. Ifall man ska interpolera i knutpunkterna rekommenderas det att använda sig av gradtal* 3. *Tillvägagångssätt finns på s.382-383 samt 387 i [4]. Denna metod påminner om den naturliga kubiska ri-funktionen, se i kandidatavhandlingen [1] för en närmare genomgång, där man sätter att andra derivatan i ändpunkterna är lika med 0. I sin korthet betyder detta att man ska lösa ekvationerna* $\sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j^3(\alpha_i)c_j = y_i$, *där* $1 \leq i \leq n$. *Vilket ger följande ekvationerna i detta fall:*

$$c_{i-3}B_{i-3}^3(\alpha_i) + c_{i-2}B_{i-2}^3(\alpha_i) + c_{i-1}B_{i-1}^3(\alpha_i) = y_i, \quad 1 \leq i \leq 8,$$

som innehåller 8 ekvationer med 10 obekanta varibaler c_i. *För naturliga kubiska ri-funktioner läggs till kravet:* $S''(\alpha_1) = S''(\alpha_8) = 0$, *vilket ger ekvationerna:*

$$(\alpha_3 - \alpha_0)c_{-2} - (\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_0 - \alpha_{-1})c_{-1} + (\alpha_2 - \alpha_{-1})c_0 = 0,$$

och

$$(\alpha_{10} - \alpha_7)c_5 - (\alpha_{10} + \alpha_9 - \alpha_7 - \alpha_6)c_6 + (\alpha_9 - \alpha_6)c_7 = 0.$$

Nu finns det 10 ekvationer och 10 obekanta. Ekvationssystemet som ska lösas blir:

$$\begin{cases} 3c_{-2} - 6c_{-1} + 3c_0 = 0, \\ \frac{1}{6}c_{-2} + \frac{2}{3}c_{-1} + \frac{1}{6}c_0 = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6}c_{-1} + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{6}c_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6}c_0 + \frac{2}{3}c_1 + \frac{1}{6}c_2 = 2.0, \\ \frac{1}{6}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{6}c_3 = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{6}c_2 + \frac{2}{3}c_3 + \frac{1}{6}c_4 = 0.7, \\ \frac{1}{6}c_3 + \frac{2}{3}c_4 + \frac{1}{6}c_5 = 0.1, \\ \frac{1}{6}c_4 + \frac{2}{3}c_5 + \frac{1}{6}c_6 = -1.1, \\ \frac{1}{6}c_5 + \frac{2}{3}c_6 + \frac{1}{6}c_7 = -0.3, \\ 3c_5 - 6c_6 + 3c_7 = 0. \end{cases}$$

Lösningen blir: $c_{-2} = -\frac{35827}{29110}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2}$, $c_0 = \frac{6717}{29110}$, $c_1 = \frac{75017}{29110}$, $c_2 = \frac{8507}{5822}$, $c_3 = \frac{16833}{29110}$, $c_4 = \frac{2479}{5822}$, $c_5 = -\frac{48947}{29110}$, $c_6 = -\frac{3}{10}$, $c_7 = \frac{31481}{29110}$.

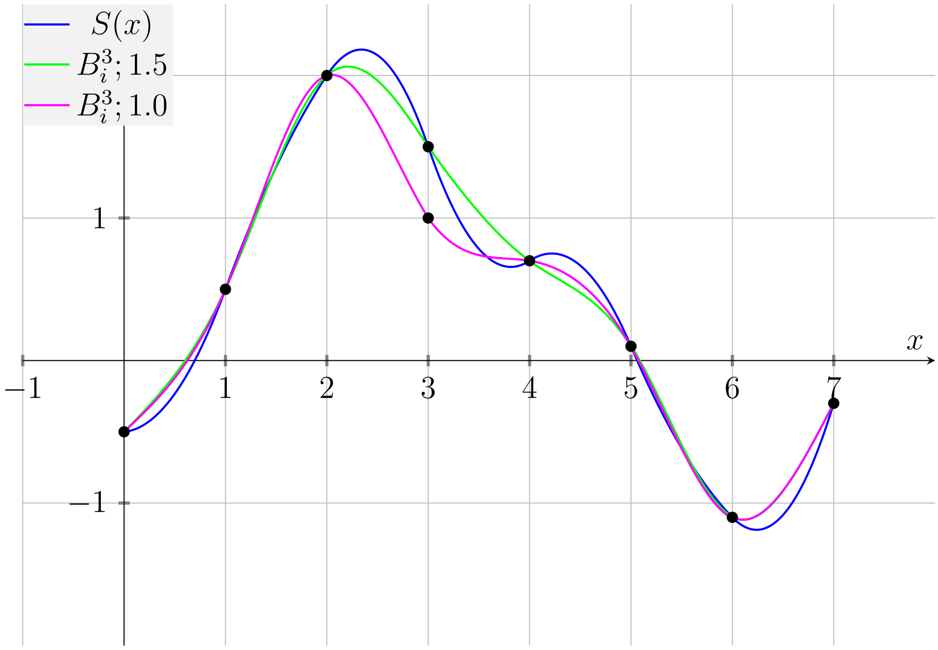
B_i^3 bestäms till B_i^0:

$$\begin{cases} B_{-1}^2 = & \frac{1}{6}(x+2)^3B_{-1}^0(x) + (-\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3})B_0^0(x) \\ & +(\frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{2}{3})B_1^0(x) + \frac{1}{6}(2-x)^3B_2^0(x), \\ B_0^2 = & \frac{1}{6}(x+1)^3B_0^0(x) + (-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6})B_1^0(x) \\ & +(\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{6})B_2^0(x) + \frac{1}{6}(3-x)^3B_3^0(x), \\ \vdots & \\ B_6^3 = & \frac{1}{6}(x-5)^3B_6^0(x) + (-\frac{1}{2}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - \frac{119}{2}x + \frac{739}{6})B_7^0(x) \\ & +(\frac{1}{2}x^3 - \frac{23}{2}x^2 + \frac{175}{2}x - \frac{1319}{6})B_8^0(x) + \frac{1}{6}(9-x)^3B_9^0(x). \end{cases}$$

De väsentliga B_i^0 grupperas och c_i värdena tas i beaktande, fås följande funktionen för $S(x)$:

$$\begin{cases} S(x)|[\alpha_1,\alpha_2) : \frac{3919}{14555}x^3 + \frac{10636}{14555}x - \frac{1}{2}, \\ S(x)|[\alpha_2,\alpha_3) : -\frac{4927}{5822}x^3 + \frac{97419}{29110}x^2 - \frac{76147}{29110}x + \frac{8959}{14555}, \\ S(x)|[\alpha_3,\alpha_4) : \frac{30243}{58220}x^3 - \frac{276629}{58220}x^2 + \frac{389709}{29110}x - \frac{144456}{14555}, \\ S(x)|[\alpha_4,\alpha_5) : \frac{17}{205}x^3 - \frac{9168}{14555}x^2 + \frac{7873}{14555}x + \frac{96273}{29110}, \\ S(x)|[\alpha_5,\alpha_6) : -\frac{6514}{14555}x^3 + \frac{83484}{14555}x^2 - \frac{72547}{2911}x + \frac{1084561}{29110}, \\ S(x)|[\alpha_6,\alpha_7) : \frac{2641}{2911}x^3 - \frac{212301}{14555}x^2 + \frac{223238}{2911}x - \frac{3845189}{29110}, \\ S(x)|[\alpha_7,\alpha_8) : -\frac{8463}{14555}x^3 + \frac{177723}{14555}x^2 - \frac{1223954}{14555}x + \frac{5515387}{29110}. \end{cases}$$

I följande graf visas också hur denna metod är mindre känslig än den andra, när den fjärde punkten byts till (3,1):



Teorem 2. *Antag att S är en interpolerande naturlig kubisk ri-funktion i datapunkterna (α_i, f_i). Antag att $g(x)$ är en funktion med kontinuerlig andra derivata mellan datapunkterna $a = \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n = b$, och att $g(\alpha_i) = f_i$. Då gäller följande:*

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_n} [S''(x)]^2 \, dx \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_n} [g''(x)]^2 \, dx.$$

Beviset av denna sats kan ses i kandidatavhandlingen [1].

3.3 Interpolationsmatris

Interpolationsmatriser är intressanta eftersom med dessa kan B ri-funktioner interpoleras i andra punkter än i knutpunkterna. Interpolationen utförs i givna noderna $x_1 < x_2 < ... < x_n$. B ri-funktionen måste i så fall vara i formen $\sum_{j=1}^{n} c_j B_j^k$. För att detta ska kunna vara möjligt krävs det att interpolationsmatrisen A som är definierad genom

$$A_{ij} = B_j^k(x_i), \qquad (1 \leq i, j \leq n), \tag{3.6}$$

är icke-singulär. Detta är ekvivalent med att diagonalen saknar 0 element, vilket bevisas i Schoenberg-Whitney-teoremet. Innan teoremet bevisas måste man först visa några lemman som är nödvändiga för beviset.

Lemma 3.2. *Ifall matrisen A_{ij} är icke-singulär, så är $A_{ii} \neq 0$ för $1 \leq i \leq n$.*

Bevis. Antag att $A_{rr} = 0$ för något r. Då är $B_r^k(x_r) = 0$ och enligt lemma 2.8 är då $x_r \notin (\alpha_r,\alpha_{r+k+1})$. Antag $x_r \leq \alpha_r$. Ifall $i \leq r \leq j$, erhålls $x_i \leq x_r \leq \alpha_r \leq \alpha_j$ och x_i är inte i stödet för B_j. Följaktligen, $A_{ij} = B_j^k(x_i) = 0$. De första r stycken raderna i A kan tolkas som vektorer i $\mathbb{R}^{r-1}$ för att $A_{ij} = 0$ för $j = r,r+1,...,n$. Mängden av de r första raderna är därför linjärt beroende och A är singulär.
I det andra fallet gäller $x_r \geq \alpha_{r+k+1}$. Om $i \geq r \geq j$, följer att $x_i \geq x_r \geq \alpha_{r+k+1} \geq \alpha_{j+k+1}$. Igen erhålls $A_{ij} = B_j^k(x_i) = 0$. I detta fall granskas kolumnerna från 1 till r:te kolumnen för att undersöka ifall de är linjärt beroende. Eftersom komponenterna på platserna $r, r+1,...n$ är lika med 0 för alla dessa r kolumner, måste de vara linjärt beroende. Alltså är A singulär. □

Till följande lemma behöver man motivera: Blockmatrisen A är inverterbar om och endast om de kvadratiska blocken C och D är det också. Holst och Ufnarovski bevisar detta i deras bok [6].

Anmärkning 3.3. *Med hänsyn till lemma 3.4, gäller följande:*

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} C & 0 \\ E & D \end{vmatrix} = \mid C \mid \cdot \mid D \mid, \quad \mid A \mid = \begin{vmatrix} C & E \\ 0 & D \end{vmatrix} = \mid C \mid \cdot \mid D \mid .$$

Med hjälp av detta kan följande lemma bevisas.

Lemma 3.4. *Ifall $k = 1$ och $\alpha_i < x_i < \alpha_{i+2}$ för $1 \leq i \leq n$, då är matrisen A icke-singulär.*

Bevis. Med induktion på indexet n kan man bevisa detta lemma. Först bevisas att det stämmer för $n = 1$. Matrisen A är då en 1×1- matris med endast ett element $A_{11} = B_1^1(x_1) \neq 0$. För att bevisa påståendet för $n \geq 2$, finns det tre olika fall som måste tas i beaktande:
Första fallet:
Antag att lemmat har bevisats i fallet att antalet noder x_i är färre än n och antag sedan att det finns n noder, där $n \geq 2$. Antag att man kan hitta ett index r, för vilket gäller $1 \leq r \leq n-1$ och $x_r \leq \alpha_{r+1}$. För varje par (i,j) sådant att $i \leq r < j$, gäller att $x_i \leq x_r \leq \alpha_{r+1} \leq \alpha_j$ och att $A_{ij} = B_j^1(x_i) = 0$. Matrisen A

får följande form:

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ E & D \end{bmatrix},$$

där C är en $r \times r$- och D är en $(n-r) \times (n-r)$-matris. Matrisen A är inverterbar om och endast om C och D är det, enligt anmärkningen ovan. Matriserna C och D är av samma struktur som A men är mindre på grund av att $r < n$ samt $n - r < n$. Från induktionsantagandet är C och D inverterbara, därav också A.
Andra fallet:
Fallet påminner mycket om första fallet, men $x_r \geq \alpha_{r+1}$ för något index r, så att $2 \leq r \leq n$. I detta fall är $A_{ij} = 0$, ifall $j < r \leq i$. Matrisen A:s struktur blir:

$$A = \begin{bmatrix} C & E \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

där C nu är $(r-1) \times (r-1)$- och D $(n-r+1) \times (n-r+1)$-matriser. Ett liknande argument som i första fallet, ger oss att C och D är inverterbara, vilket ger att även A är det.
Tredje fallet:
I det återstående fallet bevisas påståndet för $x_i > \alpha_{i+1}$ när $1 \leq i \leq n-1$ samt $x_i < \alpha_{i+1}$ när $2 \leq i \leq n$. Detta kan inträffa endast ifall $n = 1$ eller $n = 2$. Fallet $n = 1$ bevisades redan. Så för $n = 2$ och $k = 1$ fås $x_1 > \alpha_2$ och $x_2 < \alpha_3$. Således $\alpha_2 < x_1 < x_2 < \alpha_3$. Detta betyder att i intervallet (α_2, α_3), erhålls $B_1^1(x) + B_2^1(x) = 1$. Ersätt $B_1^1(x_1)$ med λ och $B_1^1(x_2) = \mu$ och då fås följande A-matris,

$$A = \begin{bmatrix} B_1^1(x_1) & B_2^1(x_1) \\ B_1^1(x_2) & B_2^1(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ \mu & 1-\mu \end{bmatrix}.$$

Determinanten blir då:

$$\lambda - \lambda\mu - (\mu - \lambda\mu) = \lambda - \mu.$$

Alltså är determinanten:

$$\lambda - \mu = B_1^1(x_1) - B_1^1(x_2) > 0,$$

och A är icke-singulär. Fullständig induktion ger att lemmat gäller. □

3.4 Schoenberg-Whitney-teoremet

I föregående avsnitt presenterades viktiga argument för att bevisa Schoenberg-Whitney-teoremet.

Teorem 3. *Antag att $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Givet att $A_{ij} = B_j^k(x_i)$, gäller det att matrisen A är icke-singulär, om och endast om det saknas 0 element i matrisens diagonal.*

Bevis. I lemma 3.2 visades att om A är icke-singulär, så är diagonalelementen olika noll. Antag att det inte finns nollelement i diagonalen för A. När $k = 0$, är det trivialt att $B_i^0(x_i) \neq 0$ medför att $\alpha_i \leq x_i < \alpha_{i+1}$. Detta på grund av att stöden för B ri-funktionen är disjunkta då $k = 0$, $B_j^0(x_i) = \delta_{ij}$. Detta ger att A är en enhetsmatris och därmed icke-singulär.

Antag att $k = 1$ och att det inte finns nollelement i diagonalen för A. Detta medför att $\alpha_i < x_i < \alpha_{i+2}$ för $1 \leq i \leq n$, vilket med stöd av lemma 3.4 ger att matrisen A är icke-singulär. Antag att inga nollelement i diagonalen medför att A är icke-singulär för B ri-funktioner av gradtal mindre än k. Sedan bevisas påståendet för B ri-funktioner av gradtal k, $k \geq 2$. Som i lemmat 3.4, utförs även ett induktionsantagande på n, men i detta bevis redogörs detta kort. Ifall $x_r \leq \alpha_{r+1}$ för något $r \in \{1,2,...,n-1\}$ eller ifall $x_r \geq \alpha_{r+k}$ för något $r \in \{2,3,...,n\}$, erhålls en matris med samma struktur som i lemmat 3.4, och matrisen är inverterbar då induktionsantagandet tillämpas på de två kvadratiska undermatriserna av matrisen A. Vi kan därmed anta att:

$$\alpha_{i+1} < x_i < x_{i+1} < \alpha_{i+k+1} \qquad (1 \leq i \leq n-1). \tag{3.7}$$

Antag nu att matris A är singulär, så att $Au = 0$ för något $u \neq 0$. Låt $f = \sum_{j=1}^{n} u_j B_j^k$, där f är noll i $n+2$ punkter $\alpha_1, x_1, x_2, ..., x_n, \alpha_{n+k+1}$ och f' existerar och är kontinuerlig eftersom $k \geq 2$. Rolles sats tillämpas, så att det existerar $n+1$ nollställen, ξ_i, för f', som uppfyller:

$$\alpha_1 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < \xi_n < x_n < \xi_{n+1} < \alpha_{n+k+1}.$$

Genom ekvationen (2.7) fås följande form för f': $\sum_{j=1}^{n+1} v_j B_j^{k-1}$, där $v_j = k\frac{u_j - u_{j-1}}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}$. Dock gäller det även

$$\sum_{j=1}^{n+1} v_j B_j^{k-1}(\xi_i) = f'(\xi_i) = 0, \qquad 1 \leq i \leq n+1. \tag{3.8}$$

Observera att ξ_i tillhör stödet för B_i^{k-1}, för $2 \leq i \leq n$, tack vare ekvationen (3.7). Således blir det fyra olika fall som måste beaktas.

I första fallet, antag att $\xi_1 < \alpha_{k+1}$ och att $\xi_{n+1} > \alpha_{n+1}$. Detta resulterar i att ξ_1 är i stödet för B_1^{k-1} och ξ_{n+1} är i stödet för B_{n+1}^{k-1}. Då är (n+1) $\times$ (n+1) matrisen $A_{ij} = B_j^{k-1}(\xi_i)$ icke-singulär på grund av induktionsantagandet. Av detta följer att koefficienterna v_j i ekvationen (3.8) måste vara 0. Enligt ovan är $v_j = k\frac{u_j - u_{j-1}}{\alpha_{i+k} - \alpha_i}$, där $1 \leq j \leq n+1$. Kravet $v_j = 0$ ger:

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n = 0.$$

I och med att funktionen f, endast verkar från u_1 till u_n, kan man välja $u_0 = u_{n+1} = 0$. Från ekvationen ovan, fås då att alla u_i måste vara lika med 0.

I andra fallet, antag att $\xi_1 \geq \alpha_{k+1}$ och att $\xi_{n+1} > \alpha_{n+1}$. Detta innebär att ξ_i inte är i stödet för B_1^{k-1}, vilket betyder $B_1^{k-1}(\xi_i) = 0$ för $1 \leq i \leq n+1$. Ekvationen (3.8) blir då:

$$\sum_{j=2}^{n+1} v_j B_j^{k-1}(\xi_i) = 0 \qquad (2 \leq i \leq n+1).$$

Eftersom ξ_i är i stödet för B_i^{k-1} för $2 \leq i \leq n+1$, fås att $v_j = 0$ för $2 \leq j \leq n+1$, med stöd av induktionsantagandet. Följaktligen:

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n = 0,$$

där $u_{n+1} = 0$, samma argument som i fall 1, vilket resulterar i att $u_i = 0$ när $1 \leq i \leq n$.

I fall tre, antag att $\xi_1 < \alpha_{k+1}$ samt att $\xi_n \leq \alpha_{n+1}$. Beviset påminner om andra fallet, men nu är ξ_i i stödet av B_i^{k-1} när $1 \leq i \leq n$. Enligt induktionsantagandet gäller det att $v_j = 0$ för $1 \leq i \leq n$. Sålunda:

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = 0,$$

där man kan välja $u_0 = 0$, tack vare att f verkar endast från u_1 till u_n vilket leder till $u_i = 0$ för $1 \leq i \leq n$.

I det sista och fjärde fallet, antag att $\xi_1 \geq \alpha_{k+1}$ och $\alpha_{n+1} \geq \xi_{n+1}$. Därav fås $B_1^{k-1}(\xi_i) = 0$ och $B_{n+1}^{k-1}(\xi_i) = 0$ när $1 \leq i \leq n+1$. Ekvationen (3.8) blir då:

$$\sum_{j=2}^{n} v_j B_j^{k-1}(\xi_i) = 0 \qquad (2 \leq i \leq n).$$

Eftersom ξ_i är i stödet för B_i^{k-1} då $2 \leq i \leq n$, erhålls

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1} = 0.$$

I detta fall kan man inte bestämma något u_i entydigt såsom i de föregående fallen, för att f verkar i alla u_i. Dock kan man observera att alla u_j är lika, säg λ. Då blir $f = \sum_1^n u_j B_j^k = \lambda \sum_1^n B_j^k$. Ekvationen $f(x_1) = 0$ ger att $\lambda = 0$, eftersom $B_j^k(x_j) \geq 0$ och $B_1^k(x_1) > 0$. Alltså måste alla $u_i = 0$. I alla fall fås att $u = 0$, och antitesen att A är singulär är falsk. Fullständig induktion över k ger att teoremet gäller. □

Teorem 4. *Interpolation med B ri-funktioner*
Ifall noderna x_1,x_2,...,x_{n+k} är valda i $[\alpha_0$,$\alpha_n]$ och satisfierar

$$\alpha_{i-k-1} < x_i < \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq n+k)$$

kan man med godtyckligt data i dessa noder interpolera med hjälp av ri-funktionsrummet S_n^k.

Bevis. Enligt teorem 1, är en bas för S_n^k given av mängden av funktioner $B_j^k|[\alpha_0, \alpha_n]$, där $-k \leq j \leq n-1$. Noderna omskrivs genom att sätta $y_i = x_{i+1+k}$ för $-k \leq i \leq n-1$. Då gäller $y_i \in \{y_i : B_i^k(y_i) \neq 0\}$, och med hjälp av Schoenberg-Whitney-teoremet fås att matrisen $A_{ij} = B_j^k(y_i)$ är icke-singulär. □

3.5 Exempel

Som avslutning till detta kapitel illusteras Schoenberg-Whitney-teoremet med ett exempel.

Exempel 3.5. *Följande data är givna:*

$$f(3{,}1) = -1, \quad f(3{,}5) = 1, \quad f(3{,}8) = \frac{3}{2}, \quad f(6{,}1) = \frac{1}{2}, \quad f(6{,}6) = 1.$$

I detta exempel interpolerar man med avseende på B_i^2 och för att uppfylla Schoenberg-Whitney-teoremet fås följande krav med stöd av teorem 4:

$$i < x_i < i+3 \qquad (1 \leq i \leq 5).$$

Vilket gäller eftersom:

$$1 < 3{,}1 < 4, \quad 2 < 3{,}5 < 5, \quad 3 < 3{,}8 < 6, \quad 4 < 6{,}1 < 7, \quad 5 < 6{,}6 < 8.$$

För att kunna interpolera i dessa punkter behöver man bilda interpolationsmatrisen som fås med hjälp av $\sum_{j=1}^{5} c_j B_j^2(x_i)$*. Denna summa är lika med* y_i*, där* $1 \leq i \leq 5$*. Vilket ger följande ekvationssystem:*

$$\begin{bmatrix} B_1^2(x_1) & B_2^2(x_1) & B_3^2(x_1) & B_4^2(x_1) & B_5^2(x_1) \\ B_1^2(x_2) & B_2^2(x_2) & B_3^2(x_2) & B_4^2(x_2) & B_5^2(x_2) \\ B_1^2(x_3) & B_2^2(x_3) & B_3^2(x_3) & B_4^2(x_3) & B_5^2(x_3) \\ B_1^2(x_4) & B_2^2(x_4) & B_3^2(x_4) & B_4^2(x_4) & B_5^2(x_4) \\ B_1^2(x_5) & B_2^2(x_5) & B_3^2(x_5) & B_4^2(x_5) & B_5^2(x_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Från exempel 2.6 fås B_i^2 *bestämt enligt:*

$$\begin{aligned} B_1^2(x) &= \frac{1}{2}(x-1)^2 B_1^0(x) + (-x^2+5x-\frac{11}{2})B_2^0(x) + \frac{1}{2}(4-x)^2 B_3^0(x), \\ B_2^2(x) &= \frac{1}{2}(x-2)^2 B_2^0(x) + (-x^2+7x-\frac{23}{2})B_3^0(x) + \frac{1}{2}(5-x)^2 B_4^0(x), \\ B_3^2(x) &= \frac{1}{2}(x-3)^2 B_3^0(x) + (-x^2+9x-\frac{39}{2})B_4^0(x) + \frac{1}{2}(6-x)^2 B_5^0(x), \\ B_4^2(x) &= \frac{1}{2}(x-4)^2 B_4^0(x) + (-x^2+11x-\frac{59}{2})B_5^0(x) + \frac{1}{2}(7-x)^2 B_6^0(x), \\ B_5^2(x) &= \frac{1}{2}(x-5)^2 B_5^0(x) + (-x^2+13x-\frac{83}{2})B_6^0(x) + \frac{1}{2}(8-x)^2 B_7^0(x). \end{aligned}$$

I kolumn 1 används $B_3^0(x)$*, från* B_1^2*, i och med att punkten 3,1 ligger i intervallet (3,4). Med samma argument för kolumn 2 och 3 räknar man med* $B_3^0(x)$*. För kolumn 4 och 5 krävs det* $B_6^0(x)$ *i och med att båda punkterna ligger i intervallet (6,7). Ifall en punkt inte ligger i ett visst intervall, blir elementet 0 i matrisen. Insättning och hänsyn till vilket intervall punkterna ligger i, så fås följande ekvationssystem:*

$$\begin{bmatrix} \frac{81}{200} & \frac{59}{100} & \frac{1}{200} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{50} & \frac{33}{50} & \frac{8}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{81}{200} & \frac{59}{100} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{37}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

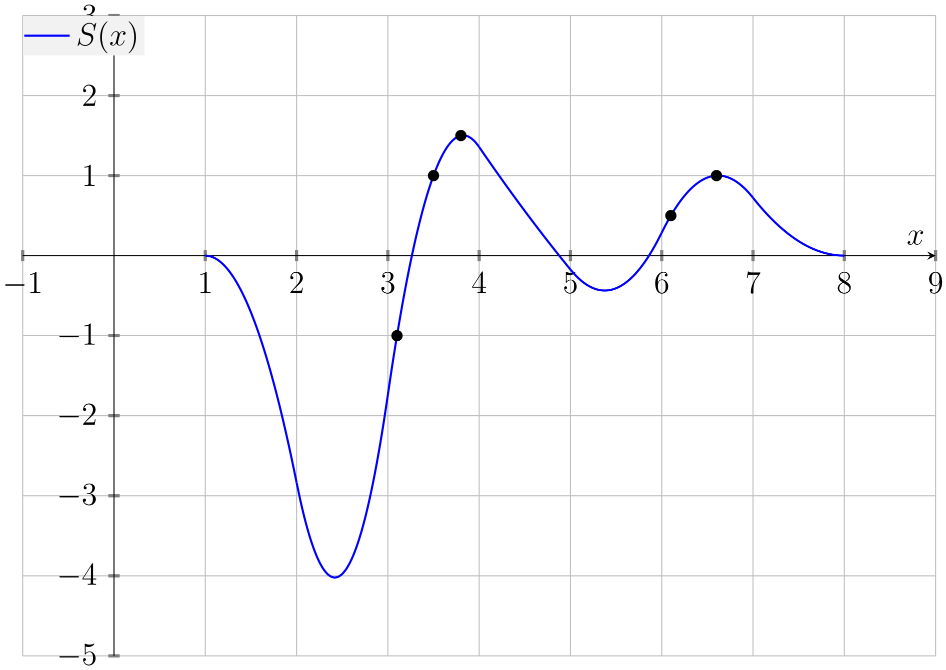
Lösningen till detta ekvationssystem är:

$$c_1 = -\frac{17}{3}, \quad c_2 = \frac{46}{21}, \quad c_3 = \frac{11}{21}, \quad c_4 = -\frac{88}{101}, \quad c_5 = \frac{146}{101}.$$

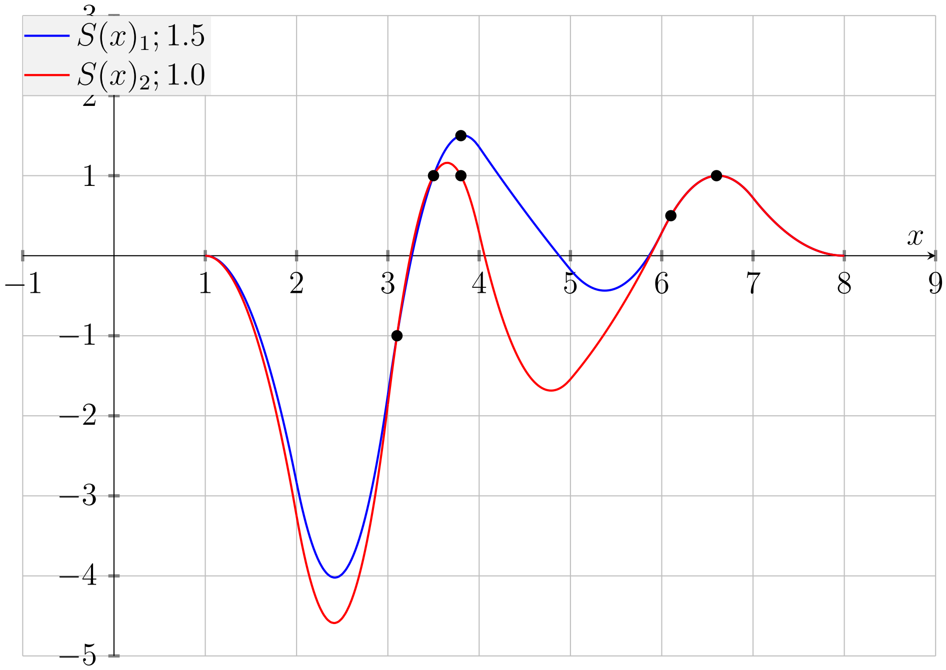
Den interpolerande funktionen $S(x)$ skrivs ut :

$$\begin{aligned}
S(x) = &-\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2B_1^0(x) + \left[(-\frac{17}{3})(-x^2+5x-\frac{11}{2}) + \frac{46}{21}\cdot\frac{1}{2}(x-2)\right]B_2^0(x)\\
&+\left[(-\frac{17}{3})\cdot\frac{1}{2}(4-x)^2+\frac{46}{21}(-x^2+7x-\frac{23}{2})+\frac{11}{21}\cdot\frac{1}{2}(x-3)^2\right]B_3^0(x)\\
&+\left[\frac{46}{21}\cdot\frac{1}{2}(5-x)^2+\frac{11}{21}(-x^2+9x-\frac{39}{2})+(-\frac{88}{101})\cdot\frac{1}{2}(x-4)^2\right]B_4^0(x)\\
&+\left[\frac{11}{21}\cdot\frac{1}{2}(6-x)^2+(-\frac{88}{101})(-x^2+11x-\frac{59}{2})+\frac{146}{101}\cdot\frac{1}{2}(x-5)^2\right]B_5^0(x)\\
&+\left[(-\frac{88}{101})\cdot\frac{1}{2}(7-x)^2+\frac{146}{101}(-x^2+13x-\frac{83}{2})\right]B_6^0(x)+\frac{146}{101}\cdot\frac{1}{2}(8-x)^2B_7^0(x).
\end{aligned}$$

Interpolationsfunktionen illustreras nedan:



Denna interpolationsmetod med $k = 2$ är bättre än den där noderna sammanfaller med knutpunkterna, jämför med exempel 3.1, i och med att den är mindre känslig över hela interpolationsområdet. Detta illustreras genom att ändra tredje punktens y- värde till 1. Ett liknande ekvationssystem fås som (3.9). Vilket ger c_i-värden: $c_1 = -\frac{13}{2}$, $c_2 = \frac{39}{14}$, $c_3 = -\frac{31}{14}$, $c_4 = -\frac{88}{101}$ *och* $c_5 = \frac{146}{101}$.



$S(x)_1; 1.5$
$S(x)_2; 1.0$
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5

Kapitel 4

Approximering med B ri-funktioner

B ri-funktioner kan interpolera en stor mängd data, dock finns det data som inte kan interpoleras. Därför presenterade Schoenberg år 1967 en icke-interpolerande process för att approximera funktioner. Den allmänna versionen definieras

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^k(x), \qquad \text{där } \tau_i = \frac{1}{k}(\alpha_{i+1} + ... + \alpha_{i+k}).$$

4.1 Schoenbergs process för kvadratiska versionen

I den kvadratiska versionen är $k = 2$ och S får formen

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^2(x), \qquad \tau_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}).$$

Punkterna som f evalueras i är mittpunkten av knutpunkterna. $S(x)$ har även följande egenskaper:

1. Om $f(x)$ är linjär, $f(x) = ax + b$, så är $S(x) = f(x)$.
2. Om $f(x) \geq 0$ för alla x, så är $S(x) \geq 0$ för alla x.
3. Om $|f| \leq M$, så gäller $|S| \leq M$.
4. $(Sf) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^2$ är en linjär operator, det gäller att $S(\beta f + \gamma g) = \beta Sf + \gamma Sg$.
5. Grafen av S skär inte någon linje i planet flera gånger än grafen av f.

Med egenskap 5 vill man behålla formen, alltså med andra ord, S borde inte svänga mera än f. Härnäst redovisas dessa egenskaper.
För egenskap 1, låt $f(\tau_i) = a\tau_i + b$, då fås:

$$S(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^2(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a\tau_i + b)B_i^2(x) = a\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tau_i B_i^2(x) + b\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^2(x).$$

Nu visas att $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tau_i B_i^2(x) = x$ med stöd av lemma 2.10 och att $\tau_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tau_i B_i^2(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})B_i^2(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+2}-\alpha_i}\right) + (\alpha_i + \alpha_{i+1})\left(\frac{\alpha_{i+2}-x}{\alpha_{i+2}-\alpha_i}\right)\right] B_i^1(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{i+1}x - \alpha_{i+1}\alpha_i + \alpha_{i+2}x - \alpha_{i+2}\alpha_i + \alpha_i\alpha_{i+2} - \alpha_i x + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}x}{\alpha_{i+2}-\alpha_i} B_i^1(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{i+2}x - \alpha_i x + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}\alpha_i}{\alpha_{i+2}-\alpha_i} B_i^1(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_{i+2}-\alpha_i)x + \alpha_{i+1}(\alpha_{i+2}-\alpha_i)}{\alpha_{i+2}-\alpha_i} B_i^1(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} (x + \alpha_{i+1})B_i^1(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[(x + \alpha_{i+1})\left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right) + (x + \alpha_i)\left(\frac{\alpha_{i+1}-x}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)\right] B_i^0(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x\alpha_i + \alpha_{i+1}x - \alpha_{i+1}\alpha_i + x\alpha_{i+1} - x^2 + \alpha_i\alpha_{i+1} - \alpha_i x}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} B_i^0(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{2x\alpha_{i+1} - 2x\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} B_i^0(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{2x(\alpha_{i+1}-\alpha_i)}{\alpha_{i+1}-\alpha_i} B_i^0(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2xB_i^0(x) = x\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = x,
\end{aligned}$$

ty $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ för alla x i och med lemma 2.11. Med hjälp av detta erhålls:

$$S(x) = a\sum_{i=-\infty}^{\infty} \tau_i B_i^2(x) + b\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^2(x) = ax + b,$$

eftersom $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^2(x) = 1$ för alla x enligt lemma 2.11. Egenskap 2 är sann, eftersom $B_i^2(x) \geq 0$ och $f(x) \geq 0$ för alla x, gäller det att båda faktorerna i summan är större eller lika med 0, och därmed är även $S(x) \geq 0$. Egenskap 3 bevisas genom att låta $\left|f(x)\right| \leq M$, så att:

$$\begin{aligned}
\left|S(x)\right| &= \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i) B_i^2(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|f(\tau_i)\right| B_i^2(x) \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} M B_i^2(x) \\
&= M \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^2(x) = M.
\end{aligned}$$

Egenskap 4 kan klargöras genom att sätta $S_1(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^2(x)$ och $S_2(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(\tau_i)B_i^2(x)$, och definera att $h(x) = \beta f(x) + \gamma g(x)$. Då fås:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(\tau_i) B_i^2(x) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\beta f(\tau_i) + \gamma g(\tau_i)) B_i^2(x) \\
&= \beta \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i) B_i^2(x) + \gamma \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(\tau_i) B_i^2(x) \\
&= \beta S_1(x) + \gamma S_2(x).
\end{aligned}$$

Detta ger att $(Sf)(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\tau_i)B_i^2(x)$ är en linjär operator.
Egenskap 5 redovisas i [7] och [8].
Sedan visas att kontinuerliga funktioner kan bli approximerade med godtycklig precision av B ri-funktioner. Som vanligt är knutpunkterna definierade:

$$\cdots < \alpha_{-2} < \alpha_{-1} < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots,$$

där intervallet $[\alpha_0, \alpha_n]$ igen kan betecknas $[a,b]$. Antag att funktionen f är given i $[a,b]$. Funktionen f kan utvidgas utanför $[a,b]$,dvs. $f(x) = f(b)$ när $x \geq b$ och $f(x) = f(a)$ när $x \leq a$. Följande gäller: ifall f är kontinuerlig i $[a,b]$ är även utvidgningen av f kontinuerlig utanför intervallet. Oberoende av om f är kontinuerlig eller inte, kan kontinuitetsmodulen definieras enligt:

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|s-t|\leq\delta} \left|f(s) - f(t)\right|.$$

Definition 4.1. *Låt f vara en funktion definierad på det ändliga slutna intervallet $[a,b]$. Då definieras kontinuitetsmodulen $\omega(\delta)$ för $0 \leq \delta \leq b-a$ genom:*

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} \left| f(x) - f(y) \right|,$$

där $x,y \in [a,b]$.

Anmärkning 4.2. *Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ kan* sup *ersättas med* max.

Anmärkning 4.3. *Ifall f är en kontinuerlig funktion i intervallet [a,b], då är den likformig kontinuerlig, vilket medför att det existerar för varje $\epsilon > 0$, ett $\delta > 0$, så att för alla $s,t \in [a,b]$ gäller:*

$$|s-t| < \delta \Rightarrow \left| f(s) - f(t) \right| < \epsilon.$$

Följaktligen är $\omega(f;\delta) \leq \epsilon$. Alltså, för en kontinuerlig funktion f som är i ett slutet och begränsat intervall, går $\omega(f;\delta)$ mot 0, när δ går mot 0.
Ifall f' existerar och är kontinuerlig, kan man med hjälp av medelvärdessatsen få

$$\left| f(s) - f(t) \right| = \left| f'(\xi) \right| |s-t| \leq M|s-t|$$

där f' satisfierar $\left| f'(x) \right| \leq M$. Således gäller i detta fall $\omega(f,\delta) \leq M\delta$.
För att bevisa kommande teorem, införs en annan B ri-funktion, $g(x)$, så att

$$g(x) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(\alpha_{i+2}) B_i^k. \tag{4.1}$$

Hädanefter presenteras ett teorem som visar att approximationsfelet är uppåt begränsat av $k\omega(f;\delta)$.

Teorem 5. *B ri-funktioners approximationsegenskap.*
Förutsatt att f är en funktion definierad i intervallet $[\alpha_0,\alpha_n]$, så satisfierar B ri-funktionen, g(x) i (4.1) följande olikhet

$$\sup_{\alpha_0 \leq x \leq \alpha_n} \left| f(x) - g(x) \right| \leq k\omega(f;\delta),$$

där $\delta = max_{-k\leq i\leq n+1} |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$, och $\omega(f;\cdot)$ är kontinuitetsmodulen av f.

Bevis. Från kapitel 2 utnyttjas egenskaperna $B_i^k \geq 0$ och $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k = 1$. Substituera $g(x)$ enligt ekvation (4.1) och multiplicera 1 med $f(x)$, då erhålls:

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - f(x)\right| &= \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\alpha_{i+2})B_i^k - f(x)\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^k(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\alpha_{i+2})B_i^k(x) - f(x)B_i^k(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right] B_i^k(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right| B_i^k(x).
\end{aligned}$$

Låt $x \in [\alpha_j,\alpha_{j+1}] \subseteq [a,b]$. På intervallet $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ inverkar endast B_{j-k}^k, B_{j-k+1}^k, $\ldots$, B_j^k, därav

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right| B_i^k(x) &\leq \sum_{i=j-k}^{j} \left|f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right| B_i^k(x) \\
&\leq \max_{j-k\leq i\leq j} \left|f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right|.
\end{aligned}$$

För att få det största värdet, måste två olika möjligheter beaktas:

$$\alpha_{i+2} - x \leq \alpha_{j+2} - \alpha_j = \alpha_{j+2} - \alpha_{j+1} + \alpha_{j+1} - \alpha_j = (\alpha_{j+2} - \alpha_{j+1}) + (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \leq 2\delta.$$

Och

$$x - \alpha_{i+2} \leq \alpha_{j+1} - \alpha_{j-k+2} = (\alpha_{j+1} - \alpha_j) + \cdots + (\alpha_{j-k+3} - \alpha_{j-k+2}) \leq k\delta.$$

Detta ger att

$$\left|f(\alpha_{i+2}) - f(x)\right| \leq \omega(f; k\delta).$$

Sedan bevisas följande olikhet: $\omega(f;k\delta) \leq k\omega(f;\delta)$. Antag att $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\omega(f;k\delta) &= \sup_{|s-t|\leq k\delta} \left| f(s) - f(t) \right| \\
&= \sup_{|s-t|\leq k\delta} \bigg| f(s) - f(s + \frac{t-s}{k}) + f(s + \frac{t-s}{k}) - f(s + 2\cdot\frac{t-s}{k}) + f(s + 2\cdot\frac{t-s}{k}) \\
&\quad - \cdots + f(s + (k-1)\frac{t-s}{k}) - f(t) \bigg| \\
&\leq \sup_{|s-t|\leq k\delta} \bigg\{ \left| f(s) - f(s + \frac{t-s}{k}) \right| + \left| f(s + \frac{t-s}{k}) - f(s + 2\cdot\frac{t-s}{k}) \right| \\
&\quad + \cdots + \left| f(s + (k-1)\frac{t-s}{k}) - f(t) \right| \bigg\} \\
&\leq k \cdot \sup_{|s-t|\leq \delta} \left| f(s) - f(t) \right| = k \cdot \omega(f;\delta).
\end{aligned}$$

Sista raden stämmer eftersom $\frac{t-s}{k} \leq \delta$. □

Anmärkning 4.4. *Om f är kontinuerlig på $[\alpha_0,\alpha_n]$, visar teorem 4 att f kan approximeras med godtycklig precision, med B ri-funktioner, bara knutpunkterna väljs tillräckligt tätt.*

I ett normerat rum är avståndet mellan funktionen f och ett underrum G definierat enligt:

$$dist(f,G) = \inf_{g\in G} \|f - g\|.$$

Normdefinitionen som används är:

$$\|f\| = \sup_{a\leq x\leq b} \left| f(x) \right|,$$

där f är begränsad på $[a,b]$. Med hjälp av teorem 5 erhålls

$$dist(f,S_n^k) = \inf_{h\in S_n^k} \|f - h\| \leq \sup_{a_0\leq x\leq a_n} \left| f(x) - g(x) \right| \leq k\omega(f;\delta).$$

Och ifall f är kontinuerlig gäller

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0.$$

Teorem 6. *Avstånd från funktionen till ri-funktionsrummet.*
Låt $r<k<n$. Ifall $f \in C^r[\alpha_0,\alpha_n]$, då är

$$dist(f,S_n^k) \leq k^r \delta^r \left\| f^{(r)} \right\|$$

där $\delta = max_{-k\leq i\leq n+1} |\alpha_i - \alpha_{i-1}|$.

Bevis. Låt funktionen g var ett element i rummet S_n^k. Enligt teorem ovan, erhålls:

$$dist(f,S_n^k) = dist(f-g,S_n^k) \leq k\omega(f-g;\delta) \leq k\delta \left\| f' - g' \right\|, \tag{4.2}$$

stämmer enligt anmärkning 4.3. Härnäst visas att derivataoperatorn är surjektiv från S_n^k till S_n^{k-1}.

Tag godtycklig $h \in S_n^{k-1}$.

$$S_n^{k-1} = spann\left\{ B_i^{k-1} \big| [\alpha_0,\alpha_n] : -(k-1) \leq i \leq n-1 \right\},$$

eftersom $\left\{ B_i^{k-1} \big| [\alpha_0,\alpha_n] : -(k-1) \leq i \leq n-1 \right\}$ är en bas för S_n^{k-1}.

Då gäller: $h(x) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} c_i B_i^{k-1}(x)$ för någon uppsättning konstanter $c_i \in \mathbb{R}$.

Enligt lemma 2.15 fås:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt = \sum_{i=-k+1}^{n-1} c_i \int_{-\infty}^{x} B_i^{k-1}(t)\,dt = \sum_{i=-k+1}^{n-1} c_i \left(\frac{\alpha_{i+k} - \alpha_i}{k} \right) \sum_{j=i}^{\infty} B_j^k(x).$$

Substituera $c_i \left(\frac{\alpha_{i+k}-\alpha_i}{k} \right) = d_i$ och minns att $B_j^k(x) = 0$ på intervallet $[\alpha_0,\alpha_n]$ om $j \geq n$.

$$\sum_{i=-k+1}^{n-1} \sum_{j=i}^{\infty} d_i B_j^k(x) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} d_i B_j^k(x) = \sum_{i=-k+1}^{n-1} e_i B_i^k(x) \in S_n^k.$$

Alltså finns det $H(x) \in S_n^k$ så att $H'(x) = h(x)$, så derivataoperatorn är surjektiv från S_n^k till S_n^{k-1}. Detta ger följande sammanhang, då infimum tas över g i ekvationen (4.2):

$$dist(f,S_n^k) \leq k\delta \cdot dist(f',S_n^{k-1}).$$

Detta argument upprepas $r-2$ gånger, då erhålls:

$$\begin{aligned} dist(f,S_n^k) &\leq k^{r-1}\delta^{r-1} dist(f^{(r-1)}, S_n^{k+1-r}) \\ &\leq k^{r-1}\delta^{r-1} k\omega(f^{(r-1)};\delta) = k^r\delta^{r-1}\omega(f^{(r-1)};\delta) \\ &\leq k^r\delta^{r-1}\delta \left\| f^{(r)} \right\| = k^r\delta^r \left\| f^{(r)} \right\|. \end{aligned}$$

□

4.2 Exempel

Exempel 4.5. *Exempel på hur Schoenberg's process tillämpas på funktionen $f(x) = x \cdot \cos(x)$ på intervallet [0,10]. Först väljs knutpunkter enligt:*

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \ldots, \quad \alpha_{10} = 9, \quad \alpha_{11} = 10.$$

Detta ger $n = 11$. Utöver dessa punkter, behövs det även $\alpha_0 = -1$, $\alpha_{-1} = -2$, $\alpha_{12} = 11$, $\alpha_{13} = 12$ för att kunna tillämpa Schoenbergs process för $k = 2$.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{i=-1}^{10} f(\tau_i) B_i^2(x) \\
&= \sum_{i=-1}^{10} \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}) \cdot \cos(\frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})) \cdot B_i^2(x) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) \cos(\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)) \cdot B_{-1}^2(x) \\
&+ ... \\
&+ \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{12}) \cos(\frac{1}{2}(\alpha_{11} + \alpha_{12})) \cdot B_{10}^2(x).
\end{aligned}$$

De olika $f(\tau_i)$ får följande värden:

$$\begin{aligned}
&f(\tau_{-1}) = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}), \quad f(\tau_0) = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}), \\
&f(\tau_1) = \frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2}), \quad \ldots, \quad f(\tau_{10}) = \frac{21}{2}\cos(\frac{21}{2})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

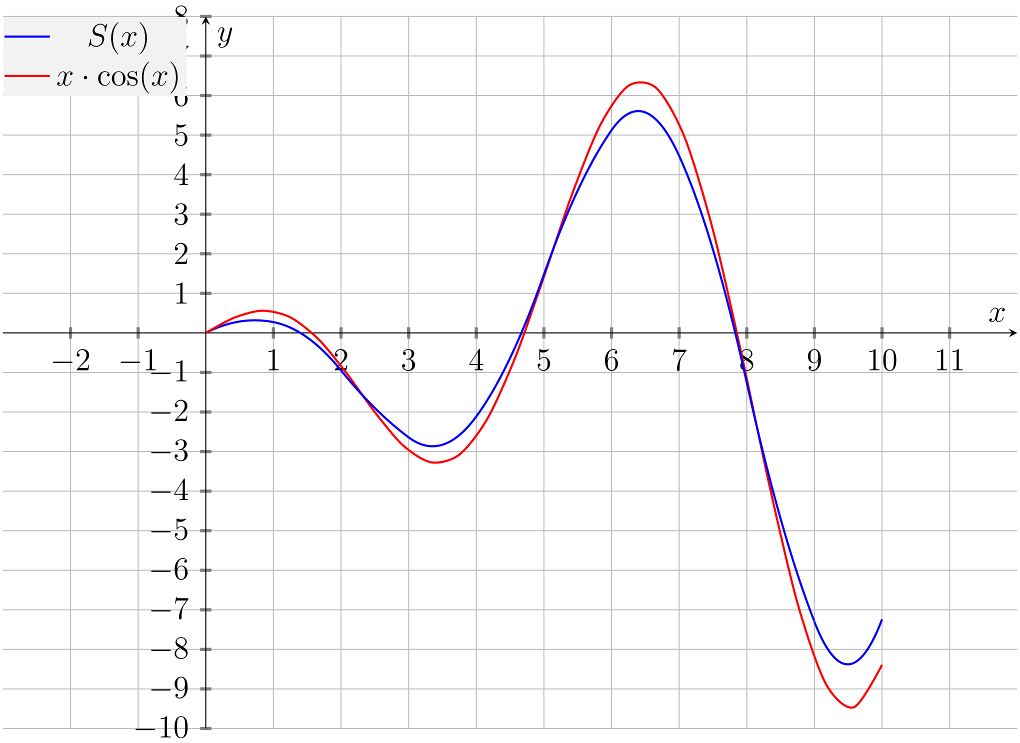
B_i^2 beräknas till B_i^0:

$$\begin{cases}
B_{-1}^2(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 B_{-1}^0(x) + (-x^2 - x + \frac{1}{2}) B_0^0(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2(x) B_1^0(x), \\
B_0^2(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 B_0^0(x) + (-x^2 + x + \frac{1}{2}) B_1^0(x) + \frac{1}{2}(2-x)^2(x) B_1^0(x), \\
\vdots \\
B_{10}^2(x) = \frac{1}{2}(x-9)^2 B_{10}^0(x) + (-x^2 + 21x - \frac{219}{2}) B_{11}^0(x) + \frac{1}{2}(12-x)^2 B_{12}^0(x).
\end{cases}$$

De $B_i^0(x)$ termer som förekommer 3 gånger, grupperas och tas i beaktande värdena från (4.3), då fås:

$$\begin{cases} S|[\alpha_1,\alpha_2) : -\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2})\cdot(-x^2+x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2})\cdot\frac{1}{2}x^2, \\ S|[\alpha_2,\alpha_3) : \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}(2-x)^2+\frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2})\cdot(-x^2+3x-\frac{3}{2})+\frac{5}{2}\cos(\frac{5}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-1)^2, \\ S|[\alpha_3,\alpha_4) : \frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2})\cdot\frac{1}{2}(3-x)^2+\frac{5}{2}\cos(\frac{5}{2})\cdot(-x^2+5x-\frac{11}{2})+\frac{7}{2}\cos(\frac{7}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-2)^2, \\ S|[\alpha_4,\alpha_5) : \frac{5}{2}\cos(\frac{5}{2})\cdot\frac{1}{2}(4-x)^2+\frac{7}{2}\cos(\frac{7}{2})\cdot(-x^2+7x-\frac{23}{2})+\frac{9}{2}\cos(\frac{9}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-3)^2, \\ S|[\alpha_5,\alpha_6) : \frac{7}{2}\cos(\frac{7}{2})\cdot\frac{1}{2}(5-x)^2+\frac{9}{2}\cos(\frac{9}{2})\cdot(-x^2+9x-\frac{39}{2})+\frac{11}{2}\cos(\frac{11}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-4)^2, \\ S|[\alpha_6,\alpha_7) : \frac{9}{2}\cos(\frac{9}{2})\cdot\frac{1}{2}(6-x)^2+\frac{11}{2}\cos(\frac{11}{2})\cdot(-x^2+11x-\frac{59}{2})+\frac{13}{2}\cos(\frac{13}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-5)^2, \\ S|[\alpha_7,\alpha_8) : \frac{11}{2}\cos(\frac{11}{2})\cdot\frac{1}{2}(7-x)^2+\frac{13}{2}\cos(\frac{13}{2})\cdot(-x^2+13x-\frac{83}{2})+\frac{15}{2}\cos(\frac{15}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-6)^2, \\ S|[\alpha_8,\alpha_9) : \frac{13}{2}\cos(\frac{13}{2})\cdot\frac{1}{2}(8-x)^2+\frac{15}{2}\cos(\frac{15}{2})\cdot(-x^2+15x-\frac{111}{2})+\frac{17}{2}\cos(\frac{17}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-7)^2, \\ S|[\alpha_9,\alpha_{10}) : \frac{15}{2}\cos(\frac{15}{2})\cdot\frac{1}{2}(9-x)^2+\frac{17}{2}\cos(\frac{17}{2})\cdot(-x^2+17x-\frac{143}{2})+\frac{19}{2}\cos(\frac{19}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-8)^2, \\ S|[\alpha_{10},\alpha_{11}) : \frac{17}{2}\cos(\frac{17}{2})\cdot\frac{1}{2}(10-x)^2+\frac{19}{2}\cos(\frac{19}{2})\cdot(-x^2+19x-\frac{179}{2})+\frac{21}{2}\cos(\frac{21}{2})\cdot\frac{1}{2}(x-9)^2. \end{cases}$$

Funktionen jämförs grafiskt med $x \cdot \cos(x)$:



I följande exempel illustreras hur antalet approximationspunkter påverkar på approximationen. I detta exempel jämförs $n = 5$, 9 och 21.

Exempel 4.6. *Funktionen är definierad enligt:*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & x = 2, \\ 1, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Välj punkterna $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{5}$, $\ldots$, $\alpha_{20} = \frac{19}{5}$, $\alpha_{21} = 4$ för $n = 21$. Följaktligen fås $S(x) = \sum_{i=-1}^{20} f(\tau_i) B_i^2(x)$. På grund av att funktionen är definierad som konstanter är det enkelt att erhålla $f(\tau_{-1}) = \cdots = f(\tau_9) = 3$ och $f(\tau_{10}) = \cdots = f(\tau_{21}) = 1$. B_i^2 bestäms till B_i^0:

$$\begin{cases} B_{-1}^2 = \frac{25}{2}(x+\frac{2}{5})^2 B_{-1}^0(x) + 25(-x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{50}) B_0^0(x) + \frac{25}{2}(\frac{1}{5} - x)^2 B_1^0(x), \\ \vdots \\ B_8^2(x) = \frac{25}{2}(x - \frac{7}{5})^2 B_8^0(x) + 25(-x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{143}{50}) B_9^0(x) + \frac{25}{2}(2 - x)^2 B_{10}^0(x), \\ B_9^2(x) = \frac{25}{2}(x - \frac{8}{5})^2 B_9^0(x) + 25(-x^2 + \frac{19}{5}x - \frac{179}{50}) B_{10}^0(x) + \frac{25}{2}(\frac{11}{5} - x)^2 B_{11}^0(x), \\ B_{10}^2(x) = \frac{25}{2}(x - \frac{9}{5})^2 B_{10}^0(x) + 25(-x^2 + \frac{21}{5}x - \frac{219}{50}) B_{11}^0(x) + \frac{25}{2}(\frac{12}{5} - x)^2 B_{12}^0(x), \\ B_{11}^2(x) = \frac{25}{2}(x - 2)^2 B_{11}^0(x) + 25(-x^2 + \frac{23}{5}x - \frac{263}{50}) B_{12}^0(x) + \frac{25}{2}(\frac{13}{5} - x)^2 B_{13}^0(x), \\ \vdots \\ B_{20}^2(x) = \frac{25}{2}(x - \frac{19}{5}) B_{20}^0(x) + 25(-x^2 + \frac{41}{5}x - \frac{839}{50}) B_{21}^0(x) + \frac{25}{2}(\frac{22}{5} - x)^2 B_{22}^0(x). \end{cases}$$

Det intressanta området är [1.8,2.2], utanför detta intervall är funktionen konstanterna 1 respektive 3, vilket belyses med exempel.

$$\begin{cases} S(x)|[\alpha_5,\alpha_6) : 3(\frac{25}{2}(1-x)^2) + 3 \cdot 25(-x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{39}{50}) + 3(\frac{25}{2}(x - \frac{4}{5})^2) = 3, \\ S(x)|[\alpha_{13},\alpha_{14}) : \frac{25}{2}(\frac{13}{5} - x)^2 + 25(-x^2 + 5x - \frac{311}{50}) + \frac{25}{2}(x - \frac{12}{5})^2 = 1. \end{cases}$$

De intressanta områden beräknas, alltså de som innehåller termerna B_{10}^0 och B_{11}^0. Då fås:

$$\begin{cases} S(x)|[\alpha_{10},\alpha_{11}) : 3 \cdot \frac{25}{2}(2-x)^2 + 3 \cdot 25(-x^2 + \frac{19}{5} - \frac{179}{50}) + 1 \cdot \frac{25}{2}(x - \frac{9}{5}) = -25x^2 + 90x - 78, \\ S(x)|[\alpha_{11},\alpha_{12}) : 3 \cdot \frac{25}{2}(\frac{11}{2} - x)^2 + 1 \cdot 25(-x^2 + \frac{21}{5} - \frac{219}{50}) + 1 \cdot \frac{25}{2}(x - 2) = 25x^2 - 110x + 122. \end{cases}$$

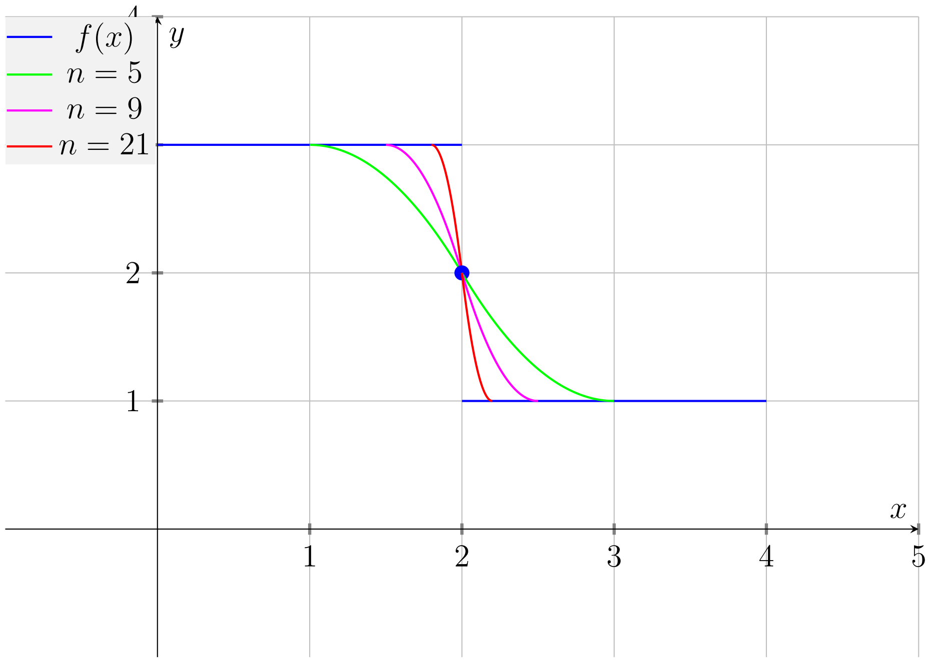
För $n = 5$, gäller punkterna $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\ldots$, $\alpha_5 = 4$. Från exempel 4.5 fås B_i^2 bestämt. Det givande området, $[\alpha_2, \alpha_4]$,plockas ut, då erhålls:

$$\begin{cases} S(x)|[\alpha_2,\alpha_3) : 3 \cdot \frac{1}{2}(2-x)^2 + 3 \cdot (-x^2 + 3x - \frac{3}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 = -x^2 + 2x + 2, \\ S(x)|[\alpha_3,\alpha_4) : 3 \cdot \frac{1}{2}(3-x)^2 + 1 \cdot (-x^2 + 5x - \frac{11}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2}(x-2)^2 = x^2 - 6x + 10. \end{cases}$$

Och för $n = 9$, beaktas punkterna $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\ldots$, $\alpha_9 = 4$. Från exempel 4.8 fås B_i^2 bestämt. Igen plockas det ut det intressanta området [1.5,2.5]:

$$\begin{cases} S(x)|[\alpha_4,\alpha_5) : 3 \cdot 2(2-x)^2 + 3 \cdot 2(-2x^2 + 7x - \frac{23}{4}) + 1 \cdot 2(x - \frac{3}{2})^2 = -4x^2 + 12x - 6, \\ S(x)|[\alpha_5,\alpha_6) : 3 \cdot 2(\frac{5}{2} - x)^2 + 1 \cdot 2(-x^2 + 9x - \frac{39}{4}) + 1 \cdot 2(x-2)^2 = 4x^2 - 20x + 26. \end{cases}$$

I följande figur jämförs $n = 4$, 9 och 21 med funktionen:

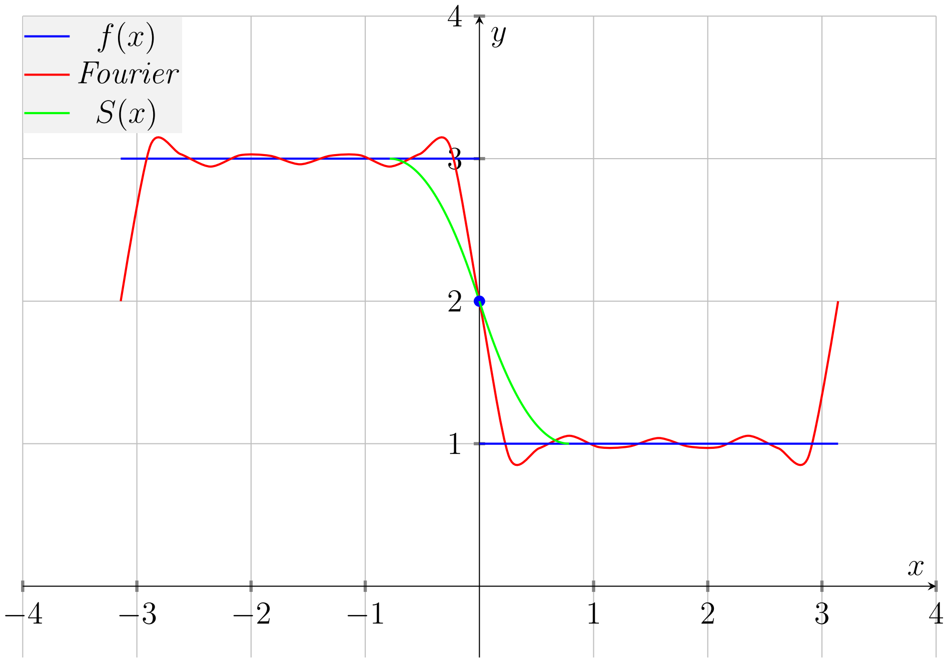


Det finns även andra metoder att interpolera och approximera med, t.ex. Fourier serier, för en mer ingående genomgång, se i [4]. Fourier serierna har en nackdel när man approximerar diskontinuerliga funktioner jämfört med B ri-funktioner. Denna nackdel som Fourier serierna har kallas för Gibbs fenomen. Detta fenomen orsakar att approximationen gör en stor sväng på båda sidorna av diskontinuitetspunkten.

Exempel 4.7. *I likhet med exempel 4.6, men funktionens intervall justeras.*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi \leq x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Fourier seriens uträkning utförs i ett program som illustreras i [9].



Det som är bra med B ri-funktioner är att de kan användas för att approximera diskontinuerliga funktioner på ett ”formbevarande” sätt. Härnäst illustreras detta med hjälp av Schoenbergs process.

Exempel 4.8. *Funktionen $f(x)$ approximeras på intervallet [0,5]. Funktionen är definierad:*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x < 2, \\ 2 \cdot \sin(x) & 2 \leq x < 3, \\ x - 3, & 3 \leq x < 4, \\ \ln(x) & 4 \leq x < 5. \end{cases}$$

Vi väljer punkterna $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}, \ldots, \alpha_{11} = 5$. Från detta följer $n = 11$, så att $S(x) = \sum_{i=-1}^{10} f(\tau_i) B_i^2(x)$, där man även behöver $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_{-1} = -1$, $\alpha_{12} = \frac{11}{2}$, $\alpha_{13} = 6$. Först räknas $f(\tau_i)$ ut.

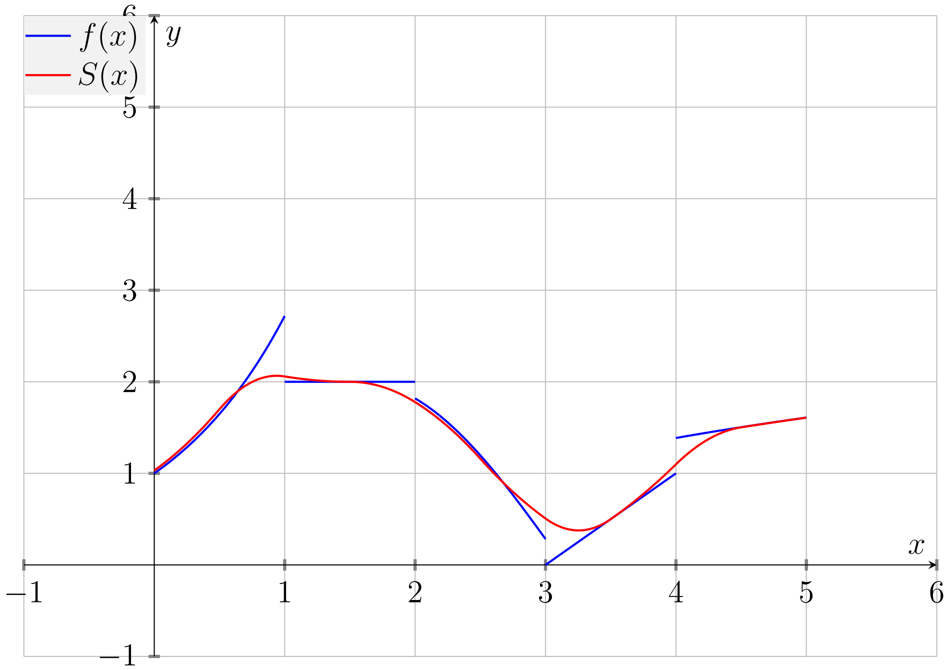
$$\begin{aligned}
&f(\tau_{-1}) = e^{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+0)} = e^{-\frac{1}{4}}, \quad f(\tau_0) = e^{\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})} = e^{\frac{1}{4}}, \quad f(\tau_1) = e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} = e^{\frac{3}{4}}, \\
&f(\tau_2) = 2, \quad f(\tau_3) = 2, \quad f(\tau_4) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}(2+\frac{5}{2})) = 2 \cdot \sin(\frac{9}{4}), \\
&f(\tau_5) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}(\frac{5}{2}+3)) = 2 \cdot \sin(\frac{11}{4}), \quad f(\tau_6) = \frac{1}{2}(3+\frac{7}{2}) - 3 = \frac{1}{4}, \\
&f(\tau_7) = \frac{1}{2}(\frac{7}{2}+4) - 3 = \frac{3}{4}, \quad f(\tau_8) = \ln(\frac{1}{2}(4+\frac{9}{2})) = \ln(\frac{17}{4}), \\
&f(\tau_9) = \ln(\frac{1}{2}(\frac{9}{2}+5)) = \ln(\frac{19}{4}), \quad f(\tau_{10}) = \ln(\frac{1}{2}(5+\frac{11}{2})) = \ln(\frac{21}{4}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

B_i^2 bestäms till B_i^0:

$$\begin{cases}
B_{-1}^2(x) = 2(x+1)^2 B_{-1}^0(x) + 2(-2x^2 - x + \frac{1}{4})B_0^0(x) + 2(\frac{1}{2} - x)^2 B_1^0(x), \\
B_0^2(x) = 2(x+\frac{1}{2})^2 B_0^0(x) + 2(-2x^2 + x + \frac{1}{4})B_1^0(x) + 2(1-x)^2 B_2^0(x), \\
B_1^2(x) = 2x^2 B_1^0(x) + 2(-2x^2 + 3x - \frac{3}{4})B_2^0(x) + 2(\frac{3}{2} - x)^2 B_3^0(x), \\
\vdots \\
B_9^2(x) = 2(x-4)^2 B_9^0(x) + 2(-2x^2 + 19x - \frac{179}{4})B_{10}^0(x) + 2(\frac{11}{2} - x)^2 B_{11}^0(x), \\
B_{10}^2(x) = 2(x-\frac{9}{2})^2 B_{10}^0(x) + 2(-2x^2 + 21x - \frac{219}{4})B_{11}^0(x) + 2(6-x)^2 B_{12}^0(x).
\end{cases}$$

De $B_i^0(x)$ termerna som förekommer 3 gånger, grupperas och beaktas värden från (4.4) , då fås:

$$\begin{cases}
S|[\alpha_1,\alpha_2) : 2(\frac{1}{2}-x)^2 \cdot e^{-\frac{1}{4}} + 2(-2x^2 + x + \frac{1}{4}) \cdot e^{\frac{1}{4}} + 2x^2 \cdot e^{\frac{3}{4}}, \\
S|[\alpha_2,\alpha_3) : 2(1-x)^2 \cdot e^{\frac{1}{4}} + 2(-2x^2 + 3x - \frac{3}{4}) \cdot e^{\frac{3}{4}} + 2(x-\frac{1}{2})^2 \cdot 2, \\
S|[\alpha_3,\alpha_4) : 2(\frac{3}{2}-x)^2 \cdot e^{\frac{3}{4}} + 2(-2x^2 + 5x - \frac{11}{4}) \cdot 2 + 2(x-1)^2 \cdot 2, \\
S|[\alpha_4,\alpha_5) : 2(2-x)^2 \cdot 2 + 2(-2x^2 + 7x - \frac{23}{4}) \cdot 2 + 2(x-\frac{3}{2})^2 \cdot 2\sin(\frac{9}{4}), \\
S|[\alpha_5,\alpha_6) : 2(\frac{5}{2}-x)^2 \cdot 2 + 2(-2x^2 + 9x - \frac{39}{4}) \cdot 2\sin(\frac{9}{4}) + 2(x-2)^2 \cdot 2\sin(\frac{11}{4}), \\
S|[\alpha_6,\alpha_7) : 2(3-x)^2 \cdot 2\sin(\frac{9}{4}) + 2(-2x^2 + 11x - \frac{59}{4}) \cdot 2\sin(\frac{11}{4}) + 2(x-\frac{5}{2})^2 \cdot \frac{1}{4}, \\
S|[\alpha_7,\alpha_8) : 2(\frac{7}{2}-x)^2 \cdot 2\sin(\frac{11}{4}) + 2(-2x^2 + 13x - \frac{83}{4}) \cdot \frac{1}{4} + 2(x-3)^2 \cdot \frac{3}{4}, \\
S|[\alpha_8,\alpha_9) : 2(4-x)^2 \cdot \frac{1}{4} + 2(-2x^2 + 15x - \frac{111}{4}) \cdot \frac{3}{4} + 2(x-\frac{7}{2})^2 \cdot \ln(\frac{17}{4}), \\
S|[\alpha_9,\alpha_{10}) : 2(\frac{9}{2}-x)^2 \cdot \frac{3}{4} + 2(-2x^2 + 17x - \frac{143}{4}) \cdot \ln(\frac{17}{4}) + 2(x-4)^2 \cdot \ln(\frac{19}{4}), \\
S|[\alpha_{10},\alpha_{11}) : 2(5-x)^2 \cdot \ln(\frac{17}{4}) + 2(-2x^2 + 19x - \frac{179}{4}) \cdot \ln(\frac{19}{4}) + 2(x-\frac{9}{2})^2 \cdot \ln(\frac{21}{4}),
\end{cases}$$


f(x)
S(x)
y
x
6
5
4
3
2
1
−1
−1
1
2
3
4
5
6

Litteraturförteckning

[1] Himberg, J. (2021) *Interpolation med ri-funktioner*. [Kandidatavhandling, Åbo Akademi]

[2] O'Connor, J,J. & Robertson, E, F. (2016) *Isaac Jacob Schoenberg* `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schoenberg/`,(hämtad mars 2023).

[3] Wikipedia. (Senast ändrat februari 2023) *Isaac Jacob Schoenberg.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Jacob_Schoenberg`,(hämtad mars 2023).

[4] Kincaid, D. & Cheney, W.(2002) *Numerical Analysis:Mathematics of Scientific Computing* (Tredje upplagan). Brooks/Cole, Thompson Learning.

[5] Cheney, W. & Kincaid, D. (1985) *Numerial Mathematics and Computing*(Andra upplagan). Brooks/ Cole Publishing Company.

[6] Holst, A. & Ufnarovski, V. (2014) *Matrix Theory.* Studentlitteratur AB, Lund.

[7] Schoenberg, I. J.,(1967) On Spline Functions, i *Inequalities* (Symposium at Write-Patterson Air Force Base), Academic Press, New York s. 255-291.

[8] Schoenberg, I. J., (1959), On variation diminishing approximation methods, i *On Numerical Approximation*(MRC Symposium), University of Wisconcin Press, Madison, s.249-274.

[9] Wolfram Alpha, *Fourier Series of Piecewise Functions*, `https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=698730e525b0d8f2ffd310808018d186`, (hämtad mars 2023).