

# *Gli abachi: antichi strumenti precursori delle moderne macchine da calcolo*

GIULIANO KLUN  
Corso di Laurea magistrale in Matematica  
Dipartimento di Matematica e Geoscienze  
Università di Trieste  
*giuliano.klun@gmail.com*

## SUNTO

*In questo articolo si presentano, esaminandole dal punto di vista storico e computazionale, alcune tipologie di abachi, delle quali fanno parte gli esemplari esposti alla mostra PSIC (Percorsi Storici dell'Informatica e del Calcolo), attualmente ospitata presso l'I.T.S. "A. Volta" di Trieste. Lo scopo è quello di fornire materiale di approfondimento per i visitatori, con particolare attenzione agli insegnanti e agli studenti di scuola secondaria.*

## PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SCUOLA SECONDARIA / SECONDARY SCHOOL; STORIA DELLA MATEMATICA / HISTORY OF MATHEMATICS; STORIA DEGLI STRUMENTI DI CALCOLO / HISTORY OF CALCULATING TOOLS; ABACO / ABACUS.

## 1. INTRODUZIONE

Prendendo spunto dalla mostra permanente denominata PSIC (*Percorsi Storici dell'Informatica e del Calcolo*), allestita presso l'I.T.S. "A. Volta" di Trieste, il presente lavoro vuole contribuire alla conoscenza di una longeva e multiforme famiglia di antichi strumenti di calcolo: gli abachi.

Tali strumenti si sono imposti alla mia attenzione per molteplici ragioni. In primo luogo, la rappresentazione dei numeri: questo aspetto tutt'altro che banale – e che potrebbe apparire tale riducendo il pallottoliere a mero ausilio per l'apprendimento dei primi rudimenti dell'aritmetica – porta a indagare nella storia per comprendere che lo strumento di calcolo può essere un efficace specchio di come il ragionamento

matematico si sviluppi nella mente. Ciò costituisce l'argomento principale della prima sezione "L'abaco e lo zero: note storiche" in cui si mette in evidenza lo stretto rapporto che, lungo la storia, ha legato gli strumenti di calcolo alla rappresentazione numerica. Nella sezione "Utilizzo del suan pan e del soroban" si approfondisce il tema dell'abaco con speciale attenzione agli esemplari – presenti nella mostra – provenienti dall'Estremo Oriente, e in particolare dal Giappone, dove questo strumento di calcolo è tuttora usato da una consistente fascia di popolazione.

In secondo luogo, l'esecuzione degli algoritmi di calcolo con tali strumenti, che – unitamente ad alcuni approfondimenti proposti in appendice e riguardanti i sistemi di numerazione – può costituire, a mio parere, un utile ausilio non solo per sviluppare gli spunti di riflessione che la mostra PSIC intende sollecitare, ma anche, e forse soprattutto nell'ambito della didattica, per far comprendere e apprezzare alcuni concetti che stanno alla base degli usuali algoritmi di calcolo, che vengono di solito dati per scontati.

Mi riferisco, ad esempio, all'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata, che si basa sull'algebra elementare e sullo sviluppo del quadrato di un binomio: un collegamento che rimane spesso sconosciuto e che aiuterebbe ad assimilare in maniera consapevole e non meccanica tale procedimento. Stesso discorso, nell'ambito della scuola primaria, per i "riporti" e la base 10, per l'insegnamento dei quali il pallottoliere a 9 palline per decade – in luogo delle consuete 10 – risulta chiarificatore.

Alla fine di questo contributo, una galleria fotografica illustra gli esemplari di abaco presenti nella mostra PSIC.

## 2. L'ABACO E LO ZERO: NOTE STORICHE

In questa prima sezione vogliamo mostrare come l'evoluzione del pensiero matematico e, nello specifico, l'evoluzione del concetto di zero si siano snodate lungo la storia parallelamente allo sviluppo dei metodi di rappresentazione dei

numeri e di strumenti e algoritmi atti a eseguire operazioni con gli stessi.

In epoca preistorica, i cambiamenti generati dal passaggio da una società tribale di cacciatori-raccoglitori nomadi a una società stanziale di allevatori-agricoltori favorirono lo sviluppo delle prime cognizioni matematiche finalizzate alla rappresentazione di piccoli numeri e al “saper contare”. Con il passaggio dalla preistoria alla storia, convenzionalmente fissato con la nascita della scrittura – coeva al primo urbanesimo, al sorgere dei regni centralizzati e al fiorire dei commerci –, il progredire del pensiero matematico rimase indissolubilmente legato all’evoluzione della civiltà nelle sue varie accezioni.

Le due principali civiltà che ebbero grande importanza nello sviluppo della matematica furono quella egizia e quella babilonese. In quest’ambito, con il termine “Babilonesi” si intende quell’insieme di popoli, che, a partire dal 3000 a. C., occupavano la regione compresa tra il Tigri e l’Eufrate, detta Mesopotamia. I Babilonesi furono l’unico popolo dell’antichità a sviluppare un sistema posizionale, seppur non ancora completo come vedremo in seguito con alcuni esempi.

La tavoletta d’argilla riprodotta in Figura 1 illustra una “distinta” sumerica, databile attorno all’inizio del terzo millennio a. C. Essa riporta sulla faccia il dettaglio di un’operazione di contabilità di svariate derrate o mercanzie, la cui natura è precisata a mezzo di segni (molto stilizzati ma essenzialmente ideografici e quindi antecedenti l’invenzione di una vera e propria scrittura) e il cui numero è specificato da diversi raggruppamenti di tacche o impronte circolari (o, in epoca più tarda, dalla riunione di cifre cuneiformi). Sul retro si trova il riepilogo dell’inventario riportato sulla faccia.

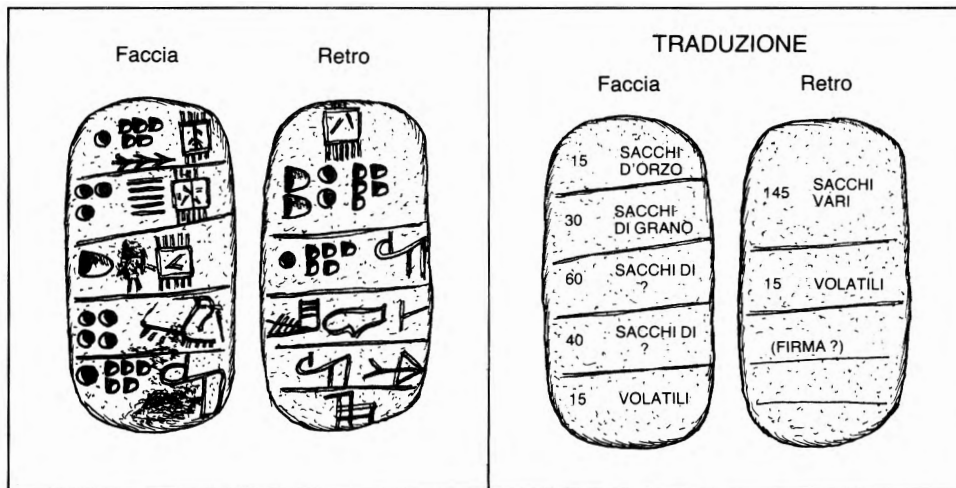


Figura 1. “Distinta sumerica” scoperta a Uruk; epoca detta di Djemdet Nasr (ca 2850 a. C.).

È da notare inoltre come nelle tavolette più antiche vi fosse un modo per indicare la moltiplicazione per 10, che consisteva nell'imprimere su un qualsiasi simbolo un'ulteriore impronta circolare, che risulta più evidente in Figura 2. A quest'epoca la notazione sumerica, dalla quale la babilonese avrebbe ereditato molte caratteristiche, mostrava ancora alcune profonde differenze rispetto a essa, tra cui, oltre a quella già citata della moltiplicazione per 10, il richiedere simboli diversi per ciascuna potenza della base, essendo essenzialmente una notazione additiva.

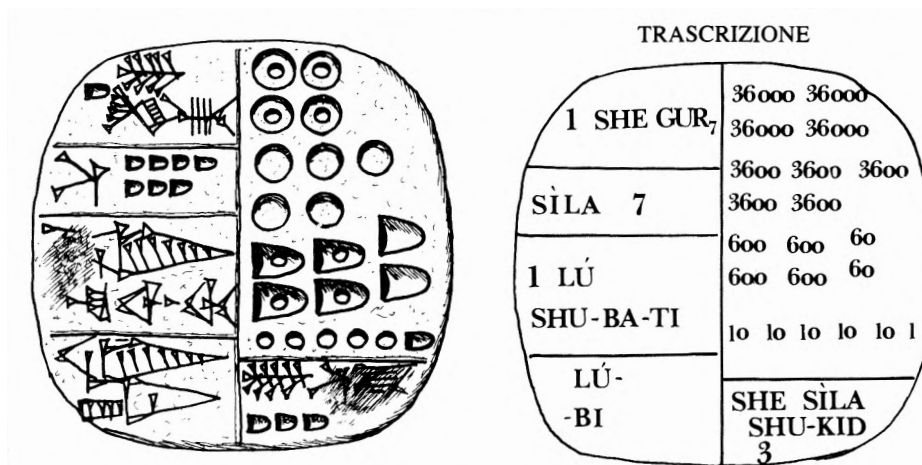
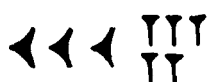


Figura 2. Tavoletta sumera databile attorno al 2650 a. C., che rappresenta un documento amministrativo e che deve la sua importanza al fatto che su di essa compaiono alcuni numeri e, in particolare, l'impronta circolare, simbolo che denota la moltiplicazione per 10.

Il passo successivo fu l'introduzione della notazione posizionale, il cui principale vantaggio è quello di richiedere un numero finito di tipi di simboli per esprimere un numero qualsiasi, per quanto grande esso sia. Il sistema di numerazione babilonese era in base 60. Osserviamo inoltre che i simboli cuneiformi utilizzati per rappresentare i numeri erano dello stesso tipo di quelli utilizzati per la scrittura testuale. Il simbolo di un cuneo verticale rappresentava un'unità di un qualsiasi ordine, mentre il simbolo ◀ ne rappresentava 10. In tal modo, ad esempio, la "cifra" 35 veniva rappresentata così:



Opportuni spazi tra gruppi di simboli permettevano di distinguere le varie cifre che componevano il numero da sinistra verso destra, via via con potenze decrescenti di 60 come in questo esempio:



in cui è rappresentato il numero:

$$20 + 52 \cdot 60 + 28 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60^3 = 20 + 3120 + 100800 + 216000 = 319940$$

La notazione posizionale babilonese nelle prime fasi del suo sviluppo poteva portare ad ambiguità nell'interpretazione dei numeri, data l'incertezza della spaziatura tra cifre contigue e soprattutto la mancanza di un simbolo che indicasse lo zero. Per lungo tempo si ritenne infatti che non servisse un simbolo per denotare "qualcosa che non c'è".

Non vi era quindi modo di distinguere tra  $24 + 1 \cdot 60 = 84$  e  $24 + 1 \cdot 60^2 = 3624$ , ambedue rappresentati da:



Ci si poteva solo basare sul contesto per sciogliere l'ambiguità di fondo. A volte, per indicare l'assenza di una cifra veniva lasciato uno spazio vuoto, ma tale regola non veniva sempre applicata. Solo a partire dal 300 a. C. fu introdotto un simbolo che serviva da "segnaposto" per indicare l'assenza di una cifra nella rappresentazione sessagesimale del numero. Tale segnaposto poteva assumere due forme:



Con questa convenzione il caso appena descritto non poteva più accadere, essendo 3624 rappresentato da:



ma le possibili ambiguità non erano in tal modo tutte risolte, dato che il suddetto simbolo non veniva utilizzato in posizione terminale.

Lo sviluppo di dispositivi che consentissero di agevolare il calcolo e le operazioni aritmetiche furono conosciuti in epoche diverse e in quasi tutte le parti del mondo; in questo ambito l'abaco occupa un posto di primo piano.

La parola abaco deriva dal latino *abacus* tramite il greco *abaks*, o forse anche dalla parola semitica *Abq*, che vuol dire "sabbia" o "polvere"<sup>1</sup>; infatti il termine originario si riferiva ai primi abachi costituiti da una tavoletta cosparsa di sabbia su cui si tracciavano con uno stilo, o semplicemente con un dito, i segni del calcolo. Le più antiche testimonianze dell'utilizzo dell'abaco risalgono al 2000 a. C. da parte dei Babilonesi e contemporaneamente in Estremo Oriente da parte dei Cinesi. Questi primordiali *abachi a polvere* furono usati anche dai Greci e dai Latini, dagli Arabi, dai Persiani e probabilmente dai contabili indiani. Da essi derivò tutta una famiglia di *abachi da tavolo* (o *tavole di calcolo*), che assunsero diverse forme a seconda del

<sup>1</sup> Cfr. IFRAH 1981, trad. ital., p. 120.

periodo storico e dei luoghi in cui furono ideati: tra le tipologie più comuni possiamo citare gli *abachi a gettoni* (diffusi presso i Greci, gli Etruschi e i Romani), l'uso dei quali si perpetuò nell'Europa occidentale sino alla Rivoluzione francese, gli *abachi a griglie* o *a bastoncelli* impiegati dai matematici cinesi e giapponesi, gli *abachi a pallottoliere* (diffusi già nell'antichità, cfr. Figura 3) e, in epoca più recente, i *pallottolieri a uso didattico*<sup>2</sup>.

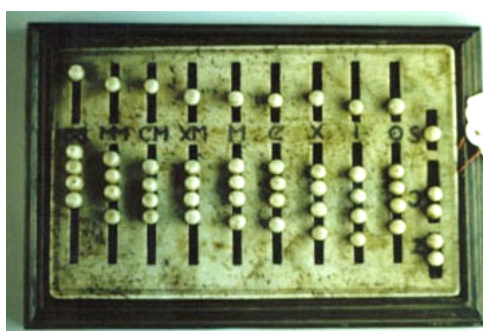


Figura 3. Abaco romano risalente al II secolo d. C.

Negli *abachi a gettoni* una serie di linee orizzontali separavano i differenti ordini di unità dei corrispondenti sistemi numerici. Per rappresentare i numeri ed effettuare un'operazione aritmetica, vi si ponevano dei gettoni (in origine dei sassolini, chiamati *calculi* in latino, da cui il termine italiano “calcolo” – e i suoi derivati, anche in altre lingue – per indicare una generica operazione matematica), il cui valore dipendeva unicamente dalla loro posizione sul piano di calcolo.

Talvolta ciascuna colonna era divisa in due parti: in quella inferiore, un gettone designava un'unità corrispondente al valore decimale della colonna e, nella superiore, un gettone designava 5 di tali unità (5 per la parte superiore della prima colonna a destra, 50 per la seconda, 500 per la terza, e via di seguito). Questo sistema di rappresentazione binario-quinario caratterizza anche alcuni tipi di abaco a pallottoliere, tra cui quello romano in Figura 3.

<sup>2</sup> Si vedano a tal riguardo le Figure 44-47 nella galleria fotografica (Sez. 5).

Lo schema del funzionamento degli abachi romani a *calculi* è esemplificato nella Figura 4.

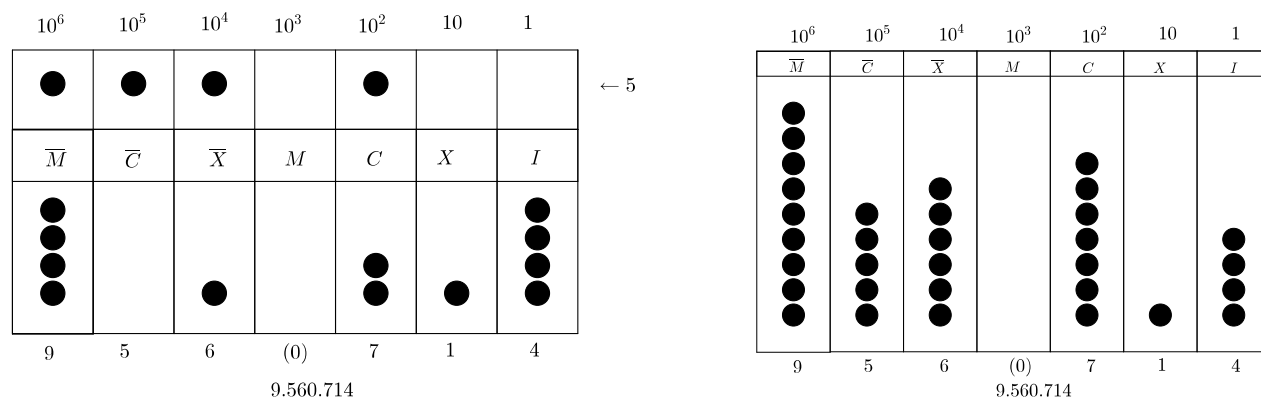


Figura 4. Principio dell’abaco romano a *calculi*. A sinistra l’abaco semplificato, a destra l’abaco primitivo.

Veniamo così alla seconda grande famiglia: gli *abachi a pallottoliere*, del cui funzionamento si parlerà più diffusamente nel seguito. Parecchi esemplari di questi sono presenti nella mostra PSIC (cfr. Figure 40-48, Sez. 5). Per maggior chiarezza specifichiamo che per “abaco a pallottoliere” si intende un qualsiasi strumento di calcolo costituito da un’intelaiatura su cui sono fissate un numero variabile di asticelle, in ciascuna delle quali scorrono delle palline forate; per inciso, il pallottoliere a uso didattico fa parte della grande famiglia degli abachi a pallottoliere che comprende anche gli abachi cinesi, giapponesi e altri.

La distribuzione delle palline nell’abaco romano permetteva la massima economia nel numero di palline, mantenendo una notevole semplicità di calcolo. Basati sulla stessa logica sono il *soroban* giapponese e lo *suan pan* cinese; quest’ultimo tuttavia presenta 5 palline al livello inferiore e 2 a quello superiore.

La struttura di questi abachi ci porta a esaminare la notevole differenza tra il modo di rappresentare i numeri in forma scritta e la rappresentazione che se ne deve fare per operare con tali strumenti, problema che non si pone nell’ambito dei nostri algoritmi di calcolo con carta e penna. Ad esempio, nel momento in cui un antico



romano eseguiva un calcolo, doveva “tradurre” i numeri scritti in caratteri romani, con notazione non posizionale in base dieci, in un’opportuna configurazione di *calcoli* o palline sull’abaco *in base variabile*<sup>3</sup>.

Torniamo ora alla storia dello zero per capire come la sua “scoperta” – e conseguente accettazione come numero – abbia cambiato in parte anche gli strumenti per far di conto: dobbiamo fare un passo indietro e ripercorrere i principali passaggi che portarono allo sviluppo della notazione posizionale in base dieci e all’introduzione di un simbolo per indicare una quantità nulla.

I simboli della numerazione scritta in base dieci che hanno contribuito a costituire la prefigurazione delle attuali cifre del sistema di numerazione detto indo-arabo si ritrovano in India già in reperti risalenti al III secolo a. C. Altre evidenze storiche attestano l’utilizzo, in India, di una notazione posizionale con la presenza dello zero già dal quinto secolo<sup>4</sup>. A un secolo più tardi (662 d. C.) risale il primo riferimento specifico alla notazione indiana, a opera del vescovo siriano Severo Sebokt<sup>5</sup>. I simboli utilizzati per indicare le cifre da 1 a 9 nonché lo 0 variarono però a lungo nel tempo prima di giungere a una sistemazione definitiva.

Possiamo affermare che il sistema di numerazione indiano, così come lo conosciamo, deriva essenzialmente dalla combinazione di tre principi già noti da tempo e cioè:

- base decimale;
- notazione posizionale;
- simbolo diverso per ciascuna delle dieci cifre.

Merito degli Indiani fu proprio quello di creare un sistema di numerazione che presentasse queste caratteristiche contemporaneamente.

Il primo passo verso la trasformazione dello 0 in numero e non più in semplice segnaposto si deve sempre agli Indiani, che per primi si posero il problema di

---

<sup>3</sup> Si veda l’Appendice 1 del presente contributo.

<sup>4</sup> Si veda BURTON, pp. 256 ss.

<sup>5</sup> Si veda BOYER 1968, p. 238.

integrare il simbolo nel sistema di calcolo, enunciando le regole da seguire per effettuare le operazioni con esso. Tale grande passo avanti si deve al matematico Brahmagupta (598-668), il quale enunciò le regole dei segni per il prodotto e il rapporto di due numeri di segno qualunque e poi enunciò le regole da seguire per operare con lo 0, che, con le notazioni attuali si scriverebbero come segue:

$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a$$

$$a - 0 = a \quad \forall a$$

$$\frac{0}{0} = 0$$

Sulla divisione di un numero diverso da 0 per 0, Brahmagupta invece non si pronunciò. Il matematico Bhaskara (attivo attorno al 1100) affermò che un numero diviso per 0 dà infinito. Questa affermazione sembrerebbe promettente, ma la conclusione che egli ne trasse, cioè che:

$$\frac{a}{0} \cdot 0 = a$$

denota una comprensione solo approssimativa del problema.

Il sistema posizionale indiano si diffuse, verso la fine dell'VIII secolo d. C., anche nel mondo arabo. In tale periodo l'ascesa al potere dei califfi Abbassidi, i quali spostarono la loro capitale da Damasco a Baghdad, coincise con una grande crescita culturale del mondo arabo stesso e l'assurgere della capitale a centro culturale di primaria importanza. Fu proprio in questo clima d'interesse per i testi matematici antichi, sia greci che indù, che i matematici arabi adottarono una numerazione posizionale in base 10. Il matematico che introdusse tra gli Arabi il sistema di numerazione indiano fu Al-Khwarizmi, in un'opera che fu tradotta in latino nel XII secolo con il titolo *Algoritmi de numero Indorum*. Il sistema di notazione posizionale in base 10 – nella versione ancora priva del simbolo per lo zero – arrivò in Occidente tramite gli Arabi attorno all'anno 1000. Una delle più rappresentative

figure che per prima abbia compreso e diffuso attivamente le cifre indo-arabe fu Gerbert d'Aurillac, religioso francese eletto Papa con il nome di Silvestro II.

La seguente sottosezione è dedicata a uno strumento noto come *abaco di Gerberto*. La conoscenza che il futuro Papa acquisì delle cifre arabe e della loro praticità nel far di conto derivava dai suoi viaggi nella Spagna “moresca”, presso Barcellona, attorno al 970. Da rimarcare il fatto che il suo interesse per l'aritmetica scaturiva dall'esigenza di calcolare con esattezza la data “mobile” della Pasqua.

## 2.1 L'ABACO DI GERBERTO

Si indica generalmente come “abaco di Gerberto” una sorta di scacchiera, in cui le colonne rappresentano, da destra a sinistra, unità, decine, centinaia, ecc.<sup>6</sup>; in ogni riga possiamo registrare un numero posizionando nelle caselle i gettoni che riportano le cifre desiderate; per lo zero basta lasciare la casella vuota. Novità di questo abaco era il fatto che i gettoni utilizzati erano numerati con le cifre indo-arabe. Tale innovazione si diffuse in Occidente tra l'XI e il XII secolo e contribuì alla conoscenza delle cifre indo-arabe, anche se non sviluppava pienamente tutte le potenzialità del sistema di numerazione posizionale. Lo strumento – a patto di incasellare le cifre nelle giuste colonne – semplificava le operazioni di somma e di sottrazione, ma ancor più quelle di moltiplicazione e di divisione, come si evince dall'esempio riportato nelle Figure 5-9. I risultati delle varie moltiplicazioni parziali si devono riportare nella riga centrale tenendo conto del loro ordine di grandezza, sommandoli di volta in volta fino a ottenere il risultato finale.

---

<sup>6</sup> Nella versione perfezionata da Gerberto vi erano 27 colonne, di cui tre servivano per rappresentare le frazioni (cfr. DEVLIN 2013, cap. 1).

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	$C$	$X$	$I$
				7	3
			4		5

$73 \cdot 405 = ?$

Figura 5.

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	$C$	$X$	$I$
				7	3
				1	5
			4		5

$3 \cdot 5 = 15$

Figura 6.

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	$C$	$X$	$I$
				7	3
		1	2	1	5
			4		5

$3 \cdot 4 = 12$

Figura 7.

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	$C$	$X$	$I$
				7	3
		1	5	6	5
			4		5

$$7 \cdot 5 = 35$$

$$1 + 5 = 6$$

$$2 + 3 = 5$$

Figura 8.

$\bar{C}$	$\bar{X}$	$\bar{I}$	$C$	$X$	$I$
				7	3
	2	9	5	6	5
			4		5

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$1 + 8 = 9$$

$$73 \cdot 405 = 29565$$

Figura 9.

Il documento in Figura 10, noto come *Codex Vigilanus (Albeldensis)* o *Códice Albeldense (Vigilano)* (nome completo *Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus*), si trova in una raccolta di manoscritti spagnoli di varie epoche (fino al X secolo). Vi risalta la mancanza dello zero, che però non si ripercuoteva sul far di conto, dato che, utilizzando uno strumento come l'*abaco di Gerberto*, esso non era necessario.

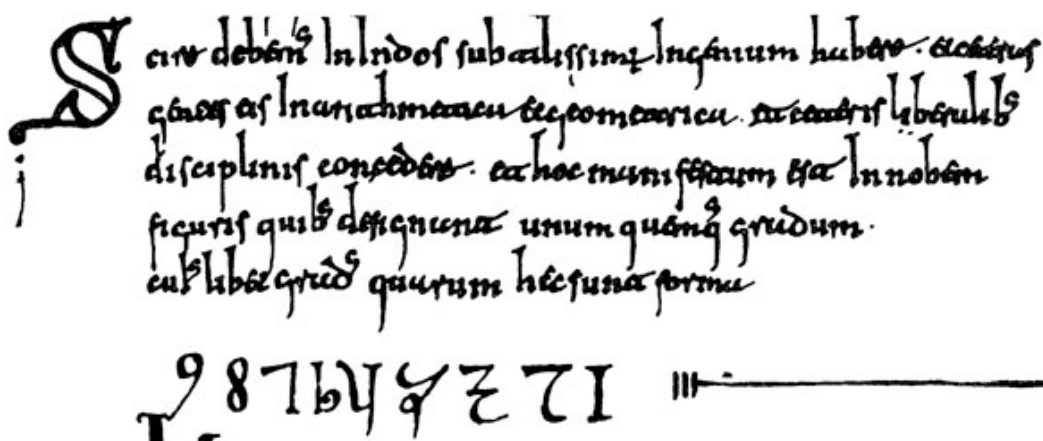


Figura 10. Manoscritto spagnolo datato al 976, recante le nove cifre indo-arabe, che rappresenta la più antica menzione conosciuta dell'uso di tali cifre in Europa (Bibl. S. Lorenzo del Escorial, *Codex Vigilanus*, Ms. lat. D. I. 2, fol. 9<sup>v</sup>).

Il primo matematico occidentale a dare una trattazione completa sul modo di operare con le cifre indo-arabe fu Leonardo Pisano, detto Fibonacci (circa 1175-1240), nella sua opera manoscritta *Liber Abaci*, in cui illustrò i vantaggi del nuovo sistema posizionale, mostrando allo stesso tempo come eseguire le quattro operazioni con questi numeri<sup>7</sup>. Quasi tutti gli algoritmi descritti da Fibonacci sono simili a quelli adottati ancora oggi. Egli stesso chiamava “figure degli indiani” o “figure” le cifre da 1 a 9 e denominò “zefiro” (da cui l’attuale zero) il “segno 0”, traslitterando la parola araba “sifr” che significa “vuoto”. Da “sifr” ebbe poi origine anche il termine *cifra*.

Il sistema di numerazione posizionale permetteva di eseguire i calcoli molto velocemente, ma stentò ad affermarsi. Nell’ambito delle transazioni commerciali e dei contratti, i numeri romani vennero ancora molto usati poiché più difficilmente falsificabili; solo con l’invenzione della stampa a caratteri mobili nel 1455 a opera di Gutenberg e con la conseguente standardizzazione delle cifre a stampa, le cifre

<sup>7</sup> Si noti che, dal Medioevo e fino all’Ottocento, in espressioni quali “fare abaco”, “scuola d’abaco”, “maestro d’abaco” e simili, il termine “abaco” era sinonimo di “aritmetica” o di “far di conto”, a prescindere dall’uso di qualsiasi strumento.

indo-arabe presero definitivamente il sopravvento. Questo fatto segnò la fine dell'evoluzione del simbolo 0, ma non ancora la sua accettazione come numero a pieno titolo, seppure dotato di proprietà speciali.

## 2.2 LA CONTESA TRA ABACHISTI E ALGORISTI

Per concludere questa breve rassegna storica, non possiamo non inserire una breve digressione in merito alla diatriba, sviluppatasi in Europa occidentale nel corso del Rinascimento, tra abachisti (sostenitori della superiorità dell'abaco) e algoristi (sostenitori della superiorità dei “nuovi” algoritmi e del calcolo “con carta e penna”).

I processi di calcolo con l'abaco a gettoni conobbero fortuna nell'Occidente latino fino a un'epoca relativamente recente. Tale dispositivo, che abbiamo già descritto, facilitava la pratica dell'addizione e della sottrazione, ma mal si prestava a moltiplicazione e divisione. Per moltiplicare due numeri, ad esempio, si cominciava con il rappresentare il moltiplicando nella parte sinistra della tavola, poi si eliminavano uno a uno i gettoni rappresentativi del numero in questione, man mano che venivano sostituiti nella parte destra del quadro con il loro prodotto per il moltiplicatore.

L'uso dell'abaco a gettoni fu insegnato e praticato sino al XVIII secolo soprattutto in ambito contabile e commerciale, ma la sua inadeguatezza nell'eseguire le operazioni più complicate, quali moltiplicazioni e divisioni, fu alla base della polemica che contrapponeva algoristi e abachisti e che, nella suddetta area geografica, si concluse con la vittoria dei primi sui secondi.

Infatti, con l'arrivo in Occidente del sistema di numerazione indo-arabo e con lo sviluppo degli algoritmi di calcolo per operare con esso, grazie, tra gli altri, a Fibonacci, l'abaco perse via via importanza, soprattutto in Occidente.

Il nuovo sistema di numerazione posizionale in base 10 rese, gradualmente, obsoleta l'adozione dell'abaco come strumento di calcolo: il nuovo sistema di numerazione posizionale permetteva di utilizzare meno simboli e con una resa

migliore, poiché i conti scritti risultavano estremamente più semplici e veloci. Per questi motivi, a partire dal XVI secolo, l'uso dell'abaco divenne in Europa sempre più raro, fino a scomparire definitivamente.



Figura 11. Incisione su legno che illustra la *Margarita Philosophica* di Gregorius Reisch (Friburgo 1503): in essa, l'Aritmetica è simbolizzata da una donna che pare dirimere una disputa tra “algoristi” e “abachisti”.

### 3. ALCUNI TIPI DI ABACO A PALLOTTOLIERE

In questa Sezione e nella seguente presenteremo alcuni tipi di abaco a pallottoliera presenti nella mostra PSIC: il *pallottoliera* (a uso didattico), il russo *schoty*, il cinese *suan pan* e il giapponese *soroban*, soffermandoci soprattutto sul funzionamento degli ultimi due e della versione moderna del *soroban*.

#### 3.1 IL PALLOTTOLIERE

Ricordiamo che il *pallottoliera* a uso didattico è costituito da un'intelaiatura in legno su cui sono fissate un numero variabile di asticelle di metallo, in ciascuna delle quali scorrono delle palline forate, solitamente in numero di 10, anche se esistono versioni in cui le palline sono in numero di 9. Tale pallottoliera, specie quello con 10 palline per asta, in virtù dell'immediatezza visiva che si ha nell'eseguire le



operazioni elementari, può essere utilizzato proficuamente nell'insegnamento delle prime basi dell'aritmetica e delle addizioni con piccoli numeri.

Il pallottoliere a 9 palline può essere più adatto a spiegare, in un secondo tempo, la notazione posizionale che sta alla base del nostro sistema di numerazione e si presta inoltre a rendere intuitivo l'algoritmo dei riporti.

Supponiamo di avere un pallottoliere a 10 palline come in Figura 12, in cui la fila di palline più in basso rappresenta le unità, la seconda le decine, la terza le centinaia, e così via. Notiamo che, come esemplificato in Figura 12, esiste un'ambiguità nella rappresentazione di alcuni numeri e che questa deriva proprio dalla presenza di uno 0 nella notazione posizionale del numero che si va a rappresentare.

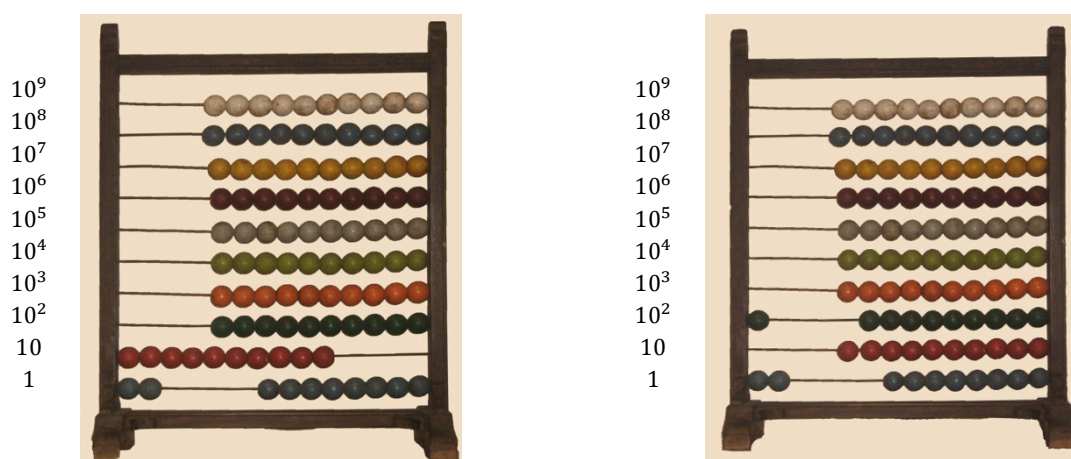


Figura 12. Rappresentazione di numeri in notazione posizionale su un pallottoliere a 10 palline. In questo caso, il numero 102 può essere scritto in due modi diversi, mentre ammette solo una rappresentazione nei pallottolieri a 9 palline.

### 3.2 LO SCHOTY<sup>8</sup>

In Russia l'abaco, detto *schoty*, ha una struttura a bastoncini e palline, con dieci palline su ogni asticella. Non c'è alcuna suddivisione. A ogni asticella viene

<sup>8</sup> Si veda la Figura 43 nella galleria fotografica (Sez. 5).

attribuito un ordine di grandezza secondo un sistema di numerazione decimale. Per rappresentare un numero, analogamente agli abachi di epoca precedente, si spostano le palline verso la parte superiore dell'asticella. Una particolarità dell'abaco russo è che, per facilitare la lettura dei numeri, alcune palline, la quinta e la sesta in ogni asticella, vengono colorate diversamente dalle altre.

Vista la semplicità nella costruzione e nell'utilizzo dello *schoty*, questo strumento ebbe una diffusione veramente ampia a tutti i livelli. È risaputo infatti che nei mercati e nelle attività commerciali, fino agli anni Settanta del Novecento, l'abaco era uno strumento indispensabile. La popolarità dell'abaco russo subì una battuta d'arresto quando, negli anni Settanta, iniziò la produzione in massa della calcolatrice elettronica tascabile. Al giorno d'oggi esso è stato completamente sostituito da questi strumenti.

L'abaco russo fu introdotto in Francia, e successivamente nei Paesi dell'Europa occidentale, dopo il 1812, dal matematico francese Jean-Victor Poncelet, che aveva combattuto nell'esercito di Napoleone ed era stato fatto prigioniero in Russia. Grazie a Poncelet, esso venne usato in Francia principalmente non per effettuare conti, ma come ausilio alla didattica.

### 3.3 IL SUAN PAN<sup>9</sup>

In Cina, fin dal II secolo a. C. e per molti secoli a venire, si usava, per indicare i numeri, un metodo che risultava molto utile quando si trattava di eseguire dei calcoli aritmetici. Infatti venivano utilizzati i numeri a bastoncini, derivanti da una trasposizione grafica delle asticelle che precedentemente venivano usate per effettuare conti, analogamente a quanto avveniva in Mesopotamia e in Occidente con i *calculi*. Il vantaggio dell'uso dei bastoncini e, in seguito, della scrittura dei numeri a bastoncini consisteva nella facilità e nella rapidità con cui si potevano leggere i numeri. Vi erano due serie di simboli per indicare le cifre da 1 a 9, la prima

---

<sup>9</sup> Si vedano le Figure 42 e 48 nella galleria fotografica (Sez. 5).

per indicare le cifre corrispondenti alle potenze pari di 10 (unità, centinaia,...), la seconda per quelle dispari (decine, migliaia,...).



Figura 13. La prima serie di cifre a bastoncini.



Figura 14. La seconda serie di cifre a bastoncini.

L'uso dei bastoncini era così funzionale che, per molto tempo, non si vide necessità di utilizzare strumenti come l'abaco o le tavole di conto; infatti l'introduzione di questi non avvenne in tempi così antichi come si può pensare. La prima chiara descrizione dell'abaco in Cina, noto come *suan pan* (letteralmente "vassoio per calcolare") si ebbe nel *Classico di Lu Ban*, testo del XV secolo.

Molto probabilmente questo strumento era già in uso almeno da mille anni. Il *suan pan* cinese aveva delle asticelle di bambù divise in due parti da una barretta in legno. Nelle asticelle erano inserite, in modo da poter scorrere, delle palline: cinque nella parte in basso (di valore 1) e due in alto (di valore 5). I numeri venivano così registrati tramite lo scorrimento delle palline verso la sbarretta separatrice. Una pallina si dirà in posizione "attiva" se è posta verso la barra centrale, mentre si dirà in posizione "inattiva" se posta verso i bordi esterni.

Un abaco con sette palline in ogni asticella, come il *suan pan*, viene detto "abaco 5 + 2"; una peculiarità di questo tipo di abaco è quella di poter contare sia in base 10, sia, eventualmente, secondo un sistema di numerazione esadecimale. Esiste tuttavia anche una variante a tale tipo di *suan pan*: infatti l'esemplare più antico di

abaco cinese, ritrovato in una tomba degli ultimi anni del XVI secolo, è costituito da asticelle con 5 + 1 palline<sup>10</sup>, e si tratta di un tipo di abaco descritto nel libro *Metodi di calcolo per le perle in un piatto* di Xi Xinlu (1573)<sup>11</sup>. Rispetto al sistema dei bastoncini, l'abaco era certamente più pratico da utilizzare, ma aveva il difetto strutturale di rendere difficili e lunghe la rappresentazione e la lettura di un numero che avesse molte posizioni decimali.

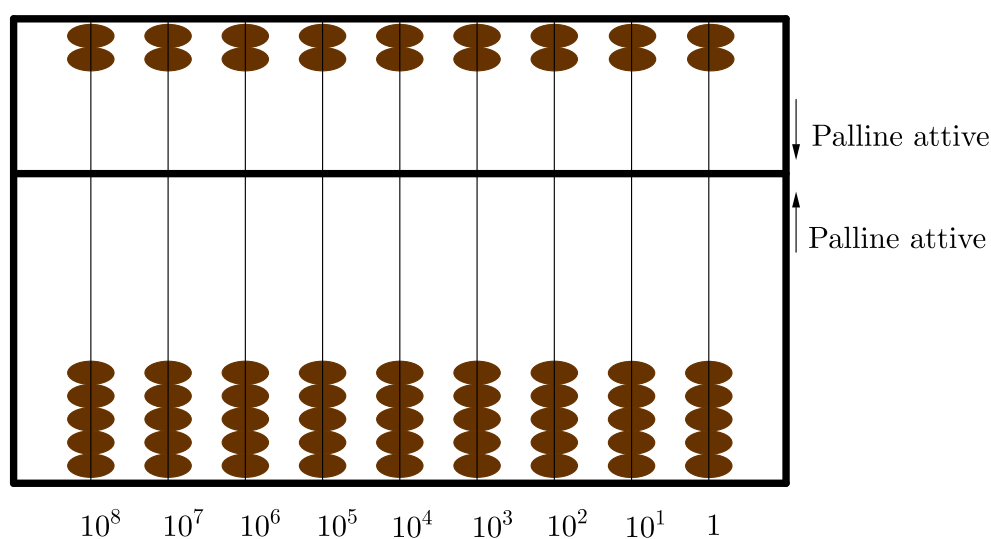


Figura 15. Un abaco cinese (*suan pan*) completamente azzerato.

### 3.4 IL SOROBAN<sup>12</sup>

Il termine giapponese per indicare l'abaco, *soroban*, è probabilmente una trasposizione dal cinese *suan pan*. Anche se la diffusione a livello popolare del *soroban* avvenne all'incirca nel XVII secolo, esso era indubbiamente già noto ai mercanti giapponesi come strumento di calcolo almeno duecento anni prima. La sua struttura era molto simile a quella dell'abaco cinese, ma verso la fine del XIX secolo venne introdotta una variante semplificata, nella quale le palline in ogni asticella erano cinque: quattro nella parte bassa e una in quella alta.

<sup>10</sup> Nella galleria fotografica (Sez. 5) si vedano la Figura 41 e, per confronto, la Figura 42.

<sup>11</sup> Cfr. GOBBI 2012.

<sup>12</sup> Si vedano le Figure 40-41 e 48 nella galleria fotografica (Sez. 5).

Quest'ultima variante permette di rappresentare i numeri in un sistema di numerazione *a base variabile* (si veda a tal proposito l'Appendice 1), dove:

$$S = \{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, \dots\}$$

alla stessa maniera degli abachi romani.

### 3.5 NON UNICITÀ DELLA RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI IN NOTAZIONE POSIZIONALE SUGLI ABACHI CINESE E GIAPPONESE

Una caratteristica non immediatamente visibile della rappresentazione dei numeri in notazione posizionale sull'abaco cinese, così come sulla prima versione dell'abaco giapponese (quella a 6 palline), è la non unicità, come si può immediatamente dedurre dagli esempi riportati nelle Figure 16-18, che illustrano tre modi di scrivere 10 con l'abaco cinese, e nelle Figure 19-20, che mostrano due modi di scrivere 10 con l'abaco giapponese di tipo (5 + 1).

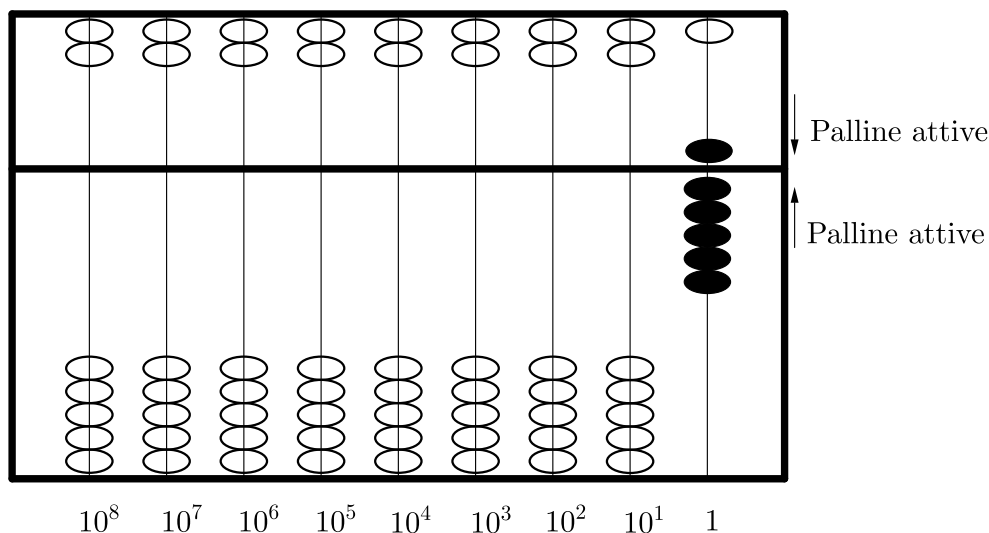


Figura 16. *Suan pan* su cui viene illustrata la rappresentazione:  $10=5 \cdot 1+5$ .

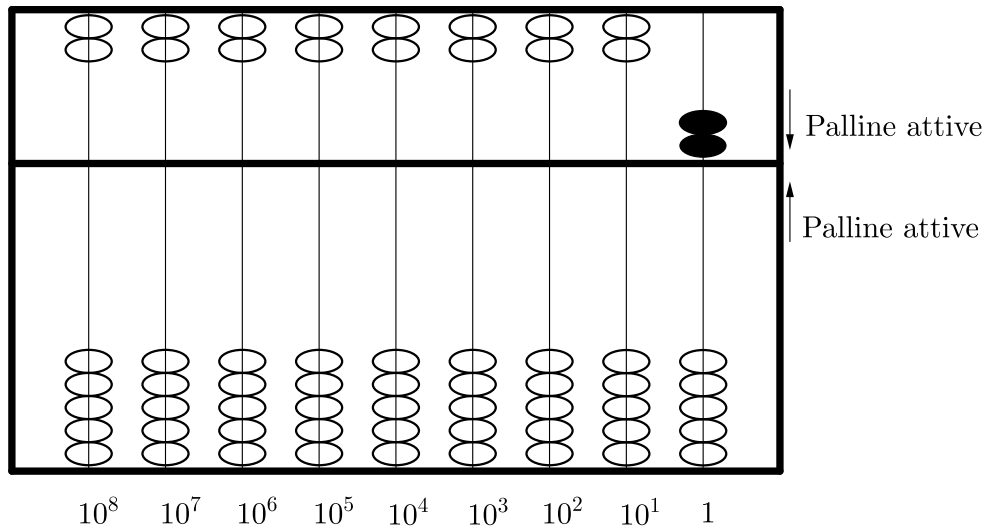


Figura 17. Suan pan su cui viene illustrata la rappresentazione:  $10=5 \cdot 2+0$ .

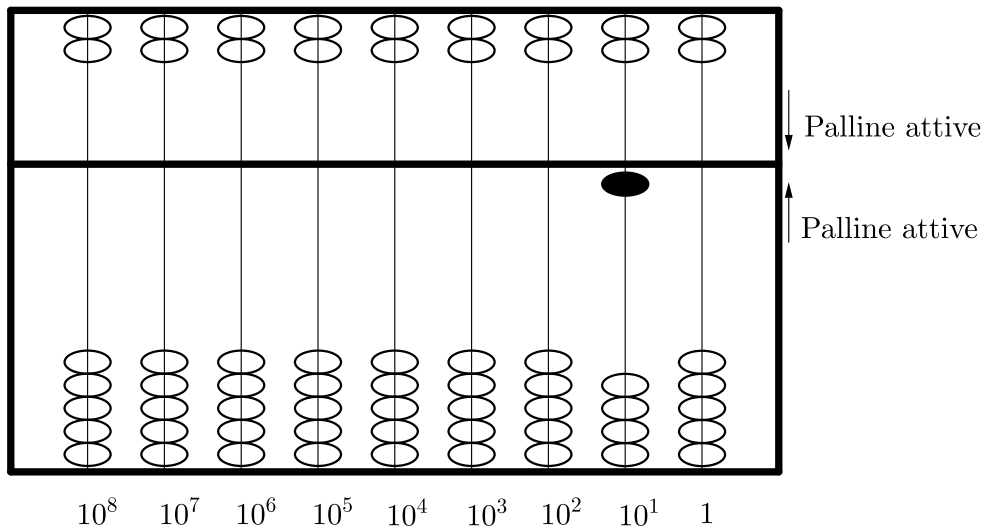


Figura 18. Suan pan su cui viene illustrata la rappresentazione:  $10=10 \cdot 1+0$ .

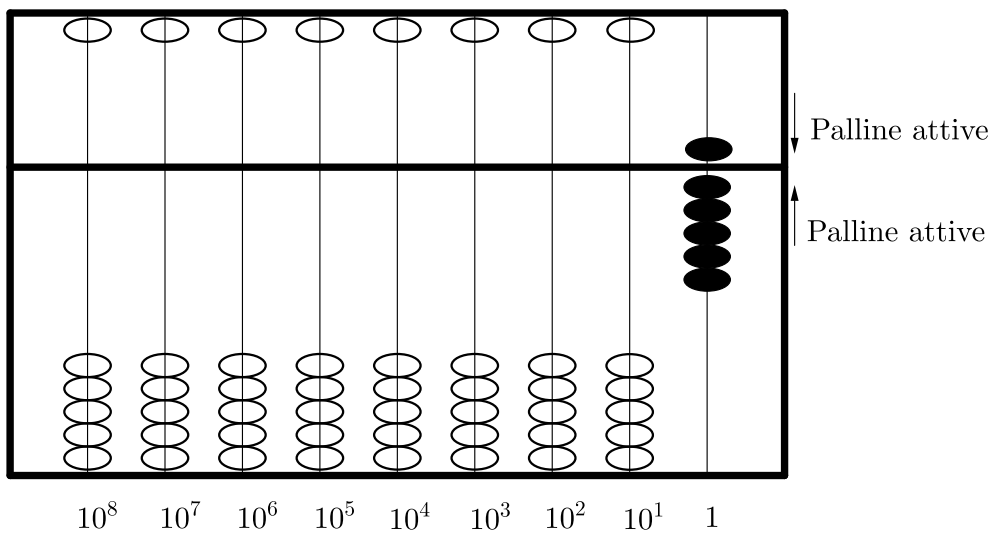


Figura 19. Soroban ( $5 + 1$ ) su cui viene illustrata la rappresentazione:  $10=5 \cdot 1+5$ .

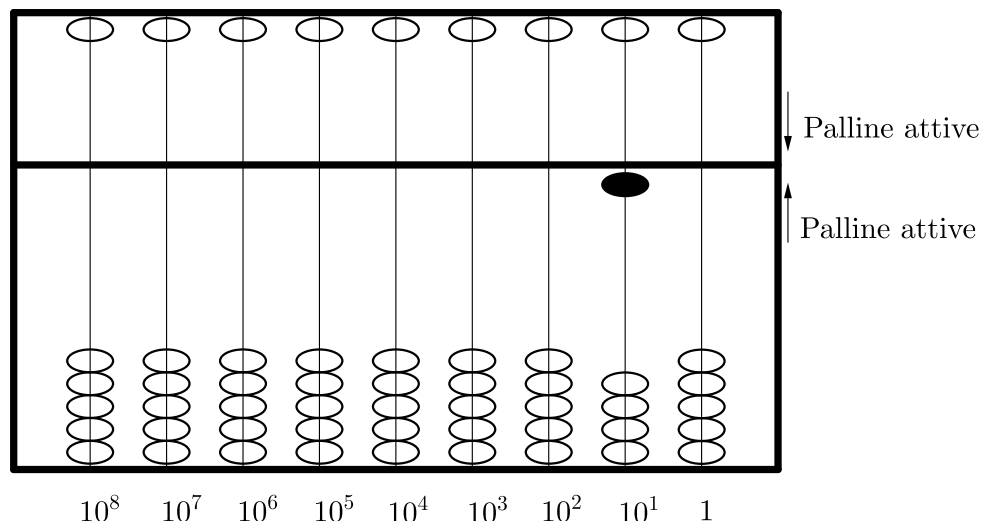


Figura 20. Soroban (5 + 1) su cui viene illustrata la rappresentazione:  $10=10 \cdot 1+0$ .

La non unicità non aveva però alcuna importanza, in quanto il modo in cui si rappresentavano i numeri sull'abaco per fare i conti era del tutto slegato dalla rappresentazione scritta del numero stesso. Il problema di fondo di questa pluralità di rappresentazioni è che tali abachi non sono strumenti "in base 10" come invece il soroban giapponese moderno di tipo (4 + 1).



Figura 21. Cassiera-contabile di una bottega di Pechino al lavoro, nel 2005, con il tradizionale *suan pan*.

#### 4. UTILIZZO DEL SOROBAN A CINQUE PALLINE

##### 4.1 LA RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI

Il soroban (4+1) possiede 9 asticelle e vi si possono quindi rappresentare, in notazione posizionale, i numeri da 0 a 999.999.999.

Anche in questa sezione, come nella precedente, si parlerà di “palline attive” o “inattive” a seconda della loro posizione verso la barra centrale o i bordi esterni dell’abaco. L’unica pallina posta al di sopra della barra orizzontale vale 5, mentre le quattro che sono al di sotto valgono 1 ciascuna (si veda la Figura 22).

Le cifre da 0 a 9 vengono rappresentate come in Figura 23, dove abbiamo indicato in bianco le palline inattive e in nero quelle attive.

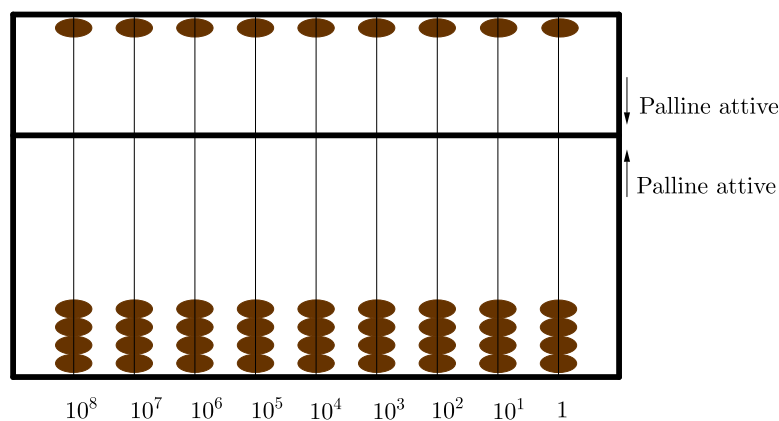


Figura 22. Un soroban (4+1) completamente “azzerato”.

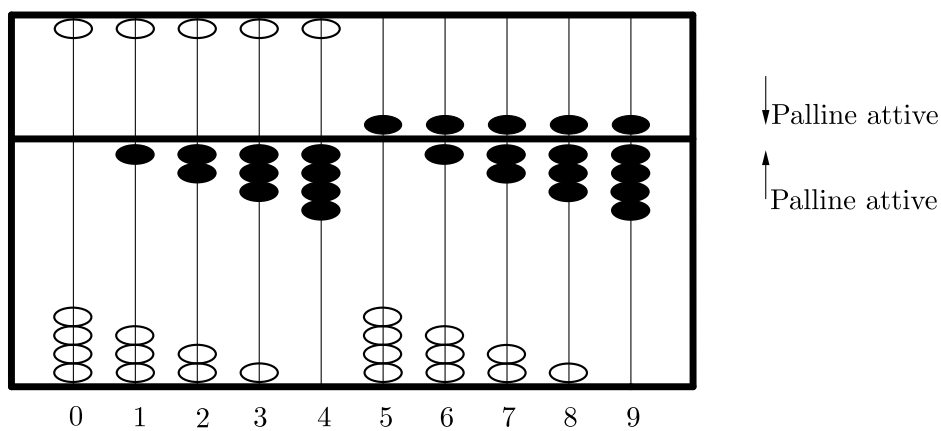


Figura 23.



## 4.2 LE OPERAZIONI ELEMENTARI

Verrà qui descritto come eseguire le operazioni di somma, sottrazione e moltiplicazione con il *soroban* moderno (4 + 1).

Regole analoghe possono essere enunciate per il *suan pan* cinese (5 + 2) e per il *soroban* antico (5 + 1), come si può vedere in KOJIMA 1954 e PERCEVAL MAXWELL 1971, mentre per la divisione, che risulta essere estremamente complessa, si veda PERCEVAL MAXWELL 1971.

Faremo poi solo un cenno all'algoritmo che sta alla base dell'operazione di estrazione di radice quadrata, senza illustrare come essa venga effettivamente compiuta su questo abaco.

Per comodità di lettura, in molti degli esempi, nel rappresentare un numero sull'abaco scriveremo sotto la colonnina corrispondente la cifra indo-araba da essa rappresentata.

### 4.2.1 L'ADDIZIONE

Nel compiere un'addizione con un *soroban* moderno, la principale differenza rispetto al nostro sistema di calcolo è che, mentre con quest'ultimo si procede da destra verso sinistra, cioè dalle unità di ordine inferiore a quelle di ordine superiore, con tale abaco si procede da sinistra verso destra.

Un'ulteriore differenza è che, nel sommare un numero arbitrario di addendi, il nostro sistema di calcolo prevede di procedere sommando tutte le cifre dell'ordine più basso (unità), per poi procedere a quelle di ordine superiore (decine, centinaia,...), mentre col *soroban* (4 + 1) si procede sommando i primi due numeri, al totale così ottenuto si aggiunge il terzo e, via via, si procede in questo modo sino all'esaurimento degli addendi.

Vediamo un esempio per la somma di due addendi:  $745 + 387$ .

**Passo 1.** Composizione del primo addendo (cioè 745) sull'abaco.

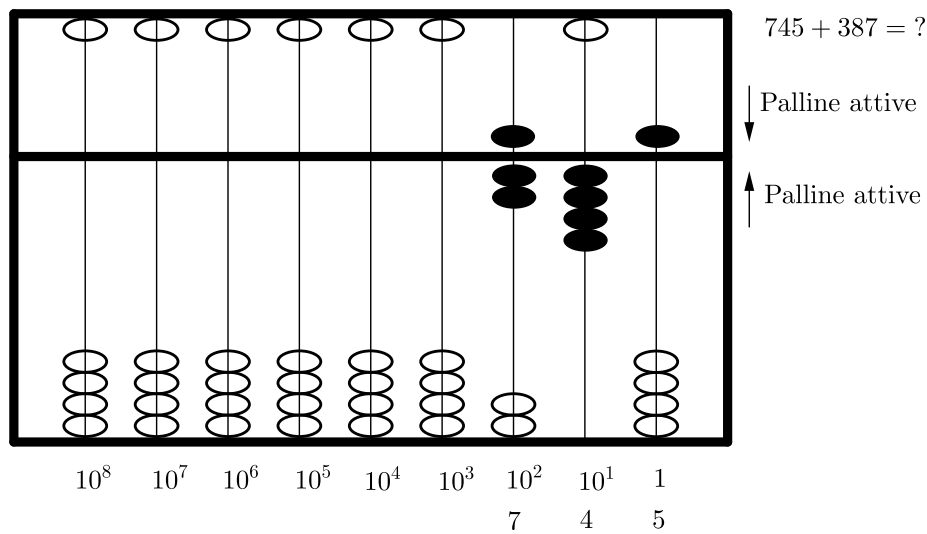


Figura 24.

**Passo 2.** Addizione delle unità di ordine più alto, cioè 7 e 3: otteniamo 10, che riportiamo come 1 nella colonna delle migliaia e 0 nella colonna delle centinaia; abbiamo così ottenuto un totale parziale di 1045.

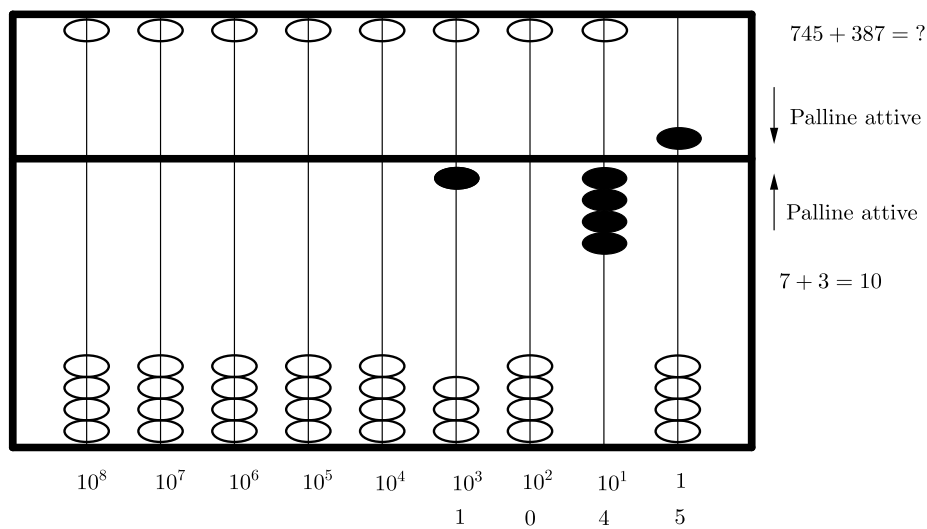


Figura 25.

**Passo 3.** Procedendo come sopra, sommiamo al totale così ottenuto le unità di ordine immediatamente più basso del secondo addendo. In questo caso sommiamo 8 al 4 già presente nelle decine, ottenendo 12 decine, che registriamo aggiungendo una pallina nella colonna delle centinaia e mettendone 2 in quella delle decine,

avendo effettuato gli eventuali riporti conseguenti; abbiamo così un totale parziale di 1125.

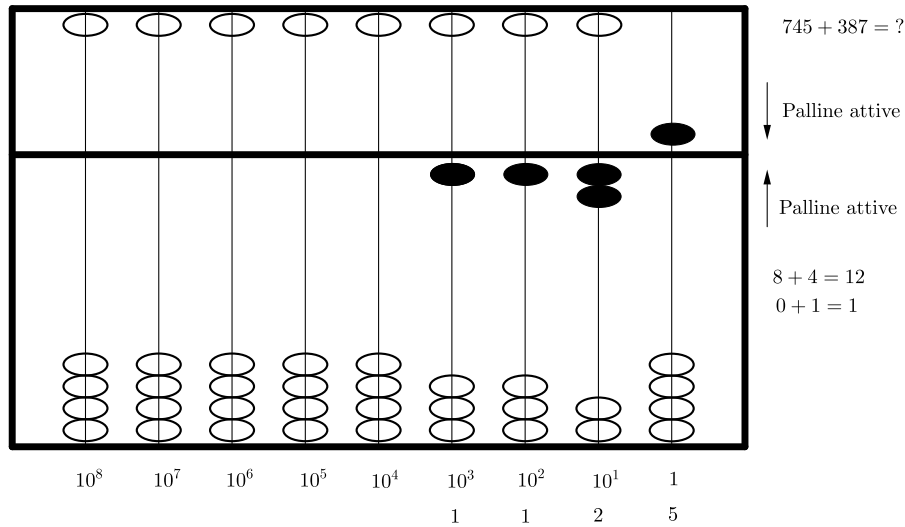


Figura 26.

**Passo 4.** Tocca adesso alle unità:  $5 + 7 = 12$ , quindi aggiungiamo una decina e segniamo due unità, ottenendo il risultato, ossia 1132.

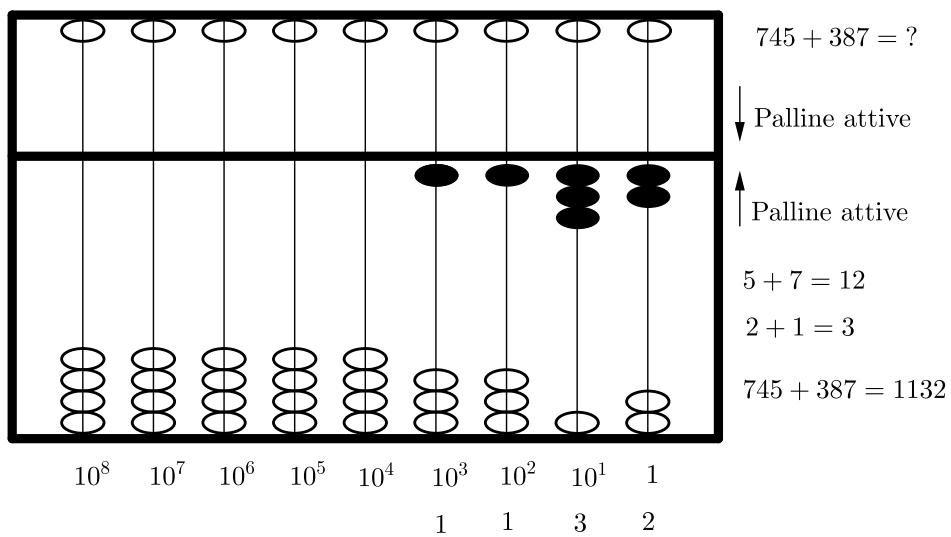


Figura 27.

I calcoli eseguiti con l'abaco corrispondono alla seguente serie di addizioni:

$$745 + 300 = 1045$$

$$1045 + 80 = 1125$$

$$1125 + 7 = 1132$$

### 4.2.2 LA SOTTRAZIONE CON IL SOROBAN MODERNO

La sottrazione con il *soroban* (4 + 1) si esegue in modo simile all'addizione, riportando dapprima sul *soroban* il minuendo (supposto maggiore del sottraendo) e procedendo come nel caso dell'addizione, da sinistra verso destra. Si considererà pertanto la cifra più a sinistra del sottraendo e la corrispondente cifra del minuendo e si eseguirà la sottrazione; si procederà quindi verso destra con la seconda cifra del sottraendo che verrà sottratta dalla corrispondente del risultato parziale ottenuto dalla prima operazione, e così via.

Se a un certo punto una cifra del minuendo sarà più piccola della corrispondente cifra del risultato parziale precedente, dalla colonna immediatamente a sinistra si toglierà una pallina e si eseguirà la sottrazione tra 10 più la cifra del minuendo e la corrispondente cifra del risultato parziale; si proseguirà in tale maniera sino alle unità.

Vediamo un esempio:  $745 - 387$ .

**Passo 1.** Impostare il minuendo sull'abaco.

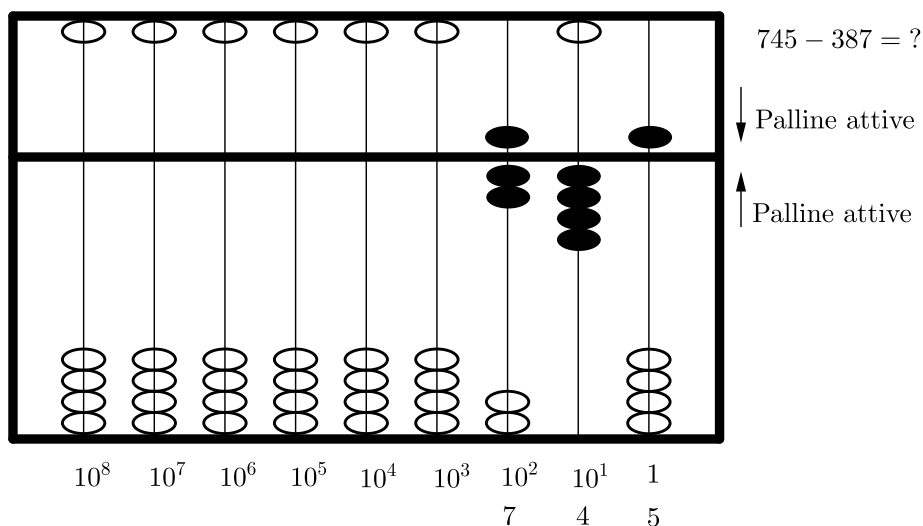


Figura 28.

**Passo 2.** Sottraiamo dalla prima cifra del minuendo la prima cifra del sottraendo, ottenendo come risultato parziale 445.

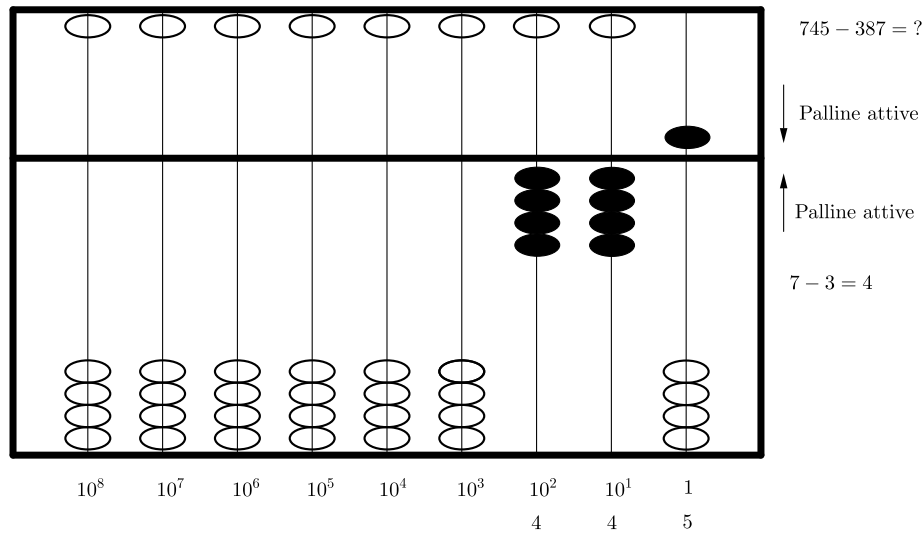


Figura 29.

**Passo 3.** Dobbiamo ora sottrarre dalla seconda cifra del risultato parziale ottenuto nel passo precedente la seconda cifra del sottraendo. Questa sottrazione ( $4 - 8$ ) non si può fare, quindi tolgo una pallina dalla colonna delle centinaia ed eseguo la sottrazione  $(14 - 8) = 6$ .

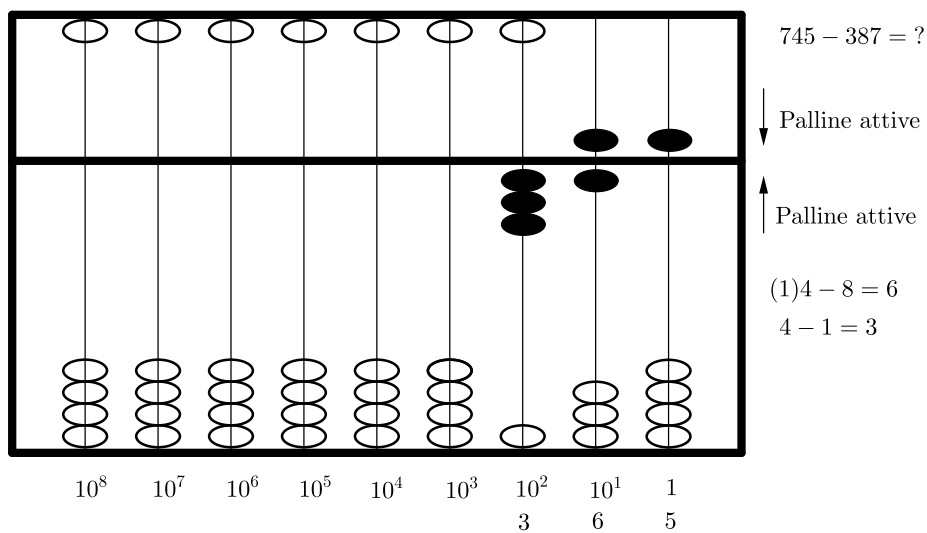


Figura 30.

**Passo 4.** Restano ora da sottrarre le unità. Questa sottrazione (5 – 7) non si può fare, quindi tolgo una pallina dalla colonna delle decine ed eseguo la sottrazione (15 – 7) = 8.

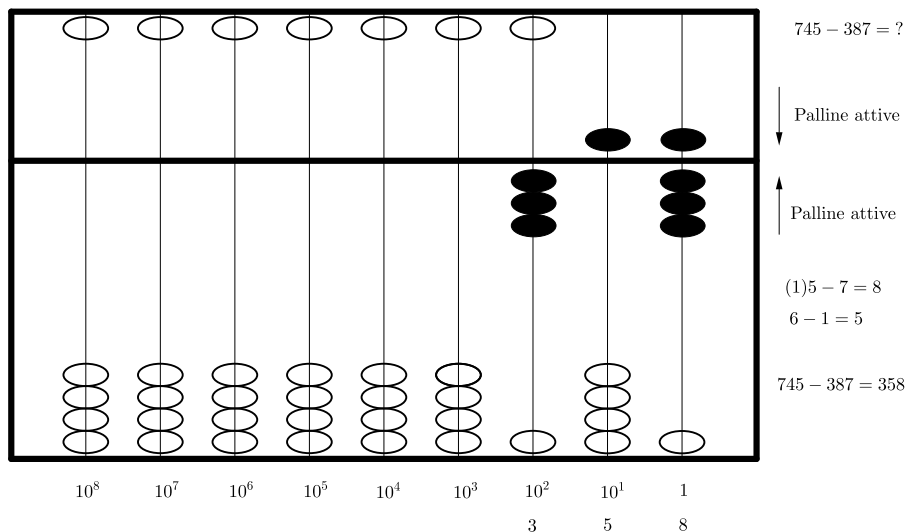


Figura 31.

Come nel caso della somma mostriamo, utilizzando il nostro metodo e la nostra notazione, i vari passaggi che si compiono per fare tale sottrazione con il *soroban*:

$$\begin{aligned}
 745 - 300 &= 445 \\
 445 - 80 &= 365 \\
 365 - 7 &= 358
 \end{aligned}$$

### 4.2.3 IL PRODOTTO

Il prodotto con il *soroban* (4 + 1) si esegue in modo molto simile al nostro metodo: anche in questo caso ciò che varia è l'ordine in cui si eseguono i calcoli. Nell'eseguire la moltiplicazione si seguirà infatti sempre la regola di effettuare le operazioni da sinistra verso destra, al contrario di quanto si fa generalmente con la nostra moltiplicazione in riga.

Vediamo un esempio:  $37 \times 432$ .

**Passo 1.** Impostazione dei fattori: impostiamo da destra verso sinistra un numero di colonne vuote pari al numero di cifre del secondo fattore più uno, in questo caso 4; impostiamo poi nella colonna successiva le unità del primo fattore e nella

successiva le decine. Lasciamo poi vuote due colonne e impostiamo, sempre nello stesso ordine (unità, decine e centinaia da destra verso sinistra), l'altro fattore. Otteniamo:

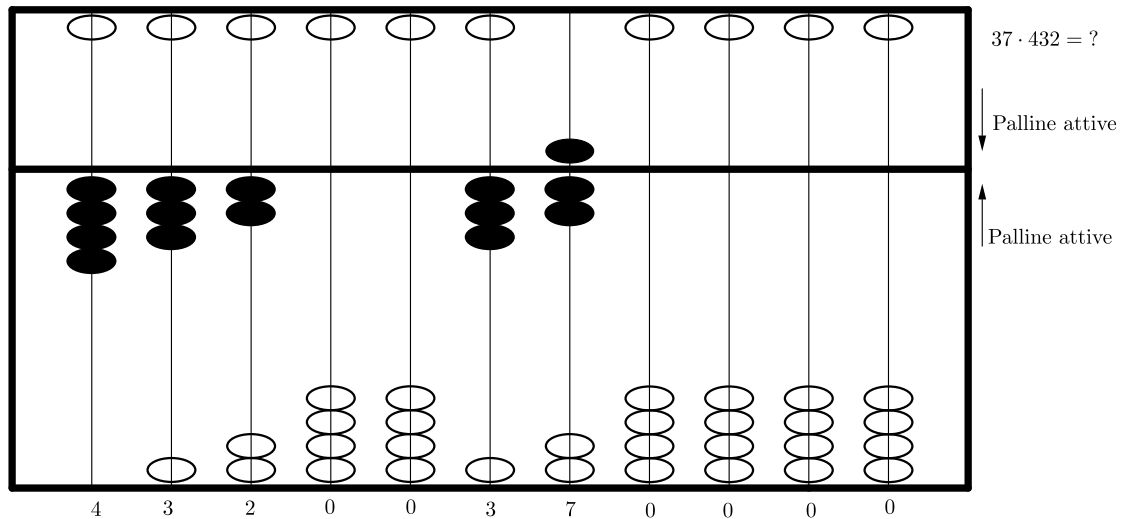


Figura 32.

**Passo 2.** Moltiplichiamo ora la cifra delle unità del primo fattore e la cifra di ordine maggiore del secondo, ottenendo  $7 \cdot 4 = 28$  e riportando il risultato così ottenuto nella quarta e terza colonna dell'abaco, pervenendo a un risultato parziale di 2800.

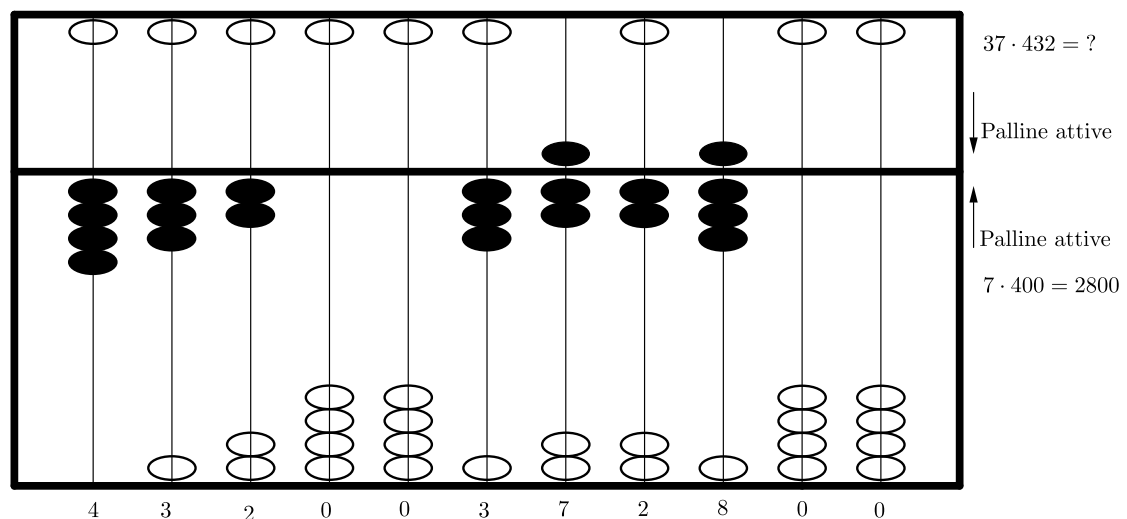


Figura 33.

**Passi 3 e 4.** Proseguiamo moltiplicando le rimanenti cifre del secondo fattore per la prima del primo, sommando questi ultimi ai risultati parziali via via calcolati. Alla fine eliminiamo la cifra delle unità dal primo fattore, ottenendo:

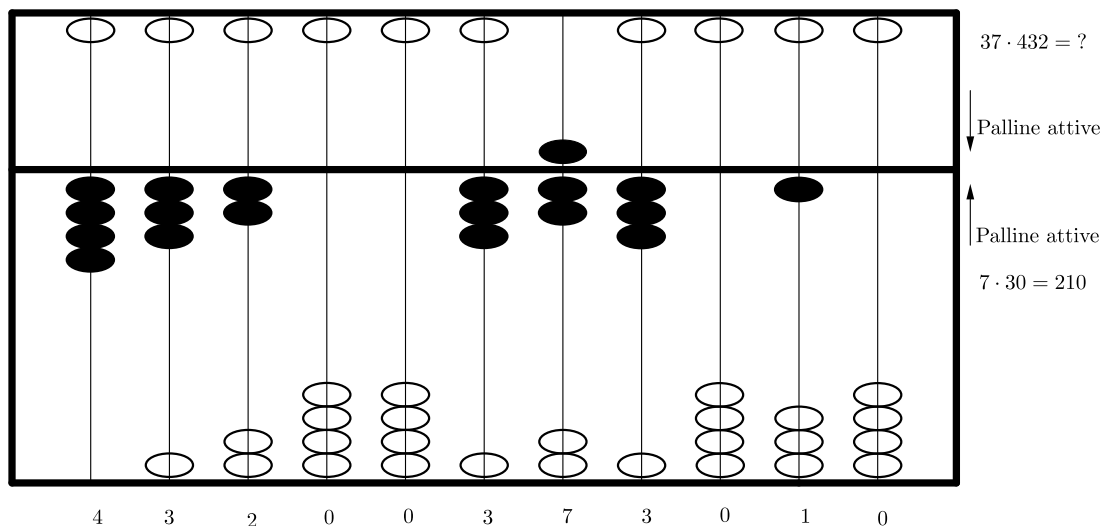


Figura 34.

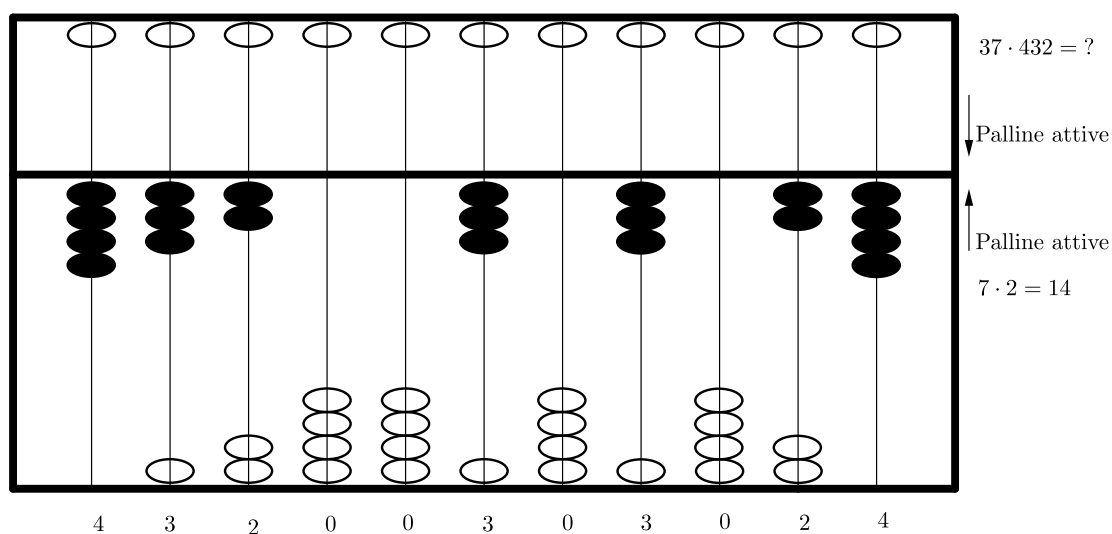


Figura 35.

**Passi 5, 6 e 7.** Come prima, effettuiamo la moltiplicazione di ciascuna cifra del secondo fattore per la seconda del primo, sommando via via i risultati così ottenuti ed eliminando nell'ultimo passaggio la seconda e ultima cifra del primo fattore.



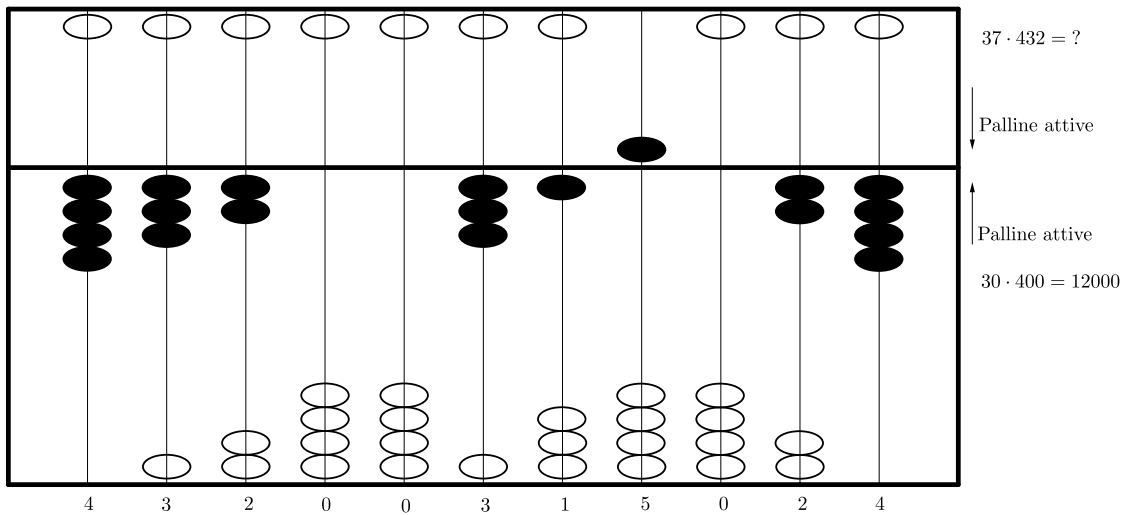


Figura 36.

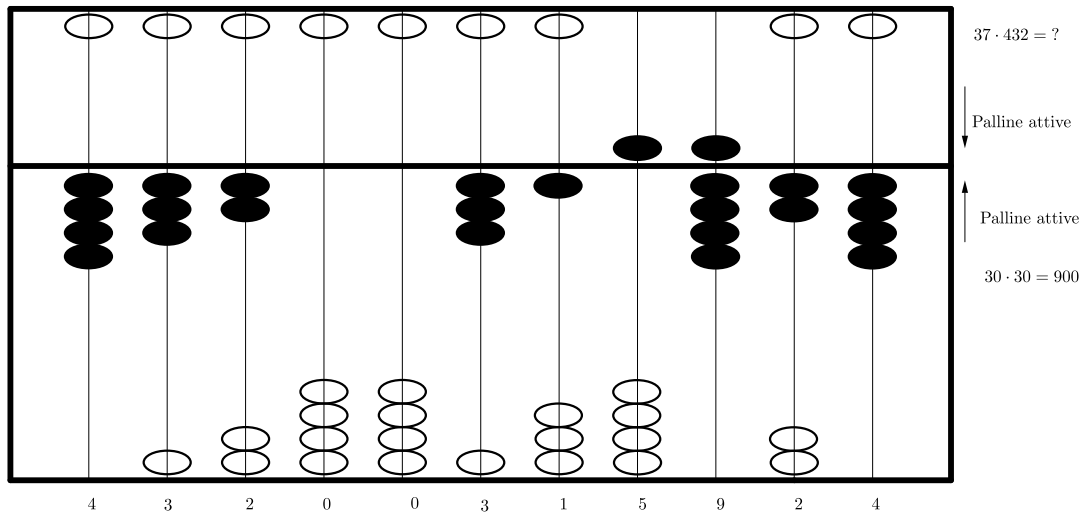


Figura 37.

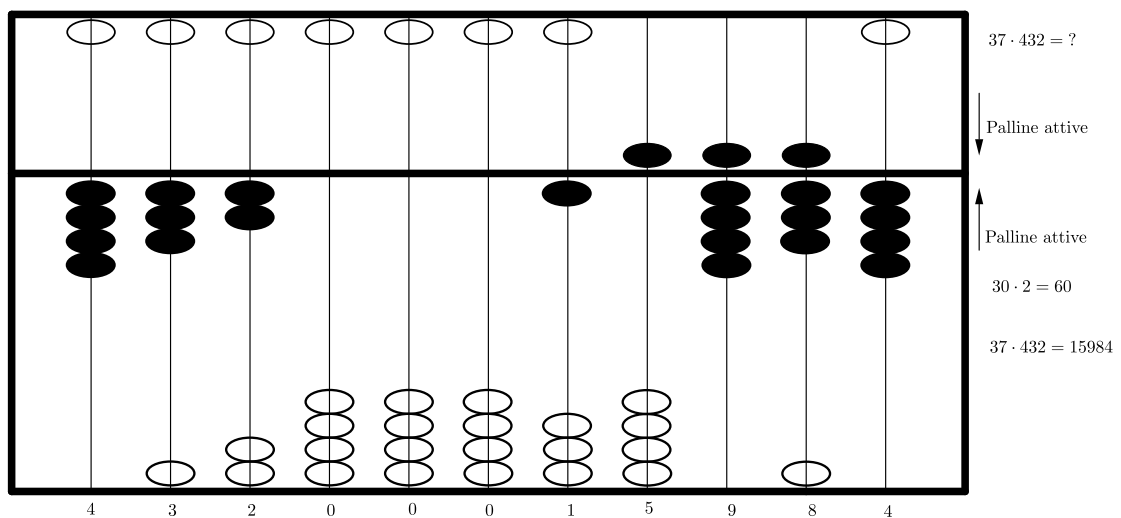


Figura 38.

Per fare un parallelo con l'algoritmo da noi utilizzato per il prodotto, i calcoli eseguiti con l'abaco corrispondono alla seguente somma:

$$2800 + 210 + 14 + 12000 + 900 + 60 = 15984$$

dove ogni addendo si ottiene con una moltiplicazione parziale.

#### 4.2.4 LA RADICE QUADRATA

L'algoritmo utilizzato con il *soroban* per l'estrazione della radice quadrata si esegue mediante sottrazioni ripetute e si basa sull'identità<sup>13</sup>:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

e sulle sue opportune manipolazioni.

Vediamo un esempio: calcoliamo la radice quadrata di 427716.

La Figura 39 mostra l'applicazione di questo algoritmo, illustrandone i passaggi, per chiarezza, con una notazione a noi più familiare.

Innanzitutto, suddividiamo il radicando in gruppi di due cifre partendo da destra (come si fa nell'usuale algoritmo attribuito a Bombelli), poi consideriamo il primo gruppo di cifre partendo da sinistra (che potrebbe anche essere costituito da una sola cifra) e sottraiamo via via i numeri dispari a partire da 1, sino a che ciò sia possibile, segnando a parte i numeri dispari che si vanno a sottrarre (notiamo che in questo modo si sottrae dal numero rappresentato dal primo gruppo di cifre il quadrato che lo approssima meglio inferiormente); vi sarà quindi un resto  $r_1$ .

Si abbassa poi il secondo gruppo di due cifre e si moltiplica l'ultimo numero dispari sottratto, sia esso  $d_1$ , per 10 e gli si aggiunge 11; sia  $d_2 = 10d_1 + 11$  tale numero dispari. Se il numero formato con l'abbassamento delle due cifre dovesse essere più piccolo di quello ottenuto moltiplicando l'ultimo dispari per 10 e aggiungendogli 11, si abbasseranno ancora due cifre e questo dispari dovrà essere moltiplicato per 100

<sup>13</sup> Si noti come il membro sinistro di tale uguaglianza sia la somma dei primi  $n$  numeri dispari.

e a tale risultato dovrà aggiungersi 101 e così via... (se il numero formato, anche in questo caso, dovesse essere ancora più piccolo del numero dispari di partenza moltiplicato per 100 e aggiuntovi 101, si abbasseranno ancora due cifre e si moltiplicherà il numero dispari per 1000 e si aggiungerà 1001...).

$\sqrt{42 77 16}$	1	
$\underline{1}$	3	
4 1	5	
$\underline{3}$	7	
3 8	9	
$\underline{5}$	11	
3 3	$\underline{121} = 10 \cdot 11 + 11$	
$\underline{7}$	123	
2 6	125	
$\underline{9}$	127	
1 7	$\underline{129}$	
1 1	$\underline{1301} = 10 \cdot 129 + 11$	
= 6 7 7	1303	
$\underline{1 2 1}$	1305	
5 5 6	1307	
$\underline{1 2 3}$		
4 3 3		
$\underline{1 2 5}$		
3 0 8		
$\underline{1 2 7}$		
1 8 1		
$\underline{1 2 9}$		
= 5 2 1 6		
$\underline{1 3 0 1}$		
3 9 1 5		
$\underline{1 3 0 3}$		
2 6 1 2		
$\underline{1 3 0 5}$		
1 3 0 7		
$\underline{1 3 0 7}$		
= = = =		

$$\sqrt{427716} = \frac{1307 + 1}{2} = 654$$

Figura 39. Esempio di estrazione della radice quadrata con il soroban, trascritto in notazione moderna.

Si proseguirà quindi sottraendo  $d_2$  al numero formato dal primo resto  $r_1$  e dal secondo gruppo di cifre. Si proseguirà sottraendo in successione i dispari consecutivi a partire da  $d_2$ , finché ciò sia fattibile. Si proseguirà quindi in tal maniera, sempre segnando i numeri dispari via via sottratti, fino all'esaurimento dei gruppi di due cifre del radicando.

#### 4.2.5 PERCHÉ L'ALGORITMO DI ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA FUNZIONA?

Possiamo limitarci a considerare il caso in cui il numero del quale si vuole conoscere la radice sia intero, dato che, se esso fosse decimale limitato, ci si potrebbe sempre ricondurre a tale caso moltiplicando il numero per un'opportuna potenza pari di 10, essendo:

$$\sqrt{k \cdot 10^{2n}} = 10^n \sqrt{k}$$

Sia  $n$  il numero di cui si vuole estrarre la radice quadrata: suddividiamo le sue cifre a gruppi di 2 a partire da destra. Il numero di cifre che andranno a formare la radice del numero  $n$  sarà pari al numero di gruppetti di cifre così ottenuti. Nel seguire passo passo questo algoritmo si farà riferimento, per illustrarlo meglio, all'esempio in Figura 39.

Vogliamo calcolare la prima cifra (partendo da sinistra) della radice quadrata del numero (nel nostro esempio sarà quella delle centinaia). Per farlo, cerchiamo, mediante sottrazioni successive di numeri dispari a partire da 1, scrivendo in una colonna a parte i numeri via via sottratti, il più grande numero dispari sino a cui si possa iterare il procedimento, nel nostro caso 11: la metà di 12 (11+1), cioè 6, dà la prima cifra della radice quadrata del numero di partenza, ma anche quella di un qualsiasi blocco di cifre del radicando che contenga, nell'ordine, il primo blocco a partire da sinistra e un arbitrario numero di gruppi di due cifre.

Nel nostro caso, ad esempio, abbiamo scoperto che 6 è la prima cifra della radice quadrata non solo di 427716, ma anche di 42 e di 4277.

Sappiamo allora che:

$$\sqrt{42} = 6, \dots$$

$$\sqrt{4277} = 6 \dots$$

$$\sqrt{427716} = 6 \dots$$

Consideriamo ora il numero (677) ottenuto “abbassando” il secondo gruppo di cifre (77). Questo è il resto che si ottiene togliendo

$$3600 = 60^2 = 1 + 3 + \dots + \overbrace{(2 \cdot 60 - 1)}^{119}$$

da 4277, cioè, se si vuole, i primi 60 dispari da 4277.

Vogliamo cercare ora il numero, compreso tra 60 e 69, che, elevato al quadrato, si avvicina di più a 4277; per farlo, dobbiamo togliere via via i numeri dispari a partire da  $121 = 10 \cdot 11 + 11$ . Si giunge in tal modo a sottrarre 129 e a trovare un resto pari a 52; essendo  $\frac{129+1}{2} = 65$ , la seconda cifra della radice quadrata è pari a 5.

$$\sqrt{4277} = 65, \dots$$

$$\sqrt{427716} = 65 \dots$$

Resta da trovare l'ultima cifra: sappiamo che la radice quadrata del numero di partenza è compresa tra 650 e 659. Abbassiamo l'ultimo gruppo di due cifre ottenendo 5216. Dobbiamo ora togliere i dispari dal 651-esimo a seguire, cioè a partire da  $1301 = 129 \cdot 10 + 11$ .

Otteniamo per sottrazioni successive resto 0, fermanoci dopo aver tolto 1307.

Abbiamo tolto quindi tutti i dispari da 1 a 1307 dal radicando, ottenendo 0, per cui:

$$427716 = \sum_{i=1}^{\frac{1307+1}{2}} (2i - 1) = \sum_{i=1}^{654} (2i - 1) \Rightarrow \sqrt{427716} = 654$$

Osserviamo che l'ultimo addendo della seguente sommatoria è  $2n - 1$ :

$$n^2 = \sum_{i=1}^n (2i - 1)$$

Nelle seguenti, invece, è rispettivamente  $20n - 1$  e  $200n - 1$ :

$$100n^2 = (10n)^2 = \sum_{i=1}^{10n} (2i - 1)$$

$$10^4n^2 = (100n)^2 = \sum_{i=1}^{100n} (2i - 1)$$

Osserviamo ora che il numero dispari successivo a  $20n - 1$ , cioè  $20n + 1$ , è tale che:

$$20n + 1 = 10(2n - 1) + 11$$

Analogamente, per il numero dispari successivo a  $200n - 1$ , cioè  $200n + 1$ , si ha che:

$$200n + 1 = 10 \cdot (20n - 1) + 11 = 100 \cdot (2n - 1) + 101$$

Da quest'ultima uguaglianza si deduce la regola di moltiplicare per 10 e aggiungere 11 (e le corrispondenti generalizzazioni) che si utilizza quando si abbassa un gruppo di due cifre; regola che, a prima vista, potrebbe apparire piuttosto "sibillina".

Concludiamo ricordando come si svolge l'estrazione di radice quadrata con il metodo di Bombelli per lo stesso esempio numerico.

$\sqrt{42 77 16}$	$6\ 5\ 4$
$\underline{36}$	$\underline{125 \cdot 5 = 625}$
$= 677$	$\underline{1304 \cdot 4 = 5216}$
$\underline{625}$	
$= = 5216$	
$5216$	
$= = = =$	

$$\sqrt{427716} = 654$$

## 5. GALLERIA FOTOGRAFICA: ALCUNI STRUMENTI ESPOSTI ALLA MOSTRA PSIC

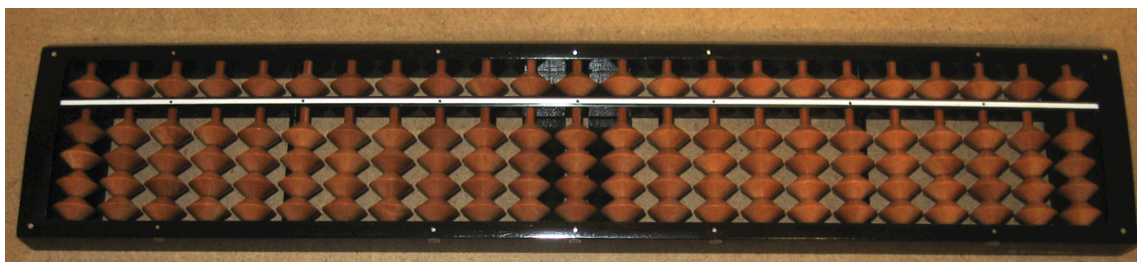


Figura 40. *Soroban* (pallottoliere giapponese) con capacità di 23 decadi basato su numerazione biquinaria con quattro palline rappresentanti le unità al livello inferiore e una al livello superiore indicante una cinquina.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (32,2×6,5×1,5)

Materiale: Legno

Epoca: 1960

Origine: Giappone

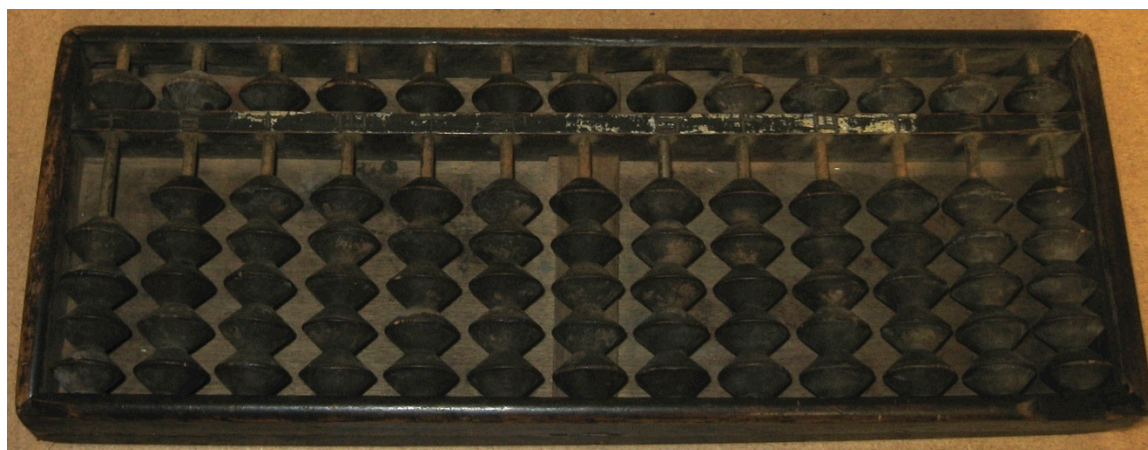


Figura 41. Pallottoliere simile al *soroban* con capacità di 13 decadi basato su numerazione biquinaria con cinque palline rappresentanti le unità al livello inferiore e una al livello superiore indicante una cinquina.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm)(28,1×10,9×3)

Materiale: Legno

Epoca: 1940

Origine: Indocina

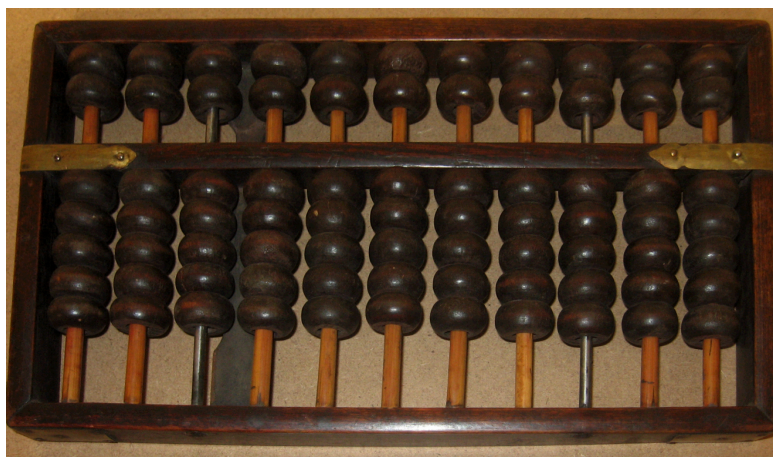


Figura 42. *Suan pan* (pallottoliere cinese) con capacità di 11 decadi basato su numerazione biquinaria con cinque palline rappresentanti le unità al livello inferiore e due al livello superiore indicante le cinque.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (28×16×2,4)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: 1940

Origine: Cina



Figura 43. *Schoty* (pallottoliere russo) basato su numerazione decimale semplice con la variante di una posizione a quattro perline per il conteggio dei quarti di rublo.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (45,3×27,4×5,2)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: 1950

Origine: Russia



Figura 44. Pallottoliere didattico basato su numerazione decimale semplice.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm)

(58,8×29,4×73)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: Prima metà '900

Origine: Italia

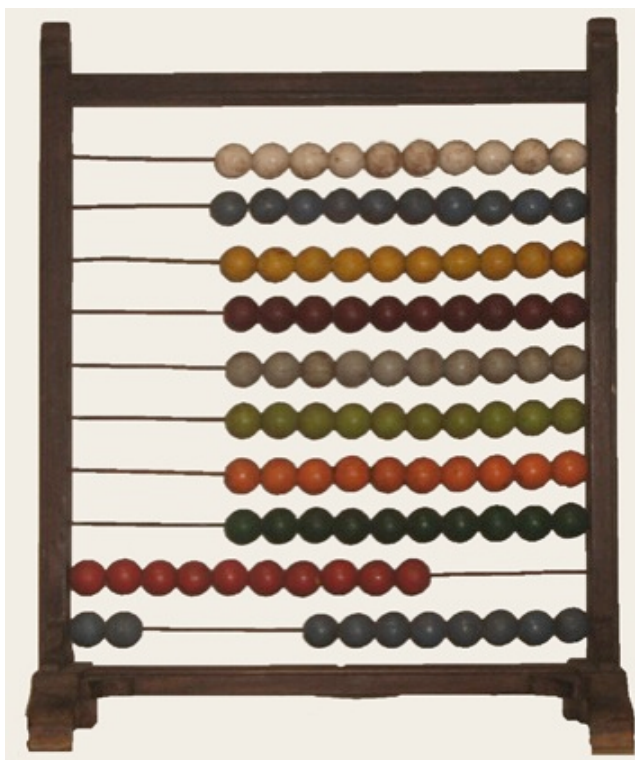


Figura 45. Pallottoliere basato su numerazione decimale semplice.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm)

(25,6×9,5×26,3)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: Prima metà '900

Origine: Italia

Note: Pallottoliere a uso didattico, fatto a mano, estremamente particolare, dato che presenta nove palline per riga; tale peculiarità si spiega con il fine didattico di far interiorizzare il concetto di “riporto”, vista l'impossibilità di rappresentare su una riga una decina, e le proprietà della base 10.

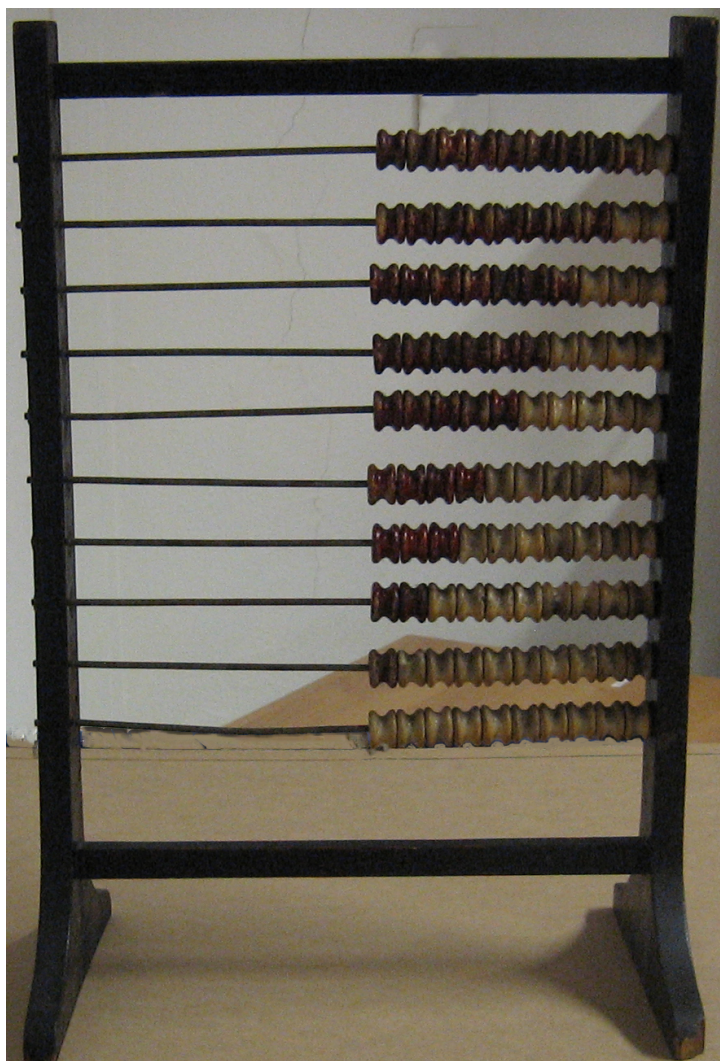


Figura 46. Pallottoliere basato su numerazione decimale semplice.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (36,5×22×55,2)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: Prima metà '900

Origine: Italia

Note: La prima particolarità di questo pallottoliere consiste nell'avere le palline di due colori secondo uno schema ben evidente (una pallina bianca nella prima riga, due nella seconda e così via...); la seconda è il fatto che le palline stesse presentano un solco nel mezzo, pensato per rendere più agevole lo spostamento delle stesse.

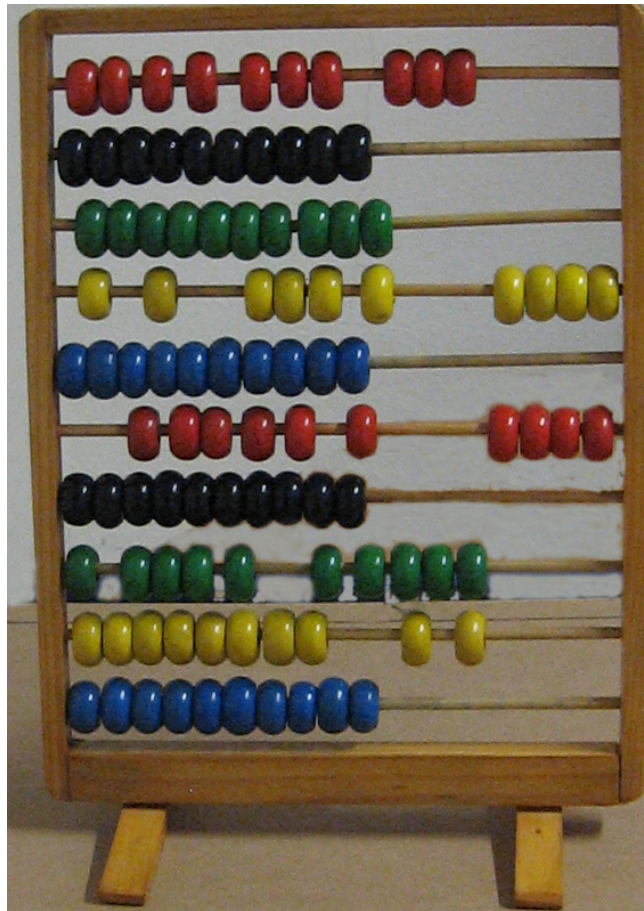


Figura 47. Pallottoliere didattico basato su numerazione decimale semplice.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (24,6×6×36,5)

Materiale: Legno e metallo

Epoca: Attuale

Origine: Italia

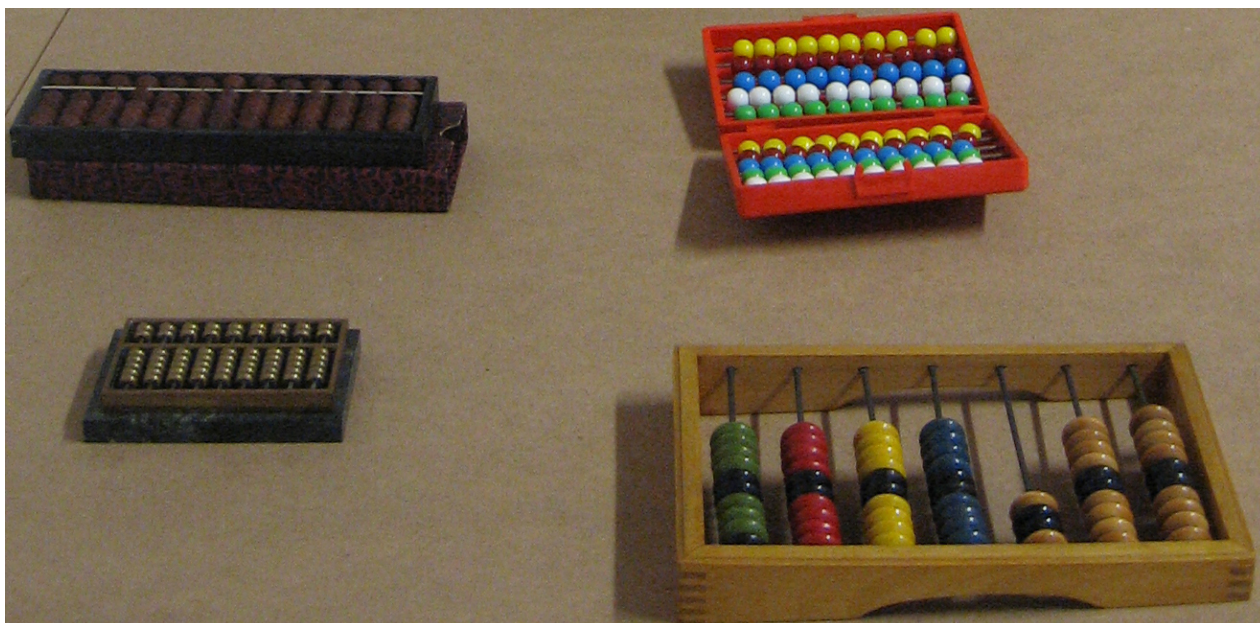


Figura 48. Soroban, suan pan e pallottolieri dal mondo, al giorno d'oggi. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso troviamo:

- Soroban giapponese (4 + 1) in legno.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (16,8×5,3×1,3)

- Pallottoliere a uso didattico, richiudibile in plastica.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (11,4×16,8×1,4)

- Suan pan in ottone con base in marmo.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (9×5,5×1,8)

- Schoty russo in legno.

Dimensioni: (Lungh. × Largh. × h) (in cm) (18×12×2)



Figura 49. Esemplici di gettoni per abaco da tavolo, conati da facoltosi banchieri e commercianti di varie città del Nord Europa.

Diametro medio: 3 cm

Materiale: bronzo

Epoca: XVI - XVII secolo



Figura 50. Particolare dei gettoni 6 e 10 della Figura 49.

## APPENDICE 1: CENNI AI SISTEMI DI NUMERAZIONE ASTRATTI

Si riportano alcuni risultati fondamentali sui sistemi di numerazione astratti, tratti da CAPELO, FERRARI, PADOVAN 1990, al quale si rimanda per approfondimenti.

**Definizione 1.** Si definisce *sistema di numerazione* un qualunque insieme infinito di numeri  $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$  tale che  $u_0 = 1$  e  $u_n < u_{n+1}$  ( $\forall n \geq 0$ ). Tale sistema si dice *semplice* se  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{N}$  ( $\forall n \geq 0$ ), *complesso* in caso contrario.

Sono semplici sia il nostro sistema di numerazione decimale in cui  $S = \{1, 10, 10^2, 10^3, \dots\}$ , sia quello su cui si basa l'abaco romano, dato che in tal caso  $S = \{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, \dots\}$ .

Un esempio di sistema complesso è il sistema di numerazione basato sulle decadi, in cui  $S = \{1, 10, 20, 30, \dots, n \cdot 10\}$ .

**Definizione 2.** Sia  $S = \{u_0, u_1, \dots\}$  un sistema di numerazione e sia  $N \geq 1$  un numero intero. Chiamiamo *rappresentazione* di  $N$  nel sistema  $S$  una  $(n + 1)$ -upla ordinata di numeri interi  $R = (q_0, \dots, q_n)$  tali che:

$$N = q_n u_n + \dots + q_0 u_0 \text{ e } q_n \neq 0$$

$$0 \leq q_i < \frac{u_{i+1}}{u_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Una rappresentazione che inoltre soddisfi la seguente condizione:

$$q_i u_i + \dots + q_0 u_0 < u_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

viene detta *rappresentazione fondamentale*.

### Teorema 1

Sia  $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$  un sistema di numerazione e  $N$  un numero intero. Allora:

1.  $N$  ammette una e una sola rappresentazione fondamentale in  $S$ .
2. Se  $S$  è semplice, ogni rappresentazione è una rappresentazione fondamentale (e pertanto ogni intero ammette una e una sola rappresentazione in ogni sistema semplice, la quale è una rappresentazione fondamentale).

**Definizione 3.** Chiamiamo *sistema di numerazione polinomiale* una coppia  $(b, C)$  dove  $b > 1$ , la *base* del sistema, è un numero intero e  $C = \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$  è l'insieme delle *cifre*. Chiamiamo *rappresentazione* di un numero intero  $N \geq 1$  la  $(n + 1)$ -pla ordinata  $(q_0, \dots, q_n)_b$  tale che

$$N = \sum_{i=0}^n q_i b^i, \quad \text{con } q_i \in C \text{ e } q_n \neq 0 \text{ (} n \geq 0 \text{)} \quad (*)$$

Osserviamo che i sistemi di numerazione polinomiali sono semplici.

I sistemi di numerazione polinomiali sono anche detti *sistemi di numerazione con base di rappresentazione*, mentre i sistemi di numerazione semplici di tipo generale sono anche detti anche *a base variabile* o *a base mista*.

Adottando un metodo di rappresentazione posizionale con zero, si può identificare la rappresentazione  $(q_0, \dots, q_n)_b$  con l'*allineamento*  $(q_n \dots q_0)_b$ . I numeri interi negativi si rappresentano facendo precedere dal segno “-” (meno) le rappresentazioni dei loro opposti; lo “zero” è rappresentato in ogni sistema dalla cifra 0; anche la rappresentazione di “uno” non dipende dal sistema scelto.

Vale allora il seguente teorema, analogo al precedente, che afferma l'unicità di rappresentazione di un qualsiasi numero intero in un sistema polinomiale arbitrario.

## **Teorema 2**

Ogni numero intero  $N \geq 1$  ammette una e una sola rappresentazione in ogni sistema di numerazione polinomiale  $(b, C)$ , cioè ogni numero intero  $N \geq 1$  può scriversi in modo unico nella forma (\*).

## APPENDICE 2: L'ABACO "OTTIMALE" E IL NUMERO DI NEPERO

Ci si può chiedere quale sia, in linea teorica, l'abaco che richieda il minimo numero di palline per rappresentare un numero naturale di ordine massimo fissato.

Si può dimostrare che un tale abaco "minimale", mantenendo la scrittura del numero in base 10, si otterrebbe o con un sistema binario, nel quale ciascuna pallina rappresenta una potenza di 2, da  $2^0$  a  $2^3$ , o con un sistema ibrido ternario-binario, in cui le due palline a livello inferiore valgono 1 e le due superiori rispettivamente 3 e 6. In questi casi, tuttavia, sono necessarie più barrette divisorie come si evince dalle Figure 51 e 52, in cui si mostra come rappresentare le cifre da 0 a 9 con i due particolari tipi di abaco.

Non è casuale che tale esempio di abaco ternario-binario necessiti del minimo numero di palline: infatti questo è un caso speciale di tutta una famiglia di abachi ternario-binari, che hanno la proprietà di minimizzare il numero di palline necessarie a rappresentare i primi  $n$  numeri interi.

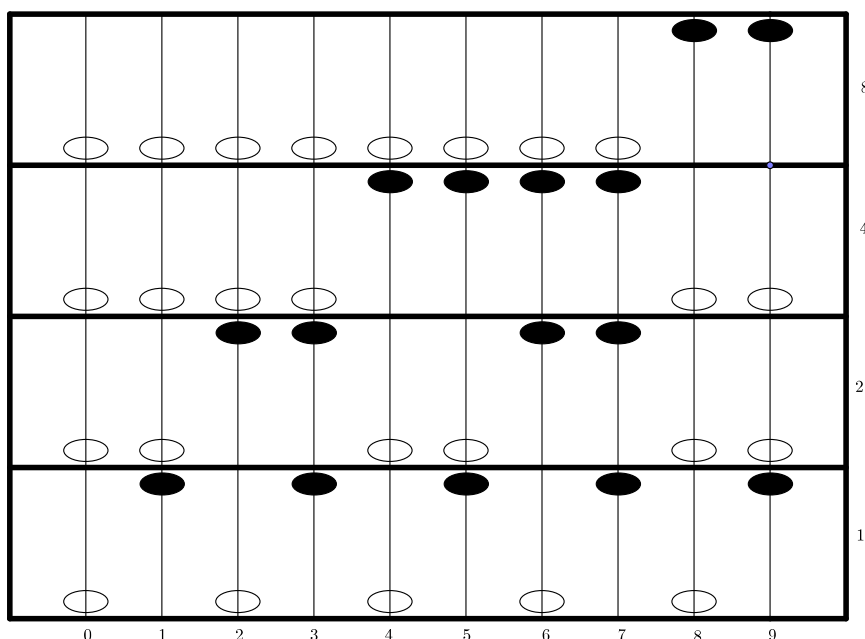


Figura 51. Rappresentazione delle cifre da 0 a 9 con l'abaco binario (scrittura decimale).



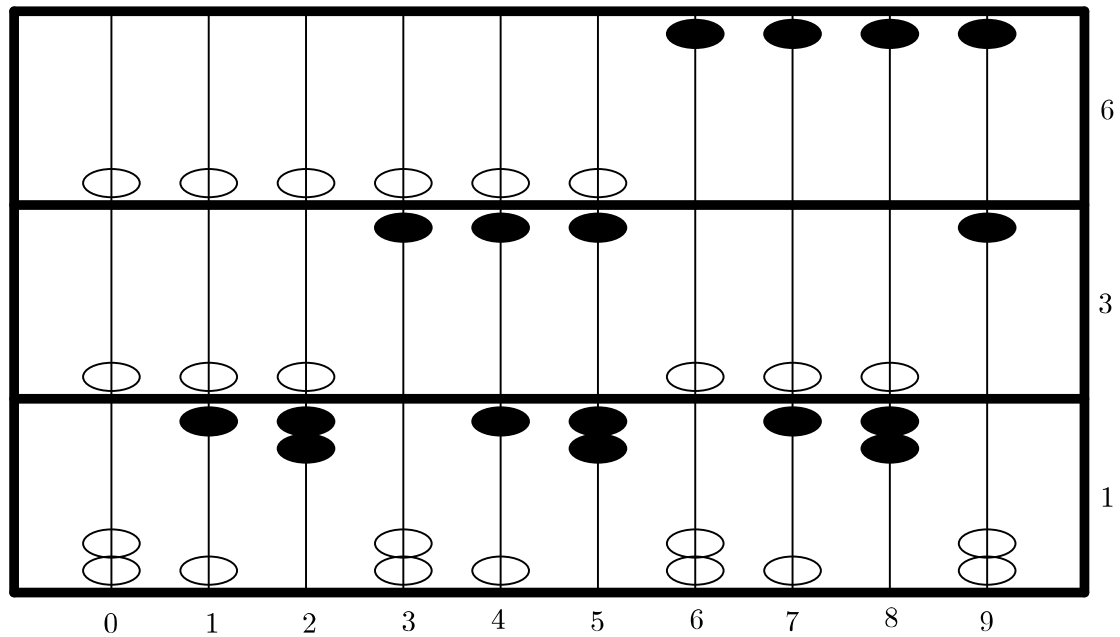


Figura 52. Rappresentazione delle cifre da 0 a 9 con l’abaco binario-ternario (scrittura decimale).

In questa appendice mostreremo come vi sia un collegamento tra l’abaco in un certo senso “ottimale”, ossia quello con meno palline, e il numero di Nepero, cioè  $e$ . Osserviamo innanzitutto che, fissato un numero naturale  $n > 1$  e un sistema di numerazione in base  $b$ , il numero di cifre  $c(b, n)$  necessario a rappresentare  $n$  in tale base è pari a:

$$c(b, n) = \lfloor \log_b n \rfloor + 1 \approx \log_b n \tag{1}$$

mentre le cifre che si usano in base  $b$  sono  $b$ .

L’abaco ottimale nel senso esposto sopra si può ottenere minimizzando la funzione :

$$f(b) = b \log_b n = b \frac{\ln n}{\ln b}$$

con  $n$  come parametro.

Notiamo inoltre come  $f(b)$  sia pari al prodotto del numero di cifre che si utilizzano in base  $b$  e il numero di cifre usato per rappresentare  $n$  in tale base e ciò come conseguenza della (1).

Si osserva che:

$$f'(b) = \frac{\ln n}{\ln b} + b \cdot \ln n \cdot \frac{-\frac{1}{b}}{(\ln b)^2} = \frac{\ln n}{\ln b} - \frac{(\ln n)}{(\ln b)^2} = \frac{\ln n}{\ln b} \left(1 - \frac{1}{\ln b}\right)$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln n}{\ln b} = 0 \vee \frac{1}{\ln b} = 1 \Leftrightarrow \frac{\ln n}{\ln b} = 0 \vee \ln b = 1 \Leftrightarrow \ln n = 0 \vee b = e$$

Solo la seconda soluzione è indipendente da  $n$  e in questo modo si dimostra che la base in cui andrebbe costruito tale abaco “ideale” è la base  $e$ .

Infatti, calcolando la derivata seconda otteniamo:

$$f''(b) = \frac{d}{db} \left[ \ln n \left( \frac{1}{\ln b} - \frac{1}{(\ln b)^2} \right) \right] = \ln n \left[ -\frac{1}{b(\ln b)^2} + \frac{2}{b(\ln b)^3} \right]$$

$$= \frac{\ln n}{b(\ln b)^3} (2 - \ln b)$$

che, valutata in  $b = e$ , dà:

$$f''(e) = \frac{\ln n}{e} > 0$$

Quindi  $e$  è punto di minimo per la funzione  $f$ .

Il numero di Nepero tuttavia non è un intero, quindi si pone il problema di costruire un abaco a base variabile, tale che, fissato  $k$  il più grande numero rappresentabile, sia minimo il numero di palline da utilizzare per la sua costruzione.

Basterà allora scegliere un sistema di numerazione  $S = \{s_1, \dots, s_n, \dots\}$  i cui elementi si ottengono con il seguente algoritmo scritto in pseudocodice:

```

n := 1
sn := 2
WHILE sn < k
  IF  $\sqrt[n]{s_n} < e$ 
    sn+1 = sn · 3
  ELSE sn+1 = sn · 2
  END IF
n := n + 1
END WHILE
    
```

L'idea di fondo di questo algoritmo è quella di cercare due numeri interi positivi,  $a$  e  $b$  di somma minimale, tali che  $3^a \cdot 2^b > k$  e  $(3^a \cdot 2^b)^{\frac{1}{a+b}}$  sia la migliore approssimazione possibile di  $e$ .

Cerchiamo soluzioni approssimate (con  $a$  e  $b$  interi) al sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \begin{cases} (3^{c-b} \cdot 2^b)^{\frac{1}{c}} = e \\ a + b = c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^{-\frac{b}{c}} \cdot 2^{\frac{b}{c}}\right) = \frac{e}{3} \\ a + b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{b}{c}} = \frac{e}{3} \\ a + b = c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{c}(\ln 2 - \ln 3) = 1 - \ln 3 \\ a + b = c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a+b} = \frac{\ln 3 - 1}{\ln 3 - \ln 2} \\ a + b = c \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3 - 1} \\ a + b = c \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3 - 1} - 1 \\ a + b = c \end{cases} \Leftrightarrow \\ \frac{a}{b} = \frac{1 - \ln 2}{\ln 3 - 1} & \end{aligned}$$

Vediamo un esempio con  $k = 100.000$  ( $e \approx 2,718281828$ ):

$n$	$S_n$	$\sqrt[n]{S_n}$	$S_{n+1}$
1	2	2	$2 \cdot 3 = 6$
2	6	$\sqrt{6} \approx 2,449$	$6 \cdot 3 = 18$
3	18	$\sqrt[3]{18} \approx 2,621$	$18 \cdot 3 = 54$
4	54	$\sqrt[4]{54} \approx 2,711$	$54 \cdot 3 = 162$
5	162	$\sqrt[5]{162} \approx 2,766$	$162 \cdot 2 = 324$
6	324	$\sqrt[6]{324} \approx 2,621$	$324 \cdot 3 = 972$
7	972	$\sqrt[7]{972} \approx 2,672$	$972 \cdot 3 = 2916$
8	2916	$\sqrt[8]{2916} \approx 2,711$	$2916 \cdot 3 = 8748$
9	8748	$\sqrt[9]{8748} \approx 2,742$	$8748 \cdot 2 = 17496$
10	17496	$\sqrt[10]{17496} \approx 2,656$	$17496 \cdot 3 = 52488$
11	52488	$\sqrt[11]{52488} \approx 2,686$	$52488 \cdot 3 = 157464$

Notiamo, per concludere, che un risultato simile è stato ottenuto in un ambito molto diverso, cioè quello della complessità circuitale. Si nota infatti che, fissata la base  $b$  e la lunghezza  $l$  del massimo numero che si vuole rappresentare, l'andamento di  $b \cdot l$ , fissato che sia  $b^l$ , presenta proprio un minimo per  $b = e$ , in analogia con quanto visto nel caso dell'abaco "ottimale"<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Cfr. HENIN 2007.

## BIBLIOGRAFIA

BOMBELLI R.

1579, *L'algebra*, Bologna, Rossi.

BOTTAZZINI U., FREGUGLIA P., TOTI RIGATELLI L.

1992, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni.

BOYER C. B.

1968, *A history of mathematics*. Traduzione italiana *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 2002.

BURTON D. M.

2007, *The history of mathematics: An introduction*, Boston, McGraw-Hill.

CAPELO A.-C., FERRARI M., PADOVAN G.

1990, *I sistemi di numerazione*, Padova, Tipo-lito poligrafica moderna.

DEVLIN K.

2013, *I numeri magici di Fibonacci. L'avventurosa scoperta che cambiò la storia della matematica*, Milano, BUR.

GOBBI L.

2012, *Storia dell'abaco: una introduzione*, Tesi di laurea, Università di Bologna, Corso di Studio in Matematica [L-DM270], Anno Accademico 2010-2011 (data della discussione: 16 marzo 2012).

HENIN S.

2007, *Perché i calcolatori sono binari?*, «Mondo Digitale», 2, pp. 50-57.

IFRAH G.

1981, *Histoire universelle des chiffres*. Traduzione italiana *Storia universale dei numeri*, Milano, Mondadori, 1984.

KLINE M.

1972, *Mathematical thought from ancient to modern times*. Traduzione italiana *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, 2010.

KOJIMA T.

1954, *The Japanese abacus: Its use and theory*, Tokyo, Tuttle.

PERCEVAL MAXWELL R.

1971, *How to use the Chinese abacus*, Kings Langley, R. P. Maxwell.