



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE**

Sede Amministrativa della Scuola di Dottorato di Ricerca

**XXII CICLO DELLA SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN  
INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE**

***INDIRIZZO: INGEGNERIA DELLE STRUTTURE***

***MODELLI DI DANNO E PLASTICITÀ PER L'ANALISI DI  
ELEMENTI STRUTTURALI IN MURATURA***

Settore Scientifico Disciplinare ICAR/09

**DOTTORANDA**

***DOTT. ING. ELISA MONTI DI SOPRA***

**RESPONSABILE DOTTORATO DI RICERCA**

***PROF. IGINIO MARSON***

**RELATORE**

***PROF. ING. SALVATORE NOÈ***

***UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE***

**CORRELATORE**

***PROF.SSA FLAVIA GENEL***

***UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE***

**ANNO ACCADEMICO 2008/2009**



---

*Si ringrazia per la collaborazione il prof. Alfonso Nappi, Università degli Studi di Trieste*



# INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>	<b>9</b>
<b>CAPITOLO 1 - INTRODUZIONE AL MATERIALE MURATURA</b>	<b>13</b>
1.1 ASPETTI GENERALI DELLA MURATURA	13
1.2 LA MURATURA ATTRAVERSO I SECOLI	15
1.3 LE UNITÀ	17
1.3.1 La pietra	17
1.3.2 Il mattone	19
1.4 LA MALTA	21
1.5 LE TECNICHE DI ASSEMBLAGGIO	22
1.6 LE PROPRIETÀ MECCANICHE	23
1.6.1 Le prove sperimentali	23
1.6.2 Le proprietà meccaniche dei componenti	25
1.6.3 Le proprietà meccaniche globali	26
1.6.4 Il collasso nelle strutture in muratura	29
1.6.4.1 Carico monoassiale	29
1.6.4.2 Stato di tensione biassiale	30
<b>CAPITOLO 2 - MODELLAZIONE DELLE STRUTTURE IN MURATURA</b>	<b>35</b>
2.1 LA SCALA DI MODELLAZIONE	35
2.1.1 La micromodellazione dettagliata	36
2.1.2 La micromodellazione semplificata	40
2.1.3 La macromodellazione	41
2.2 LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE	42
2.3 IL LEGAME COSTITUTIVO	44
2.3.1 I legami NRT	45
2.3.2 I legami plastici	45
2.3.2.1 Il criterio di Mohr-Coulomb	46
2.3.2.2 Il criterio di Drucker-Prager	47
2.3.3 I legami di danno	48
2.3.3.1 Il criterio di Luciano-Sacco	50
2.3.3.2 Il criterio di Gambarotta-Lagomarsino	50
2.3.3.3 Il criterio di Berto	52
2.4 CARATTERISTICHE DEI MODELLI DI DANNO E PLASTICITÀ	54

<b>CAPITOLO 3 - IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ISOTROPO</b>	<b>57</b>
3.1 LA SCELTA DEL MODELLO	57
3.2 ISOTROPIA, ORTOTROPIA E ANISOTROPIA	58
3.3 IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ISOTROPO	59
<b>CAPITOLO 4 - VALIDAZIONE DEL MODELLO ISOTROPO</b>	<b>71</b>
4.1. LE PROVE BIASSIALI DI PAGE	71
4.2. LE PROVE A TAGLIO E COMPRESSIONE GANZ-THÜRLIMANN	75
4.2.1 Caratteristiche dei pannelli	75
4.2.2 Azioni sui pannelli e risultati delle prove sperimentali	76
4.3 DESCRIZIONE DEL MODELLO NUMERICO	79
4.3.1 La geometria	79
4.3.2 I carichi	80
4.3.3 Le proprietà meccaniche	81
4.4 RISULTATI DELL'ANALISI NUMERICA	85
4.4.1 Pannello W1	85
4.4.2 Pannello W2	87
4.4.3 Pannello W4	88
<b>CAPITOLO 5 - PROVE SPERIMENTALI SU FASCIA DI PIANO</b>	<b>91</b>
5.1 INTRODUZIONE ALLE PROVE SPERIMENTALI	91
5.2 I MATERIALI E LA TESSITURA DEI PANNELLI	92
5.3 I CARICHI APPLICATI E LA STRUMENTAZIONE	93
5.4 PROVA MS1	100
5.4.1 L'esecuzione della prova MS1	101
5.4.2 I risultati della prova MS1	102
5.5 PROVA MS1R	105
5.5.1 L'esecuzione della prova MS1r	106
5.5.2 I risultati della prova MS1r	107
5.6 PROVA MS2	109
5.6.1 L'esecuzione della prova MS2	110
5.6.2 I risultati della prova MS2	111
5.7 PROVA MS2R	114
5.7.1 L'esecuzione della prova MS2r	115
5.7.2 I risultati della prova MS2r	116
5.8 DETERMINAZIONE DELLE PROPRIETÀ MECCANICHE DEI PROVINI	118

5.8.1 Le prove a compressione	118
5.8.2 Le prove a taglio	120
<b>CAPITOLO 6 - ANALISI NUMERICA DELLA PROVE SU FASCIA DI PIANO</b>	<b>123</b>
6.1 DESCRIZIONE DEI MODELLI NUMERICI	123
6.1.1 La geometria	123
6.1.2 I carichi	126
6.1.3 Le proprietà meccaniche	127
6.2 RISULTATI DELL'ANALISI NUMERICA	131
6.2.1 Prova MS1	131
6.2.2 Prova MS1r	134
6.2.3 Prova MS2	136
6.2.4 Prova MS2r	138
<b>CAPITOLO 7- RISULTATI DELLE INDAGINI PARAMETRICHE</b>	<b>141</b>
7.1 PARAMETRI NON NOTI DALLE PROVE SPERIMENTALI	141
7.2 IL MODULO DI YOUNG	142
7.3 LA RESISTENZA A TRAZIONE E L'ENERGIA DI FRATTURA	144
7.4 L'ANGOLO DI DILATANZA NELLE PROVE MS	148
7.5 LA CARATTERIZZAZIONE DEL MATERIALE	150
<b>CAPITOLO 8 - LE RAGIONI DELLA DIVERGENZA TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI</b>	<b>151</b>
8.1 I RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI	151
8.2 LE DIFFERENZE	151
8.3 I DIFETTI DELLE PROVE SPERIMENTALI	152
8.3.1 I difetti del materiale: prove MS1 e MS3	152
8.3.1.1 Analisi al microscopio stereoscopico	155
8.3.1.2 Analisi con fluorescenza ai raggi X	157
8.3.1.3 Analisi al microscopio elettronico SEM-EDAX	158
8.3.1.4 Analisi al microscopio stereoscopico per la prova MS3	163
8.3.2 I difetti geometrici: prove MS2 e MS3	166
8.4 I DIFETTI DEL MODELLO NUMERICO	167
8.4.1 L'angolo di dilatanza	168
8.4.2 Il degrado della rigidità	170
8.4.3 Il danneggiamento	171
8.5 CONCLUSIONI	171

<b>CAPITOLO 9 - IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ANISOTROPO</b>	<b>173</b>
<b>CAPITOLO 10 - IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ORTOTROPO</b>	<b>185</b>
10.1 CONSIDERAZIONI SUI MODELLI PRECEDENTI	185
10.2 ORTOTROPIA E DANNO	186
10.3 ANGOLO DI DILATANZA E SCORRIMENTO NON ASSOCIATO	191
10.4 SVILUPPI FUTURI DEL MODELLO	196
<b>CONCLUSIONI</b>	<b>197</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>199</b>



## INTRODUZIONE

La muratura è uno dei materiali da costruzione più antichi, impiegato con successo fin dall'alba della civiltà. Pur essendo stato protagonista sulla scena dell'edilizia fino agli inizi del XX secolo, è solo negli ultimi anni che si è sviluppato un particolare interesse per lo studio del suo comportamento quando sottoposta a sollecitazioni. La sua natura composita, data dall'unione di unità e malta, rende la sua risposta ai carichi agenti piuttosto complessa: non si tratta, infatti, di una media fra il comportamento delle singole componenti, ma di una complessa interazione fra le due, tanto che due materiali isotropi e omogenei formano un composito ortotropo.

Con lo sviluppo in questi ultimi anni dell'analisi numerica delle strutture tramite programmi agli elementi finiti, è diventata sempre più pressante la necessità di conoscere il comportamento in campo non lineare del materiale muratura: il problema è dato non solo dalla complessa interazione malta-unità, ma anche dal fatto che il termine muratura è molto vasto e comprende una gamma di combinazioni diverse per tipo di unità impiegata (laterizio, blocco in calcestruzzo, pietra, silicato di calcio,...), per il tipo di malta (di calce, di cemento), per la tessitura (ovvero per il modo in cui malta e unità sono assemblati).

Per formulare quindi dei buoni modelli costitutivi, ovvero per esprimere correttamente la relazione tra le tensioni e le deformazioni in particolare al di là del limite elastico, è indispensabile prima di tutto conoscere bene il comportamento reale del materiale: ciò è possibile solamente attraverso una campagna di prove sperimentali a spostamento imposto, finalizzata alla determinazione della risposta di campioni, diversi per natura e dimensione, all'azione di varie sollecitazioni (compressione, taglio, trazione, carichi dinamici...). Le curve sperimentali forza-spostamento ottenute diventano così dei punti di riferimento per la formulazione teorica di un appropriato legame costitutivo, dove l'intento è quello di avvicinare il diagramma teorico, per quanto possibile, a quello reale, tenendo però in considerazione anche le esigenze di semplificazione che non rendano eccessivamente onerose a livello computazionale le analisi numeriche. Il modello costitutivo ideale, pertanto, è un buon compromesso tra le esigenze di accuratezza e semplificazione.

Le formulazioni realizzate per la descrizione del comportamento del materiale muratura sono il risultato di due modi fondamentali di considerare il composito: il primo, più oneroso dal punto di vista computazionale ma più preciso per quanto riguarda la determinazione del modo di rottura dell'elemento, è il cosiddetto approccio micromeccanico, il quale prevede che malta e unità siano considerate due entità indipendenti, separate da elementi di interfaccia, attraverso i quali si trasmettono le tensioni al variare della sollecitazione. Si tratta di un tipo di modellazione che tuttavia non è adatta a descrivere il comportamento strutturale di elementi di grandi dimensioni, ma solamente a definire la risposta locale del materiale. Per poter analizzare strutture vere e proprie è necessario seguire un altro tipo di approccio, la macromodellazione, in cui unità, malta ed elementi di interfaccia si perdono in un unico materiale continuo, a cui vengono assegnate delle proprietà meccaniche globali, determinate o attraverso una tecnica di

omogeneizzazione (che permette di passare dal materiale composito al continuo equivalente) oppure attraverso delle prove sperimentali su muretti (e non sulle singole componenti).

E' proprio questo l'approccio seguito all'interno del lavoro che verrà presentato nei capitoli successivi: l'intento è quello di analizzare elementi strutturali le cui dimensioni sono già piuttosto grandi e quindi tali da rendere difficile l'applicazione di un micromodello. Il tipo di macromodellazione che verrà descritta vede l'applicazione di proprietà meccaniche globali del materiale determinate a partire da prove sperimentali, senza l'utilizzo di alcuna tecnica di omogeneizzazione.

In particolare, sarà approfondita la conoscenza di una tipologia di legami costitutivi, i modelli di danno e plasticità, che consentono di unire i vantaggi offerti dalla teoria della plasticità e dalla meccanica del danno in un'unica formulazione: così è possibile considerare la deformazione irreversibile che si forma nel materiale una volta superato il campo elastico (teoria della plasticità) e il degrado nella rigidità conseguente alla formazione e allo sviluppo del danneggiamento nel materiale (meccanica del danno nel continuo).

Poiché si tratta di una strategia di modellazione formulata inizialmente per descrivere il comportamento del calcestruzzo, per valutarne l'adeguatezza quando applicata al materiale muratura è stato svolto uno studio nel presente lavoro con la metodologia che verrà descritta ora.

Prima di tutto, viene introdotto nel capitolo 1 il materiale muratura, descrivendone il suo utilizzo nel corso dei secoli, la tipologia di unità e malta che sono state e che vengono attualmente utilizzate e le relative tecniche di assemblaggio. Si passano quindi in rassegna le diverse prove sperimentali atte a caratterizzare le proprietà meccaniche sia delle singole componenti che del composito, a partire quindi da semplici prove a compressione su unità, malta e muretti, fino alle più complesse prove su pannelli di dimensioni reali. Si presenterà quindi il meccanismo di interazione tra malta e unità, nonché i diversi modi di rottura che si riscontrano nelle prove sperimentali dovute proprio alle diverse caratteristiche di malta e unità e alla modalità con cui vengono trasmesse le tensioni dall'una all'altra.

Nel capitolo 2 si trattano le diverse strategie di modellazione della muratura, a partire dalla scala di modellazione (micro o macromodello), alle caratteristiche geometriche di un modello, fino alla descrizione dei legami costitutivi utilizzati, da quelli che applicano forti semplificazioni a quelli articolati, fino ad arrivare ad introdurre i modelli di danno e plasticità.

E' nel capitolo 3 che si descrive nel dettaglio un modello di danno e plasticità, quello isotropo implementato nel programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1), basato sulla teoria di Lubliner (1989), comprensiva delle successive modifiche di Lee & Fenves (1998).

Nel capitolo 4 viene verificata la validità del modello di danno e plasticità isotropo applicato all'ambito della muratura: vengono descritte le analisi numeriche svolte con il programma ABAQUS (v.6.6.1) riguardanti prove a taglio su pannelli, di cui sono note le proprietà meccaniche e i diagrammi sperimentali taglio-spostamento grazie alla campagna di test realizzati dai professori Ganz e Thürlimann nel corso degli anni '80 presso lo *Swiss Federal Institute of Technology* (ETH) di Zurigo.

La buona risposta ottenuta dalle curve numeriche con questi pannelli, su cui è stato applicato un carico monotono, ha spinto ad estendere l'utilizzo del modello anche a elementi strutturali più complessi, come le fasce di piano, sollecitate questa volta a carico ciclico (sempre a spostamento imposto). Il capitolo 5, pertanto, descrive le prove sperimentali svolte presso il Laboratorio di Prove Materiali e Strutture del

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università degli Studi di Trieste su fascia di piano in muratura. I provini, realizzati in scala 1:1, sono stati due: il primo, a cui è stato posto un architrave ligneo, rinforzato dopo una prima fase di prova (che già porta il materiale a rottura) con una coppia di barre in acciaio; il secondo, dotato di piattabanda in laterizio, rinforzato con due profili ad "L" in seguito alla prima fase, in analogia a quanto svolto per il primo provino. Vengono descritte anche le prove su muretti fatte per caratterizzare le proprietà meccaniche del materiale, da utilizzare poi nei modelli numerici.

Nel capitolo 6 vengono presentate le strategie di modellazione adottate per simulare il comportamento dell'elemento strutturale fascia di piano nel programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1). Quindi si descrivono i risultati per ognuno dei quattro modelli realizzati, corrispondenti a ciascuna delle fasi di analisi svolte in laboratorio.

Nel capitolo 7 si descrive la modalità con la quale sono determinate alcune proprietà meccaniche non disponibili dalle prove su muretti svolte parallelamente a quelle su fascia di piano, nonché la ragione di alcune scelte fatte nell'inserimento in input di parametri appartenenti al modello costitutivo di danno e plasticità.

Nel capitolo 8, invece, vengono analizzate le ragioni delle differenze riscontrate tra i diagrammi taglio-spostamento ottenuti dalle prove sperimentali e quelle teoriche: si illustrano quindi le incertezze derivanti dalle prove sperimentali (omogeneità del materiale, precisione nella realizzazione dell'opera,...) e quelle dovute al modello numerico (isotropia, utilizzo di parametri costanti che nella realtà non lo sono, errori numerici,...). Si evidenzia così anche le necessità di modifica del modello costitutivo per descrivere meglio la risposta della muratura alle sollecitazioni.

Nel capitolo 9 si riporta un esempio di modello di danno e plasticità anisotropo ottenuto estendendo la precedente formulazione isotropa. Tale modello, definito da Voyiadjis et. al (2007), mostra la possibilità di considerare la diversa risposta del materiale al variare della direzione considerata, nonché la possibilità di trattare lo sviluppo del danno e della deformazione irreversibile come parallele ma anche indipendenti l'uno dall'altra.

Nel capitolo 10 si suggerisce la possibilità di formulare un modello di danno e plasticità ortotropo, a semplificazione di quello presentato nel capitolo 9 e sempre come estensione di quello descritto nel capitolo 3, in modo da tenere in considerazione tutte le esigenze relative ad una corretta descrizione del materiale muratura riscontrate e analizzate nel corso di questo lavoro.



# CAPITOLO 1

## INTRODUZIONE AL MATERIALE MURATURA

### 1.1 ASPETTI GENERALI DELLA MURATURA

Negli ultimi decenni l'interesse per le strutture in muratura è notevolmente aumentato, sia per quanto riguarda le nuove edificazioni, sia per le problematiche connesse con il recupero e la conservazione dell'esistente. Particolare incentivo allo studio delle costruzioni in muratura è stato dato anche dalla serie di eventi sismici che hanno colpito i paesi dell'area mediterranea, causando il crollo di numerosi monumenti e costruzioni e richiedendo allo stesso tempo interventi di valutazione della sicurezza e di consolidamento strutturale degli edifici danneggiati.



**FIGURA 1: MURATURA DANNEGGIATA DAL SISMA**

Non sono tuttavia solo gli eventi catastrofici a causare la rovina delle strutture in muratura, ma anche l'accumulo del danno nel tempo, dovuto a vari fattori quali le vibrazioni del traffico, il vento, i carichi termici, i movimenti del terreno: causando il degrado della resistenza del materiale, mettono a rischio la nostra eredità architettonica.

Se paragonato ad altri settori della ricerca come il calcestruzzo, la meccanica delle rocce, dei suoli e dei compositi, è mancata a lungo nell'ambito della muratura una vera e propria esperienza (che ora si va consolidando), sia nella realizzazione delle prove sperimentali e relativa valutazione dei risultati, sia nelle tecniche di analisi più avanzate, come la modellazione numerica delle strutture. Tutto, poi, si complica quando si studiano costruzioni storiche, ricche di incertezze legate alla loro evoluzione nel tempo (modificazioni apportate alla struttura), alla geometria e ai materiali impiegati all'interno degli elementi

strutturali, alle azioni che agiscono o hanno agito e all'evoluzione del danneggiamento ad esse dovuto (quasi sempre presente nelle costruzioni antiche), per non parlare poi delle tecniche costruttive che variano non solo da un periodo all'altro, ma anche da un luogo all'altro.

E' proprio lo **studio del materiale e del suo comportamento sotto l'azione dei carichi**, ad avere particolare attenzione nell'ambito delle ricerche sulla muratura: composta da unità collegate fra loro da giunti di malta orizzontali continui e verticali discontinui, ciascuna componente può essere di varia natura e può essere assemblata in molti modi differenti, tanto che quindi il termine "muratura" racchiude in sé una notevole quantità di tipologie costruttive, diverse fra loro per materiali, tessitura e dimensioni dei blocchi. Le componenti, unità e malta, influenzano il comportamento globale: la muratura presenta così distinte proprietà direzionali, dovute soprattutto ai giunti di malta orizzontali che costituiscono dei veri e propri piani di debolezza.

Nonostante la semplicità del materiale dal punto di vista realizzativo (semplice sovrapposizione di unità, con o senza malta), la descrizione della muratura nell'ambito della modellazione numerica è tutt'altro che facile a causa del comportamento fortemente non lineare.



**FIGURA 2: MURATURA**

Non si può pensare, quindi, di sviluppare modelli numerici accurati senza un'approfondita conoscenza del materiale, che si può ottenere soltanto attraverso un numero significativo di prove sperimentali, sia su larga scala che su piccoli campioni di muratura, fino alle prove sulle singole componenti. In un momento successivo, poi, i risultati ottenuti possono esser posti in confronto con quelli derivanti dalle analisi numeriche. Il comportamento dei componenti permette inoltre di conoscere le modalità di danno locale dovute a meccanismi interni, al fine di modellare le strutture murarie nel modo più accurato possibile. Si può giungere in questo modo ad una corretta interpretazione del danno osservato e della previsione delle modalità di collasso.

Pertanto, l'obiettivo finale della modellazione delle strutture, non solo nell'ambito della muratura, è quello di creare degli strumenti numericamente robusti, in grado di predirne il comportamento a partire dal campo elastico, passando attraverso la fase fessurativa, fino alla completa perdita di resistenza, come verrà illustrato nel presente lavoro.

## 1.2 LA MURATURA ATTRAVERSO I SECOLI

La muratura è il più antico materiale da costruzione, utilizzato con successo fin da età remote. Il suo impiego, probabilmente, ebbe inizio con la sostituzione graduale delle fragili capanne di fango e legno, costruite all'alba della civiltà, con solide case in pietra. E' il vicino oriente ad offrirci i primi esempi di abitazioni permanenti, risalenti al 9000-8000 a.C., ritrovate nella zona del Lago Hulen in Israele: si trattava di costruzioni in muratura in pietra a secco, circolari e parzialmente interrate.

La tecnica delle costruzioni in pietra si è poi evoluta e il materiale è stato impiegato anche nella realizzazione di monumenti e luoghi di culto, giunti fino ai nostri giorni: a questo proposito si ricorda ad esempio l'architettura egizia, con le sue faraoniche piramidi (ca 2800-2000 a.C.) e i maestosi templi.



**FIGURA 3: LE PIRAMIDI, EGITTO**

E' però con i romani che si padroneggia completamente la tecnica delle costruzioni in muratura, che non sono più soltanto edifici ad uso abitativo, ma anche vere e proprie opere civili: tra l'anno zero e il 1200 d.C., arco di tempo che comprende anche il periodo Romanico, si ha così una produzione massiccia di archi, colonne, templi, chiese, ponti e acquedotti.



**FIGURA 4: PONT DU GARD, PROVENZA**

Dal punto di vista della teoria, il periodo storico finora descritto assiste alla costruzione di opere in muratura **senza una vera e propria progettazione strutturale**: è la conoscenza empirica acquisita nel tempo a fornire la tradizione costruttiva. Un esempio in questo senso è l'opera dell'architetto romano Vitruvio (ca 25 a.C.), il "De Architectura": nei suoi dieci libri egli parla abbondantemente della differenza fra i diversi tipi di pietra o di legno, si dilunga nella descrizione delle colonne e delle loro giuste proporzioni, ma non viene detto nulla dal punto di vista strutturale.

La coscienza che l'esperienza acquisita è preziosa emerge soprattutto a partire dal Medioevo, dove tutti i segreti relativi alle tecniche costruttive vengono tramandati all'interno delle corporazioni. In questo periodo vengono realizzate delle costruzioni piuttosto massicce (si pensi all'architettura romanica), ma l'esperienza tramandata fiorisce nel periodo Gotico (ca 1200-1600 d.C.), dove la pietra viene modellata con arte all'interno delle cattedrali sotto forma di eleganti costoloni e volte, a dimostrazione di una certa comprensione dell'azione delle forze sulle strutture. Quanto però conoscessero del comportamento strutturale gli antichi tagliapietre è una domanda senza una risposta definitiva. Sicuramente nella tecnica utilizzata sussisteva una stretta correlazione tra la proporzione e la struttura: si adottava l'idea che se un edificio era correttamente proporzionato, era anche strutturalmente corretto. Non si può però parlare ancora di analisi strutturale.



FIGURA 5: LA CATTEDRALE DI CHARTRES

E' soltanto a partire dal Rinascimento che si ricerca anche la spiegazione teorica dei fenomeni: Leonardo da Vinci, ad esempio, è stato il primo ad affermare che la spinta seguiva una percorso che



rimaneva all'interno dell'arco. Il primo libro di statica, tuttavia, compare ben dopo Leonardo Da Vinci, con Simon Stevinus nel 1586, tradotto in latino nel 1608, opera alla base della statica grafica che si diffuse nel XIX secolo, ovvero della tecnica di risoluzione di problemi strutturali attraverso disegni.

La muratura, pertanto, ha occupato il posto da protagonista nei materiali da costruzione fino all'avvento, avvenuto a metà del XIX secolo, del ferro, utilizzato nella produzione di travi e colonne. Tuttavia è con il calcestruzzo, in particolare con l'introduzione delle regole per la progettazione delle strutture con questo nuovo materiale brevettato da W.B. Wilkinson nel 1854, che la muratura viene definitivamente messa da parte. Siamo, quindi, agli inizi del XX secolo quando si scopre nel calcestruzzo armato un materiale poco costoso, di facile produzione, durevole e forte. La muratura cominciò così ad essere ritenuta costosa, fragile, non in grado di resistere ad un sisma, dipendente da un manodopera non affidabile e di qualità non nota.

Cerchiamo dunque di conoscere meglio questo materiale composito, che dopo secoli di storia dell'architettura trova ancora ampia applicazione nell'attuale mercato dell'edilizia, per la varietà di combinazioni possibili dei suoi componenti, unità e malta.

### 1.3 LE UNITÀ

Le unità impiegate per la realizzazione delle strutture in muratura possono essere prodotte a partire da diversi materiali: argilla (cruda o cotta), silicati di calcio, calcestruzzo e pietra. Nell'ambito degli edifici storici, come accennato in precedenza, argilla e pietra per secoli hanno costituito l'unica fonte di materiali da costruzione, impiegata sia nelle costruzioni monumentali, che nelle più piccole abitazioni.

#### 1.3.1 LA PIETRA



FIGURA 6: LA STORICA FORTEZZA DI SACSABUAMAN, CUZCO, PERU'

L'utilizzo storico della **pietra** può essere tracciato indietro nel tempo fino all'epoca delle prime civiltà, dove veniva impiegata soprattutto per la realizzazione di edifici monumentali, come templi dedicati agli dei, fortificazioni massicce, piramidi, ecc.

Attualmente, i limiti nell'utilizzo della pietra come materiale da costruzione sono strettamente connessi con il considerevole peso delle strutture murarie e la particolare preparazione e posa in opera della stessa. Tuttavia la durabilità e il gradevole aspetto delle costruzioni in pietra ne fanno un materiale ancora impiegato, soprattutto come rivestimento. Nonostante ci sia una grande varietà di pietre naturali, sono davvero poche quelle adatte ad essere impiegate nell'edilizia, poiché devono avere alcune qualità di resistenza, durezza, lavorabilità, porosità, bellezza, durevolezza. Le tipologie che racchiudono tutte queste caratteristiche sono **granito**, **calcare** e **arenaria**.

La muratura realizzata mediante blocchi di pietra può essere di due tipi:

- **muratura in pietra squadrata**: caratterizza generalmente le costruzioni monumentali ed è costituita da blocchi di forma e dimensioni regolari.

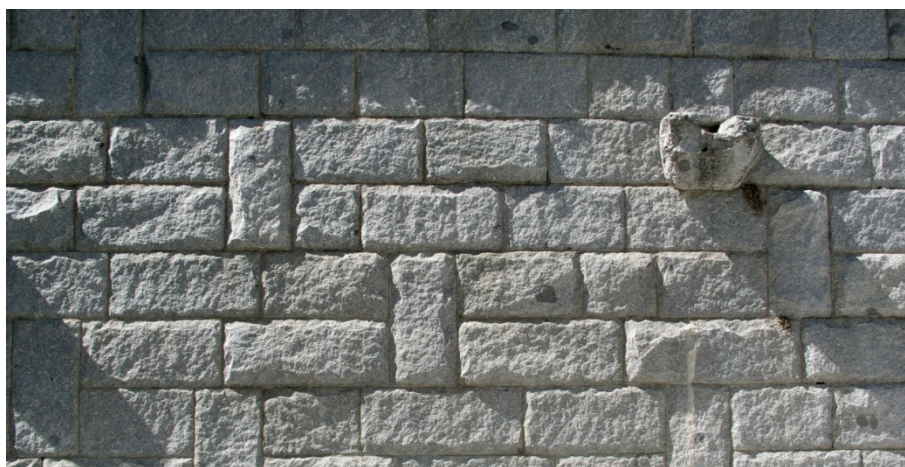


FIGURA 7: MURATURA IN PIETRA SQUADRATA

- **muratura in pietra non squadrata**: caratterizza l'edilizia comune ed è costituita da blocchi di dimensioni e geometria irregolari.



FIGURA 8: MURATURA IN PIETRA NON SQUADRATA

In questa tipologia, le pietre di testata sono di solito di dimensioni maggiori, anche se non occupano l'intero spessore della parete. Spesso questi muri presentano un sacco interno costituito da materiale di riporto posto fra i due paramenti esterni.

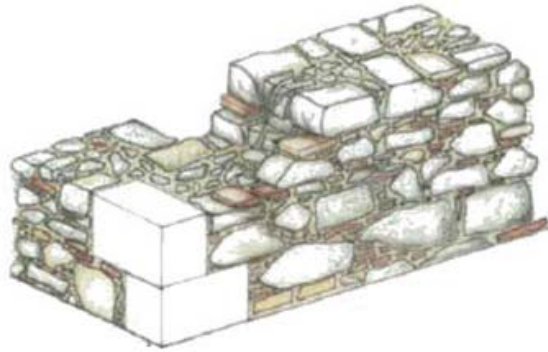


FIGURA 9: MURATURA A SACCO CON PIETRA D'ANGOLO

Il comportamento di strutture in muratura che utilizzano la pietra come materiale da costruzione è fortemente dipendente dalla loro massa e i blocchi, come dimostrano le immagini riportate sopra, sono elementi strutturali di dimensioni consistenti, dove la malta, se presente, ha un'influenza limitata. Se la malta non è presente si parla di muratura a secco.

### 1.3.2 IL MATTONE

La muratura in **mattoni** si distingue da quella in pietra soprattutto per la regolarità di forma e, generalmente, le dimensioni inferiori degli elementi. L'evoluzione nel corso dei secoli ha visto un perfezionamento sempre maggiore nella tecnica di realizzazione, dal primitivo mattone in argilla cruda, alla successiva cottura in forno a formare un materiale più resistente. Oggi non si utilizza soltanto l'argilla per realizzare i mattoni (laterizi), ma anche il silicato di calcio e il calcestruzzo.

Le proprietà meccaniche sono fortemente dipendenti dalla modalità di confezionamento e dal materiale con cui si realizzano i mattoni, nel **laterizio** in particolare a causa della presenza di inclusioni (difetti) e di microfessure formatesi a causa del ritiro durante il processo di cottura. Un buon laterizio viene dunque fabbricato a partire da una base d'argilla con l'aggiunta di un 30% circa di sabbia, che contribuisce a ridurre il ritiro del materiale in cottura.

Il laterizio può essere pieno o forato, con diverse tipologie di foratura, a partire da piccoli fori che occupano fino al 25% del volume del mattone, a fori di dimensioni maggiori che da soli occupano il 20-25% del volume. Nella muratura storica viene impiegato il mattone pieno, mentre nelle nuove edificazioni è sempre più diffuso il mattone forato, attraverso i cui fori è possibile introdurre barre metalliche e calcestruzzo per realizzare una muratura armata, con il grande vantaggio di acquisire duttilità nel comportamento del materiale e dunque una migliore risposta alle sollecitazioni, particolarmente a quelle sismiche.



FIGURA 10: MATTONE IN ARGILLA PIENO E FORATO

Una caratteristica fisica importante dei laterizi, da prendere in considerazione soprattutto al momento della posa in opera, è la velocità di assorbimento dell'acqua: essa determina la quantità d'acqua che il mattone assorbirà quando verrà posto sul letto di malta. Il parametro è importante in quanto, se troppo basso, diventa difficile porre in opera i mattoni, mentre se troppo alto, rischia di rimuovere l'acqua dalla malta prima che si sia completata l'idratazione del cemento. La velocità di assorbimento del laterizio è molto alta, compresa fra il 4.5% e il 7% del proprio peso.

I mattoni in **silicato di calcio** sono realizzati con calce, sabbia silicea o roccia silicea frantumata e additivi colorati. Si mescolano gli ingredienti e si attende l'idratazione della calce prima di procedere alla produzione dei blocchi. Come per il laterizio, si realizzano mattoni in silicato di calcio pieni e forati.



FIGURA 11: MATTONI IN SILICATO DI CALCIO

I blocchi in **calcestruzzo**, infine, si realizzano utilizzando un calcestruzzo con aggregati molto fini. Anch'essi, come avviene per i due materiali precedentemente illustrati, vengono realizzati con diverse percentuali di foratura. Per ragioni estetiche, vengono realizzati anche blocchi in calcestruzzo che simulano la pietra naturale.



FIGURA 12: BLOCCHI IN CALCESTRUZZO

La densità di tutte queste tipologie di mattoni è di circa  $2000 \text{ kg/m}^3$ ; l'unica eccezione è costituita dai blocchi in calcestruzzo aerato autoclavato con una densità sensibilmente ridotta (da  $450$  a  $850 \text{ kg/m}^3$ ), che danno luogo a prodotti meno pesanti.

Dato che, come detto nelle righe introduttive, uno dei motivi che inducono allo studio delle strutture in muratura non sono soltanto le nuove edificazioni, ma anche le complesse attività di recupero e conservazione degli edifici storici, ci si occuperà qui dello studio della muratura realizzata con blocchi in laterizio, tralasciando a studi futuri l'estensione dello stesso anche a quelle in mattoni in silicato di calcio e calcestruzzo.

Note dunque le principali caratteristiche delle unità, è ora la volta dell'altro componente, la malta.

## 1.4 LA MALTA

La malta è l'elemento di collegamento fra i blocchi. Nonostante occupi solamente il 7% del volume dell'intera muratura, la sua influenza sul comportamento della stessa va al di là di questa semplice percentuale: come si vedrà, infatti, è parzialmente responsabile delle caratteristiche globali di resistenza della muratura. Oltre alla funzione di collegamento, la malta ha anche il compito di distribuire le tensioni tra i blocchi; di conseguenza l'accuratezza della sua posa in opera è molto importante: per quanto possibile, ci deve essere una perfetta aderenza malta-unità, di modo che non si creino delle tensioni locali che potrebbero portare alla rottura dell'unità stessa. E', infatti, proprio l'interfaccia unità-malta a costituire l'elemento di debolezza della muratura.

Gli ingredienti che costituiscono la malta possono essere distinti a seconda dell'epoca di costruzione: la muratura storica è caratterizzata da una composizione di sabbia, calce aerea e acqua, mentre nelle nuove edificazioni si utilizzano sabbia, cemento (in particolare cemento Portland) e acqua. Tuttavia, ancora oggi, accanto al cemento, si utilizza spesso la calce: un accorgimento per evitare che la malta si asciughi troppo rapidamente, permetterle di assestare in modo migliore i movimenti locali, trattenere l'umidità e darle la giusta consistenza per la posa in opera. Le malte moderne a base di calce non vanno tuttavia confuse con le malte di calce storiche, perché queste ultime utilizzano la calce in sostituzione e non accanto al cemento Portland come legante principale.

E' molto importante dare la corretta composizione alla malta in termini di granulometria: una presenza eccessiva di parti fini rende la malta meno durevole e con una minore resistenza a flessione, parti troppo grandi riducono la lavorabilità del materiale e la coesione, un eccessivo contenuto d'acqua può accentuare i fenomeni di ritiro della malta (con conseguente formazione di microfessure diffuse prima ancora di caricare il materiale), mentre un'eccessiva quantità di argilla può ritardare di troppo la presa della malta stessa. Altro elemento di debolezza può essere l'eccessiva presenza di plastificante, che permette alla malta una maggiore lavorabilità, ma che se non adeguatamente controllato può produrre, a lungo termine, un materiale eccessivamente poroso e pertanto meno durevole, resistente e con scarsa coesione.

Quando la malta viene confezionata deve essere utilizzata entro due ore dalla sua preparazione, per evitare che perda la propria lavorabilità e renda dunque difficoltosa la posa in opera. Si può ripristinare temporaneamente la malta aggiungendo acqua all'impasto, dopodiché tuttavia non deve più essere utilizzata.

In una muratura costituita da unità regolari (quindi escluso il caso di muratura in pietra non squadrata), la malta viene disposta secondo due tipi di giunti:

- orizzontali continui
- verticali discontinui

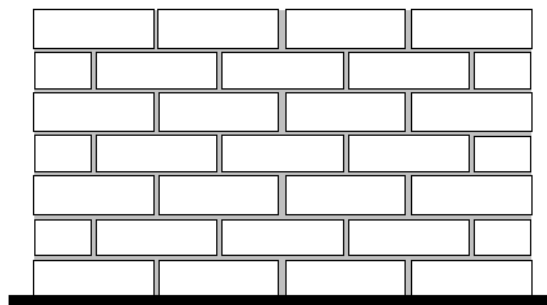


FIGURA 13: TIPICA TESSITURA DI UN PANNELLO IN MURATURA

Entrambi agiscono da piani di debolezza all'interno della struttura (particolarmente i giunti orizzontali, veri e propri piani di scorrimento), conferendo così al materiale muratura distinte proprietà direzionali. Per questo motivo, pertanto, anche se la muratura è composta da due materiali isotropi, nell'insieme essa presenta un comportamento ortotropo, cioè distinto proprio secondo le due direzioni ortogonali date dai giunti di malta.

## 1.5 LE TECNICHE DI ASSEMBLAGGIO

Le murature possono essere realizzate in vari modi, a seconda dello spessore richiesto e delle necessità connesse alla costruzione. Variano sia i tipi di tessitura, sia il numero di paramenti utilizzati. In particolare:

- **muratura a singolo paramento:** si tratta di una muratura che ha uno spessore pari a mezzo mattone, un mattone o un mattone e mezzo.

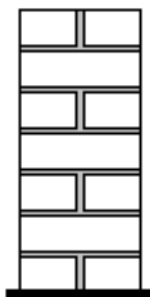


FIGURA 14: PARAMENTO SINGOLO

Se vengono superate le dimensioni di cui sopra, si passa alla

- **muratura a doppio paramento:** tra le due pareti si pone un giunto di collegamento, che le unisce per formare un muro solido i cui paramenti lavorano insieme.

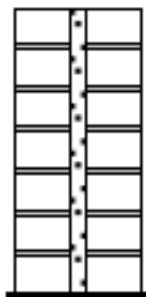


FIGURA 15: DOPPIO PARAMENTO

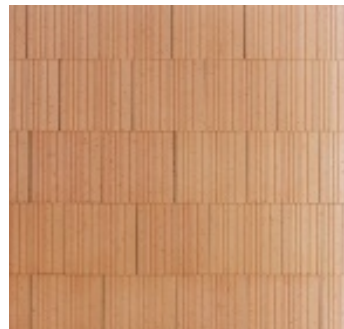
L'elemento di collegamento può anche non riempire l'intero spazio: sono sufficienti semplici puntoni metallici per garantire un'adeguata connessione tra i paramenti e ottenere quindi la rigidità richiesta alla struttura.

Nelle operazioni di realizzazione delle murature, di qualunque tipologia si tratti, è molto importante assicurare una corretta aderenza malta-mattone: se i mattoni non sono sufficientemente umidi durante la posa in opera è molto probabile che assorbano una considerevole quantità di acqua dalla malta, rendendone difficile la lavorabilità e traducendosi in scarsa aderenza (come già illustrato precedentemente, questo problema riguarda soprattutto i laterizi). Al contrario, un contenuto eccessivo di acqua nella malta può comportare movimenti interni in seguito al posizionamento dei blocchi e l'estrusione dai giunti.

Se nella muratura storica si trovano soprattutto mattoni pieni di piccole dimensioni su letti di malta, nelle costruzioni attuali la tendenza è verso blocchi forati di grandi dimensioni con letti di malta molto sottili (dell'ordine di 1-3 mm), anche per garantire le corrette proprietà termiche alla struttura.



**FIGURA 16: MURATURA STORICA IN LATERIZIO PIENO**



**FIGURA 17: MURATURA ATTUALE IN LATERIZIO FORATO CON GIUNTI ULTRASOTTILI**

## 1.6 LE PROPRIETÀ MECCANICHE

### 1.6.1 LE PROVE SPERIMENTALI

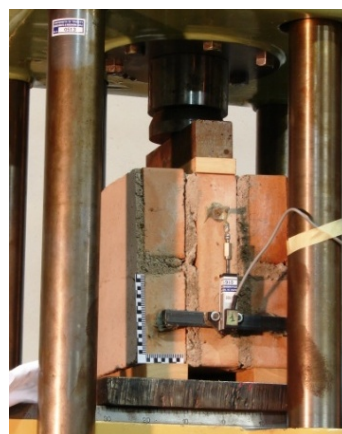
La determinazione delle proprietà meccaniche globali della muratura è uno degli aspetti più studiati: questo materiale composito, infatti, non ha caratteristiche intermedie a quelle dei suoi componenti, dunque vengono utilizzate varie metodologie per ottenerne i valori, che vanno da formule semi-empiriche basate sulle proprietà meccaniche dei componenti, a tecniche di omogeneizzazione o prove sperimentali su muretti di dimensioni rappresentative del comportamento globale. A seconda, comunque, della natura del materiale impiegato, le proprietà meccaniche globali possono avere un intervallo di valori piuttosto

ampio, ragion per cui è necessario conoscere bene il comportamento dei componenti per valutare la struttura muraria nel suo complesso.

Tra le prove sperimentali utilizzate con questo fine, si distinguono quelle per determinare il comportamento dei singoli elementi e quelle su pannelli per le proprietà meccaniche globali: si effettuano così prove di compressione e flessione su prismi di malta e sulle unità (fig. 18), prove di compressione e taglio su muretti (fig. 19) e, infine, su pannelli in scala reale (fig. 20). Tuttavia, dato che le prove sperimentali su grandi pannelli non sono sempre possibili, specialmente nel caso delle murature storiche (di cui però si desidera conoscere le caratteristiche per la successiva scelta dell'intervento di recupero più adeguato), diventa importante poter ricavare le proprietà meccaniche globali a partire dalle proprietà degli elementi costituenti, nonostante l'evidenza che le prove su pannelli forniscono valori decisamente più accurati.



**FIGURA 18: PROVE A FLESSIONE E COMPRESSIONE SU MATTONI**



**FIGURA 19: PROVE A COMPRESSIONE E TAGLIO SU MURETTI**



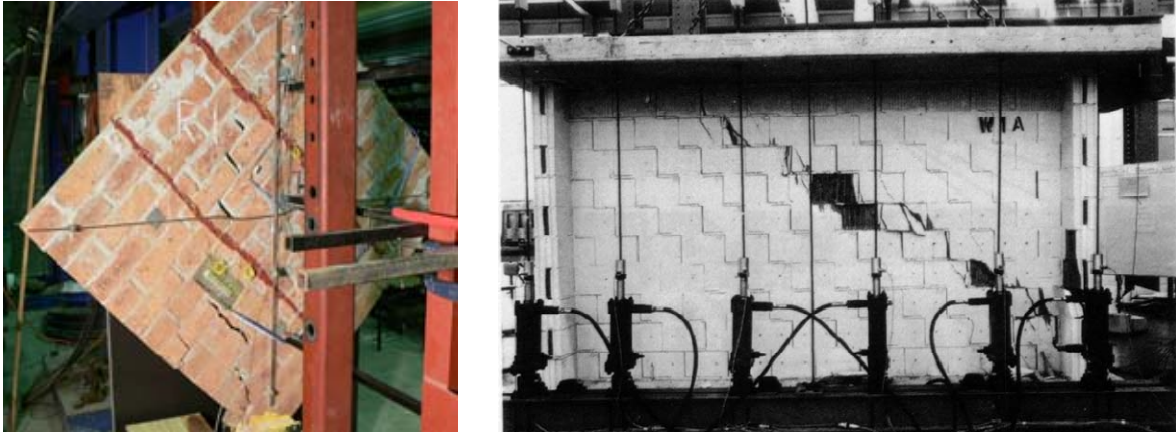


FIGURA 20: PROVE A COMPRESSIONE DIAGONALE E A TAGLIO SU PANNELLI

### 1.6.2 LE PROPRIETÀ MECCANICHE DEI COMPONENTI

L'importanza delle prove sperimentali non è relativa soltanto alla conoscenza della capacità portante della muratura e dei suoi componenti, e di conseguenza delle proprietà meccaniche, ma anche con la definizione di curve tensione-deformazione simili a quella illustrata in figura 21 e con la possibilità di valutare l'effetto sulle strutture di diversi percorsi di carico. Attraverso queste curve è possibile, in un momento successivo, dedurre una descrizione matematica del comportamento del materiale, per simularlo a livello strutturale attraverso analisi numeriche: in altre parole permettono di definire il legame costitutivo, ovvero la relazione tra il tensore delle tensioni e quello delle deformazioni in un punto del corpo. Nei modelli, i fenomeni osservati nelle prove sperimentali precedentemente descritte vengono rappresentati in modo tale da ottenere simulazioni che siano in ragionevole accordo con l'evidenza sperimentale (**approccio fenomenologico**). Dalle curve tensione-deformazione si possono infatti ricavare informazioni importanti; ad esempio, concentrando l'attenzione sui due materiali di figura 21, malta (in blu) e laterizio (in rosso), che saranno di particolare interesse nei prossimi capitoli, si notano le seguenti proprietà generali:

- per entrambi una resistenza più elevata a compressione che a trazione: questo aspetto fa sì che anche la muratura globalmente non abbia una buona resistenza a trazione, che viene spesso trascurata quando se ne considerano le proprietà meccaniche, mentre la resistenza a compressione è stata a lungo considerata l'unica proprietà rilevante del materiale muratura
- rispetto alla malta, il laterizio ha un modulo elastico e una resistenza maggiori
- il laterizio ha una rottura di tipo fragile, che segue la nascita, la crescita e la coalescenza di microfessure susseguenti all'incremento di carico
- la malta, invece, ha una rottura di tipo duttile, caratterizzata dunque dalla presenza di una fase di grandi deformazioni e da un comportamento non lineare

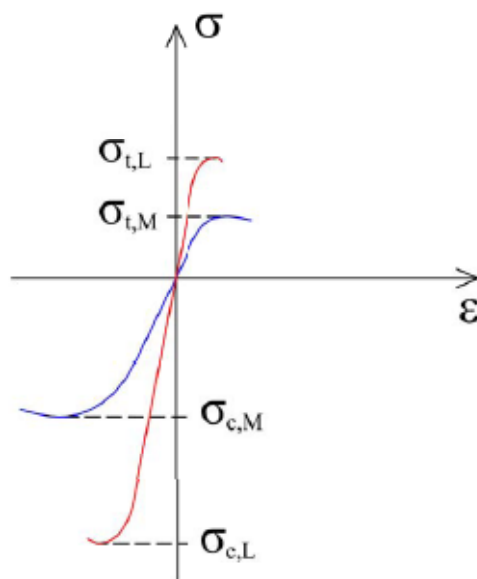


FIGURA 21. DIAGRAMMA TENSIONE-DEFORMAZIONE PER LATERIZIO E MALTA

Concentrando l'attenzione sulla relazione tra resistenza a compressione delle unità e intervallo di valori ottenuto, si nota che esiste un nesso non soltanto con il tipo di materiale impiegato, ma anche con le dimensioni dei blocchi utilizzati: infatti, a parità di materiale impiegato, blocchi di dimensioni diverse presentano una resistenza più elevata se di dimensioni maggiori. Questo fenomeno è strettamente legato all'apparecchiatura di prova utilizzata per la determinazione della resistenza a compressione: come si può vedere nella figura 18(b), essa è composta da due piastre metalliche poste lungo i lati superiore e inferiore del blocco, che ne impediscono la deformazione laterale (tipica di un elemento sollecitato a compressione) a causa dell'attrito tra le due superfici. Poiché se un blocco è di dimensioni maggiori rispetto ad un altro (del medesimo materiale) la superficie posta a contatto con l'apparecchiatura di prova è maggiore, se ne deduce che la resistenza alla deformazione laterale è maggiore e di conseguenza la resistenza a compressione.

La malta, invece, oltre ad una bassa resistenza a trazione, si caratterizza anche per una coesione piuttosto scarsa. Per quanto riguarda la resistenza a compressione, i valori ottimali sono compresi nell'intervallo 2-5 N/mm<sup>2</sup>. Questi valori, infatti, consentono alla malta di assestare piccoli movimenti interni alla struttura senza che ne venga messa in pericolo la stabilità: ecco, dunque, l'importanza della malta nella distribuzione delle tensioni all'interno della muratura di cui si parlava nel paragrafo illustrativo sulla malta.

### 1.6.3 LE PROPRIETÀ MECCANICHE GLOBALI

Nel valutare le proprietà meccaniche globali, le cose si complicano. La resistenza a compressione di un pannello dipende da un gran numero di fattori: la resistenza di unità e malta, il rapporto tra altezza e larghezza del blocco, l'orientamento delle unità rispetto alla direzione di carico, lo spessore del giunto di malta, l'effetto dei giunti verticali, l'aderenza unità-malta. Dal gran numero di fattori coinvolti, dunque, si deduce la complessità di una valutazione accurata della resistenza della muratura.

Nel caso delle murature storiche, questa difficoltà è ulteriormente aggravata dal fatto che molto spesso non sono facilmente reperibili provini di materiale per realizzare le prove sperimentali.

La valutazione della resistenza delle strutture in muratura è resa difficoltosa anche da problemi indipendenti dalla natura dei materiali o dalla geometria dei componenti, ma connessi con la manodopera impiegata nella costruzione. Essi sono principalmente:

- malta non ben miscelata e costituenti in proporzioni non corrette
- incorretto aggiustamento della velocità di assorbimento nelle unità
- incorretta procedura di realizzazione dei giunti
- disordine nei blocchi dopo la loro posa in opera
- muri non a piombo
- muri di nuova edificazione non adeguatamente protetti durante la costruzione

Vediamo di esaminare questi punti più nel dettaglio. Nel caso della malta, un costituente che molto spesso si presenta in quantità non corretta è l'**acqua**: un alto impiego di quest'ultima riduce la resistenza a compressione della malta, fatto che non influenza in maniera critica la resistenza a compressione dell'intera struttura, quanto la resistenza a flessione. Il grado di sabbia contenuto nella malta al momento della posa in opera è altrettanto importante ai fini dell'aderenza unità-malta.

Quanto, invece, al contenuto d'acqua delle unità, come già visto se poco umide, possono assorbire una grande quantità d'acqua dalla malta, lasciando dei vuoti all'interno della stessa con conseguente riduzione della resistenza, mentre mattoni saturi non hanno una corretta adesione alla malta.

A proposito dell'interfaccia malta-unità è importante sottolineare la necessità di giunti orizzontali completamente riempiti dalla malta per garantire una migliore resistenza a compressione della muratura nel complesso, dato che un riempimento incompleto dei giunti, generando tensioni locali, può ridurre la resistenza globale anche del 25-30%. Un incorretto riempimento dei giunti verticali, invece, comporta una riduzione della resistenza a flessione e a taglio.

Si è detto altresì che lo **spessore dei giunti orizzontali** influenza il comportamento globale: per spiegare questo fenomeno è necessario comprendere che genere di interazione avviene tra le unità e la malta. Poiché malta e unità hanno una diversa deformabilità per la diversa rigidità dei materiali (di solito malta cementizia e laterizio), all'interno della muratura si crea uno stato tensionale che vede trazione biassiale e compressione monoassiale nella direzione di carico per l'unità e compressione triassiale per la malta (fig.22). E' questo aspetto a far sì che la curva tensioni-deformazioni globale non abbia caratteristiche intermedie rispetto a quelle dei suoi componenti, benché l'andamento non si discosti a livello qualitativo (fig. 23).

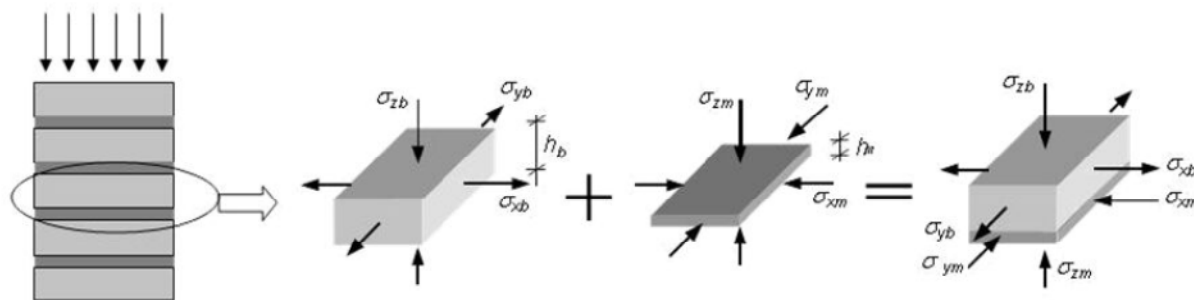


FIGURA 22: STATO TENSIONALE NELLA MURATURA SOTTOPOSTA A COMPRESIONE

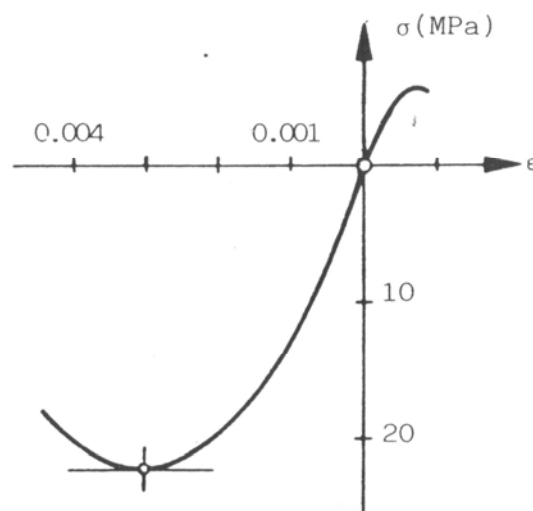


FIGURA 23: ASPETTO DELLA CURVA TENSIONE-DEFORMAZIONE DELLA MURATURA

L'espansione della malta è pertanto impedita dai blocchi e ciò induce in questi ultimi delle forze di trazione (appunto la trazione biassiale di cui si parlava sopra). E' qui che diventa importante lo spessore del giunto: tanto più spesso è il giunto di malta, tanto più grandi sono le forze indotte nei blocchi e di conseguenza tanto più si riduce la resistenza a compressione del muro. Pertanto, un aumento dello spessore del giunto di malta da una dimensione di 10 mm a 16 mm comporta già una riduzione della resistenza pari al 25%.

Questa **interazione tra malta e unità** influenza anche un altro fenomeno: se si confronta la resistenza delle unità ottenuta durante le prove sperimentali con quella degli stessi blocchi posti in opera, si vede che, in quest'ultimo caso, essa risulta inferiore in quanto il letto di malta agisce con un effetto opposto rispetto alle piastre dell'apparecchiatura di prova, non limitando la deformazione laterale, ma inducendo il blocco alla rottura a trazione. Si osserva anche che in un blocco posto in opera, una maggiore profondità dello stesso si traduce, invece, in un aumento della resistenza.

Per completare l'elenco delle problematiche connesse alla manodopera va specificata l'importanza che il muro sia costruito a piombo, al fine di evitare che le tensioni agenti nella struttura, a causa delle eccentricità che entrano in gioco, riducano ulteriormente la resistenza a compressione.

### 1.6.4 IL COLLASSO NELLE STRUTTURE IN MURATURA

Dopo aver visto quali sono le cause del collasso delle strutture in muratura, vediamo ora come avviene. Viene presentato prima il comportamento in caso di carico monoassiale, poi in stato di tensione biassiale.

#### 1.6.4.1 CARICO MONOASSIALE

In caso di carico monoassiale, il collasso a **compressione** si traduce essenzialmente in una fessurazione verticale a trazione dei blocchi e della malta nella direzione di applicazione del carico. Le fessure si formano solitamente al centro delle unità, in prosecuzione dei giunti verticali di malta, oppure in prossimità dei lati più corti.



FIGURA 24: FESSURAZIONI VERTICALI NEI BLOCCHI DOPO UNA PROVA A COMPRESSIONE MONOASSIALE

Generalmente, la resistenza a compressione della muratura è minore di quella della singola unità, ma tuttavia maggiore della resistenza della malta: il miglioramento delle proprietà meccaniche della stessa è proprio legata allo stato di compressione triassiale in cui si viene a trovare la malta, che ne aumenta la resistenza. Difficilmente, di conseguenza, si giunge al collasso della muratura per schiacciamento dei giunti di malta orizzontali.

Se invece la sollecitazione è parallela ai giunti di malta orizzontali, allora la resistenza a compressione della muratura si riduce anche della metà rispetto ai valori mostrati nella compressione ortogonale ad essi. Questo tipo di test (fig. 25) ha generalmente ottenuto meno attenzione da parte della comunità scientifica, ma l'anisotropia del materiale fa sì che la resistenza a compressione del materiale nella direzione dei giunti di malta orizzontali possa avere un'influenza decisiva sulla capacità portante dello stesso.



FIGURA 25: ROTTURA A COMPRESSIONE PARALLELA AI GIUNTI ORIZZONTALI

In generale, il rapporto tra la resistenza a compressione monoassiale parallela e normale ai giunti di malta orizzontali varia fra 0.2 e 0.8.

Nel caso in cui invece si abbiano delle sollecitazioni di **trazione** parallela o ortogonale ai giunti, il comportamento della malta è essenzialmente elasto-fragile, data sia la bassa resistenza a trazione dei componenti di cui si parlava precedentemente, ma soprattutto dell'interfaccia tra i due materiali. Infatti, quando agisce una trazione, sia ortogonalmente ai giunti di malta orizzontali, che a quelli verticali, si assiste spesso all'apertura dei giunti proprio tra unità-malta, senza fessurazione dei due componenti. Si può quindi affermare che la resistenza a trazione della muratura è determinata dal grado di aderenza unità-malta.

Nel caso della prova a trazione monoassiale parallela ai giunti orizzontali sono possibili due diverse tipologie di collasso: nella prima, le fessure corrono a zigzag tra i giunti verticali e orizzontali (fig. 26(a)); nella seconda, le fessure corrono pressoché verticali attraverso unità e giunti verticali (fig. 26(b)). In quest'ultimo caso la rigidezza e la resistenza di unità e malta sono assimilabili.

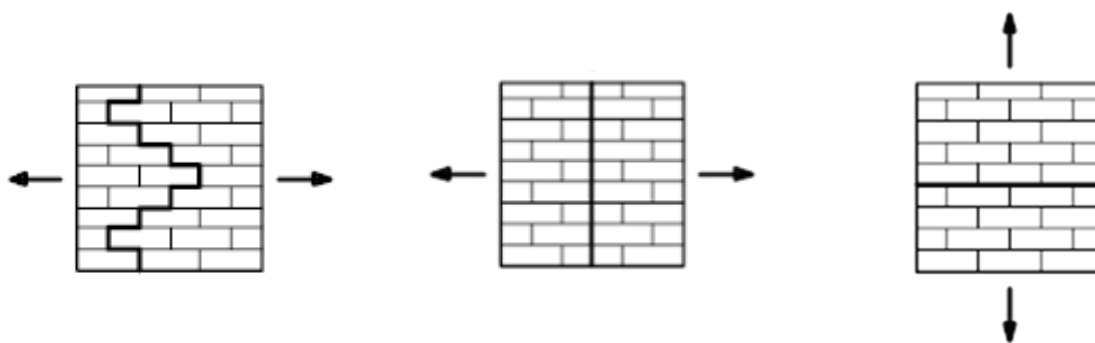


FIGURA 26: FESSURAZIONI A TRAZIONE MONOASSIALE

#### 1.6.4.2 STATO DI TENSIONE BIASSIALE

Se si effettuano invece delle prove biassiali, cioè il carico viene applicato contemporaneamente nelle due direzioni ortogonali e si considera non soltanto il caso parallelo ai giunti di malta verticali e orizzontali, ma anche un angolo di applicazione dei carichi diverso, allora si crea all'interno della muratura uno stato tensionale più complesso, ovvero uno **stato di tensione biassiale**: il comportamento della muratura soggetta a tale stato tensionale non può essere completamente descritto dal comportamento costitutivo determinato in condizioni di carico monoassiale.

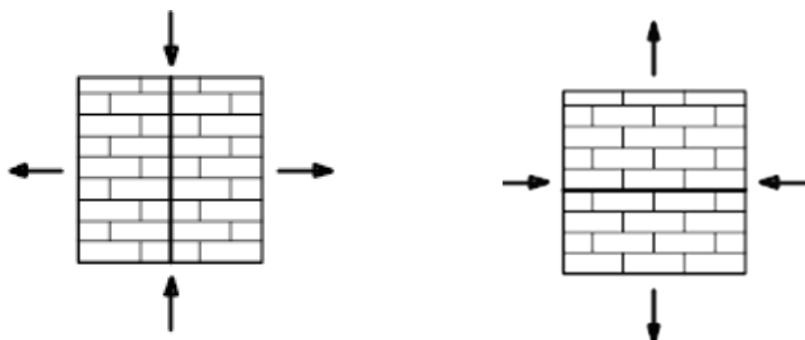


FIGURA 27: FESSURAZIONI IN CASO DI CARICO BIASSIALE PARALLELO AI GIUNTI

Uno stato di tensione biassiale genera diversi meccanismi fessurativi, in dipendenza sia dall'angolo di applicazione dei carichi, ma anche dalla combinazione di carico: trazione-trazione, trazione-compressione, compressione-compressione.

Il meccanismo combinato di **due sollecitazioni di trazione** nelle direzioni ortogonali genera la fessurazione dei giunti verticali e orizzontali, con scorrimento degli stessi.

La combinazione **trazione-compressione**, invece, genera numerosi meccanismi di rottura, soprattutto al variare dell'angolo di applicazione del carico rispetto ai giunti orizzontali. Si tratta sia di rotture combinate malta-unità, sia di sole aperture o scorrimento dei giunti. Tutti questi meccanismi sono stati individuati da A. Page negli anni '70 attraverso una vasta campagna di prove sperimentali.




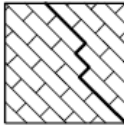
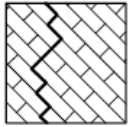
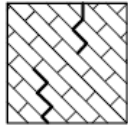
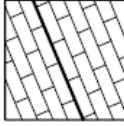

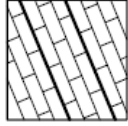
Angolo $\theta$	Trazione monoassiale	Trazione/compressione	Compressione monoassiale
22.5°			
45°			
67.5°			

FIGURA 28: MECCANISMI FESSURATIVI CON DIREZIONI DI CARICO DIVERSE

Con il meccanismo combinato trazione-compressione si individuano subito alcune caratteristiche: una compressione laterale riduce la resistenza a trazione del materiale a causa delle microfessure che si sviluppano nelle unità e dei microscorrimenti che si attivano nei giunti. La rottura avviene, così, sia per fessurazione e scorrimento dei soli giunti, sia per un meccanismo combinato che coinvolge sia malta che unità.

Altro caso particolare è la combinazione taglio-compressione normale, che caratterizza abitualmente le strutture in muratura (taglio dovuto a carichi orizzontali come vento o sismi, compressione legata al peso proprio degli elementi strutturali che si trovano al di sopra di quello considerato). In tal caso, la **resistenza a taglio** è dipendente sia dalle caratteristiche della malta con cui sono fatti i giunti, che dalla precompressione esistente sull'elemento strutturale stesso. Se da un lato, dunque, la precompressione migliora la resistenza a taglio, i giunti si presentano però come dei piani di discontinuità all'interno della muratura, per cui la loro presenza può diminuire notevolmente la resistenza del solido murario se non c'è una buona coesione all'interfaccia malta-unità (fig. 29). In una muratura soggetta a taglio, pertanto, vinta

la coesione malta-unità, non rimane che l'attrito a determinare la resistenza residua della muratura, fino alla rottura definitiva, che avviene attraverso uno scorrimento generato dalla tensione tangenziale agente sul piano dei giunti orizzontali.



FIGURA 29: PROVA A TAGLIO SU MURETTO

In questo senso, dunque, la tecnica di assemblaggio impiegata è importante per il grado di ingranamento dei blocchi, che può essere migliorato sia attraverso una diversa disposizione delle unità (anziché attraverso una disposizione per file orizzontali, attraverso la tecnica a lisca di pesce (fig. 30), ad esempio, sullo stile di quella impiegata per la realizzazione della cupola della Chiesa di Santa Maria del Fiore a Firenze) sia utilizzando blocchi con un vantaggioso rapporto larghezza-altezza: tanto maggiore è tale rapporto, tanto maggiore sarà l'ingranamento della muratura e di conseguenza migliore sarà la sua resistenza.

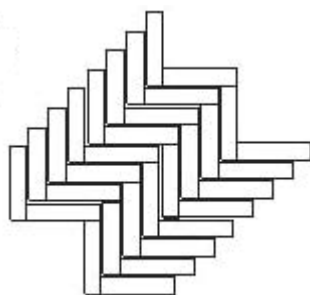


FIGURA 30: DISPOSIZIONE A LISCA DI PESCE

Lo stato di **compressione biassiale**, infine, è quello più complesso e che maggiormente interessa nella muratura. E' qui che la muratura mostra il suo comportamento non lineare, mentre nei casi sopra illustrati si raggiunge spesso il collasso del pannello senza perdita di linearità. Il comportamento anelastico della muratura viene attribuito quasi completamente ai giunti di malta. La rottura in questo caso avviene per rottura in due metà dei campioni, in un piano parallelo alla superficie libera e incurante della direzione delle tensioni principali.



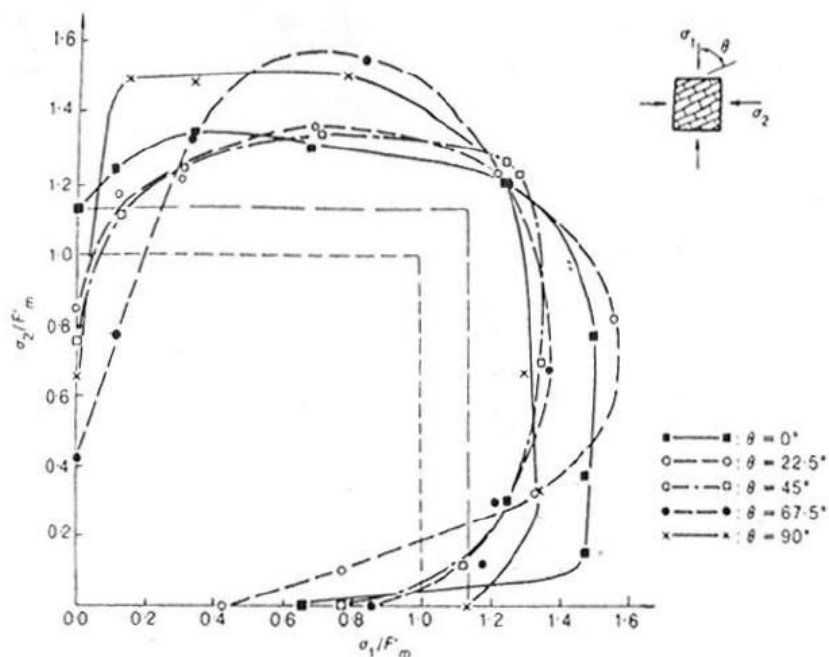


FIGURA 31. DOMINIO DI RESISTENZA DELLA MURATURA A COMPRESIONE BIASSIALE (PAGE 1981)

Nel corso di una prova di compressione biassiale si assiste ad un aumento della resistenza che può essere spiegato sia attraverso meccanismi di attrito interno malta-unità che nei giunti.

Dato che, come si è visto, il comportamento della muratura non dipende soltanto dalle tensioni che si creano, ma anche dall'orientazione di tale stato tensionale, nella formulazione di un modello costitutivo che sia in grado di descrivere adeguatamente il comportamento del materiale muratura si deve tenere in considerazione tale anisotropia. Le direzioni di danneggiamento nella muratura, però, sono prevalentemente due, quella parallela ai giunti di malta orizzontali ed ortogonale ad essi. Pertanto la spiccata ortotropia del danno permette di semplificare leggermente la formulazione rispetto ad un comportamento completamente anisotropo, ma rimane decisamente più complesso rispetto a quelle dedotte per altri materiali, basate su ipotesi di isotropia, comportamento elastico e omogeneità. Non è realistico, comunque, cercare di formulare un modello che includa tutti i meccanismi che interagiscono all'interno del materiale, poiché la teoria che viene formulata rappresenta una semplificazione degli stessi, come si vedrà nei capitoli successivi.



## CAPITOLO 2

# MODELLAZIONE DELLE STRUTTURE IN MURATURA

L'analisi strutturale delle costruzioni in muratura è un problema piuttosto complesso: in letteratura vengono proposte numerose strategie, in funzione delle esigenze di accuratezza dell'analisi, ma anche della necessità di semplificazione.

La tecnica utilizzata di volta in volta dipende fortemente dalle esigenze dell'analisi strutturale, così si distingue a seconda:

- della **scala di modellazione**: le modalità con cui viene condotta l'analisi strutturale cambiano a seconda se si vogliono conoscere le interazioni locali malta-unità e i relativi meccanismi di danno, oppure se si prende in considerazione un intero edificio e se ne vuole analizzare il comportamento globale;
- delle **caratteristiche geometriche**: lo schema scelto per rappresentare una struttura in muratura dipende fortemente dalla geometria della costruzione, che consente semplificazioni in caso di simmetrie o di particolari caratteristiche spaziali degli elementi.
- del **legame costitutivo**: la relazione tensioni-deformazioni che descrive il comportamento del materiale può essere più o meno complessa a seconda dell'obiettivo dell'analisi e dell'accuratezza che si desidera ottenere.

Si approfondiranno ora questi aspetti, completandoli con la descrizione di alcune delle tecniche proposte in letteratura nell'ambito dell'analisi delle strutture in muratura.

### 2.1 LA SCALA DI MODELLAZIONE

Come detto nel capitolo introduttivo, la muratura è un materiale composito. Nel momento in cui ci si avvicina ad esso per una modellazione numerica del suo comportamento, la scelta può cadere su tre strategie distinte:

- **Micromodellazione dettagliata**: malta e unità vengono considerate separatamente e rappresentate attraverso elementi continui, con l'aggiunta di elementi di interfaccia unità-malta discontinui per descrivere l'interazione tra i due elementi.

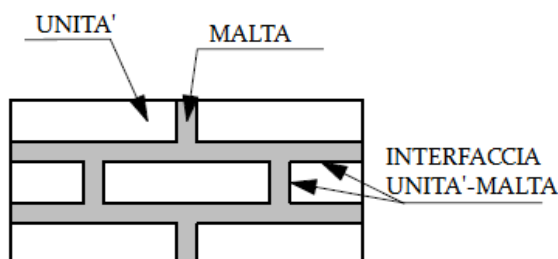


FIGURA 1: LA MICROMODELLAZIONE

- **Micromodellazione semplificata:** le unità sono espanse per mantenere inalterata la geometria e sono separate l'una dall'altra da elementi di interfaccia discontinui in cui sono condensate anche le caratteristiche e il comportamento della malta stessa.

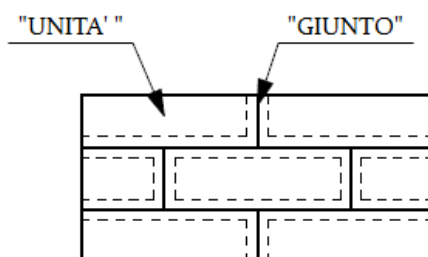


FIGURA 2: LA MICROMODELLAZIONE SEMPLIFICATA

- **Macromodellazione:** la muratura viene considerata come un unico mezzo continuo caratterizzato da omogeneità e anisotropia, dove pertanto non sono più distinguibili i singoli componenti.

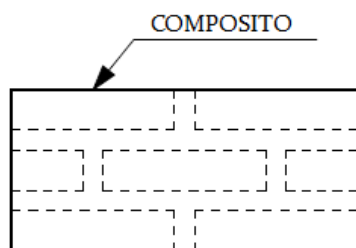


FIGURA 3: LA MACROMODELLAZIONE

Vediamo ora nel dettaglio le caratteristiche di ciascun approccio.

### 2.1.1 LA MICROMODELLAZIONE DETTAGLIATA

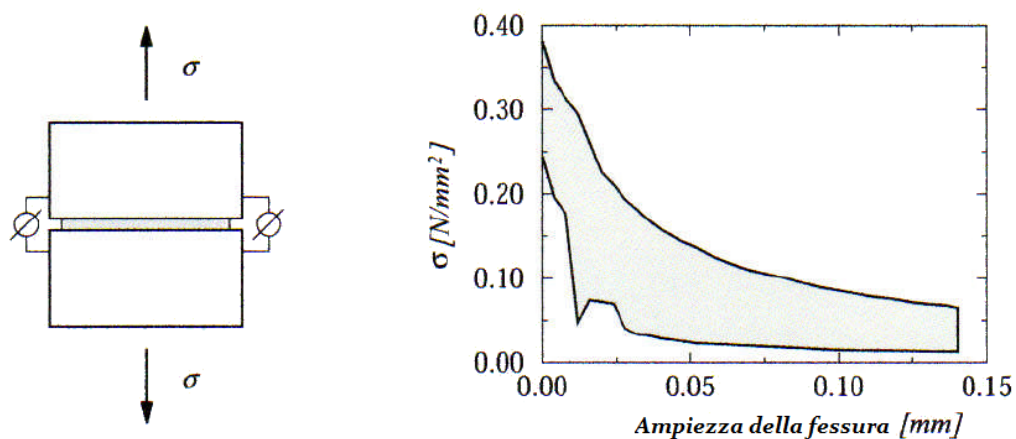
In questo primo approccio le due componenti vengono considerate separatamente e si valutano il modulo di Young, il coefficiente di Poisson e tutte le caratteristiche anelastiche distinte per malta e unità. L'elemento di interfaccia rappresenta un potenziale piano di rottura/scorrimento, a cui viene assegnata una rigidità iniziale fittizia per evitare la compenetrazione degli elementi.

Questa procedura è adatta a descrivere il comportamento locale del materiale, perché riesce a cogliere i vari modi di rottura che sono dovuti all'interazione tra le componenti unità e malta. In particolare, si riconoscono cinque modi di rottura all'interfaccia:

- **Modo I:** si tratta dell'apertura dei giunti di malta a trazione; realizzando una prova di trazione monoassiale come quelle condotte da Van der Pluijm nel 1992 è possibile calcolare l'energia di frattura ( $G_f^I$ ), dovuta a questo modo di rottura e definita come la quantità di energia necessaria per creare una fessura di area unitaria lungo l'interfaccia malta-unità. Tale valore è ricavabile dalla curva esponenziale tensione-ampiezza fessurativa, di cui si riporta un esempio (fig.4). Con questo approccio energetico è possibile descrivere il comportamento di *softening* a trazione della muratura: si tratta della graduale diminuzione della resistenza meccanica del materiale all'aumentare della

deformazione. Si tratta del tipico comportamento dei materiali quasi fragili come la muratura, che arrivano a collasso per un processo di progressiva crescita interna delle microfessure. Questo fenomeno è in gran parte attribuibile all'eterogeneità del materiale che possiede difetti e micro vuoti.

I risultati dei test di Van der Pluijm hanno mostrato che i valori dell'energia di frattura per il modo I di rottura oscillano fra 0.005 e 0.02 Nmm/mm<sup>2</sup> per valori di resistenza a trazione compresi fra 0.3 e 0.9 N/mm<sup>2</sup>, a seconda delle diverse combinazioni unità-malta.



**FIGURA 4: PROVA SPERIMENTALE E CURVA TENSIONE-AMPIEZZA FESSURATIVA A TRAZIONE**

Un'attenta osservazione dei campioni utilizzati per valutare il collasso a trazione del materiale muratura che in realtà l'area di interfaccia reale è più piccola della sezione trasversale del campione, come si vede in figura 5, cioè la superficie di contatto netta sembra concentrarsi nella parte interna dei provini: questo fenomeno può essere dovuto ad un effetto combinato del ritiro della malta e delle modalità di posa in opera delle unità sui letti di malta.



**FIGURA 5: LA SUPERFICIE DI CONTATTO NETTA UNITÀ-MALTA DI VARI MURETTI**

Questo aspetto rende difficoltosa la modellazione numerica del materiale, in quanto è necessario ricorrere a delle semplificazioni al momento dell'elaborazione del micro modello (fig. 6).

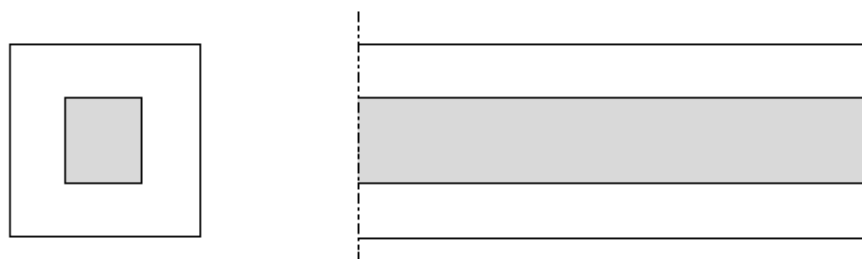


FIGURA 6: LA SCHEMATIZZAZIONE DELLA SUPERFICIE DI CONTATTO

- Modo II:** è il modo di rottura rappresentativo degli scorrimenti lungo i giunti principali di malta, dovuti ad una sollecitazione di taglio con valori limitati di compressione normale. Anche questo modo di rottura riguarda unicamente i giunti e permette di determinare il comportamento a taglio della muratura. Si tratta di una modalità di collasso che è una caratteristica saliente di questo materiale. Le prove pilota sono quelle condotte sempre da Van der Pluijm nel 1993, grazie alle quali è possibile determinare l'energia di frattura dovuta al modo II di rottura ( $G_f^{II}$ ), ricavabile dall'area sottesa dalla curva sperimentale tensione tangenziale-scorrimento a taglio a diversi livelli di compressione normale (fig. 7). Nel corso del test è importante che l'apparato di prova sia in grado di generare uno stato di tensione uniforme nei giunti, cosa non semplice perché i vincoli per l'equilibrio inducono spesso proprio tensioni normali non uniformi.

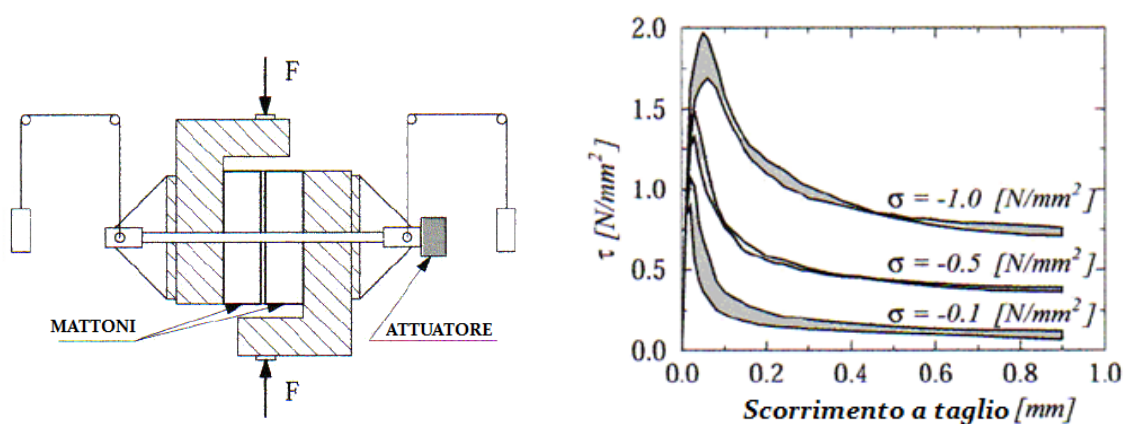


FIGURA 7: PROVA SPERIMENTALE E CURVA TENSIONE TANGENZIALE-SCORRIMENTO A TAGLIO

Osservando il diagramma tensione tangenziale-scorrimento rappresentato in figura 7, si nota ancora un minimo di tensione al termine delle prove, dovuto all'attrito residuo dopo il collasso a taglio. Il *softening* a taglio, dunque, è dovuto ad una progressiva perdita di coesione del materiale. Secondo i risultati ottenuti da Van der Pluijm, i valori dell'energia di frattura modo II hanno un valore compreso fra 0.01 e 0.25 Nmm/mm<sup>2</sup>, a fronte di una coesione iniziale che oscilla fra 0.1 e 1.8 N/mm<sup>2</sup> e in relazione anche al grado di confinamento del materiale.

- Modo III:** avviene la rottura dei blocchi per trazione parallela alla direzione dei giunti orizzontali di malta. Facendo una prova di questo tipo su un muretto, come già detto nel capitolo 1 si possono avere due modalità di collasso: nella prima le fessure corrono a

zigzag fra i giunti verticali e orizzontali, mentre nella seconda si ha una fessura verticale che attraversa anche le unità in prosecuzione dei giunti verticali. Nel primo caso la risposta del campione è governata dall'energia di frattura modo I dei giunti verticali e da quella modo II dei giunti orizzontali, mentre nel secondo caso dall'energia di frattura delle unità e dei giunti verticali.

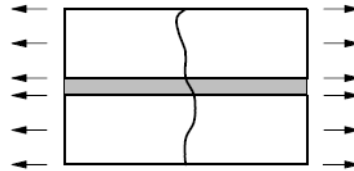


FIGURA 8: MODO III DI ROTTURA

- **Modo IV:** si ha la rottura dei blocchi per taglio, quando la compressione normale agente sui giunti orizzontali di malta riesce ad impedirne lo scorrimento, generando attrito nei giunti. E' l'alternativa al modo II di rottura quando i valori della pressione di confinamento sono più alti.

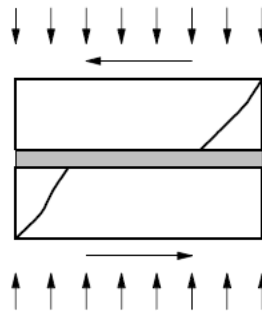


FIGURA 9: MODO IV DI ROTTURA

- **Modo V:** a compressione normale elevata, oltre il limite della resistenza a compressione, si ha la rottura per *splitting* dei blocchi, caratterizzata da una serie di fessurazioni verticali. Anche in questo caso è possibile descrivere il comportamento di *softening* (non così netto come nel caso del collasso a trazione) mediante l'energia di frattura a compressione ( $G_C$ ), che in questo caso è fortemente dipendente dalle condizioni al contorno e dalla dimensione dei provini. I valori dell'energia di frattura a compressione sono molto più alti di quella a trazione, dell'ordine di 45 Nmm/mm<sup>2</sup>.

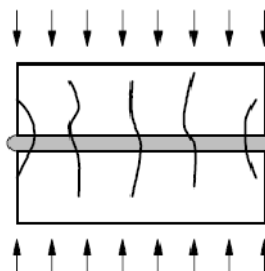


FIGURA 10: MODO V DI ROTTURA

Quando un provino viene caricato a compressione per raggiungere il modo V di rottura, le tensioni iniziali e le fessurazioni, insieme alle variazioni di rigidità interna e di resistenza causano la progressiva crescita delle fessure, che inizialmente sono stabili, cioè aumentano soltanto all'aumentare del carico. Verso il picco del carico c'è un'accelerazione nella formazione delle fessure e comincia lo sviluppo di macrofessure, che diventano instabili, ovvero è necessario diminuire il carico per evitare una loro crescita incontrollata. E' proprio in corrispondenza dello sviluppo delle macrofessure che si manifesta il comportamento di *softening* a compressione.

Da quanto analizzato sopra, i primi due modi di rottura riguardano soltanto la malta, il terzo soltanto le unità e gli ultimi due sono dei meccanismi combinati, dove sono coinvolti sia malta che unità. E' bene precisare che i due maggiormente considerati sono il modo I e II, dato che è la risposta non lineare dei giunti a caratterizzare il comportamento della muratura.

Senza una modellazione dettagliata che distingua unità e malta, non è possibile identificare in maniera distinta un modo di rottura. Per capire che cosa avviene **localmente** in un elemento strutturale in muratura, pertanto, è necessario scegliere questo tipo di modellazione. Si definiscono le equazioni costitutive della cella di base (fig. 11), in particolare di un quarto della cella data la simmetria della stessa, che tengano conto di tutti i modi di rottura precedentemente illustrati. La cella di base è uno schema che si ripete all'interno della muratura, ecco perché è sufficiente definire le equazioni in base ad essa.

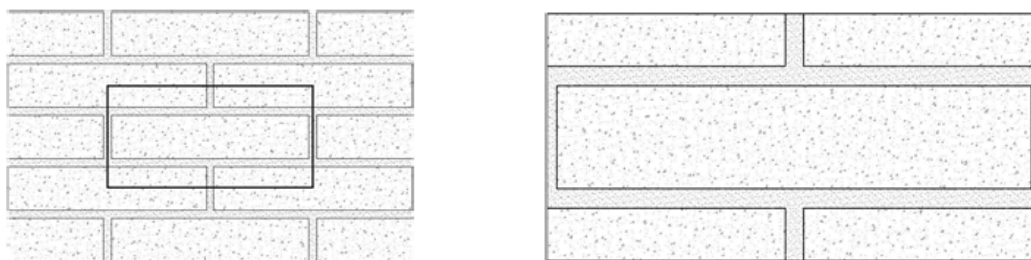


FIGURA 11: LA CELLA DI BASE

Poiché l'onere computazionale per strutture di grandi dimensioni è talmente elevato da non consentire l'utilizzo di questa tecnica di modellazione per analizzare interi edifici, si è pensato ad un altro approccio, molto simile ma semplificato, per estendere l'analisi ad elementi di dimensioni maggiori di una semplice porzione di muratura, ovvero la micromodellazione semplificata.

### 2.1.2 LA MICROMODELLAZIONE SEMPLIFICATA

In analogia al caso precedente, anche questa è una modellazione discreta; in questo approccio, però, le unità non sono separate da malta ed elementi di interfaccia come entità distinte, ma sono concentrate in un'interfaccia "media". Per mantenere invariata la geometria, le unità sono leggermente più grandi rispetto alle loro dimensioni reali. Gli elementi di discontinuità posti all'interfaccia si presentano come dei piani di scorrimento/frattura che forniscono una descrizione del comportamento del giunto. Questo comporta una leggera perdita nell'accuratezza dei risultati, in quanto non si può più considerare il coefficiente di Poisson della malta.



Si ottiene pertanto una rappresentazione più sintetica del materiale e il comportamento dell'interfaccia è descritto in termini di relazioni tra tensioni e spostamenti relativi delle due facce opposte delle unità. L'ipotesi è che un elemento possa deformarsi soltanto in direzione normale e tangenziale al proprio piano.

### 2.1.3 LA MACROMODELLAZIONE

Nei due approcci precedenti, il comportamento della muratura viene descritto attraverso le caratteristiche geometriche e meccaniche dei suoi componenti. La modellazione discreta è adatta, però, ad una modellazione di dettaglio: se il danneggiamento, infatti, si presenta come un fenomeno localizzato, la scelta di un micromodello per un'analisi strutturale sarà sicuramente quella più auspicabile. Al contrario, se il danneggiamento nella struttura è diffuso e se è di dimensioni tali che, a livello locale, gli stati di tensione possono essere considerati pressoché omogenei, allora si può ricorrere ad un modello continuo o ad una macromodellazione. In questo approccio, il materiale viene idealizzato come un continuo omogeneo, senza distinzione tra malta e unità, e i legami costitutivi determinano relazioni tra tensioni e deformazioni medie: in questo modo lo sforzo computazionale rispetto al micromodello è sensibilmente ridotto. Il difetto principale è che il caratteristico collasso a taglio della muratura non può essere incluso nel macromodello proprio perché le geometrie di malta e unità non sono discretizzate.

Le **proprietà meccaniche macroscopiche** da assegnare a questo materiale ideale possono essere determinate in due modi:

- **attraverso un approccio fenomenologico:** effettuando delle prove sperimentali a trazione, compressione e taglio su elementi rappresentativi della muratura, è possibile ottenere le proprietà meccaniche globali della muratura, da assegnare poi al modello (Andreas 1996).
- **attraverso tecniche di omogeneizzazione:** poiché nella muratura è riscontrabile una cella di base che si ripete periodicamente, a partire dalle proprietà meccaniche degli elementi costituenti, è possibile calcolare con sufficiente accuratezza le caratteristiche del continuo con le cosiddette tecniche di omogeneizzazione.

In particolare, per quanto riguarda la procedura più semplice, si possono individuare due fasi:

1. Si omogeneizza un continuo costituito soltanto da una matrice di blocchi e di giunti di malta verticali, i quali vengono considerati dunque come delle inclusioni nel materiale. (fig. 12b)
2. Il continuo così ottenuto si omogeneizza questa volta secondo i giunti di malta orizzontali, nell'ipotesi di una perfetta aderenza all'interfaccia (fig. 12c).

Il comportamento attribuito ai giunti di malta verticali e orizzontali nella procedura di omogeneizzazione dipende dalle ipotesi formulate (soluzione di Eshelby (1957), teoria dei campi medi di Mori-Tanaka (1973), tecniche di espansione asintotica - Maier (1991), ...).

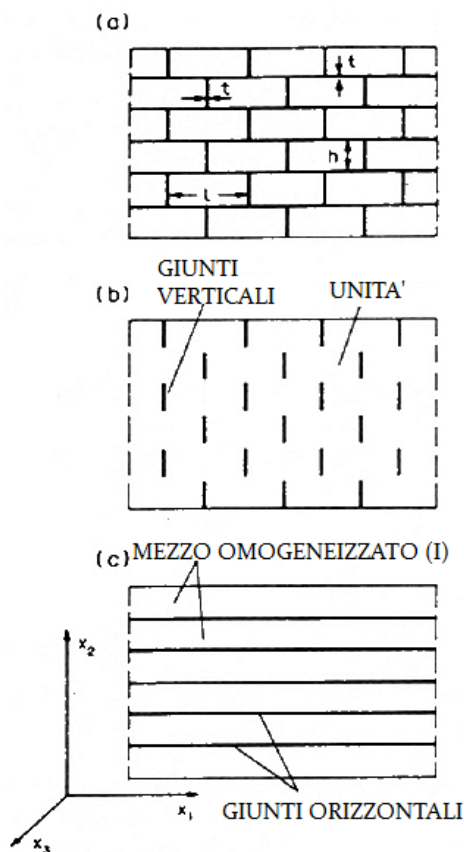


FIGURA 12: PROCEDURA DI OMOGENEIZZAZIONE

Rispetto alla modellazione discreta si ha una perdita in accuratezza, dato che si trattano tensioni e deformazioni medie. Tuttavia, anche se sintetico, questo approccio analitico rappresenta il giusto compromesso tra precisione ed efficienza.

Anche nel più semplicistico approccio della macromodellazione ci sono delle difficoltà, dovute soprattutto alla complessità di modellare il comportamento anelastico anisotropo del continuo. Verranno quindi riportati nei paragrafi successivi alcuni dei legami costitutivi proposti nell'ambito della meccanica del continuo.

## 2.2 LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

Nella procedura di schematizzazione della struttura, l'analisi della sua geometria è un aspetto importante: individuando, infatti, simmetrie o direzioni significative, è possibile semplificarla e ridurne i gradi di libertà.

Le semplificazioni che vengono condotte possono essere:

- **la scelta di sezioni significative della struttura:** rispetto a questa si conduce poi un'analisi piana. Ad esempio si può prendere in analisi una chiesa e studiare la sezione principale della navata.

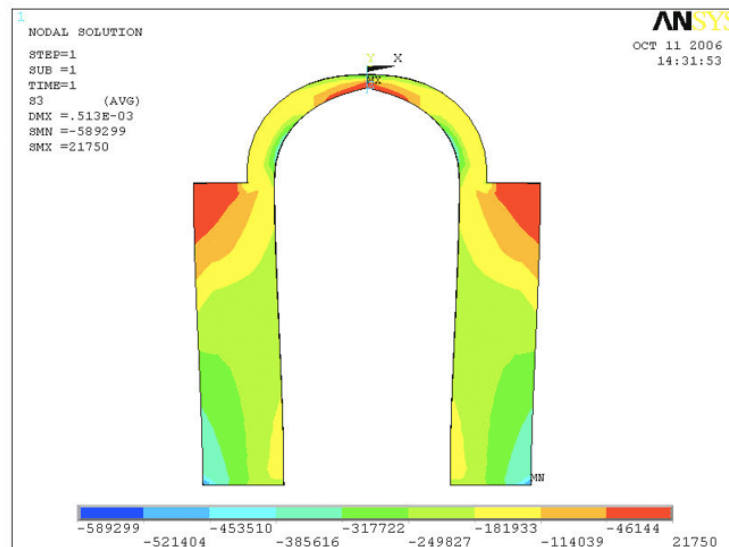


FIGURA 13: ANALISI DELLA SEZIONE DELLA CHIESA DI ST. JULIEN DI COULEUVRE

- **simmetrie dell'elemento:** grazie a queste è possibile suddividere la struttura (o anche il singolo elemento strutturale) in più parti che abbiano il medesimo comportamento e analizzarne una soltanto. E' il caso di una cupola, che può essere suddivisa in "spicchi" per la sua assialsimmetria.

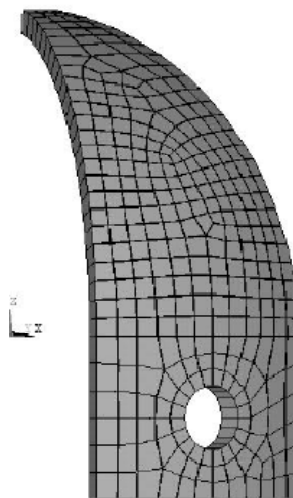


FIGURA 14: ESEMPIO DI PARTE DI CUPOLA SFERICA

Le costruzioni storiche in particolare si caratterizzano proprio per avere spesso una certa modularità o una qualche forma di simmetria, che permettono a volte di rivelare soluzioni di continuità tra elementi strutturali di un complesso storico, anche se in realtà è molto difficile riconoscere corpi indipendenti, aggiunti nel tempo di vita della struttura. Naturalmente è però essenziale indagare bene su questi aspetti per arrivare ad una corretta modellazione.

La scelta dello schema strutturale è influenzata anche dal tipo di elementi che compongono le strutture in muratura: infatti, come illustrato nel corso del primo capitolo, le costruzioni possono essere massive o composte da elementi strutturali con due grandezze prevalenti. Nel primo caso, dunque, la modellazione deve prevedere di elementi solidi (**modellazione tridimensionale**), mentre nel secondo

ciascun elemento può essere schematizzato a seconda del proprio comportamento e delle caratteristiche geometriche:

- *pilastri e colonne*: sono elementi che hanno una lunghezza prevalente, per i quali la modellazione tridimensionale sarebbe eccessiva. Dato che sono generalmente sollecitati a compressione, un elemento monodimensionale (denominato generalmente “TRUSS” all'interno dei programmi agli elementi finiti), consente di semplificare notevolmente la complessità del calcolo, tenendo in considerazione solamente lo sforzo normale.
- *architravi e piattabande*: anche queste hanno una lunghezza prevalente, quindi possono essere modellate con un elemento monodimensionale come un'asta (denominata “BEAM” all'interno dei programmi agli elementi finiti), che semplifica il calcolo tenendo in considerazione, però, tutti gli effetti prodotti da un carico (deformazione assiale, taglio, torsione e momento flettente).
- *pareti, volte e cupole*: questi elementi sono caratterizzati invece da due lunghezze prevalenti. Si modellano, in genere, con elementi bidimensionali, di cui varia il comportamento. Gli elementi dotati di rigidità nel piano, quindi che resistono soltanto a sforzo normale e taglio, sono in genere le membrane (denominate “MEMBRANE” nei programmi FEM). Ci sono poi gli elementi dotati di rigidità flessionale, che sono le piastre (denominate “PLATE”). Per gli elementi strutturali, tuttavia, si utilizzano elementi bidimensionali con le caratteristiche combinate di piastra e membrana (denominati “SHELL”).

Le indicazioni suggerite sopra servono a modellare un'intera struttura, quando si vuole conoscere il comportamento globale di un edificio in muratura. Se però si vuole analizzare soltanto il comportamento locale di alcune parti dell'edificio, si possono considerare solo gli elementi interessati, definendo le opportune condizioni di vincolo che simulino correttamente il legame dell'elemento al resto della struttura.

## 2.3 IL LEGAME COSTITUTIVO

La formulazione del legame costitutivo dipende fortemente dalle ipotesi che si fanno sul materiale, con riferimento alle sue caratteristiche di resistenza e di deformabilità. Le scelte vertono essenzialmente sulla reversibilità o meno delle deformazioni, sulla necessità di modificare o meno la rigidità nel corso della storia di carico e sulla possibilità di degrado della resistenza del materiale oltre un certo stato tensionale.

Dalle osservazioni sopra riportate si possono raggruppare i legami costitutivi in tre tipologie principali:

- **legami non resistenti a trazione** (acronimo NRT)
- **legami plastici**
- **legami di danno**

### 2.3.1 I LEGAMI NRT

E' ben noto ormai che la muratura non è caratterizzata da una buona resistenza a trazione. Tenendo in considerazione questa osservazione, il legame costitutivo più semplice che può essere proposto è quello in cui la resistenza a trazione del materiale non viene proprio considerata. Nei legami NRT, dunque, le deformazioni associate al raggiungimento del limite elastico sono reversibili e corrispondono a tensioni nulle (fig. 15).

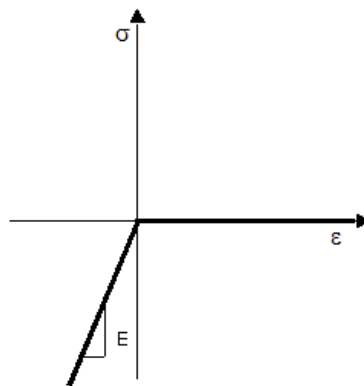


FIGURA 15: RAPPRESENTAZIONE DEL LEGAME NRT

Matrice di rigidezza elastica e dominio di resistenza non subiscono modificazioni nel corso della storia di carico ed il comportamento è descritto unicamente da questi due elementi.

### 2.3.2 I LEGAMI PLASTICI

Il legame plastico assume che il materiale abbia un limite di resistenza oltre il quale si formano delle deformazioni permanenti. Le deformazioni totali sono così composte da un contributo elastico reversibile (solitamente denominato  $\varepsilon^e$ ) e uno anelastico irreversibile ( $\varepsilon^p$ ), come raffigurato in figura 16.

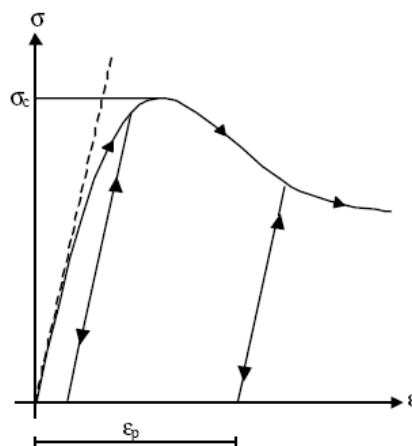


FIGURA 16: IL LEGAME PLASTICO

Anche in questo caso la matrice di rigidezza elastica non subisce modificazioni nel corso della storia di carico. Il processo di deformazione plastica, invece, dipende dal percorso di carico e non solo dal valore dello sforzo applicato, per la sua natura dissipativa (non c'è quindi una corrispondenza biunivoca

tra la tensione e la deformazione plastica). Pertanto, per conoscere le relazioni che legano tensioni e deformazioni esse devono essere scritte in forma incrementale o differenziale.

Una volta raggiunto il punto di snervamento, ovvero il valore per il quale iniziano a svilupparsi deformazioni plastiche, la relazione tensioni-deformazioni può essere di tre tipi: **inrudente** (*hardening*) (fig.17a), **rammollente** (*softening*) (fig. 17b), **perfetta** (fig. 17c).

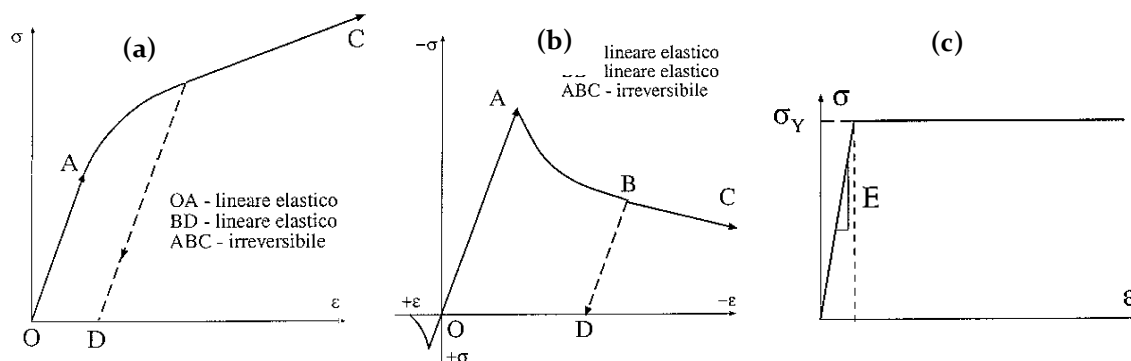


FIGURA 17: I TRE TIPI DI COMPORTAMENTO: HARDENING, SOFTENING ED ELASTO-PLASTICO PERFETTO

L'equazione costitutiva che definisce questo tratto è detta **legge di scorrimento**.

In caso di stati tensionali complessi, si deve definire una funzione che identifichi tutti i punti a partire dai quali ha inizio la deformazione plastica, ovvero si tratta di definire un **criterio di snervamento**. Quando uno stato tensionale si trova sulla superficie definita dalla funzione di snervamento, subentra la legge di scorrimento a definire il legame tra tensione e deformazione. Tale legge può essere di due tipi:

- **associata:** se la direzione dello scorrimento è ortogonale alla superficie
- **non-associata:** se non si verifica la condizione precedente.

Per ottenere l'evoluzione della funzione di snervamento (denominata funzione potenziale plastica) si deve definire il numero di parametri necessari a descriverla, nonché le **equazioni di evoluzione** degli stessi.

Poiché la teoria della plasticità nasce per descrivere il comportamento dei materiali metallici, una delle ipotesi è che la pressione idrostatica non contribuisca alla deformazione plastica per l'incomprimibilità del materiale durante lo scorrimento plastico; i materiali fragili e quasi fragili come la muratura, invece, sono sensibili alla pressione idrostatica, pertanto i criteri di snervamento impiegati devono tenere in considerazione questo aspetto. Essi sono il criterio di Mohr-Coulomb e quello di Drucker-Prager.

### 2.3.2.1 IL CRITERIO DI MOHR-COULOMB

Secondo questo criterio, la rottura si verifica su un piano quando viene raggiunta una combinazione critica degli sforzi normali e tangenziali. Si tratta di una generalizzazione della legge di rottura per attrito e si esprime attraverso la relazione

$$\tau = c - \sigma_n \tan \varphi \quad (2.1)$$

dove  $\tau$  è il valore della tensione tangenziale sul piano di rottura,  $c$  è la coesione,  $\sigma_n$  è la tensione normale sul piano di rottura e  $\varphi$  è l'angolo di attrito interno.

In pratica, rispetto alla legge di rottura per attrito, la tensione di snervamento non è legata soltanto alla tensione tangenziale massima, ma anche alla tensione normale applicata sul piano di taglio.

L'equazione è rappresentabile graficamente tramite una retta tangente al cerchio dato dalla tensione principale massima (fig. 18).

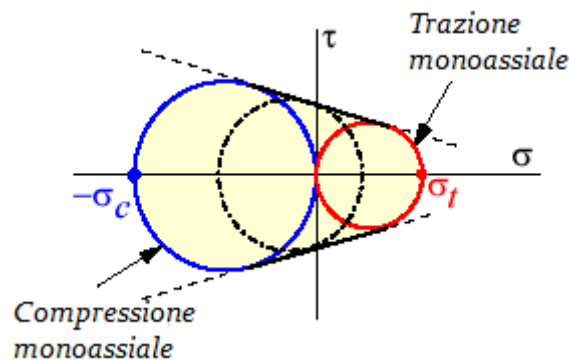


FIGURA 18: RAPPRESENTAZIONE DEL CRITERIO DI MOHR-COULOMB SUL PIANO  $\sigma$ - $\tau$

Secondo questo criterio, la rottura avviene dunque quando il punto rappresentante lo stato di tensione cade all'esterno dell'area definita dai due cerchi di Mohr, quello della resistenza a trazione monoassiale e quello a compressione monoassiale.

Nello spazio delle tensioni principali la superficie di snervamento è prismatica, mentre sul piano deviatorico è un esagono irregolare, in accordo con la caratteristica dei materiali sensibili alla pressione idrostatica di avere una resistenza a trazione minore di quella a compressione (fig. 19).

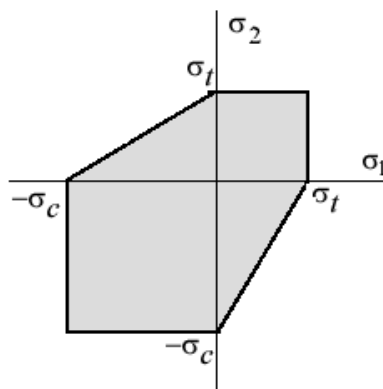


FIGURA 19: IL CRITERIO DI MOHR-COULOMB NEL PIANO DELLE TENSIONI PRINCIPALI (PLANE STRESS)

### 2.3.2.2 IL CRITERIO DI DRUCKER-PRAGER

Il criterio di Drucker-Prager cerca di risolvere uno dei problemi connessi con la superficie definita dal criterio di Mohr-Coulomb. Nel piano deviatorico, infatti, il dominio elastico del materiale ha la forma di un esagono irregolare, ma questo crea problemi nel momento in cui si devono calcolare gli incrementi di deformazione plastica agli angoli.

Modificando, dunque, il criterio di rottura di Von Mises (in cui le componenti idrostatiche sono influenti nella deformazione plastica), Drucker e Prager ottengono un criterio rappresentabile nello spazio delle tensioni principali mediante un cono (fig.20).

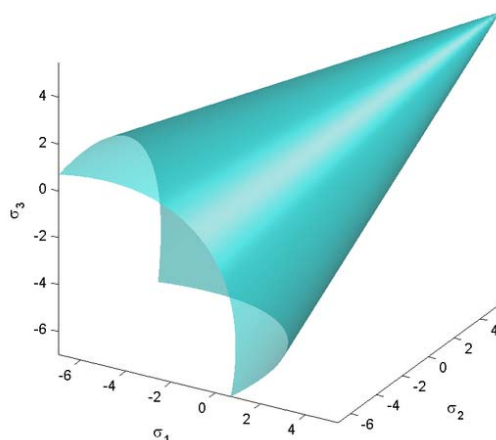


FIGURA 20: RAPPRESENTAZIONE DEL CRITERIO DI DRUCKER-PRAGER NELLO SPAZIO DELLE TENSIONI PRINCIPALI

Nel piano delle tensioni principali (in condizioni di *plane stress*) appare pertanto di forma ellittica, rendendo più semplice la determinazione degli incrementi di deformazione plastica. La seguente rappresentazione grafica mostra un confronto fra i due criteri di snervamento nel piano deviatorico, dove il criterio di Mohr-Coulomb ha forma circolare.

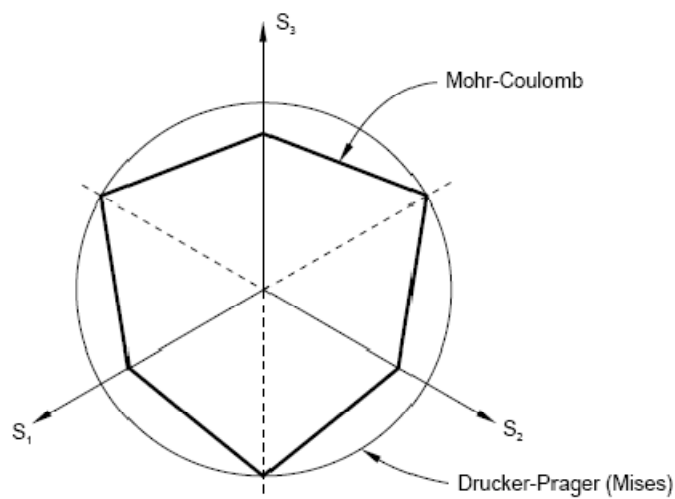


FIGURA 21: CRITERI DI MOHR-COULOMB E DRUCKER-PRAGER NEL PIANO DEVIATORICO

### 2.3.3 I LEGAMI DI DANNO

A differenza della teoria della plasticità, la meccanica del danno nel continuo riesce a cogliere le microfessurazioni che nascono e si sviluppano nel materiale sollecitato oltre la tensione massima e che hanno, come effetto primario, quello di comportare una **riduzione della rigidità del materiale stesso**, specialmente nelle sollecitazioni a trazione (fig. 22). Questa caratteristica si presenta in maniera evidente nelle strutture soggette a carichi ciclici e/o dinamici, dove si passa alternativamente dalla regione a trazione a quella a compressione.



Come per la deformazione plastica, anche il danno si presenta come un processo irreversibile sotto forma di una frattura che si sviluppa in seguito ad un aumento della concentrazione di microdifetti a causa delle sollecitazioni subite dal materiale (esattamente come descritto per il comportamento del materiale muratura).

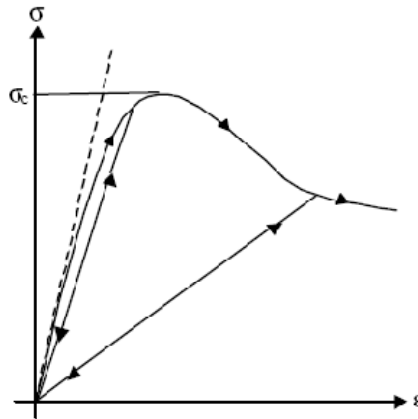


FIGURA 22: IL LEGAME DI DANNO

La meccanica del danno si distingue da quella della frattura principalmente nel modo in cui è concepito il processo fessurativo. Nella meccanica della frattura, il danno si considera concentrato lungo una linea; tale idealizzazione tuttavia non sempre è realistica per tutte le applicazioni: infatti, la larghezza e la densità della zona dove sono presenti le microfessure dipende dalla forma e dalle dimensioni della struttura, nonché dal tipo di carico applicato. Questo tipo di degrado può essere studiato, pertanto, solo con modelli continui, per i quali si deve introdurre un nuovo concetto, quello di continuo **non locale**. Le teorie **locali** sono quelle per le quali la tensione in un punto dipende solo dalla deformazione nello stesso punto; al contrario, la teoria non locale continua stabilisce che la tensione in un punto dipende, oltre che dalla deformazione in quel punto, anche da una deformazione media definita nell'intorno del punto stesso.

L'effetto di degrado del materiale dovuto alla crescita e alla coalescenza delle microfessure viene descritto attraverso una **variabile continua di danno**, introdotta per la prima volta da Kachanov: essa rappresenta una misura quantitativa del degrado delle grandezze che descrivono il comportamento macroscopico di un continuo. Per lo sviluppo di un buon modello costitutivo di danno, pertanto, è necessaria un'opportuna definizione di una variabile continua di danno, che generalmente si basa sul concetto di energia di frattura. Il valore di questa variabile è generalmente compresa fra 0 e 1, dove al valore nullo corrisponde un materiale integro e quello unitario un materiale completamente danneggiato.

Modelli di danno ancora più rilevanti sono quelli **unilaterali**. Si sa, infatti, che i materiali fragili e quasi-fragili sono caratterizzati, a trazione, da uno sviluppo di fessure, mentre quando sono sollecitati a compressione, si ha una chiusura parziale o totale di queste fessure. Di conseguenza, si assiste ad un recupero di rigidità e resistenza con l'inversione di carico, che un modello di danno unilaterale riesce a prendere in considerazione, mediante l'introduzione di una **parametro di richiusura delle fessure**, che dipende dal materiale e dal tipo di carico. In tal caso si distingue il danneggiamento a trazione da quello a compressione.

Esempi di legame costitutivo di danno adatto alla muratura sono quelli di Luciano-Sacco (1997), Gambarotta-Lagomarsino (1997) e Berto et al. (2001).

### 2.3.3.1 IL CRITERIO DI LUCIANO-SACCO

Si tratta di un modello discreto, dove si ipotizza lo sviluppo del danno lungo i giunti verticali e orizzontali della muratura. Il danneggiamento del materiale è descritto attraverso un degrado della rigidità del materiale attribuendo alla muratura un modulo elastico globale in ogni stato della storia di danno. Questo nell'ipotesi che la posizione delle fessure (ovvero il meccanismo di rottura - fig. 23) influenzi la risposta elastica del volume di riferimento.

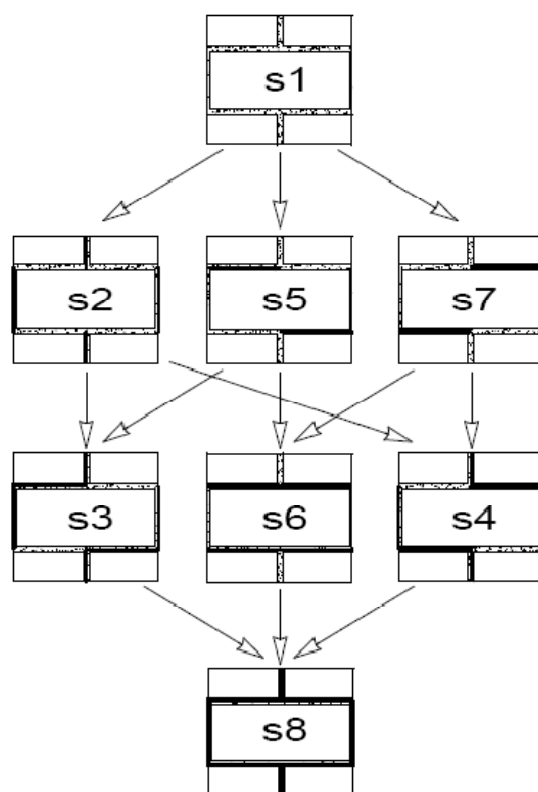


FIGURA 23: STATI E POSSIBILI PERCORSI PER LA MURATURA (LUCIANO-SACCO 1997)

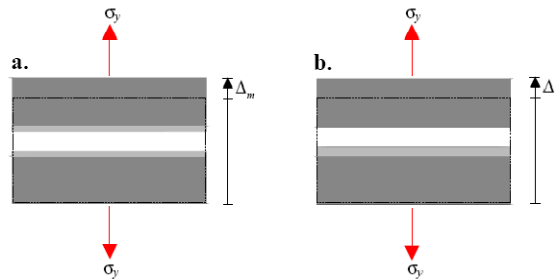
In un secondo momento, accanto al degrado della rigidità globale vengono proposte due differenti leggi macroscopiche di danno associate alla resistenza dei giunti di malta: la prima si basa su un approccio di tipo energetico (tipico della meccanica della frattura elastica), mentre la seconda su una legge coesiva locale (tipo Coulomb).

### 2.3.3.2 IL CRITERIO DI GAMBAROTTA-LAGOMARSINO

Nel legame Gambarotta-Lagomarsino le equazioni costitutive sono finalizzate alla modellazione di pareti murarie su grande scala soggette ad azioni sismiche nel loro piano. Il materiale composito muratura viene assimilato ad un materiale stratificato, dove si alternano i giunti orizzontali continui di malta ai mattoni. La discontinuità meccanica data dai giunti secondari, dunque, non viene presa in considerazione, nell'ipotesi che non contribuiscano alla risposta del materiale né in termini di resistenza, né in termini deformativi.

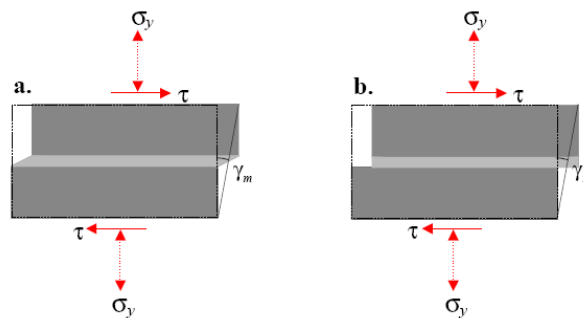
Il legame considera, pertanto, tre meccanismi di danneggiamento:

- il danneggiamento (o la decoesione) dei giunti di malta orizzontali a causa di una tensione di trazione applicata ortogonalmente al loro piano medio;



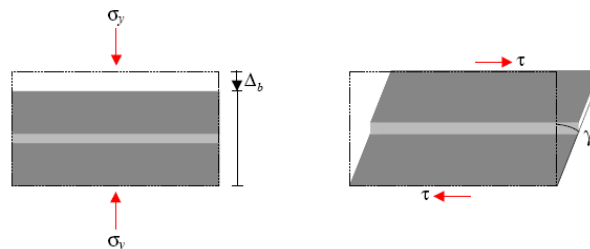
**FIGURA 24: IL DANNEGGIAMENTO (a) O LA DECOESIONE (b) DOVUTE AD UNA TENSIONE DI TRAZIONE**

- il danneggiamento (o la decoesione) dei giunti di malta orizzontali dovuto ad una tensione tangenziale agente nel piano della parete. Questo può essere limitato, mediante l'attrito, da un'eventuale tensione di compressione agente in direzione ortogonale al loro piano medio;



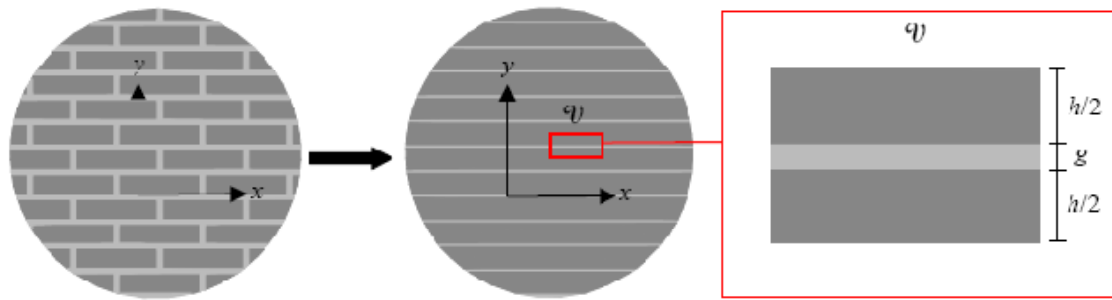
**FIGURA 25: IL DANNEGGIAMENTO (a) O LA DECOESIONE (b) DOVUTE AD UNA TENSIONE TANGENZIALE**

- il danneggiamento e la rottura dei blocchi per compressione normale al piano dei giunti di malta orizzontali e per taglio agente sulla giacitura degli stessi giunti.



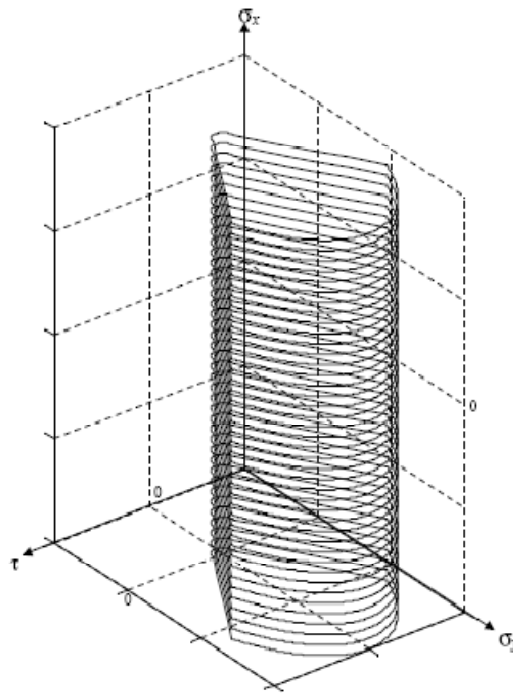
**FIGURA 26: ROTTURA PER COMPRESSIONE E TAGLIO**

Le equazioni costitutive sono formulate in stato piano di tensione e il materiale composito viene assunto come rappresentativo della muratura in seguito ad una procedura di omogeneizzazione.



**FIGURA 27: SCHEMATIZZAZIONE DEL VOLUME DI RIFERIMENTO NEL LEGAME GAMBAROTTA-LAGOMARSINO**

La caratteristica peculiare del modello è che il tensore delle deformazioni medie, espresso in funzione del tensore delle tensioni medie, è costituito da un contributo elastico dato dal materiale omogeneizzato e da uno anelastico associato al danno. La parte anelastica in particolare dipende dalle tensioni applicate, dalle proprietà deformative anelastiche del materiale e da tre variabili di stato che rappresentano il livello di danno in ogni momento della storia di carico.



**FIGURA 28: IL DOMINIO DEL LEGAME GAMBAROTTA-LAGOMARSINO NELLO SPAZIO DELLE TENSIONI**

L'evoluzione del danno, invece, è regolata da due leggi di evoluzione, la prima derivante dalla meccanica della frattura, che esprime la perdita di coesione associata al progredire del danno, mentre la seconda si basa sul criterio di Mohr-Coulomb ed esprime la risposta ad attrito dei giunti.

### 2.3.3.3 IL CRITERIO DI BERTO

Questo criterio si basa su un approccio di tipo fenomenologico (si ricorda che questo approccio prevede l'ottenimento delle proprietà meccaniche del composito da prove sperimentali), a differenza di quello precedentemente descritto che utilizzava una procedura di omogeneizzazione.

Il modello considera la muratura come un continuo ortotropo con diverse caratteristiche di deformabilità e di resistenza rispetto alle due direzioni date dagli assi del materiale (dovute alla presenza dei giunti orizzontali e verticali).

Si definiscono quattro tensioni chiamate “equivalenti”: si tratta di tensioni locali interne definite sulla base delle tensioni medie agenti parallelamente ai giunti di malta, due lungo la direzione x (assunta parallela ai giunti di malta orizzontali) e due lungo la direzione y (ortogonale ai giunti orizzontali).

Per ciascuno dei quattro parametri di danno vengono poi definite una legge di evoluzione ed un criterio di danno, che si basa sul superamento di una soglia di resistenza data dalla superficie illustrata nella figura sottostante.

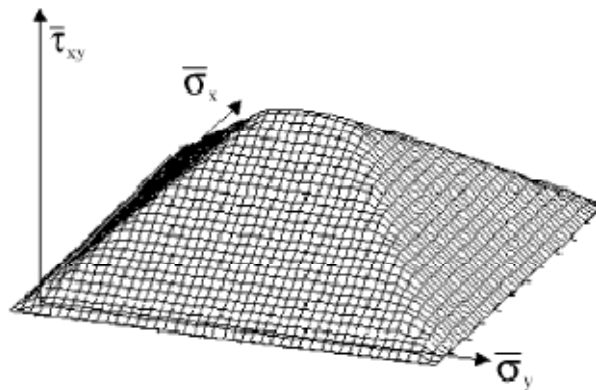


FIGURA 29: LA SUPERFICIE LIMITE ASSUNTA PER IL MODELLO DI DANNO DI BERTO ET AL.

Le leggi di evoluzione del danno possono essere rappresentate graficamente proprio a partire dalla superficie limite:

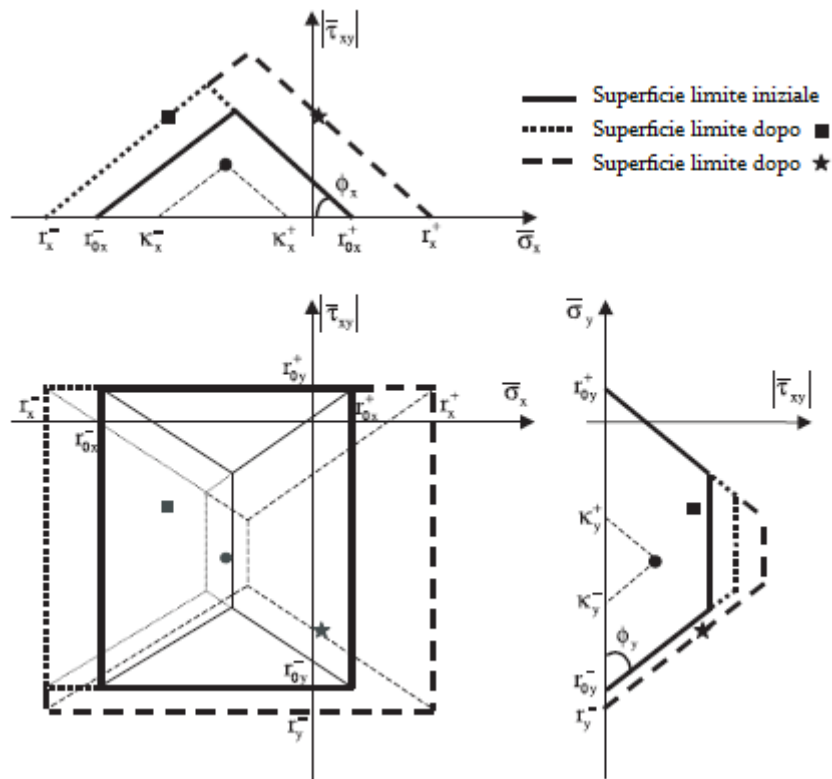


FIGURA 30: RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'EVOLUZIONE DEL DANNO

Nell'immagine, il punto di forma circolare è rappresentativo di uno stato non danneggiato (quindi non c'è evoluzione della superficie limite), il punto di forma quadrata indica che si è sviluppato soltanto un danno a compressione nella direzione  $x$  e il punto a stella rappresenta uno stato tensionale tale da indurre la crescita del danno a compressione sia nella direzione  $y$  che nella direzione  $x$ .

## 2.4 CARATTERISTICHE DEI MODELLI DI DANNO E PLASTICITÀ

I modelli di danno e plasticità nascono per **unire la teoria della plasticità e la meccanica del danno** (descritte nel paragrafo 2.3) in un unico modello, in modo da poter prendere in considerazione sia i contributi irreversibili dovuti alle deformazioni plastiche, sia quelli relativi ai processi di danneggiamento del materiale.

Le due teorie sono, infatti, **complementari** in quanto il degrado della rigidità non viene colto dalle teorie plastiche, mentre caratteristiche quali le deformazioni permanenti e l'espansione volumetrica anelastica non sono considerate all'interno della meccanica del danno continuo. Nasce così una terza tipologia di legame costitutivo: il **modello di danno elasto-plastico**: in esso il degrado della rigidità viene inserito all'interno della teoria della plasticità.

Uno dei modelli più completi in questo senso formulato per descrivere il comportamento delle strutture in muratura soggette a generici stati di sollecitazione è quello di **Lourenço et al. (1997)**. Si tratta di un modello di danno di tipo fenomenologico, basato sulla teoria della plasticità.

Il modello è formulato in stato piano di tensione e considera il materiale muratura come un continuo ortotropo quasi-fragile, dove le resistenze a trazione e a compressione del materiale nelle due direzioni di ortotropia sono diverse.

Per descrivere il diverso comportamento a trazione e a compressione, vengono utilizzati due criteri di rottura:

- **un criterio "Hill type"**: adottato per descrivere il comportamento a compressione, è una modifica in forma bidimensionale del criterio di Hill. La legge di scorrimento adottata in questo frangente è associativa e il comportamento non lineare del materiale nelle due direzioni di ortotropia è descritto da una fase di *hardening*, seguita da *softening* in regime post-picco (fig.31)

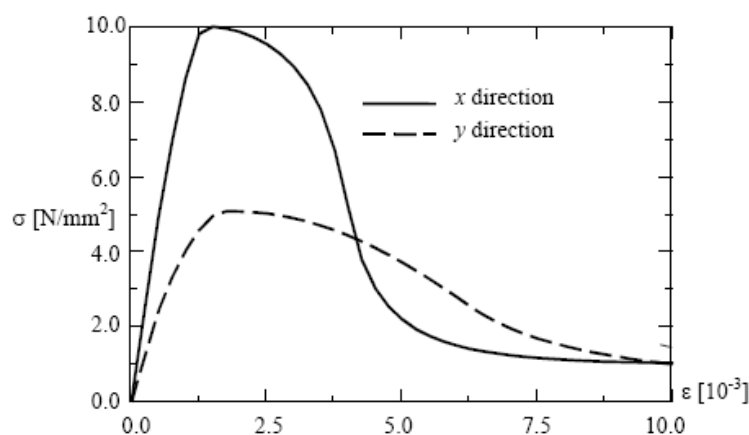


FIGURA 31: RISPOSTA DEL MATERIALE A COMPRESSIONE NELLE DUE DIREZIONI DI ORTOTROPIA

- un criterio **“Rankine type”**: adottato per descrivere il comportamento a trazione, è una modifica del criterio di Rankine per tener conto dell’anisotropia del materiale. Anche in questo caso, la legge di scorrimento adottata è di tipo associato. Il comportamento non lineare, però, è descritto da una fase di *softening* in regime post-picco (fig. 32)

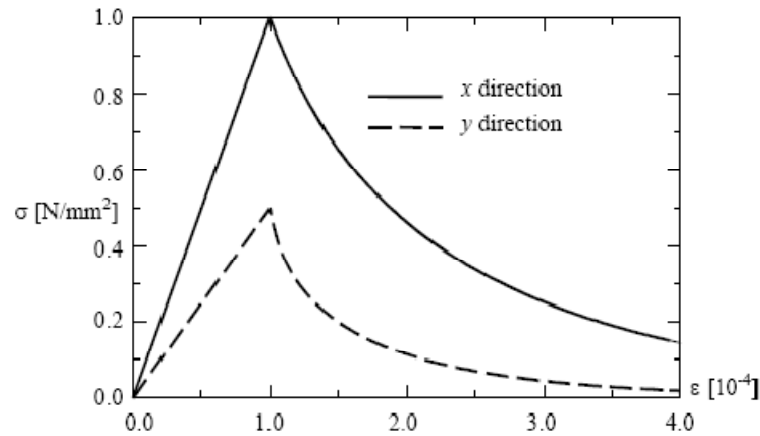


FIGURA 32: RISPOSTA DEL MATERIALE A TRAZIONE NELLE DUE DIREZIONE DI ORTOTOPIA

Il legame costitutivo composito che ne deriva mette insieme i diversi meccanismi di rottura a trazione e a compressione del materiale, poiché nel primo caso si ha generalmente un processo fessurativo localizzato (frattura), mentre nel secondo è più distribuito (schiacciamento). Il criterio composito nel piano delle tensioni con curve caratterizzate da un valore costante della tensione tangenziale si presenta, dunque, così:

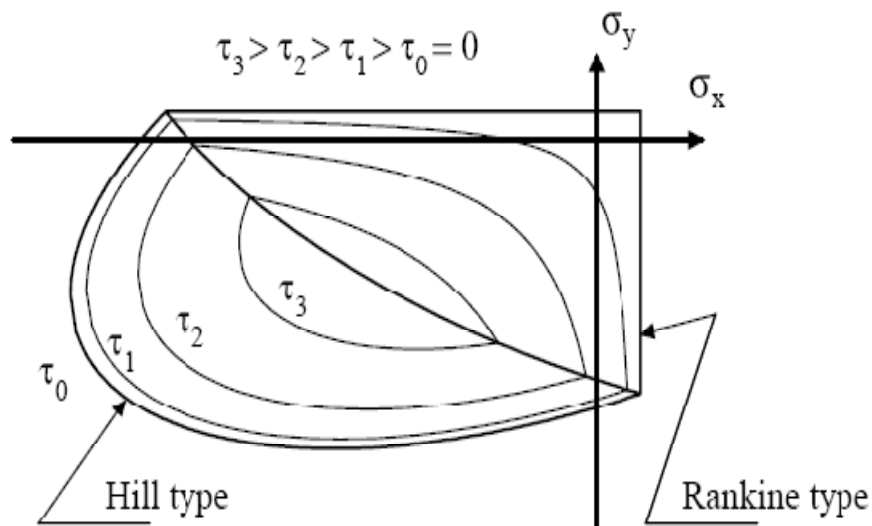


FIGURA 33: IL DOMINIO LIMITE NEL MODELLO DI LOURENÇO ET AL. (1997)

Essendo basato su un approccio fenomenologico, il modello non distingue i diversi meccanismi di danno che si possono generare nel materiale composito (illustrati nel paragrafo 2.1), ma adotta delle leggi macroscopiche di danno nel continuo, definite mediante osservazioni sperimentali delle caratteristiche di resistenza del composito.

Si introducono, infine, i riferimenti teorici del presente lavoro: il modello di danno e plasticità isotropo definito da Lubliner et al. (1989) e successivamente modificato da Lee e Fenves (1998) e quello anisotropo (basato sul legame costitutivo di Lubliner) formulato da Voyiadjis et al. (2008). Le formulazioni di questi due modelli nascono per descrivere il comportamento non lineare del calcestruzzo e saranno descritti nel dettaglio nei capitoli 3 e 9.



## CAPITOLO 3

# IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ISOTROPO

### 3.1 LA SCELTA DEL MODELLO

Nel capitolo precedente sono state illustrate le basi teoriche e alcune delle tecniche utilizzate per la modellazione delle strutture in muratura, con le relative difficoltà legate al comportamento non lineare di questo materiale quasi fragile. Viene ora preso in considerazione un modello, originariamente formulato per l'analisi numerica del comportamento del calcestruzzo, che per primo si è occupato di prendere in considerazione il problema della trazione nei materiali quasi fragili e dello sviluppo della fessurazione. Si tratta del modello di danno e plasticità isotropo di Lubliner et al., pubblicato nel 1989, e successivamente modificato da Lee & Fenves (1998).

Fino a quel momento, la procedura per l'analisi del calcestruzzo prevedeva l'applicazione della teoria della plasticità nel comportamento a compressione, mentre si trattavano le aree sollecitate a trazione attraverso una delle varie versioni della meccanica della frattura, come ad esempio la meccanica della frattura elastica lineare (Bažant & Cedolin, 1980), i modelli a fessurazione diffusa (Rashid, 1968; Suidan & Schnobrich, 1973; de Borst & Nauta, 1984), il modello a fessurazione fittizia (Hillerborg et al., 1976) e la teoria della banda di fessurazione (Bažant & Oh, 1983). Nonostante il successo di questo tipo di applicazione nella risoluzione di numerosi problemi, la procedura presentava tuttavia alcuni inconvenienti che ne limitavano l'utilità, tra cui la necessità di definire il comportamento disaccoppiato lungo ogni direzione principale di tensione (o di deformazione), l'utilizzo di un fattore arbitrario per garantire una certa resistenza a taglio lungo la fessura, la mancanza di equilibrio nel punto di fessurazione nel momento in cui si forma più di una fessura, la difficoltà nel definire i percorsi tensionali in seguito all'apertura e alla chiusura delle fessure in condizioni di carico ciclico e la complessa gestione dell'effetto combinato della fessurazione e della plasticità nei punti danneggiati. La proposta è stata dunque quella di utilizzare un unico modello costitutivo che governasse, nello specifico, il comportamento non lineare del calcestruzzo, incluso il collasso, sia a trazione che a compressione, attraverso una formulazione basata sempre sulla teoria della plasticità. Il punto fondamentale è che non tutto il comportamento non lineare dei materiali quasi fragili è rappresentato da una deformazione permanente (plastica), ma che, almeno inizialmente, esso è dovuto particolarmente al **degrado della rigidità**.

Il modello di danno e plasticità formulato da Lubliner, con successive modifiche, è stato implementato all'interno del programma agli elementi finiti ABAQUS (v. 6.6.1): anche se originariamente è stato pensato per l'analisi delle strutture in calcestruzzo, tale modello costitutivo presenta caratteristiche che lo rendono adatto anche ad altri materiali quasi fragili quali, appunto, la muratura. Oltre a ciò, l'ulteriore aspetto interessante della formulazione (nella modifica di Lee & Fenves) è che la rende adatta allo studio di strutture soggette a carichi ciclici, poiché tiene conto del recupero della rigidità nel

passaggio dalla regione di trazione a quella di compressione. Il modello implementato non rispecchia esattamente in questo la formulazione teorica, in quanto è previsto un parametro di recupero della rigidità anche nel passaggio inverso (compressione-trazione), come verrà illustrato nei paragrafi successivi.

Il danneggiamento rappresentato nel modello è isotropo è lo stesso in tutte le direzioni, ma si differenzia nella diversa risposta del materiale a trazione e a compressione.

Dopo alcune considerazioni preliminari su isotropia, ortotropia e anisotropia nella modellazione del comportamento di un materiale, importanti per comprendere non solo questa formulazione, ma anche gli argomenti che verranno trattati nei capitoli successivi, sarà quindi introdotto il modello di Lubliner et al., comprensivo delle modifiche apportate successivamente da Lee & Fenves e di quelle apportate al momento dell'implementazione nel programma agli elementi finiti ABAQUS.

### 3.2 ISOTROPIA, ORTOTROPIA E ANISOTROPIA

Isotropia, ortotropia e anisotropia sono termini utilizzati per indicare il comportamento del materiale nelle diverse direzioni, a partire da dato un sistema di riferimento.

Una delle ipotesi semplificative che viene fatta, in genere, per i materiali è di **isotropia**, ovvero quella proprietà per cui il comportamento del materiale è invariante rispetto alla direzione considerata. Fare questa assunzione significa semplificare di molto il problema della formulazione del legame costitutivo, dato che il numero delle variabili coinvolte è limitato. Nel caso di modelli che comprendono anche la meccanica del danno, si utilizzano generalmente delle variabili scalari, che definiscono sostanzialmente l'area specifica di superficie danneggiata, come illustrato nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

Per alcuni materiali, tuttavia, questo tipo di ipotesi non è rappresentativa del comportamento reale. La muratura ne è un esempio: la sua risposta nella direzione parallela ai giunti orizzontali e ortogonale agli stessi è spesso significativamente diversa. Per questa caratteristica, dunque, la muratura può essere considerato un materiale **ortotropo**. La non rappresentatività del modello isotropo in questo caso si traduce in un sovrastima o, molto più spesso, in una sottostima della resistenza del materiale. In questo modo, l'analisi numerica si allontana dalle evidenze sperimentali.

Contrariamente ai modelli isotropi, dal punto di vista computazionale, l'**anisotropia**, ovvero la proprietà per cui il comportamento del materiale dipende dalla direzione considerata, è molto più complessa da formulare, data la necessità di un maggior numero di variabili: si ricorre, quindi, ad una rappresentazione tensoriale del danno, di complessità maggiore soprattutto perché il limite di snervamento del materiale (o superficie di snervamento) non può essere rappresentato in termini di tensioni principali, analogamente al caso isotropo. Per descrivere lo stato tensionale, dunque, si deve utilizzare il tensore delle tensioni completo secondo un sistema di riferimento fissato oppure quello delle tensioni principali, in un sistema di riferimento ruotato di un angolo  $\theta$  rispetto a quello di riferimento (come darà specificato in maniera più dettagliata nel capitolo 9).

Nell'analisi delle strutture in muratura, tuttavia, non è necessario spingersi a tale livello di precisione, dato che si possono identificare due direzioni preferenziali di danno ortogonali fra loro,

parallele ai giunti di malta verticali e orizzontali. Ci si può, pertanto, porre in posizione intermedia rispetto alle due formulazioni isotropa e anisotropa.

Prima di passare alla descrizione del modello va precisato che le strutture analizzate attraverso queste formulazioni sono quelle soggette a **basse pressioni di confinamento**, perché alle alte pressioni (specialmente in caso di compressione triassiale), il comportamento del materiale cambia: l'incrudimento del materiale continua in maniera indefinita e, in tal modo, non si giunge al collasso vero e proprio della struttura, obiettivo, invece, del presente lavoro.

### 3.3 IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ISOTROPO

Come già sottolineato precedentemente, il modello di danno e plasticità isotropo (o *Isotropic Damage Plasticity Model*) è un legame costitutivo che nasce originariamente per descrivere il comportamento del calcestruzzo ma che, per analogia, può essere esteso anche ai materiali quasi fragili e fornisce degli ottimi risultati in caso di strutture soggette a carichi ciclici e/o dinamici. Come detto nel paragrafo precedente, il modello descritto in questo capitolo è il risultato dell'elaborazione di Lubliner et al. e delle successive modifiche di Lee & Fenves, nonché dell'implementazione finale in ABAQUS.

Le principali caratteristiche di questo legame costitutivo possono essere riassunte come segue:

- considera diverse tensioni di snervamento a trazione e compressione
- di conseguenza permette di distinguere il diverso comportamento del materiale a trazione e compressione: in particolare, a trazione si ha un incrudimento negativo (*softening*), mentre a compressione un incrudimento seguito da *softening* fino a rottura
- considera la risposta del materiale uguale in tutte le direzioni
- valuta un diverso degrado della rigidità elastica a trazione e compressione
- in una struttura soggetta a carico ciclico, considera gli effetti di recupero della rigidità

Il danno, attraverso le relazioni costitutive, viene modellato nella cosiddetta **configurazione efficace o non danneggiata**<sup>1</sup>. Quando, infatti, inizia il degrado della rigidità, ovvero comincia a svilupparsi il danno nel materiale, si può esprimere il legame tensioni-deformazioni in due modi: attraverso i valori nominali, che considerano l'intero materiale comprensivo del danno, con vuoti e microfessure; in alternativa, si può ricorrere ai valori efficaci, riferiti alla porzione di materiale non danneggiato tra vuoti e microfessure, più rappresentativa rispetto alla configurazione di riferimento in quanto espressione della parte effettivamente resistente ai carichi esterni. La rappresentazione di questi due stati è data nella figura 1, dove  $\vec{n}$  rappresenta la normale al piano di riferimento,  $\vec{\bar{n}}$  è la normale al piano della configurazione efficace,  $\vec{v}$  è un vettore di riferimento,  $\delta S$  è la configurazione di riferimento o danneggiata, comprensiva sia del materiale intatto che del danno (in nero), mentre  $\delta \bar{S}$  è la superficie intatta tra microfessure.

<sup>1</sup> Nella formulazione originaria di Lubliner il legame costitutivo è espresso senza ricorrere al concetto di tensione efficace introdotto da Kachanov nel 1958 all'interno della meccanica del danno; secondo Lubliner, infatti, il concetto è più appropriato per la plasticità nei metalli e per il creep, ma meno per il calcestruzzo e i geomateriali.

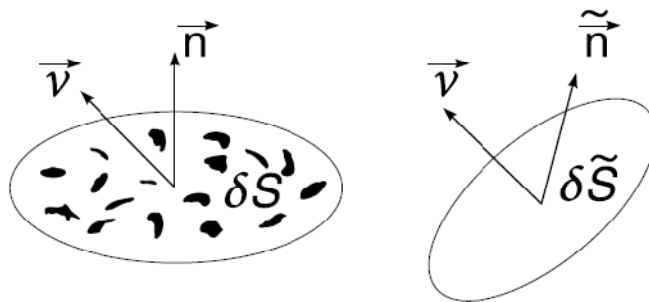


FIGURA 1: CONFIGURAZIONI DI RIFERIMENTO ED EFFICACE

Per poter esprimere il danno nella configurazione efficace, è necessario definire una relazione tra le tensioni nella rappresentazione danneggiata e non danneggiata. A partire dall'equilibrio delle forze

$$\bar{\sigma}_{ij} \delta \bar{S} = \sigma_{ij} \delta S \quad (3.1)$$

e chiamando  $\delta S_d$  la superficie danneggiata, si esprime il danno come:

$$\varphi = \frac{\delta S_d}{\delta S} = \frac{\delta S - \delta \bar{S}}{\delta S} \quad (3.2)$$

Il parametro che esprime il danno rappresenta quindi l'area specifica di superficie danneggiata, come descritto nell'introduzione all'isotropia al paragrafo 3.2. Unendo (3.1) e (3.2) si ottiene la seguente relazione:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \varphi \sigma_{ij} \quad (3.3)$$

dove  $\bar{\sigma}_{ij}$  rappresenta la tensione nella configurazione efficace (o semplicemente **tensione efficace**),  $\varphi$  rappresenta la variabile di degrado della rigidità e  $\sigma_{ij}$  la tensione nella configurazione di riferimento (o **tensione nominale**).<sup>2</sup>

Esposta la relazione che permette di passare dalla configurazione efficace a quella danneggiata, è importante specificare su quale ipotesi si basa: è possibile, infatti, ipotizzare sia l'equivalenza dell'energia di deformazione elastica tra configurazione danneggiata e non danneggiata, sia **l'equivalenza di deformazione**. È proprio quest'ultima l'ipotesi utilizzata nel modello isotropo (nella formulazione modificata di Lee & Fenves), dove

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (3.4)$$

con  $\varepsilon_{ij}$  tensore delle deformazioni nominale e  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  tensore delle deformazioni efficace. Sotto questa ipotesi, dunque, scrivere il tensore di deformazione nella configurazione danneggiata o non danneggiata nelle equazioni costitutive è equivalente.

Passando ora alla definizione delle equazioni che governano il modello, dalla teoria incrementale della plasticità si ha la possibilità di decomporre **il tensore delle deformazioni nella somma di una componente elastica e di una plastica**:

<sup>2</sup> Le tensioni e le deformazioni efficaci saranno d'ora innanzi identificate con un trattino al di sopra della lettera, per distinguerle da quelle nella configurazione di riferimento

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.5)$$

Poiché questo modello non è influenzato dalla velocità di deformazione (non si tratta di un modello di *creep* dipendente dal tempo), la stessa relazione può essere espressa anche in termini incrementali:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.6)$$

A questo punto, la **componente elastica** del tensore delle deformazioni viene definita mediante la legge di Hooke:

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.7)$$

dove  $E_{ijkl}$  è il tensore di rigidità elastica del quarto ordine, rappresentata in forma matriciale, si ricorda, da:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Dalle equazioni (3.5) e (3.7), la relazione tensioni-deformazioni può essere espressa come:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (3.9)$$

Per quanto riguarda, invece, la **componente plastica**, che tiene conto di tutte le deformazioni irreversibili (comprese quelle dovute alla microfessurazione), la **relazione tensione nominale-deformazione** può essere espressa nei seguenti termini:

$$\sigma_{ij} = (1 - \varphi) \bar{E}_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (3.10)$$

dove

$$E_{ijkl} = (1 - \varphi) \bar{E}_{ijkl} \quad (3.11)$$

in base al concetto di elasticità danneggiata,  $\varphi$  rappresenta dunque il **degrado della rigidità elastica**: infatti, per  $\varphi = 0$  si ha la condizione di materiale non danneggiato (dunque le tensioni efficaci e quelle nominali coincidono), mentre per  $\varphi = 1$  il materiale è completamente danneggiato, pertanto  $0 \leq \varphi \leq 1$ .

Tale relazione, pertanto, rappresenta il danno isotropo attraverso la variabile scalare  $\varphi$ . La formulazione originale di Lubliner et al. era leggermente più complessa per quanto riguarda le variabili di danno. Non considerando, infatti, il concetto di tensione efficace, il degrado della rigidità viene descritta attraverso due serie di variabili di danno scalari, le cosiddette variabili di degrado elastiche e plastiche. Le prime sono simili alle variabili di danno formulate nella meccanica del danno, per cui la loro variazione è associata alla deformazione totale, ma senza dover definire un criterio di danno. Le variabili di degrado plastico, invece, sono associate alla deformazione plastica e sono state introdotte per la prima

volta da Chaboche (1977). Il punto importante è che, non utilizzando il concetto di tensione efficace, le variabili di degrado utilizzate dal modello isotropo nella formulazione originaria e quelle che compaiono nella meccanica del danno nel continuo sono diverse. La rigidità, dunque, dipende da queste variabili, ma non si tratta di una rigidità equivalente in una ipotetica configurazione non danneggiata, come descritto in precedenza. In questo modo anche il criterio di snervamento non dipende dalle variabili di degrado, contrariamente alla meccanica del danno nel continuo che, basandosi sul concetto di tensioni efficaci, necessariamente porta le variabili di danno anche nel criterio di snervamento.

Quello che di importante introduce la formulazione originale, invece, è che per un'accurata descrizione del comportamento non lineare del materiale è necessario distinguere il **danneggiamento a trazione e a compressione**, realizzato nella formulazione finale attraverso due diverse variabili.

Per tener conto di quest'ultimo aspetto, viene valutato dapprima il degrado della rigidità in stato di tensione monoassiale, espressa mediante le seguenti relazioni:

a) A trazione:

$$\sigma^+ = (1 - \varphi^+) \bar{E} (\varepsilon^+ - \varepsilon^{+p}) \quad (3.12)$$

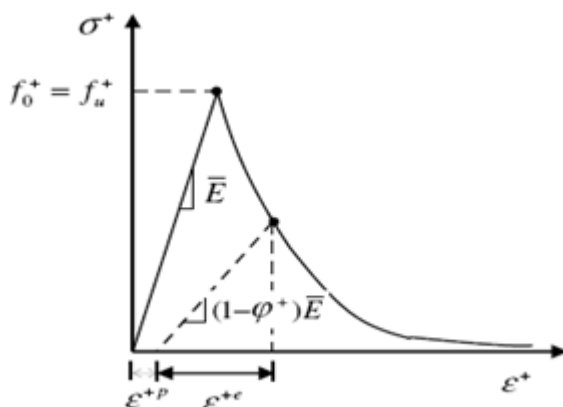


FIGURA 2: RISPOSTA DEL CALCESTRUZZO A TRAZIONE MONOASSIALE

b) A compressione:

$$\sigma^- = (1 - \varphi^-) \bar{E} (\varepsilon^- - \varepsilon^{-p}) \quad (3.13)$$

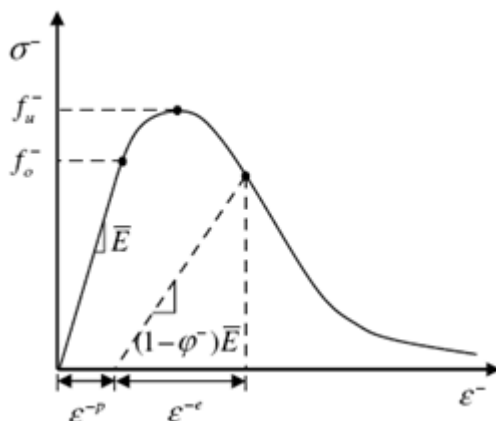


FIGURA 3: RISPOSTA DEL CALCESTRUZZO A COMPRESIONE MONOASSIALE

dove

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^- \quad (3.14)$$

Dove  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  sono le componenti positiva e negativa del tensore delle tensioni nella configurazione danneggiata.

Anche le variabili di degrado a trazione e a compressione esprimono il danno con un intervallo di valori compreso fra 0 (non danneggiato) e 1 (completamente danneggiato):  $0 \leq \varphi^+ \leq 1$  e  $0 \leq \varphi^- \leq 1$ . Nello stato di tensione monoassiale espresso dalle (3.11) e (3.12), le fessure si propagano in direzione trasversale rispetto a quella delle tensioni.

In condizioni di **carico ciclico**<sup>3</sup>, invece, il meccanismo risulta essere più complesso, a causa del fenomeno di apertura e chiusura delle fessure nel materiale. Quest'ultima, in particolare, comporta un **parziale recupero della rigidità elastica**, maggiormente pronunciato nel passaggio dalla regione a trazione a quella a compressione. La relazione  $\sigma_{ij} = (1 - \varphi)\bar{E}_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$  viene quindi modificata affinché si possa tenere in considerazione tale effetto. Il danno nel materiale viene, pertanto, espresso come (Lee & Fenves):

$$\varphi^\pm(\kappa^\pm, \bar{\sigma}_{ij}) = 1 - \left(1 - s(\hat{\sigma}_{ij})\varphi^+(\kappa^\pm)\right)\left(1 - \varphi^-(\kappa^\pm)\right) \quad (3.15)$$

dove

$$s(\hat{\sigma}_{ij}) = s_0 + (1 - s_0)r(\hat{\sigma}_{ij}) \quad (3.16)$$

con  $0 \leq s_0 \leq 1$  che stabilisce il valore minimo di  $s(\hat{\sigma}_{ij})$ , parametro di recupero della rigidità nel passaggio dalla regione di trazione a quella di compressione.

Nel programma ABAQUS (v.6.6.1), dove è stato implementato questo legame costitutivo, il recupero della rigidità è stato completato con l'aggiunta di un parametro di recupero anche a compressione (quindi non solo recupero della rigidità nel passaggio dalla regione a trazione a quella a compressione, ma anche viceversa):

$$(1 - \varphi) = 1 - (1 - s^-\varphi^+)(1 - s^+\varphi^-) \quad (3.17)$$

Questo recupero della rigidità è tuttavia molto meno significativo rispetto al precedente, in quanto il passaggio dalla regione a compressione a quella a trazione vede una rapida riapertura delle fessure che si erano già formate durante il ciclo precedente.

- $s^+(\geq 0)$  e  $s^-(\leq 1)$  sono parametri che permettono di considerare il recupero della rigidità in seguito all'inversione di carico e sono a loro volta funzione dei **fattori di peso**, ovvero proprietà del materiale che controllano il recupero:

$$s^+ = 1 - w^+r(\hat{\sigma}_{ij}) \quad (3.18)$$

<sup>3</sup> L'articolo originale di Lubliner et al. non riporta prove a carico ciclico, il concetto di recupero della rigidità è stato introdotto successivamente da Lee & Fenves

$$s^- = 1 - w^- (1 - r(\hat{\sigma}_{ij})) \quad (3.19)$$

•  $r(\hat{\sigma})$  è il fattore di peso che dipende con continuità dalle tensioni principali: se sono tutte positive (tutte di trazione) il suo valore è 1, se sono tutte negative (dunque di compressione) il suo valore è 0; altrimenti in caso intermedio il suo valore è dato da:

$$r(\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \hat{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\hat{\sigma}_i|} \quad (3.20)$$

•  $w^-$  e  $w^+$ : se il loro valore è pari a 1 implicano un completo recupero della rigidità, se pari a 0 significa che non c'è recupero della rigidità, come si può vedere nella curva tensione-deformazione di figura 4; ovviamente se i valori sono compresi fra 0 e 1 vuol dire che c'è soltanto un parziale recupero della rigidità.

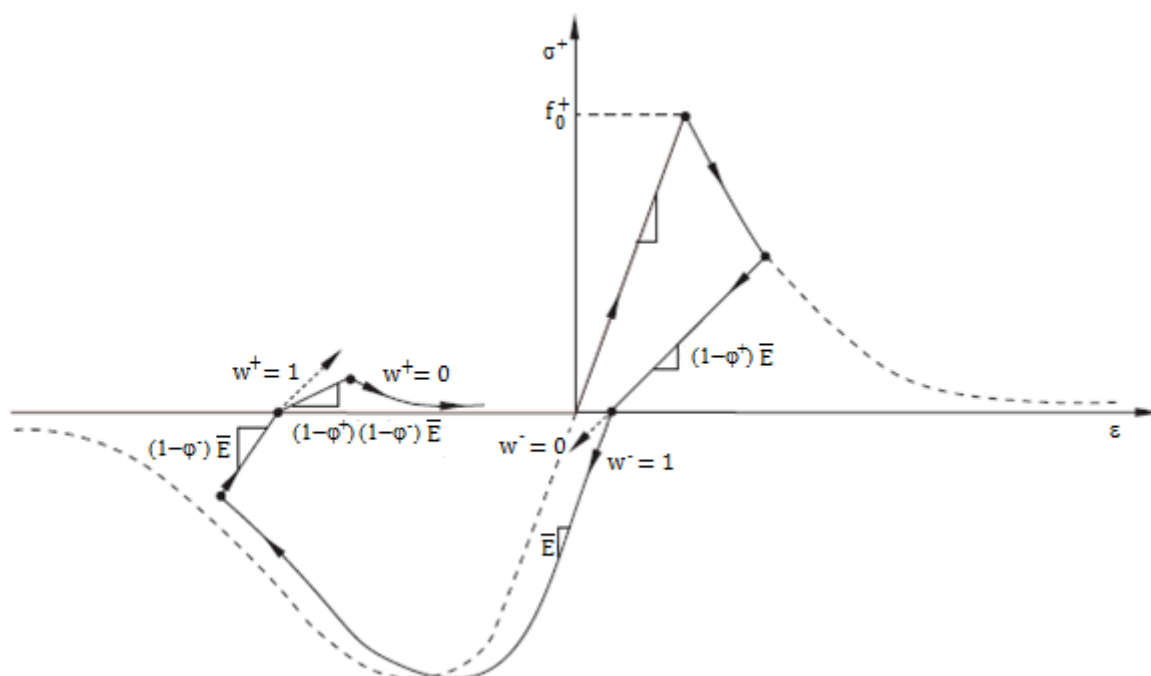


FIGURA 4: RAPPRESENTAZIONE DI UN CICLO DI CARICO CON RECUPERO DELLA RIGIDEZZA

Vediamo ora come si valutano i parametri di degrado a trazione e a compressione,  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$ . Essi dipendono a loro volta da una variabile di stato, la **variabile di danno**  $\kappa$ . Anch'essa è espressa mediante due valori a trazione ( $\kappa^+$ ) e a compressione ( $\kappa^-$ ) indipendenti.

**L'evoluzione della variabile di danno**  $\kappa$  si esprime attraverso la seguente relazione:

$$\dot{\kappa}^\pm = \lambda \tilde{H}^\pm(r(\hat{\sigma}_{ij}), \bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) \quad (3.21)$$

La funzione  $\tilde{H}$  viene derivata considerando la dissipazione plastica, mentre  $\lambda$  rappresenta il moltiplicatore plastico o Lagrangiano. Singolarmente, i due parametri si calcolano a partire dalla definizione della variabile di danno, data da:



$$\kappa^{\pm} = \frac{1}{g^{\pm}} \int_0^{\varepsilon^{\pm ep}} \sigma^{\pm}(\varepsilon^{\pm ep}) d\varepsilon^{\pm ep} \quad (3.22)$$

ove  $\varepsilon^{\pm ep}$  rappresenta la deformazione plastica equivalente (ovvero quella accumulata) a trazione e a compressione, mentre  $g^+$  e  $g^-$  rappresentano l'**energia dissipata durante tutto il processo di fessurazione**, rispettivamente a trazione e a compressione:

$$g^{\pm} = \int_0^{\infty} \sigma^{\pm}(\varepsilon^{\pm ep}) d\varepsilon^{\pm ep} \quad (3.23)$$

Questa energia dissipata non può essere considerata una proprietà del materiale, ma deriva dall'**energia di frattura** a trazione ( $G^+$ ) e a compressione ( $G^-$ ), che invece è una proprietà del materiale. Essa si presenta come il rapporto fra l'energia di frattura e la **lunghezza equivalente**  $l$ :

$$g^{\pm} = \frac{G^{\pm}}{l^{\pm}} \quad (3.24)$$

Per semplicità è meglio assumere una lunghezza equivalente unica; il suo valore è legato alle dimensioni della mesh utilizzata nell'analisi numerica, per ottenere un rilascio di energia quanto più indipendente dalle dimensioni della mesh stessa. Si deve comunque ricordare che è solo il tratto discendente della curva tensioni-deformazioni ad essere sensibile alle dimensioni della mesh.

**Le equazioni di evoluzione dei due parametri di danno** a trazione e compressione sono:

$$\dot{\kappa}^{\pm} = \frac{1}{g^{\pm}} \sigma_{ij}^{\pm}(\kappa^{\pm}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.25)$$

$\sigma_{ij}^+$  e  $\sigma_{ij}^-$  sono le tensioni nominali a trazione e compressione nello stato di tensione monoassiale definite in (3.11) e (3.12). Esse sono funzione di  $\kappa$  perché a sua volta tale parametro determina il valore del parametro di degrado  $\varphi$ , come già detto in precedenza. Affinché siano estese al **caso pluriassiale**, si definisce  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  come segue:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \delta^{+x} r(\hat{\sigma}_{ij}) \hat{\varepsilon}_{max}^p + \delta^{-x} (1 - r(\hat{\sigma}_{ij})) \hat{\varepsilon}_{min}^p \quad (3.26)$$

dove  $\delta$  = delta di Kronecker,  $x = +$  trazione e  $x = -$  in caso di compressione,  $\hat{\varepsilon}_{max}^p$  e  $\hat{\varepsilon}_{min}^p$  sono i valori principali massimi e minimi del tensore delle deformazioni plastico. Pertanto, il valore è  $\delta = 1$  nel caso compressione-compressione ( $\delta^{--}$ ) e trazione-trazione ( $\delta^{++}$ ), mentre  $\delta = 0$  nel caso trazione-compressione ( $\delta^{+-}$ ).

A questo punto servono i valori principali. Essi si ottengono attraverso la **legge di scorrimento** che definisce la componente plastica della deformazione totale.

Nella sua formulazione più generale, la legge di scorrimento è data da:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F^p(\bar{\sigma}_{ij})}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \quad (3.27)$$

dove  $F^p$  è la funzione di **potenziale plastico** che sarà definita a breve. La formulazione della legge di scorrimento relativamente alle deformazioni principali, di conseguenza, è data da:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F^p(\hat{\sigma}_{ij})}{\partial \hat{\sigma}_{ij}} \quad (3.28)$$

Alternativamente, il tutto può essere espresso in forma matriciale:

$$h^\pm(\hat{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = \begin{bmatrix} r(\hat{\sigma}_{ij})\sigma_{ij}^+(\kappa^+)/g^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - r(\hat{\sigma}_{ij}))\sigma_{ij}^-(\kappa^-)/g^- \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e quindi

$$\dot{\kappa}^\pm = h^\pm(\hat{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) \hat{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.30)$$

Sostituendo a  $\hat{\varepsilon}_{ij}^p$  la legge di scorrimento che definisce le deformazioni plastiche principali si ottiene la formulazione definita inizialmente per l'evoluzione del parametro di danno  $\kappa$ :

$$\dot{\kappa}^\pm = \lambda \tilde{H}^\pm(\hat{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) \quad (3.31)$$

dove

$$\tilde{H}^\pm(\hat{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = h^\pm(\hat{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) \frac{\partial F^p(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \quad (3.32)$$

A questo punto, per determinare i valori dei parametri di degrado a trazione e a compressione si deve introdurre ancora una relazione che è funzione di  $\kappa$ ; a trazione e a compressione si presenta come:

$$\rho^\pm = 1 + a^\pm(2 + a^\pm)\kappa^\pm \quad (3.33)$$

Si tratta di una relazione che deriva dalla formulazione di Lubliner et al., nella quale si esprimeva la tensione come funzione del parametro di danno a trazione e a compressione ( $\sigma = f^+(\kappa)$  e  $\sigma = f^-(\kappa)$ ). La funzione  $f(\kappa)$  più conveniente dal punto di vista analitico che possa andar bene sia a trazione che a compressione è consistente con il fatto che le curve tensione-deformazione osservate sperimentalmente tendono a raggiungere uno stato tensionale nullo asintoticamente e può essere derivata dalla relazione tensione-deformazione plastica data da:

$$\sigma = f_0 \left[ (1 + a)e^{-(b\varepsilon^p)} - ae^{-(2b\varepsilon^p)} \right] \quad (3.34)$$

con  $a$  costante adimensionale che può essere calibrata attraverso prove sperimentali; in particolare se  $a > 1$  implica incrudimento iniziale, mentre se  $a < 1$  si ha un comportamento di *softening* subito dopo lo snervamento.

Quindi:

$$\varphi^\pm = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a^\pm} \right) (1 + a^\pm - \sqrt{\rho^\pm(\kappa^\pm)}) \right]^{(d^\pm/b^\pm)} \quad (3.35)$$

$b$  e  $d$  sempre costanti che vengono calibrate mediante i dati sperimentali. Definendo poi

$$\sqrt{\rho^+(\kappa^+)} = \frac{1 + a^+ + \sqrt{1 + (a^+)^2}}{2} \quad (3.36)$$

$$\sqrt{\rho^-(\kappa^-)} = \frac{1 + a^-}{2} \quad (3.37)$$

e sostituendo in (3.33), si ottengono i parametri di degrado a trazione e a compressione, funzione delle costanti ricavate calibrando il modello sui risultati sperimentali:

$$\varphi^+ = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a^+} \right) \left( 1 + a^+ - \frac{1 + a^+ + \sqrt{1 + (a^+)^2}}{2} \right) \right]^{(a^+/b^+)} \quad (3.38)$$

$$\varphi^- = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a^-} \right) \left( 1 + a^- - \frac{1 + a^-}{2} \right) \right]^{(a^-/b^-)} \quad (3.39)$$

Non resta ora che definire le componenti della **legge di scorrimento**, che governa la deformazione del materiale nel campo delle deformazioni plastiche, e quindi calcolare i valori della tensione nel materiale. Tale equazione fornisce la relazione tra la direzione di scorrimento plastico e l'incremento di deformazione plastica. Ci possono essere due tipi di scorrimento:

- **associato:** quando la direzione di scorrimento è ortogonale alla superficie di snervamento;
- **non associato:** quando non sussiste la condizione di normalità di cui sopra (tipica del caso di materiali la cui deformazione è causata da meccanismi di attrito).

La legge di scorrimento non associata è importante anche per controllare il fenomeno della **dilatanza**, ovvero la variazione di volume nel materiale associata a sollecitazioni di taglio. Si prende, dunque, come riferimento la formulazione generale della legge di scorrimento di cui alla (3.26).

Il **potenziale plastico** stabilito per questo modello è dato da una funzione di tipo Drucker-Prager, definita come:

$$F^p = \sqrt{2J_2} + \alpha^p I_1 = \|\bar{s}_{ij}\| + \alpha^p I_1 \quad (3.40)$$

dove

$$\|\bar{s}_{ij}\| = \sqrt{\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}} \quad (3.41)$$

è la norma della parte deviatorica del tensore delle tensioni con

$$\bar{s}_{ij} = -\frac{1}{3} tr \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.42)$$

e  $\alpha^p$  è un valore scelto per dare al modello l'appropriata dilatanza.

$I_1$  e  $J_2$  sono gli invarianti definiti come:

$$I_1 = tr \bar{\sigma}_{ij} \quad e \quad J_2 = \frac{1}{2} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} \quad (3.43 \text{ a,b})$$

Nel modello implementato in ABAQUS v.6.6.1, l'equazione che definisce la funzione potenziale è dato da:

$$F^p = \sqrt{(\epsilon f_0^+ \tan \psi)^2 + \bar{q}^2} - \bar{p} \tan \psi \quad (3.44)$$

dove  $\epsilon$  rappresenta l'eccentricità (cioè la velocità a cui la funzione si appropria all'asintoto),  $f_0^+$  è la resistenza a trazione monoassiale,  $\psi$  è la dilatanza,  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  sono rispettivamente la pressione idrostatica efficace e la tensione equivalente di von Mises efficace, definiti come:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} tr \bar{\sigma}_{ij} \quad e \quad \bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}} \quad (3.45 \text{ a,b})$$

Non rimane ora che scrivere la **funzione di snervamento**<sup>4</sup>, la superficie che delimita il dominio elastico del materiale. Nella sua formulazione generale, essa è data da:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = 0 \quad (3.46)$$

Va sottolineato che se si verifica tale uguaglianza, il materiale si trova in campo anelastico e la relazione tensioni-deformazioni è fornita dalla legge di scorrimento; al contrario se si verifica che

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) < 0 \quad (3.47)$$

il materiale si trova all'interno del dominio elastico e dunque il legame tensioni-deformazioni è dato dalla legge di Hooke.

Nel presente modello, la funzione di snervamento è una superficie composta da due funzioni di tipo Drucker-Prager, così sviluppata per tener conto del diverso comportamento del materiale a trazione e compressione; nel modello di Lee & Fenves<sup>5</sup> la funzione è definita da:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = \frac{1}{(1-\alpha)} (\alpha I_1 + \sqrt{3} J_2 + \beta(\kappa^\pm) \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle) - c^-(\kappa^\pm) \quad (3.48)$$

i due parametri  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano due costanti del materiale e vengono definite rispettivamente come:

$$\alpha = \frac{f_{b0} - f_0^-}{2f_{b0} - f_0^-} \quad (3.49)$$

$$\beta = \frac{f_0^-}{f_0^+} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (3.50)$$

mentre  $c^-(\kappa^\pm)$  rappresenta la coesione (funzione della variabile di danno). Secondo l'ipotesi di Lee & Fenves, infatti, il materiale può essere visto in un modello dove il danno rappresenta la perdita di coesione.

In ABAQUS v.6.6.1 si tiene conto della variazione di volume e del danno mediante la seguente funzione di snervamento, che è sempre la somma di due funzioni di tipo Drucker-Prager in considerazione del diverso comportamento a trazione e compressione del materiale:

<sup>4</sup> Nella formulazione di Lubliner et al. la funzione di snervamento ha forma  $F(\sigma_{ij}) = c$ : non è presente il parametro di danno perché non si considera, come già detto, il concetto di tensione efficace, quindi la superficie è funzione solamente delle componenti di tensione, mentre  $c$  è la coesione del materiale. In questa teoria, il danno totale corrisponde alla perdita completa della coesione.

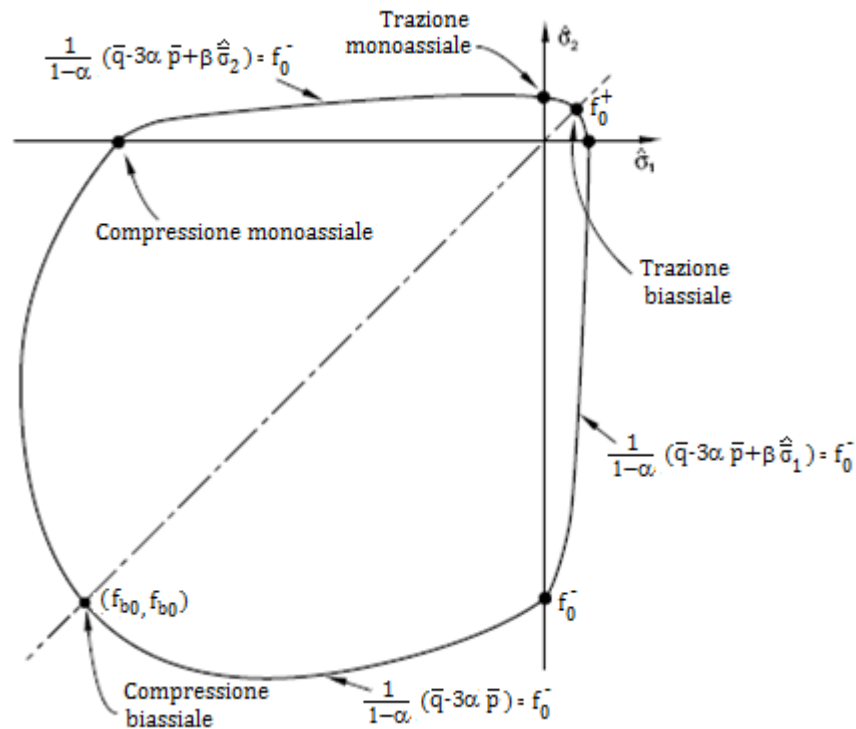
<sup>5</sup> L'equazione è la stessa impiegata nella formulazione di Lubliner et al., ad eccezione del fatto che  $\beta$  e  $c$  non sono funzione del parametro di danno, come già specificato in precedenza.

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = \frac{1}{(1-\alpha)} (\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\varepsilon_{ij}^p)\langle\hat{\sigma}_{max}\rangle - \gamma\langle-\hat{\sigma}_{max}\rangle) - \bar{\sigma}_{ij}^-(\varepsilon_{ij}^{+p}) \leq 0 \quad (3.51)$$

con

$$\beta(\varepsilon_{ij}^p) = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^-(\varepsilon_{ij}^{-p})}{\bar{\sigma}_{ij}^+(\varepsilon_{ij}^{+p})} (1-\alpha) - (1+\alpha) \quad (3.52)$$

con  $\alpha^p$  già definito sopra e  $\bar{\sigma}_{ij}^-(\varepsilon_{ij}^{-p})$  e  $\bar{\sigma}_{ij}^+(\varepsilon_{ij}^{+p})$  tensione di coesione efficace rispettivamente a compressione e a trazione.



**FIGURA 5: LA FORMA DELLA SUPERFICIE DI SNERVAMENTO IN STATO PIANO DI TENSIONE**

In favore dell'implementazione del modello all'interno di un programma agli elementi finiti (in questo caso ABAQUS v.6.6.1), l'ultimo passo da effettuare è la scelta della corretta **modalità di integrazione**, necessaria per tre equazioni costitutive scritte in forma differenziale:

- la legge di evoluzione
- la legge di scorrimento
- la decomposizione in termini incrementali del tensore di deformazione

Generalmente, in ABAQUS/Standard, si utilizza il metodo di Eulero implicito: si tratta di un metodo che passa dalle condizioni iniziali a quelle finali di ogni passo temporale in cui viene valutata la risposta mediante integrazione (tecniche di calcolo alternative sono quelle alle differenze finite). Il sistema aggiorna poi le proprietà globali per somma del risultato del nuovo passo temporale sommato al precedente.

Sempre in ABAQUS (v.6.6.1) è stato aggiunto un altro parametro, quello di viscosità. I modelli di materiali che esibiscono un comportamento di *softening* e di degrado della rigidità, infatti, spesso hanno forti difficoltà di convergenza nei programmi con analisi implicita. Alcune di queste difficoltà di convergenza possono essere superate attraverso una regolarizzazione viscoplastica, che aiuta a migliorare la velocità di convergenza del modello in regime di *softening*. Se il parametro di viscosità è un valore sufficientemente piccolo, assolve il compito senza compromettere i risultati (piccolo in relazione al passo dell'incremento).

Si utilizza la generalizzazione della regolarizzazione di Duvaut-Lions, secondo la quale il tensore incrementale della deformazione viscoplastica  $\dot{\varepsilon}_v^{pl}$  è definito come:

$$\dot{\varepsilon}_v^{pl} = \frac{1}{\mu} (\dot{\varepsilon}^{pl} - \dot{\varepsilon}_v^{pl}) \quad (3.53)$$

dove  $\mu$  è il parametro di viscosità. Allo stesso modo si può inserire nel modello per velocizzare la convergenza, tramite la variabile di degrado della rigidità viscosa  $\varphi_v$ , nella seguente forma:

$$\dot{\varphi}_v = \frac{1}{\mu} (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_v) \quad (3.54)$$

dove  $\varphi$  è la variabile di degrado della rigidità valutata nel modello senza parametro di viscosità. La relazione tensioni-defomazioni nel modello viscoplastico è quindi data da:

$$\sigma_{ij} = (1 - \varphi_v) \bar{E}_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl,v}^{pl}) \quad (3.55)$$

Come già ampiamente sottolineato nel presente capitolo, il modello isotropo è stato implementato nel programma agli elementi finiti ABAQUS; si utilizzerà ora il legame costitutivo isotropo per confrontarne i risultati con alcune prove sperimentali. Saranno effettuate due tipologie di analisi:

- la prima di confronto con dati sperimentali derivanti da prove a taglio su pannelli in muratura ottenute dall'applicazione di un carico monotono. Si tratta di un progetto di ricerca realizzato negli anni '80 presso lo *Swiss Federal Institute of Technology* (ETH) di Zurigo dai professori Ganz e Thürlimann
- la seconda di confronto con dati sperimentali derivanti da prove su fascia di piano in muratura con applicazione ciclica del carico. Si tratta di una campagna di prove condotta nel Laboratorio di Prove Materiali e Strutture dell'Università degli Studi di Trieste nel biennio 2007-2008

Al termine della validazione del modello di danno e plasticità isotropo se ne valuteranno pregi e difetti nell'analisi di elementi strutturali in muratura, nel quadro più ampio di una formulazione ortotropa dello stesso.

## CAPITOLO 4

### VALIDAZIONE DEL MODELLO ISOTROPO

#### 4.1 LE PROVE BIASSIALI DI PAGE

Il primo a realizzare una serie di prove biassiali su pannelli in muratura è stato A.W. Page (1981,1983). Queste prove hanno permesso di determinare i domini di resistenza di diversi pannelli, che verranno ora utilizzati per stimare la validità della superficie di snervamento proposta all'interno del modello di danno e plasticità isotropo. Nell'indicare lo stato tensionale della muratura, si possono utilizzare due diverse rappresentazioni:

1. Si utilizzano le **tensioni principali** ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) con l'angolo di inclinazione ( $\theta$ ) delle direzioni principali di tensione rispetto ai giunti orizzontali, come rappresentato in figura 1.

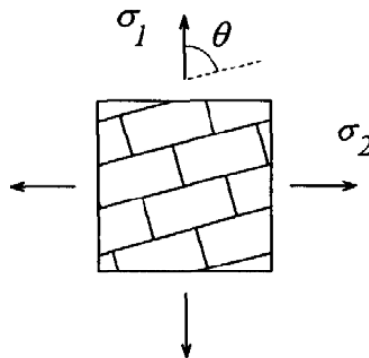


FIGURA 1: STATO TENSIONALE RAPPRESENTATO DALLE TENSIONI PRINCIPALI

2. Si utilizza lo **stato tensionale completo** ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ), utilizzando come sistema di riferimento quello corrispondente agli assi del materiale (x per la direzione parallela ai giunti orizzontali, y per quella ortogonale), come da figura 2:

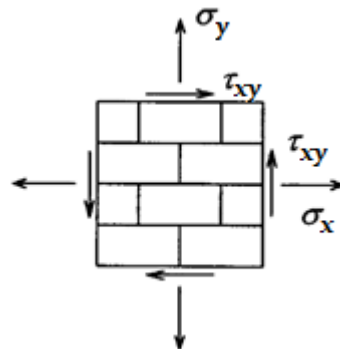


FIGURA 2: STATO TENSIONALE IN TERMINI DI TENSORE DELLE TENSIONI COMPLETO

I domini sperimentali di prove condotte su 102 pannelli (dimensioni 360 x 360 x 50 mm) in mattoni pieni e scala 1:2, realizzati da A.W. Page, sono espressi in termini di tensioni principali e date dai seguenti diagrammi:

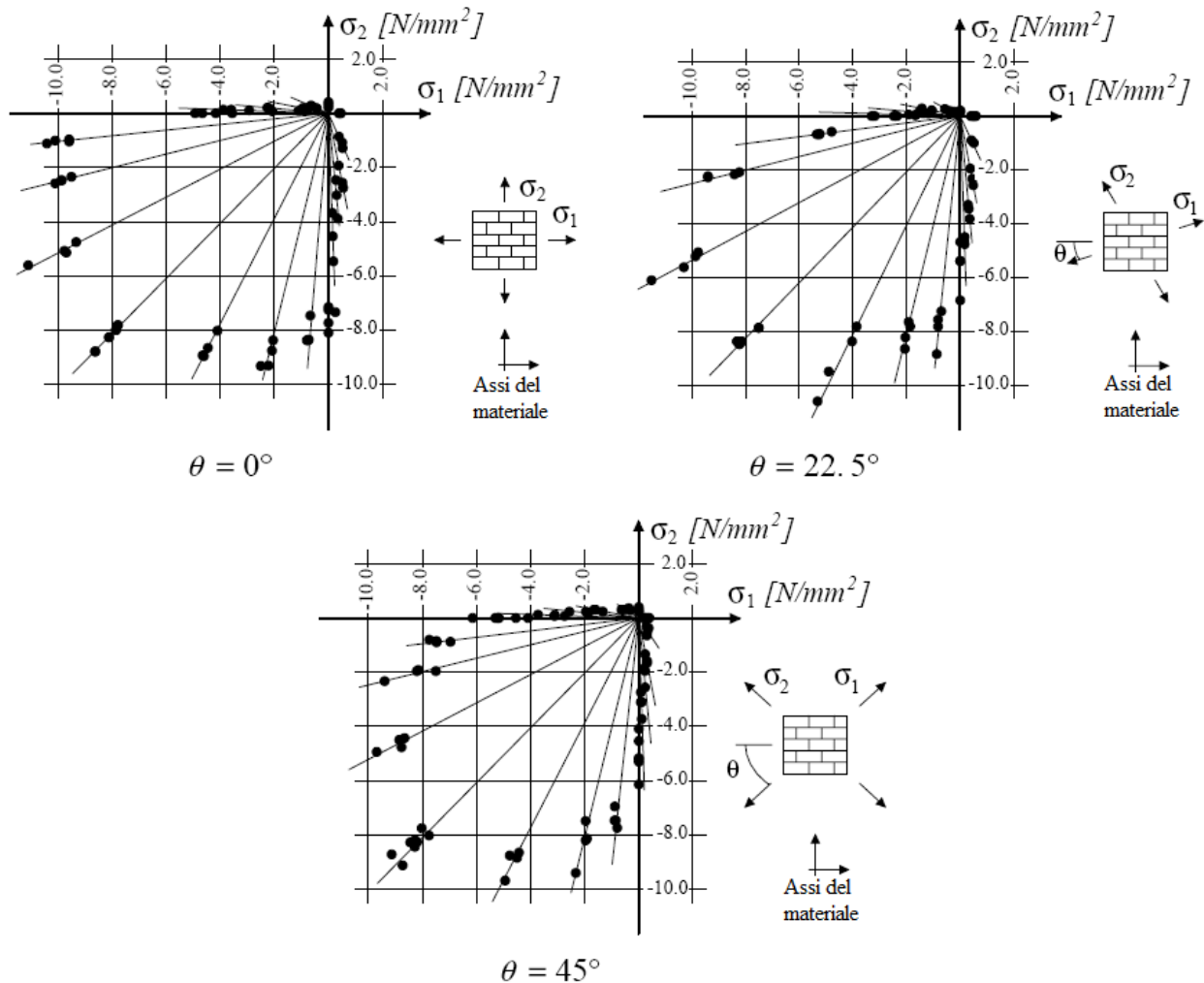


FIGURA 3: RISULTATI DELLE PROVE SPERIMENTALI DI A.W.PAGE (1981,1983)

I pannelli sono stati caricati in maniera proporzionale nelle direzioni principali di tensione  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e lungo diverse direzioni (definite dall'angolo  $\theta$ ) rispetto alla direzione dei giunti orizzontali.

Le proprietà meccaniche dei pannelli sono definite in tabella 1:

Le proprietà meccaniche		
	direzione x	direzione y
Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$f_{cx} = 8.74$	$f_{cy} = 8.03$
Resistenza a trazione monoassiale (MPa)	$f_{tx} = 0.43$	$f_{ty} = 0.32$

TABELLA 1: LE PROPRIETÀ MECCANICHE DEI PANNELLI UTILIZZATI DA A.W.PAGE

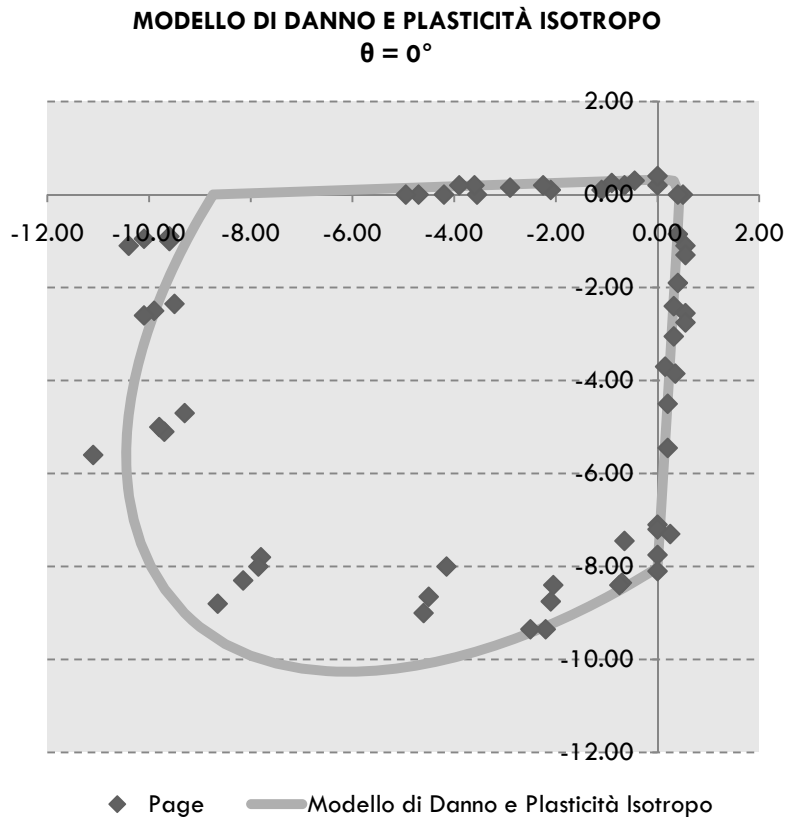
Il livello di anisotropia dei pannelli è molto basso: infatti il rapporto tra le resistenze a trazione è pari a  $f_{tx}/f_{ty} = 1.34$ , mentre tra quelle a compressione è  $f_{cx}/f_{cy} = 1.09$ .



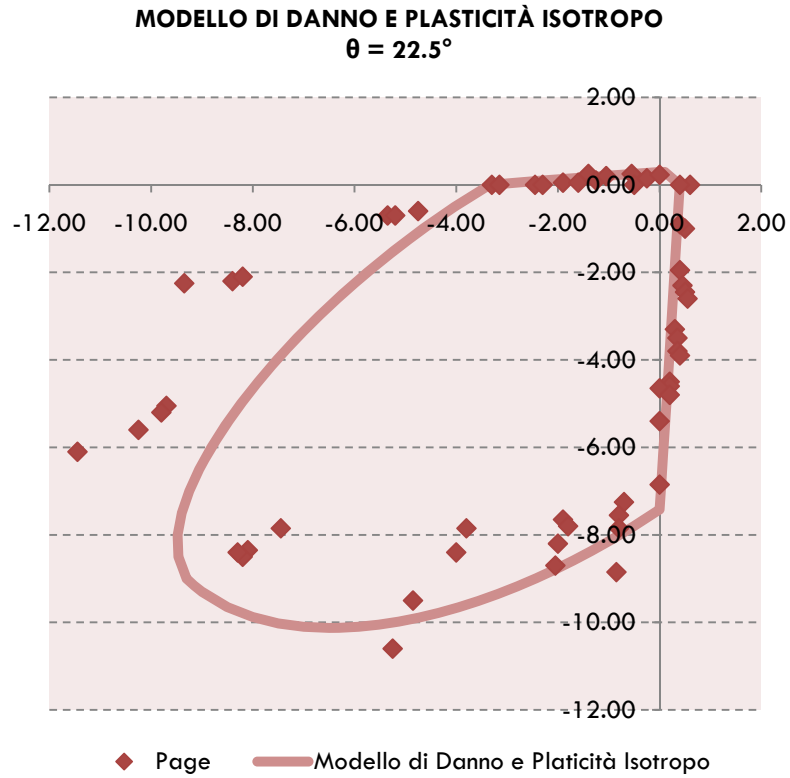
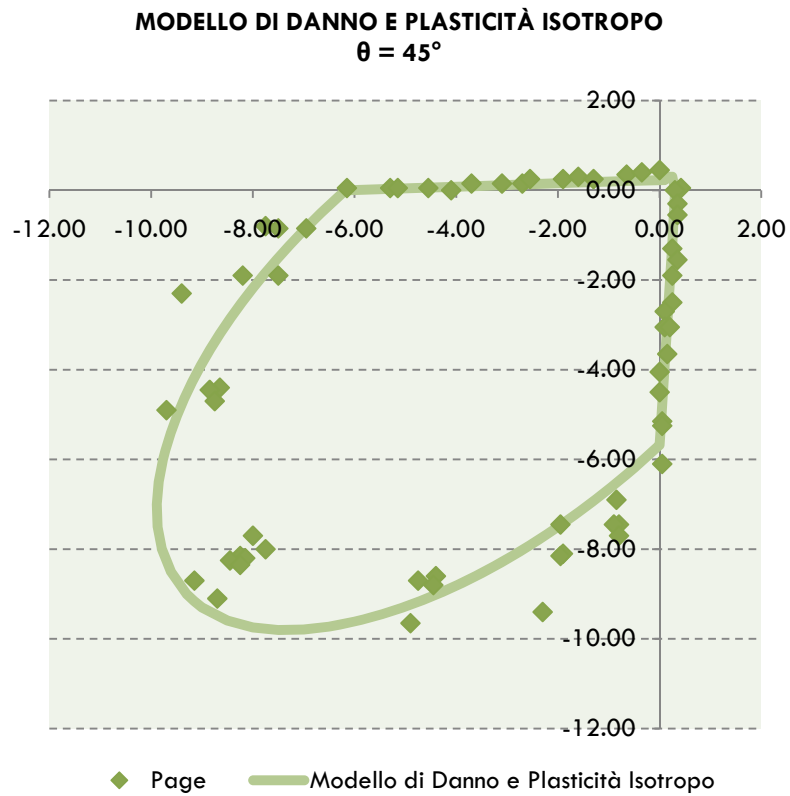
Come già accennato nel capitolo precedente, il modello di danno e plasticità isotropo è caratterizzato da una superficie di snervamento definita da un'unica equazione (modello implementato in ABAQUS v.6.6.1):

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^{\pm}) = \frac{1}{(1 - \alpha)} (\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\varepsilon_{ij}^p)\langle \hat{\sigma}_{max} \rangle - \gamma\langle -\hat{\sigma}_{max} \rangle) - \bar{\sigma}_{ij}(\varepsilon_{ij}^{+p}) \leq 0 \quad (4.1)$$

Il confronto tra i dati sperimentali e quelli del modello è dato nelle figure 4, 5 e 6 per i diversi angoli di inclinazione delle direzioni principali di tensione rispetto ai giunti orizzontali.



**FIGURA 4: CONFRONTO TRA IL MODELLO ISOTROPO E I RISULTATI SPERIMENTALI A  $\theta = 0^\circ$**

FIGURA 5: CONFRONTO TRA IL MODELLO ISOTROPO E I RISULTATI SPERIMENTALI A  $\Theta = 22.5^\circ$ FIGURA 6: CONFRONTO TRA IL MODELLO ISOTROPO E I RISULTATI SPERIMENTALI A  $\Theta = 45^\circ$

I risultati mostrano una buona corrispondenza tra le due serie di dati. Va osservato tuttavia che ad un'inclinazione di  $22.5^\circ$  rispetto alla direzione orizzontale, nel quadrante compressione-compressione, il dominio resistente viene leggermente sottostimato, mentre a  $0^\circ$  e a  $45^\circ$  il dominio è, al contrario, sovrastimato (sempre nel medesimo quadrante): la curva del modello, infatti, si estende al di là della resistenza a compressione biassiale del pannello.

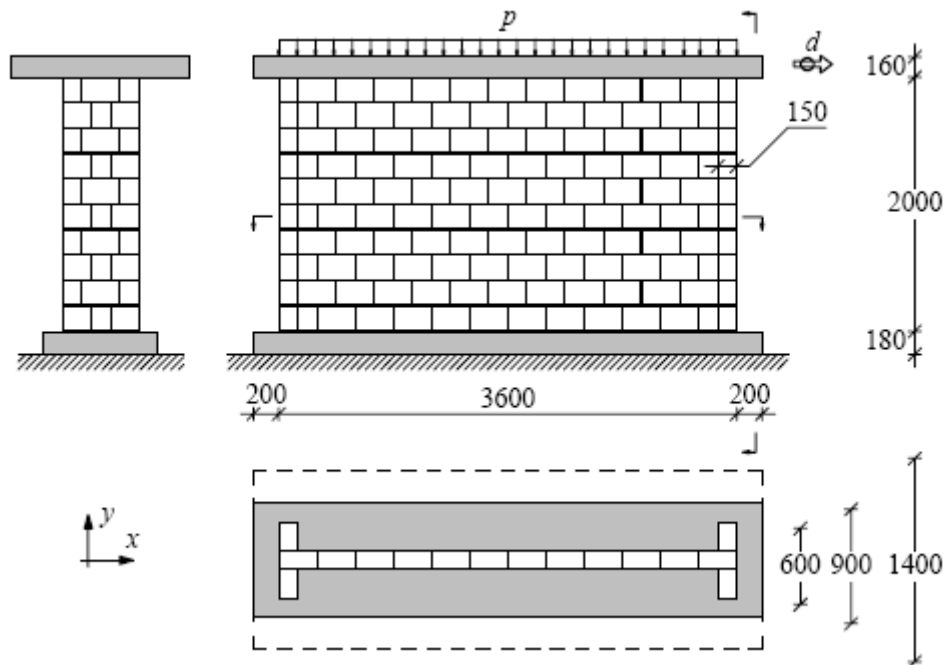
## 4.2 LE PROVE A TAGLIO E COMPRESSIONE GANZ-THÜRLIMANN

Negli anni '80 venne condotto un progetto di ricerca sul comportamento di pannelli in muratura sollecitati a taglio. Questa importante campagna di prove sperimentali è stata condotta allo *Swiss Federal Institute of Technology* (ETH) di Zurigo dai professori Ganz e Thürlimann.

Le curve sperimentali tensione-deformazione ottenute dai diversi pannelli vengono ora utilizzate per un confronto con quelle ricavate dal modello numerico implementato all'interno del programma ABAQUS (v.6.6.1) sotto il nome di *Concrete Damage Plasticity*, corrispondente al legame costitutivo teorico di danno e plasticità isotropo; è possibile, in questo modo, determinare la validità del modello anche a partire dalla superficie di snervamento iniziale fino a rottura.

### 4.2.1 CARATTERISTICHE DEI PANNELLI

I muri sono stati realizzati a grandezza reale; le loro caratteristiche dimensionali vengono riportate nella figura 7 (misure in mm).



**FIGURA 7: GEOMETRIA E CARICHI DEI PANNELLI A TAGLIO DELL'ETH DI ZURIGO**

I mattoni impiegati nelle prove sono forati e le proprietà meccaniche globali dei pannelli che ne risultano, distinte nelle direzioni x e y (definite come indicato in figura 7), sono:

Le proprietà meccaniche		
	direzione x	direzione y
Modulo elastico (MPa)	$E_x = 2460$	$E_y = 5460$
Modulo di taglio (MPa)	$G_{xy} = 1130$	
Coefficiente di Poisson	$\nu_{xy} = 0.18$	
Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$f_{cx} = 7.61$	$f_{cy} = 1.87$
Resistenza a trazione monoassiale (MPa)	$f_{tx} = 0.28$	$f_{ty} = 0.05$
Resistenza a taglio (MPa)	$f_t = 0.3$	
Energia di frattura (N/mm)	$G_{fx} = 0.02$	$G_{fy} = 0.02$
Fattore di attrito (MPa)	$f = 0.7$	

TABELLA 2: PARAMETRI DEI PANNELLI A TAGLIO

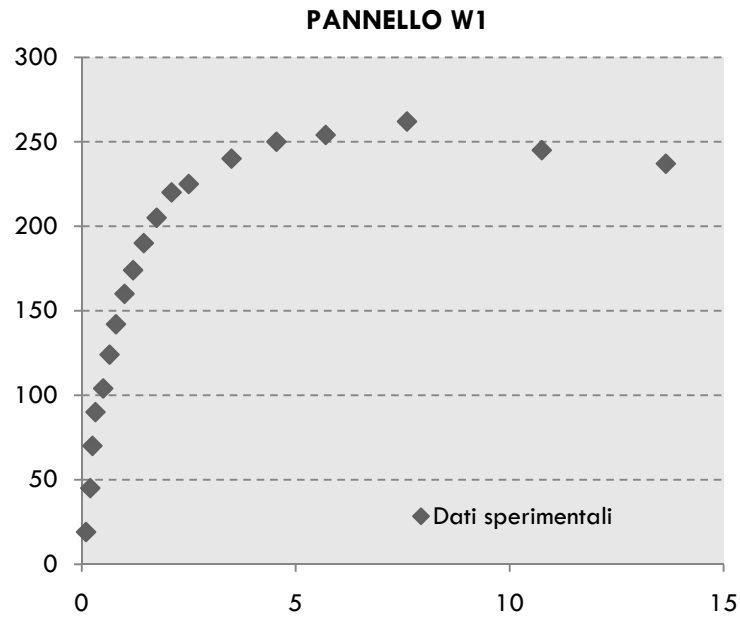
#### 4.2.2 AZIONI SUI PANNELLI E RISULTATI DELLE PROVE SPERIMENTALI

Vengono presi in considerazione tre pannelli in muratura identici nella geometria, eccezion fatta per una differenza nella dimensione delle ali di uno dei pannelli, ma sottoposti a diverse sollecitazioni. I pannelli presi in considerazione per la validazione del modello sono denominati rispettivamente W1, W2 e W4 (il W3 non è stato considerato in quanto si tratta di una prova di muratura rinforzata, che non viene presa in considerazione in questa sede).

Il pannello W1 è sottoposto ad una forza di precompressione iniziale di 415 kN pari ad un carico distribuito di 0.61 N/mm<sup>2</sup>. Il risultato mostra una risposta molto duttile del pannello, con rottura diagonale (fig.8-9)

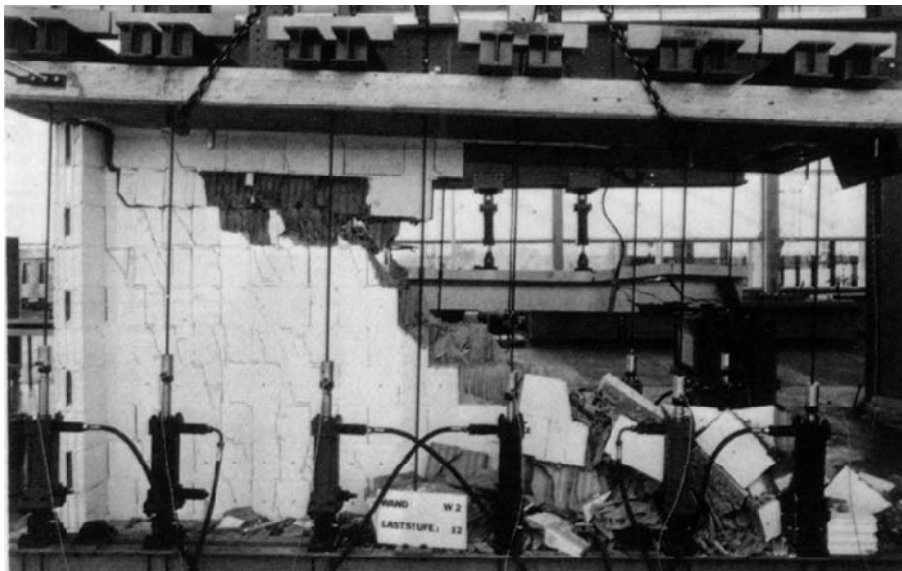


FIGURA 8: ESITO DELLA PROVA DI TAGLIO SUL PANNELLO W1

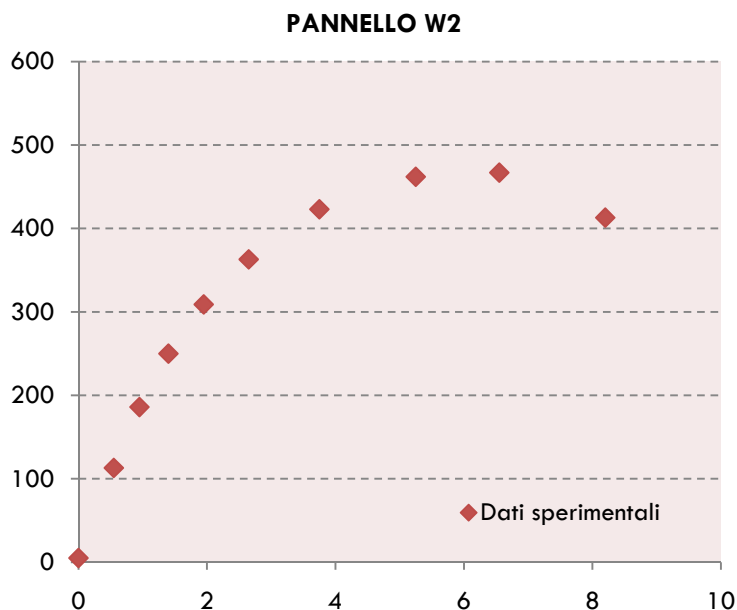


**FIGURA 9: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W1**

Il pannello W2 viene, invece, sollecitato con un carico di precompressione maggiore rispetto a quello del precedente W1: si applica una forza di 1287 kN, che coincide con un carico distribuito di 1.91 N/mm<sup>2</sup>. Anche questo pannello mostra inizialmente un comportamento duttile, seguito poi da una rottura di tipo fragile con comportamento esplosivo, dovuto al collasso della zona compressa (fig. 10-11).



**FIGURA 10: ESITO DELLA PROVA DI TAGLIO SUL PANNELLO W2**

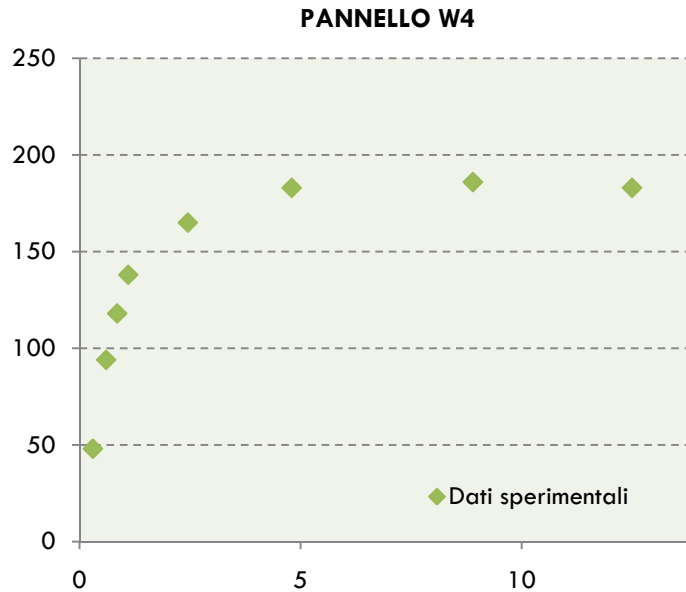


**FIGURA 11: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W2**

Il pannello W4, infine, si distingue leggermente dalle precedenti prove, in quanto soggetto ad un carico iniziale concentrato di 422 kN, applicato con un'eccentricità pari a 840 mm rispetto all'asse di simmetria verticale, identificabile con il filo teso al centro del pannello visibile in figura 12. Esso differisce leggermente anche dal punto di vista geometrico, in quanto la larghezza delle due ali che delimitano il pannello è di 900 mm, al posto dei precedenti 600 mm. Il comportamento appare molto duttile, con comparsa di qualche fessura nell'intorno del carico alla fine della prova (fig.12-13).



**FIGURA 12: ESITO DELLA PROVA DI TAGLIO SUL PANNELLO W4**



**FIGURA 13: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W4**

## 4.3 DESCRIZIONE DEL MODELLO NUMERICO

### 4.3.1. LA GEOMETRIA

I pannelli W1, W2 e W4 sono stati riprodotti all'interno del programma ABAQUS (v.6.6.1) per condurre un'analisi strutturale e verificare la corrispondenza dei risultati con i dati sperimentali descritti in precedenza.

Per la composizione del modello sono stati creati 5 elementi: il pannello, le due ali e le due lastre di calcestruzzo poste alla base e alla sommità del pannello di prova. Sono stati utilizzati elementi solidi 3D deformabili, assemblati poi in un secondo tempo con vincoli diversi, nel tentativo di rispecchiare nel modello il tipo di contatto che si riscontra nel caso reale. In particolare, sono stati utilizzati due tipi di contatto:

1. **Vincolo di tipo TIE:** tra ali di estremità e pannello, che nella realtà sono ammorsate fra loro, è stato definito un vincolo di tipo TIE, che implica una fusione fra le due superfici; in questo modo, il complesso flange-pannello funziona come se fosse un corpo unico.
2. **Interazione fra superfici:** impiegato tra pannello (compreso di ali) e lastre di calcestruzzo superiore ed inferiore, permette di definire il contatto tra questi elementi, nella realtà appoggiati l'uno sull'altro. Il contatto, superficie su superficie, è stato definito con le seguenti proprietà: un comportamento tangenziale dato attraverso un coefficiente di attrito tra i due materiali pari a 0.80 e un comportamento normale dato da un vincolo di tipo "HARD", per evitare la compenetrazione degli elementi, con rigidità di contatto calcolata automaticamente dal programma.

Per quanto riguarda, invece, le **condizioni al contorno**, è stato imposto un incastro alla superficie della lastra di calcestruzzo che costituisce la base dell'apparato di prova.

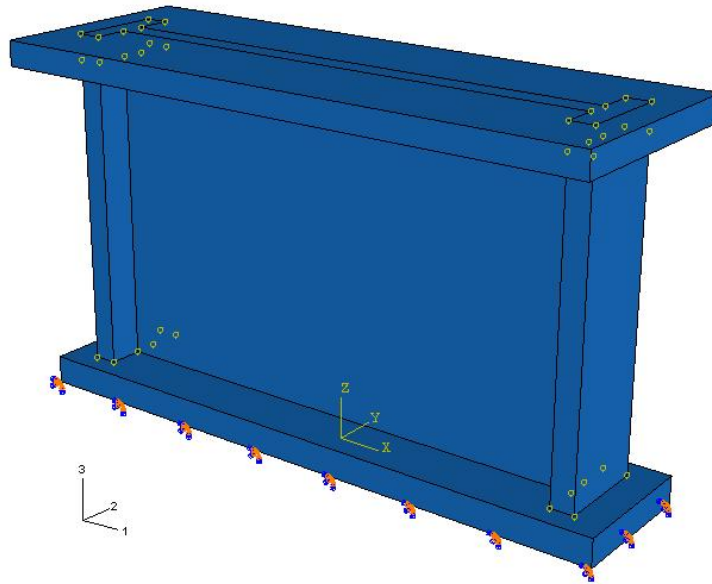


FIGURA 14: MODELLO NUMERICO DEI PANNELLI ETH

#### 4.3.2 I CARICHI

Ogni pannello è caricato in maniera differente, per valutare le diverse risposte dalla muratura alle sollecitazioni. Lo schema di carico è sempre lo stesso, distinto in due tempi (o STEP):

**1. Carico verticale:** si tratta della precompressione iniziale, applicata sulla lastra superiore di calcestruzzo come nella prova reale.

**2. Taglio:** applicato utilizzando la tecnica dello spostamento imposto, si costringe la lastra superiore di calcestruzzo ad una traslazione in direzione 1 (fig. 15) di una quantità definita in precedenza.

I carichi verticali sui pannelli W1 e W2 sono distribuiti (fig.15), ma di diversa intensità, mentre il pannello W4 è stato caricato con una forza concentrata eccentrica (fig. 16). I valori dei carichi sono riportati in tabella 3.

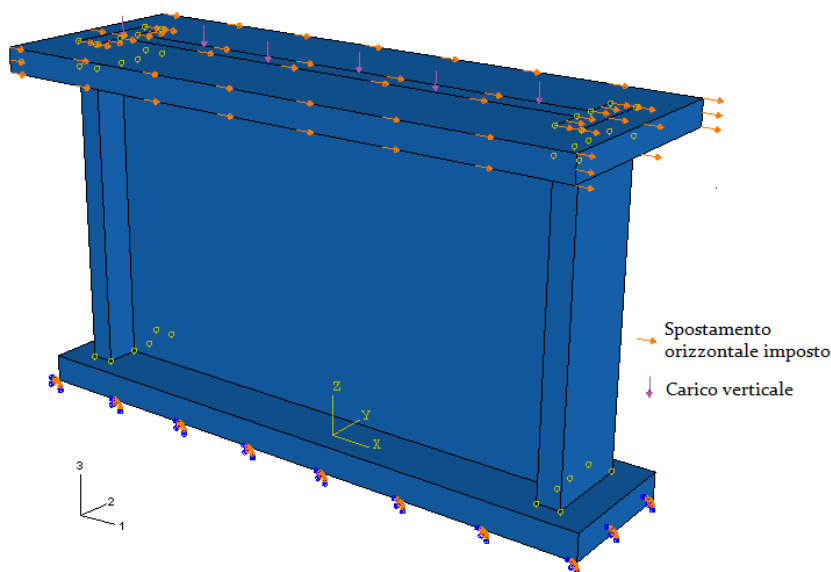


FIGURA 15: SCHEMA DI CARICO DEI PANNELLI W1 E W2



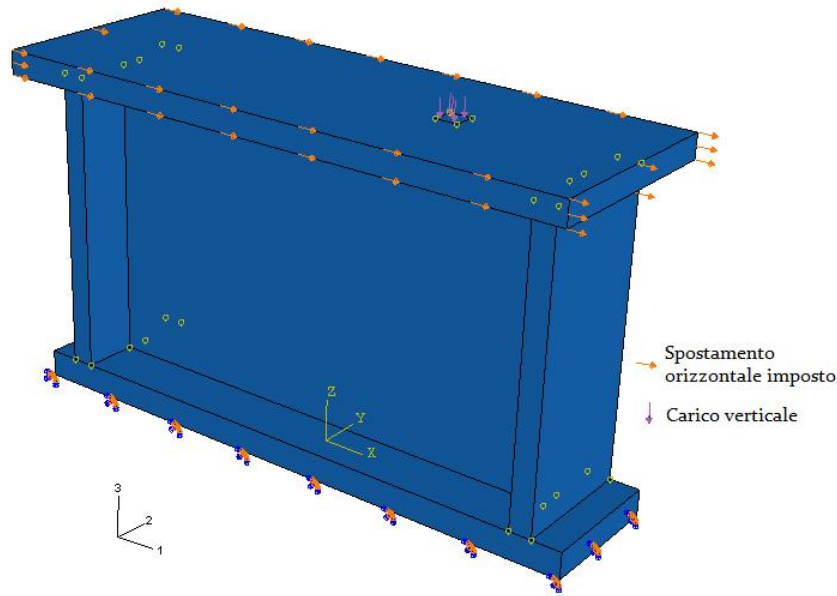


FIGURA 16: SCHEMA DI CARICO DEL PANNELLO W4

Carichi applicati	W1	W2	W4
Carico verticale	$415kN \equiv 0.61 N/mm^2$	$1287kN \equiv 1.91 N/mm^2$	$422 kN$
Spostamento imposto (totale)	15 mm	10 mm	15 mm

TABELLA 3: I CARICHI APPLICATI AI PANNELLI

#### 4.3.3 LE PROPRIETÀ MECCANICHE

Sono stati definiti due materiali: il calcestruzzo per le lastre superiore e inferiore e la muratura, per il pannello e le ali.

Per il **calcestruzzo** è stato definito il solo comportamento elastico, per non complicare inutilmente l'analisi con l'introduzione del comportamento non lineare anche nel calcestruzzo. Le proprietà attribuite al calcestruzzo sono riportate nella tabella sottostante:

Comportamento elastico	
Modulo di Young (MPa)	$E = 40000$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.3$

TABELLA 4: CARATTERISTICHE DEL CALCESTRUZZO

Per includere nel calcolo anche il peso proprio degli elementi, è stata applicata una densità di  $25 \text{ kN/m}^3$ , tipica del calcestruzzo armato.

La definizione delle proprietà meccaniche della muratura, invece, prevedeva che si tenesse conto anche del comportamento non lineare della stessa, descritto precisamente attraverso l'applicazione del modello di danno e plasticità isotropo. Per quanto riguarda il comportamento elastico, si è scelto di utilizzare un materiale isotropo, applicando il valore del modulo di Young della direzione x (come si vede

dalla tabella 2, infatti, per la caratteristica ortotropia della muratura ci sono due distinte rigidità nella direzione verticale e orizzontale). Pertanto i valori elastici definiti nel materiale muratura e applicati a pannello e ali sono:

Comportamento elastico	
Modulo di Young (MPa)	$E = 2460$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.18$

TABELLA 5: CARATTERISTICHE ELASTICHE DELLA MURATURA

Come per il calcestruzzo, al fine di considerare nel calcolo anche il peso proprio degli elementi si è attribuito un valore di densità alla muratura di  $11 \text{ kN/m}^3$ , corrispondente a muratura realizzata con mattoni forati.

Per quanto riguarda, invece, il comportamento non lineare, la scelta del *Concrete Damage Plasticity* richiede l'inserimento di alcuni valori, che verranno ora illustrati.

L'**angolo di dilatanza** ( $\psi$ ) è un valore che, se non è nullo, aumenta la resistenza a taglio della muratura. Esso definisce, infatti, il rapporto tra il sollevamento di un'unità e lo spostamento laterale (fig.17).

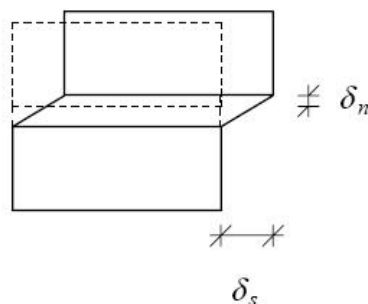


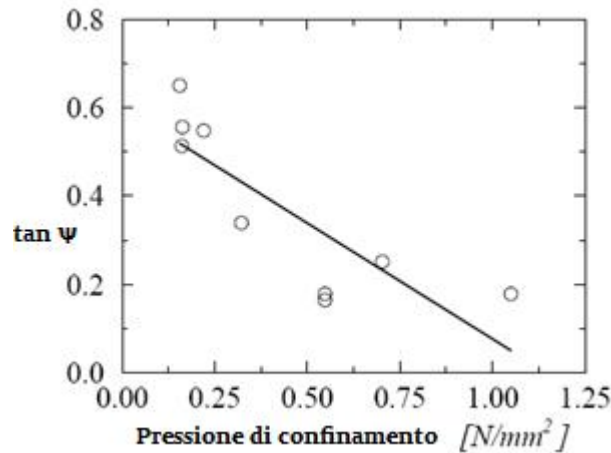
FIGURA 17: RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELL'ANGOLO DI DILATANZA

In termini matematici, l'angolo è dato dalla seguente relazione:

$$\psi = \arctan \frac{\delta_n}{\delta_s} \quad (4.2)$$

Si tratta di un valore che dipende dalle pressioni di confinamento a cui è sottoposto il materiale: per alte pressioni di confinamento il suo valore è nullo, mentre per basse pressioni ha un valore compreso fra  $11^\circ$  e  $35^\circ$ , come si vede dal diagramma di figura 18:

$$0.2 \leq \tan \psi \leq 0.7 \quad (4.3)$$



**FIGURA 18: RELAZIONE TRA ANGOLO DI DILATANZA E PRESSIONE DI CONFINAMENTO**

Pertanto, durante la deformazione a taglio anelastica, nelle prove sperimentali su pannelli in muratura si nota un aumento di volume; si tratta di una caratteristica comune anche a materiali quasi fragili, fra cui si annovera anche il calcestruzzo, il cui comportamento dipende dalla pressione di confinamento, la quale può incrementare notevolmente la resistenza del materiale.

Sulla base delle compressioni iniziali applicate ai pannelli ETH prima di iniziare la prova di taglio e con l'aiuto della curva illustrata in figura 18 sono stati individuati i seguenti valori dell'angolo di dilatanza:

1. **Pannello W1:**  $\psi = 16^\circ$
2. **Pannello W2:**  $\psi = 0^\circ$ ; è necessario specificare tuttavia che in realtà il valore utilizzato all'interno del programma non è esattamente nullo, ma è stato assegnato  $\psi = 0.05^\circ$ , il valore più basso consentito.
3. **Pannello W4:**  $\psi = 17^\circ$ ; nonostante il carico concentrato che si distingue rispetto ai due casi precedenti dove il carico era distribuito, calcolare un carico distribuito equivalente e valutare l'angolo di dilatanza ha permesso di ottenere buoni risultati, come si vedrà a breve.

<b>Comportamento non lineare</b>			
	<b>W1</b>	<b>W2</b>	<b>W3</b>
Angolo di dilatanza	$\psi = 16^\circ$	$\psi = 0.05^\circ$	$\psi = 17^\circ$

**TABELLA 6: VALORI DELL'ANGOLO DI DILATANZA**

Il secondo parametro, l'**eccentricità (ε)**, esprime la tendenza della funzione potenziale plastica all'asintoto. Come l'angolo di dilatanza, dunque, è un valore utilizzato per descrivere la forma della superficie potenziale. Il valore di default è di solito  $\epsilon = 0.1$  ed è quello che è stato adottato anche in questa occasione.

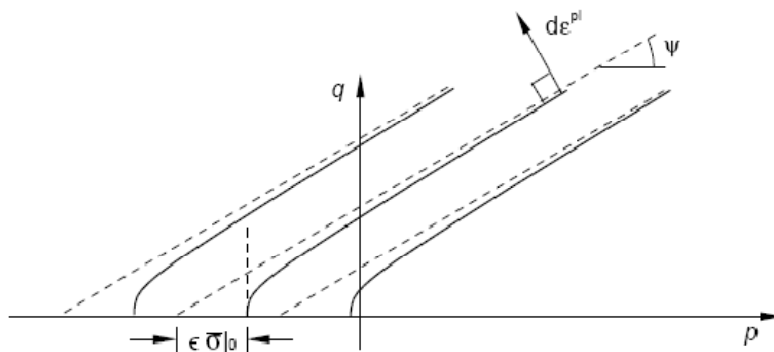


FIGURA 19: SUPERFICI POTENZIALI IPERBOLICHE ED ECCENTRICITÀ

Dopo l'eccentricità, viene richiesto il **rapporto tra la resistenza a compressione biassiale del materiale e quella monoassiale**, ovvero il rapporto  $f_{b0}/f_{c0}$ . Il valore della resistenza a compressione biassiale dei pannelli ETH, dato che non era stato esplicitamente indicato, è stato ricavato dal modello continuo anisotropo per la muratura del prof. Lourenço (1996), invertendo la relazione che contiene tale termine e ottenendo un valore di  $f_{b0} = 8.563 \text{ N/mm}^2$ . Poiché tutti i pannelli sono dotati delle medesime proprietà meccaniche, il valore è rimasto invariato per tutti e tre i pannelli e pari a  $f_{b0}/f_{c0} = 1.125$ .

Viene poi richiesto l'inserimento del **parametro K**, uno dei due parametri responsabili della forma della superficie di snervamento. Tuttavia esso rientra nel computo dei valori della funzione soltanto in caso di stato di compressione triassiale. Il valore di questo parametro varia fra 0.5 e 1. Dato che generalmente i pannelli in muratura possono essere adeguatamente rappresentati attraverso uno stato piano di tensione, si è scelto di attribuire a questo parametro del materiale un valore pari a  $K = 1$ .

Infine, è il turno del **parametro di viscosità (ν)**. Questo parametro è stato introdotto nell'implementazione per migliorare la velocità di convergenza del modello nel regime di *softening* senza compromettere i risultati. Si è scelto un valore piccolo, pari a  $\nu = 10^{-4}$ .

Dopo questa prima serie di valori, si devono inserire i comportamenti a trazione e a compressione del materiale. Per quanto riguarda la compressione, è stato inserito per semplicità un comportamento elasto-plastico perfetto, mentre per il comportamento a trazione si è preferito esprimere il comportamento in termini di energia di frattura. Nella tabella sottostante sono riportati i valori inseriti:

Comportamento non lineare		
	Yield stress	Inelastic strain
Comportamento a compressione	7.61	0
	7.61	1
	Yield stress	Fracture energy
Comportamento a trazione	0.28	0.02

TABELLA 7: COMPORTAMENTO A TRAZIONE E A COMPRESSIONE DEFINITO NEL MODELLO

Per concludere, dunque, si riporta una tabella riassuntiva con i valori adottati per ogni parametro:

Parametri di Concrete Damage Plasticity			
	W1	W2	W3
Angolo di dilatanza	$\psi = 16^\circ$	$\psi = 0.05^\circ$	$\psi = 17^\circ$
Eccentricità	$\epsilon = 0.1$		
$f_{b0}/f_{c0}$	$f_{b0}/f_{c0} = 1.125$		
K	$K = 1$		
Viscosità	$\nu = 10^{-4}$		

TABELLA 8: TABELLA RIASSUNTIVA DEI PARAMETRI DEL CONCRETE DAMAGE PLASTICITY

## 4.4 RISULTATI DELL'ANALISI NUMERICA

### 4.4.1 PANNELLO W1

Il modello numerico del pannello W1 ha prodotto una curva carico-spostamento, che è stata posta in relazione con quella ricavato dalla prova sperimentale, come si può vedere in figura 20. C'è una buona corrispondenza tra i due diagrammi, nonostante una resistenza iniziale della curva numerica piuttosto elevata, con un picco di resistenza che diminuisce subito non appena compaiono le prime fessurazioni sul pannello.

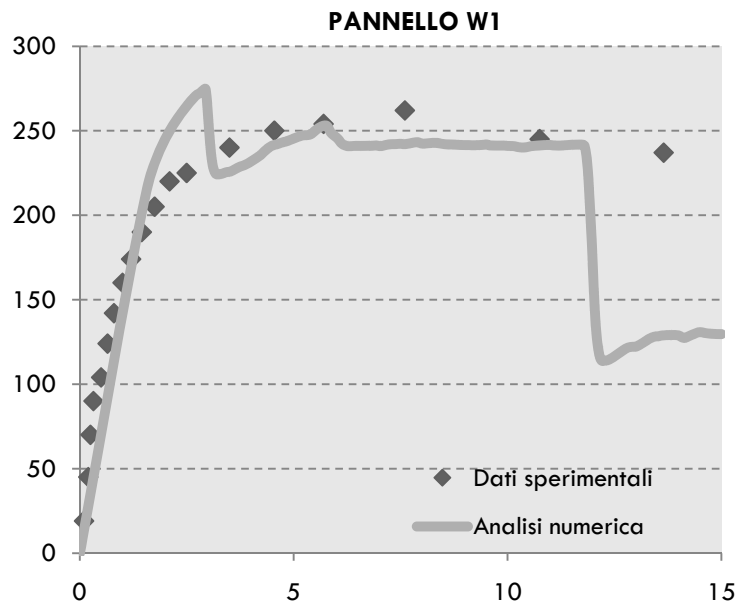


FIGURA 20: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W1

Come per la prova sperimentale, si ha dapprima la fessurazione per flessione dell'ala di sinistra, poi quella di destra al termine dell'analisi. La figura 21(b) in particolare mette in evidenza la banda fessurativa che attraversa il pannello da un angolo all'altro, attraverso le direzioni della minima tensione principale (che su base teorica è ortogonale alla direzione di massima trazione e dunque parallela alla direzione di fessurazione).

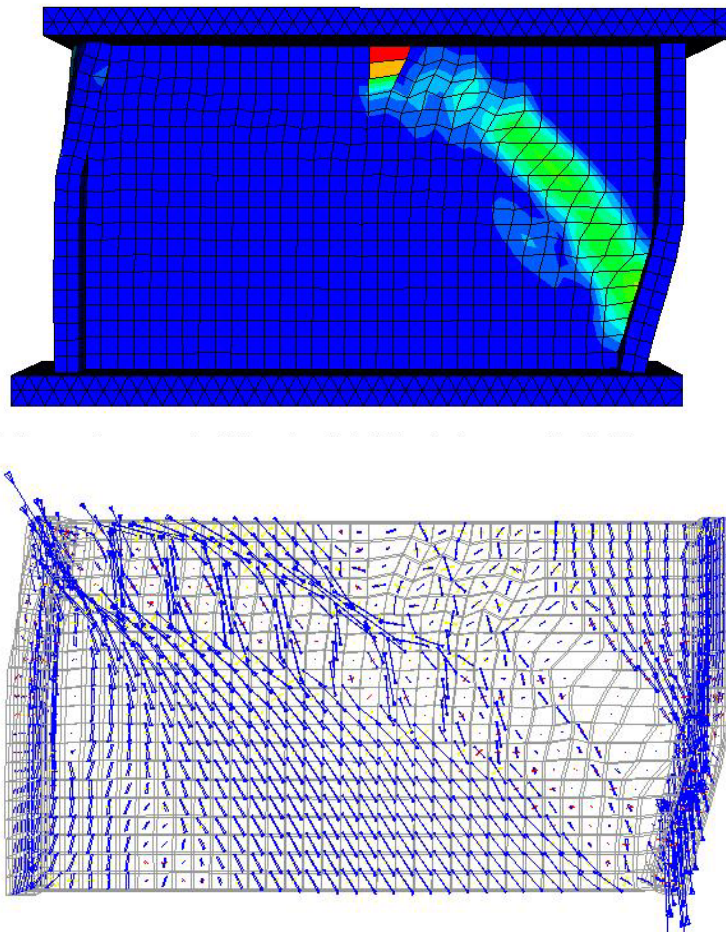


FIGURA 21: DEFORMAZIONE PLASTICA E DIREZIONE DELLE MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W1)

In figura 22 si vedono, invece, i contorni delle minime tensioni principali allo stesso punto di rottura rappresentato in figura 21. I valori delle tensioni di compressione, comunque, rimangono bene al di sotto della resistenza del pannello, dimostrando così che il collasso è dovuto allo stato tensionale di trazione.

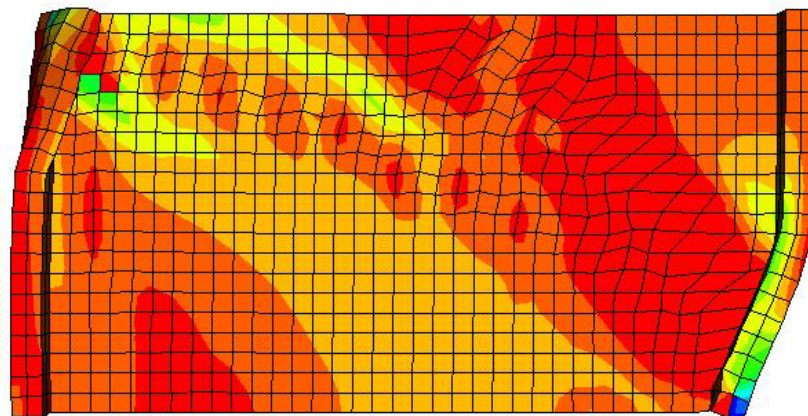
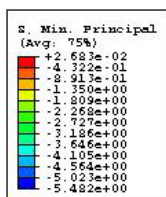
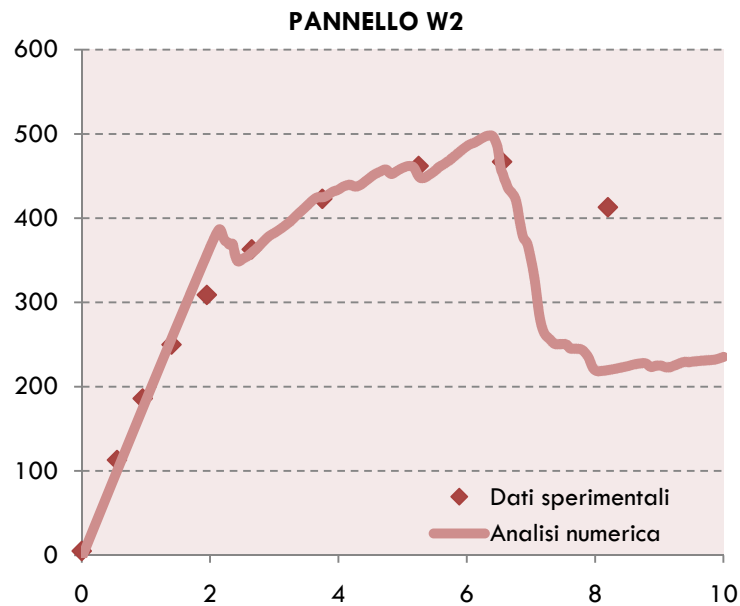


FIGURA 22: MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W1)

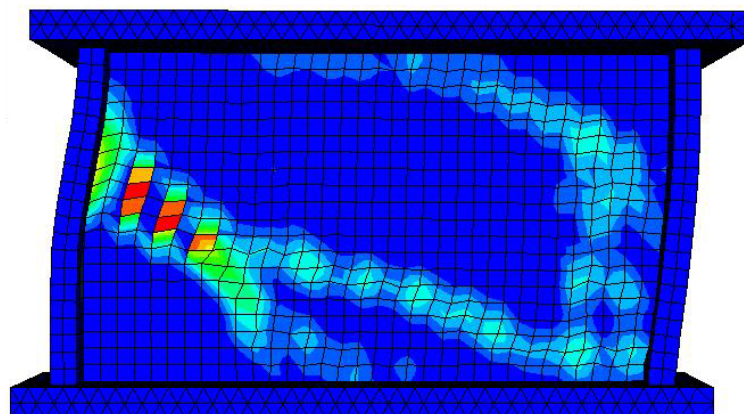
#### 4.4.2 PANNELLO W2

Anche per il pannello W2, il confronto tra la curva tensioni-deformazioni ottenuta mediante l'analisi numerica e quella derivante dalla prova sperimentale mostra una buona corrispondenza. Come nel diagramma del pannello W1, la rottura è caratterizzata da un crollo nei valori della tensione, che nel caso numerico avviene poco meno di un millimetro prima della prova sperimentale, come riportato in figura 23.



**FIGURA 23: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W2**

In questo caso, però, anziché formarsi una banda centrale di fessurazione, se ne formano due, come bene si vede soprattutto dallo schema rappresentativo della direzione delle minime tensioni principali di figura 24 b. Questo è in accordo con quanto si può vedere dalle prove sperimentali (fig. 10).



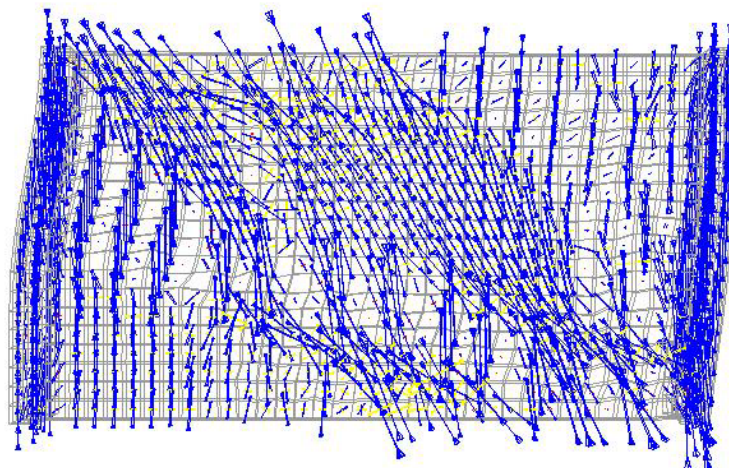


FIGURA 24: DEFORMAZIONE PLASTICA E DIREZIONE DELLE MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W2)

Come si evince dallo schema dei contorni delle minime tensioni principali di figura 25, le due bande non si uniscono in una centrale per la rottura finale, in quanto si rompe prima a compressione l'angolo in basso a destra del pannello.

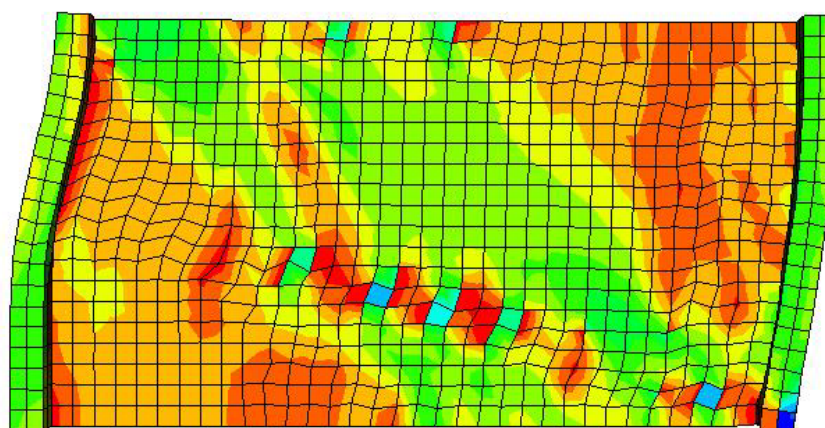
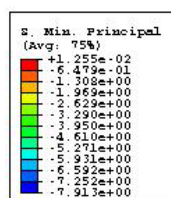
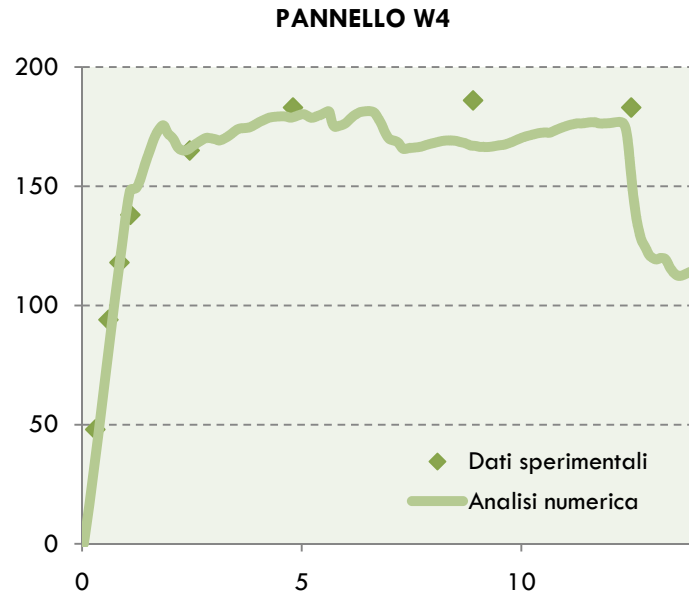


FIGURA 25: MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W2)

#### 4.4.3 PANNELLO W4

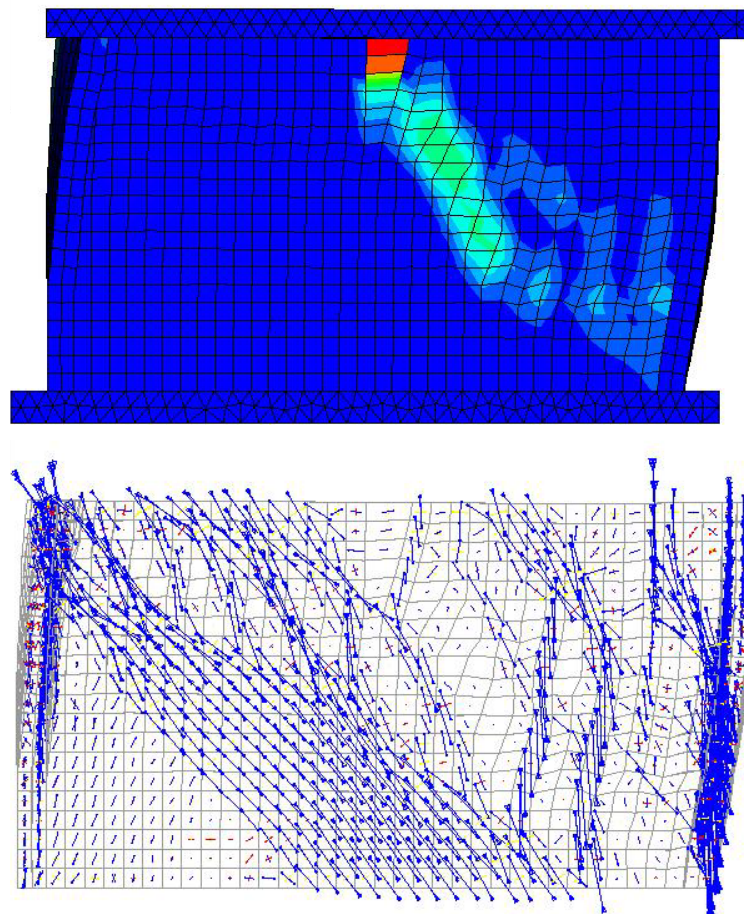
Sebbene il pannello W4 si distingue dagli altri per le diverse modalità di carico e per le diverse dimensioni delle ali, si nota ancora una buona corrispondenza tra la curva sperimentale tensioni-deformazioni e quella numerica. Analogamente al caso del pannello W1, si giunge ad una lieve sottostima della resistenza dei pannelli, dato che nella zona della tensione di picco, la curva numerica si viene a trovare al di sotto dei dati sperimentali.





**FIGURA 26: CURVA TENSIONI-DEFORMAZIONI DEL PANNELLO W4**

L'andamento delle fessure mostra un aumento della loro pendenza nei pressi del carico concentrato e, quindi, dell'ala di destra, mentre si inclinano leggermente in direzione dell'ala di sinistra (fig 27), come da prove sperimentali.



**FIGURA 27: DEFORMAZIONE PLASTICA E DIREZIONE DELLE MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W4)**

Vengono, infine, riportati i contorni delle tensioni nella direzione verticale, molto più rappresentativi dello stato tensionale rispetto a quelli date dalle minime tensioni principali nel definire la fascia centrale al termine della prova di carico e quelle verticali a destra.

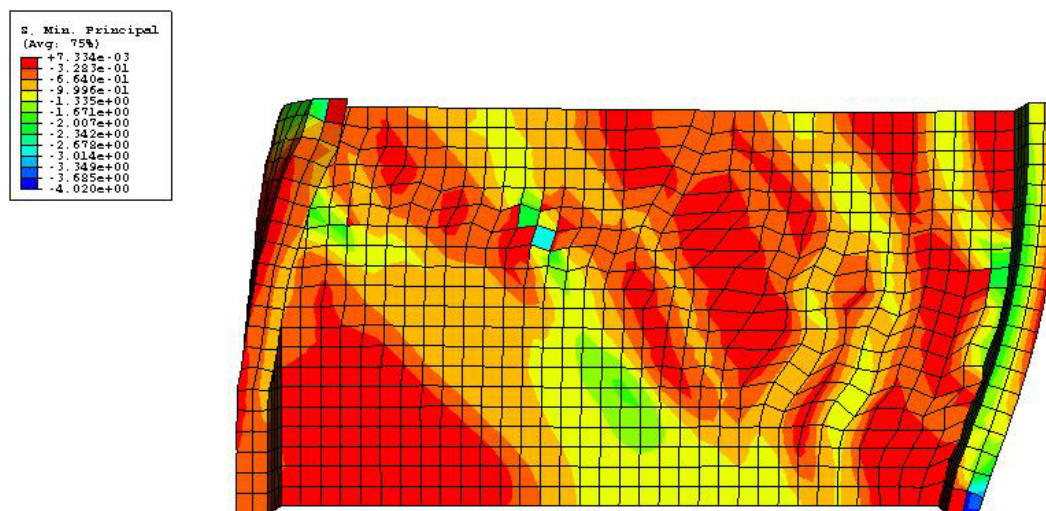


FIGURA 28: MINIME TENSIONI PRINCIPALI A ROTTURA (W4)

In ciascuna delle tre prove, pertanto, si verifica una buona corrispondenza tra i dati sperimentali e la curva tensione-deformazione ricavata dal modello. Un'osservazione importante riguarda le curve dopo il valore di rottura: si vede, infatti, una resistenza residua che continua indefinitamente. Si tratta dell'influenza di uno dei termini contenuti all'interno della superficie potenziale, l'angolo di dilatanza, che è considerato un valore costante durante tutta l'analisi, anche se nella realtà il suo valore cambia in relazione alla pressione agente sul pannello. La muratura, infatti, è uno dei materiali sensibili alla pressione di confinamento: per questa ragione la legge di scorrimento che definisce il comportamento anelastico non è associata (come già detto nel capitolo 2) e l'angolo che determina la direzione della deformazione anelastica è dato proprio dalla dilatanza. Un valore, anche piccolo, di dilatanza è in grado di dare una resistenza teorica infinita al pannello, che è quello che accade in questo caso al termine dell'analisi.

## CAPITOLO 5

### PROVE SPERIMENTALI SU FASCIA DI PIANO

#### 5.1 INTRODUZIONE ALLE PROVE SPERIMENTALI

Nel capitolo precedente, il modello di danno e plasticità isotropo è stato valutato attraverso prove sperimentali su pannelli in muratura ai quali era stato applicato un carico monotono.

Nel Laboratorio di Prove Materiali e Strutture del Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale dell'Università di Trieste sono state eseguite alcune prove sperimentali a spostamento imposto su fasce di piano in muratura sottoposte a carico ciclico. I pannelli, in scala reale, sono stati ipoteticamente estrapolati da un edificio storico composto da tre piani: la parte centrale rappresenta la vera e propria fascia di piano, mentre i due maschi accoppiati appartengono per una metà al piano superiore e per l'altra all'inferiore (fig. 1)

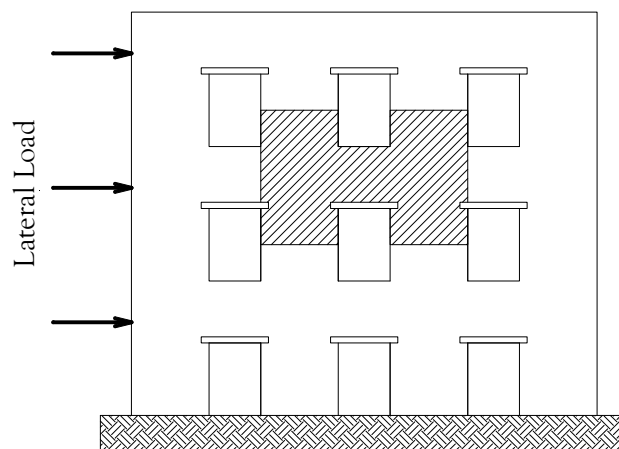


FIGURA 1: LA POSIZIONE DEL PROVINO NELL'EDIFICIO DA CUI È IDEALMENTE ESTRAPOLATO

Sono state realizzate in totale quattro prove sperimentali, due per ciascun provino preparato, denominate rispettivamente MS1, MS1r, MS2 e MS2r:

- le **prove MS1 e MS2** si riferiscono alla **muratura integra**: i provini sono stati sollecitati a partire da uno stato originario integro fino a rottura;
- le **prove MS1r e MS2r** si riferiscono alla **muratura danneggiata**: i provini vengono rinforzati mediante utilizzo di una tecnica di rinforzo (barre *dywidag* per MS1r, profilo a "L" per MS2r), che chiudono le fessure createsi durante la prova precedente; svolta questa operazione preliminare, la sollecitazione dei provini viene ripresa fino a collasso.

## 5.2 I MATERIALI E LA TESSITURA DEI PANNELLI

Per simulare una muratura storica, le componenti impiegate nella realizzazione del provino sono state il laterizio pieno come unità e una malta scelta fra differenti *mix design*, il cui valore di resistenza a compressione è paragonabile ad una malta di classe M4, secondo la classificazione riportata all'interno del DM. 20/11/1987.

Le caratteristiche meccaniche e geometriche del laterizio (tipo POROTON®) sono riportate nella seguente tabella:

<b>LATERIZIO: proprietà meccaniche e geometriche</b>	
Peso del mattone	1800/2000 kg/m <sup>3</sup>
Resistenza a compressione (MPa)	$f_{cx} = 10$
Dimensioni h x l x s (mm)	55 x 250 x 120

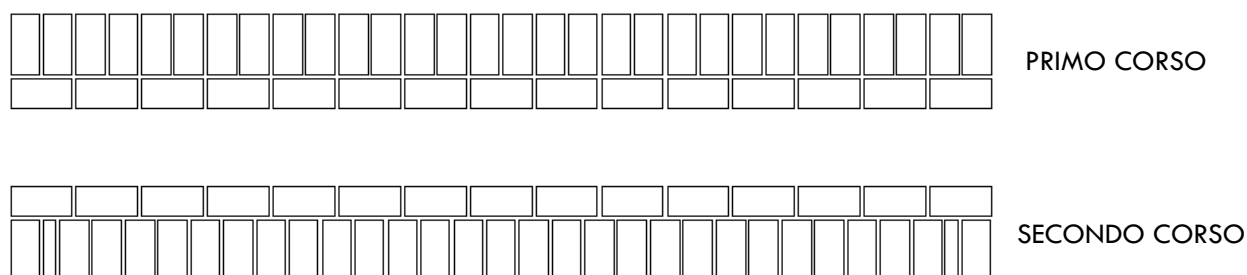
**TABELLA 1: CARATTERISTICHE DEL LATERIZIO**

La malta è stata realizzata utilizzando i seguenti ingredienti in parti per volume (abbr p.i.v.):

<b>MALTA: composizione e resistenza a compressione</b>	
Calce idraulica	1 p.i.v.
Sabbia fine	1 p.i.v.
Sabbia grossa	2 p.i.v.
Acqua	0.8 p.i.v.
Resistenza a compressione (MPa)	$f_{cx} = 2.17$

**TABELLA 2: CARATTERISTICHE DELLA MALTA**

Malta e laterizio sono stati assemblati realizzando due provini di spessore pari a tre teste di mattone, ovvero pari a tre volte la larghezza dei mattoni impiegati (380 mm). Di seguito è raffigurata la tessitura della muratura realizzata per due corsi di malta contigui nel piano della sezione trasversale.



**FIGURA 2: TESSITURA DEI PROVINI PER DUE CORSI CONTIGUI DI MURATURA**



**FIGURA 3: TESSITURA DEI PROVINI VISIBILE DURANTE LE FASI DI COSTRUZIONE NEL PIANO DELLA SEZIONE**

Quello che appare osservando il prospetto esterno dei provini è un'alternanza di corsi di mattoni posti di testa e di taglio (fig. 4).

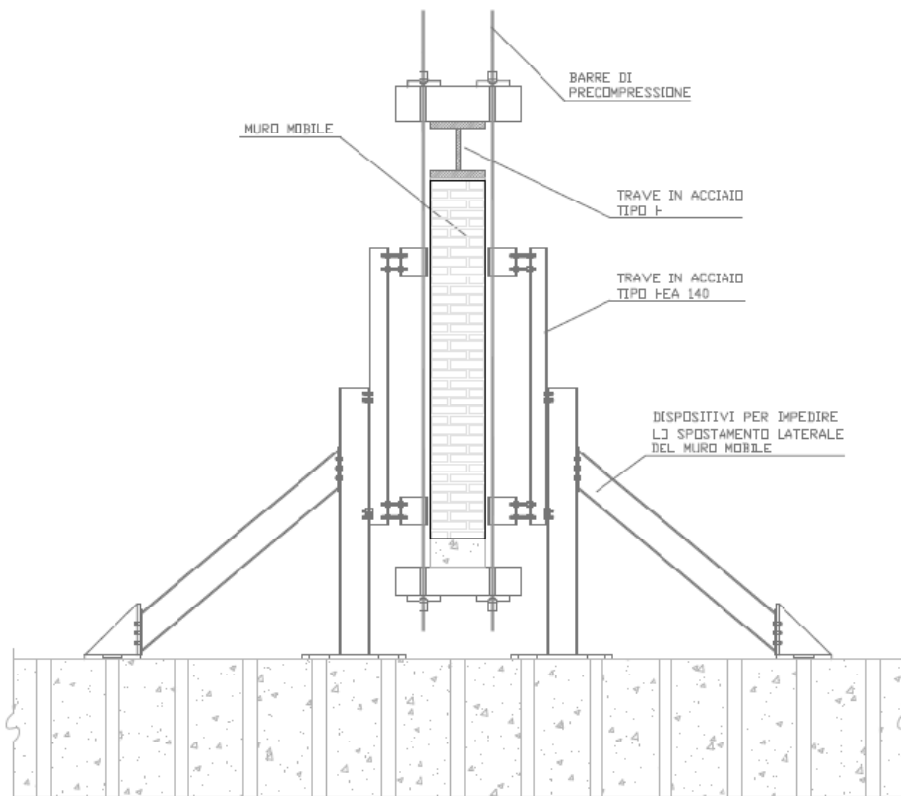


**FIGURA 4: TESSITURA DEI PROVINI OSSERVABILE SUL PROSPETTO ESTERNO**

### 5.3 I CARICHI APPLICATI E LA STRUMENTAZIONE

Le prove sperimentali a partire dai provini integri sono state condotte in tre fasi distinte:

- a) **Prima fase:** al termine del periodo di maturazione di 28 giorni, è stato applicato un carico di precompressione, che rappresenta il peso dell'ipotetica struttura soprastante dalla quale è stato estrapolato il provino. Tale azione è rimasta costante lungo tutta la durata della prova ed è stata applicata mediante barre in acciaio *dywidag*, distribuendola in tre coppie per ogni maschio murario per un carico totale di 255 kN. Prima di avviare la seconda fase della prova, ciascun campione è stato lasciato per qualche giorno sottoposto alla sola azione della precompressione, per permetterne l'assestamento; infine, sono state rilevate le fessurazioni createsi (rottura per schiacciamento di alcune unità) per poterle distinguere da quelle derivanti dalle successive fasi della prova.



**FIGURA 5: SEZIONE DEI PROVINI CHE EVIDENZIA L'APPARATO DI PROVA E LE BARRE DI PRECOMPRESSIONE**

- b) **Seconda fase:** consiste nell'applicazione di uno spostamento verticale relativo, alternativamente positivo e negativo, in modo da indurre un'azione tagliante sulla fascia di piano. Il movimento è stato imposto utilizzando tre martinetti meccanici: questi, a mezzo di tre profili in acciaio tipo UPN sono stati collegati ad un traverso principale (sempre in acciaio) posto sulla sommità di uno dei due maschi murari, trasmettendo così lo sforzo in modo distribuito. Il controllo dei martinetti è avvenuto attraverso input inviati alle celle di carico ad essi connesse, utilizzando tre diversi canali e permettendone così, all'occorrenza, anche un controllo individuale. Lo spostamento è stato applicato fino a raggiungimento del collasso del provino; quindi, l'analisi è stata interrotta per permettere i preparativi della terza e ultima fase della prova.

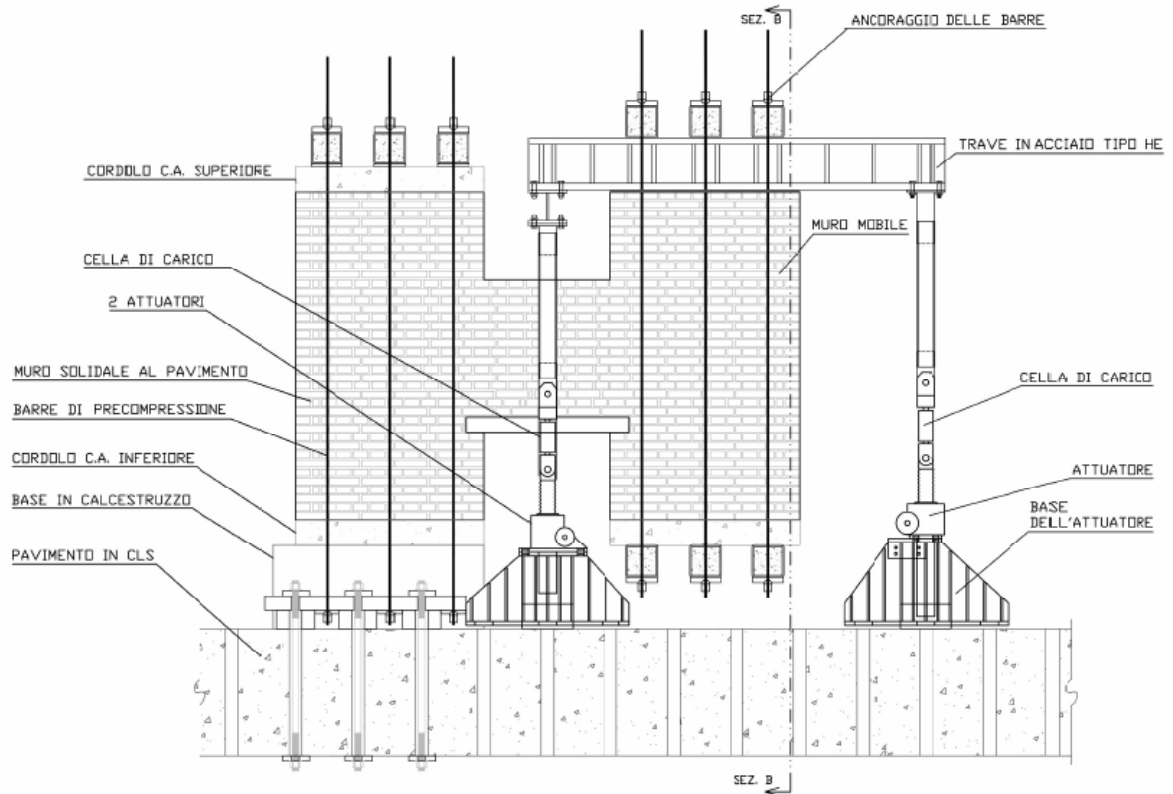


FIGURA 6: APPARECCHIATURA DEL PRIMO PROVINO - PROSPETTO FRONTALE

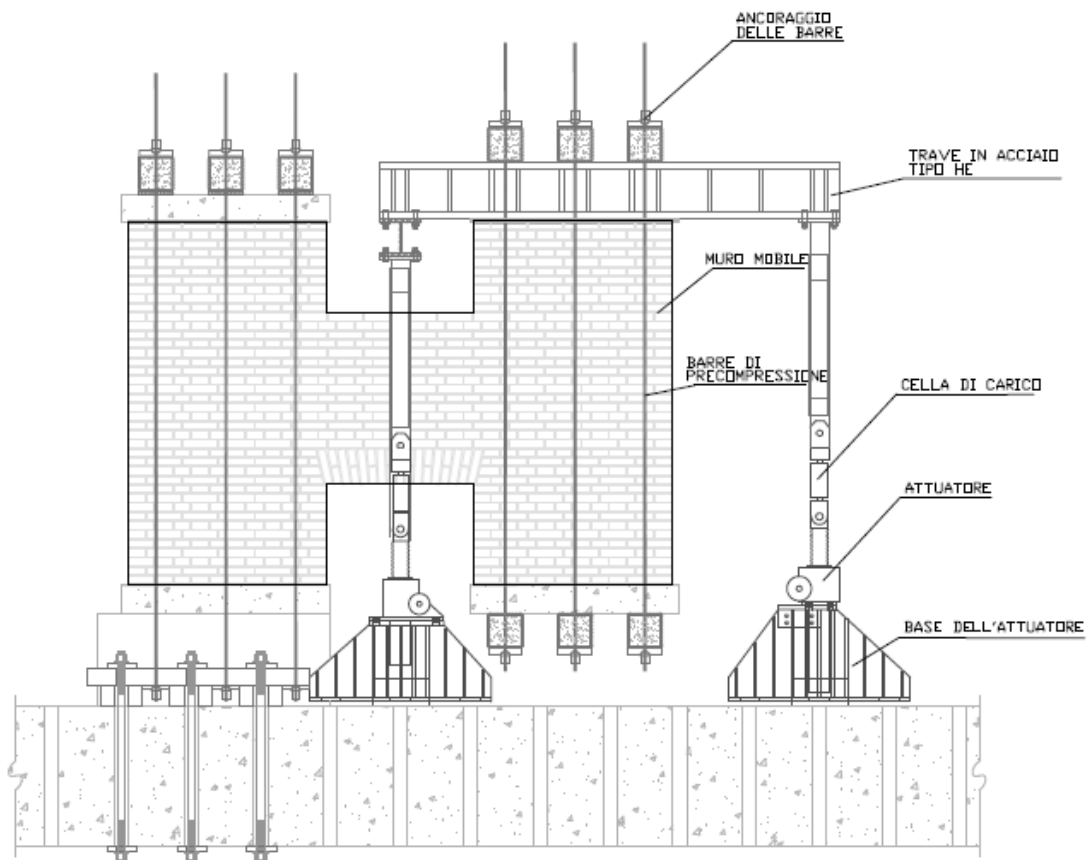


FIGURA 7: APPARECCHIATURA DEL SECONDO PROVINO - PROSPETTO FRONTALE

- c) **Terza fase:** si tratta della fase di prova su provino danneggiato; prima della prova vengono applicate due diverse tipologie di rinforzo, come accennato all'inizio del presente capitolo. Al provino MS1 vengono poste due barre in acciaio tipo *dywidag* lungo tutta la lunghezza del provino, simulando così un intervento di rinforzo di un elemento strutturale in muratura danneggiato (fig. 8), mentre al provino MS2 due profili ad "L" che si uniscono al centro della fascia di piano, fissati con perni innestati nella muratura. In seguito è stata ripresa l'applicazione dello spostamento verticale relativo di ampiezza crescente fino a collasso del provino così rinforzato.

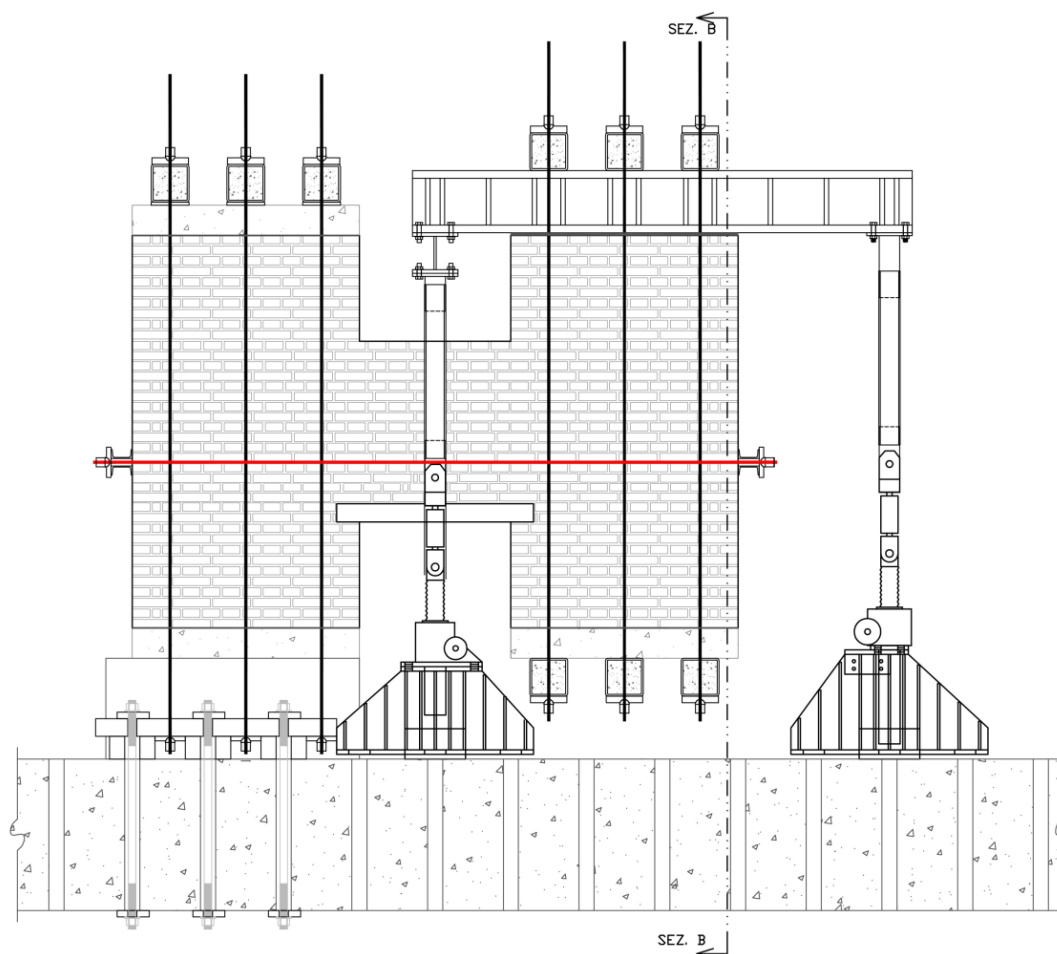
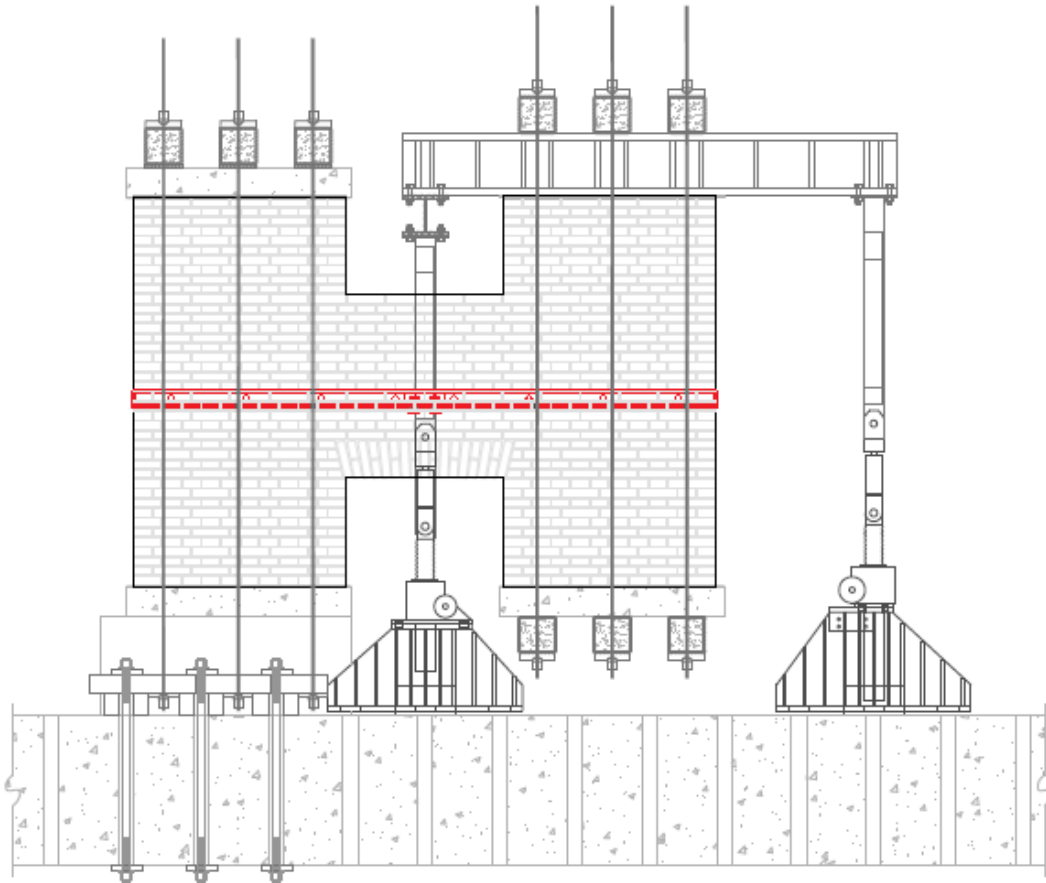


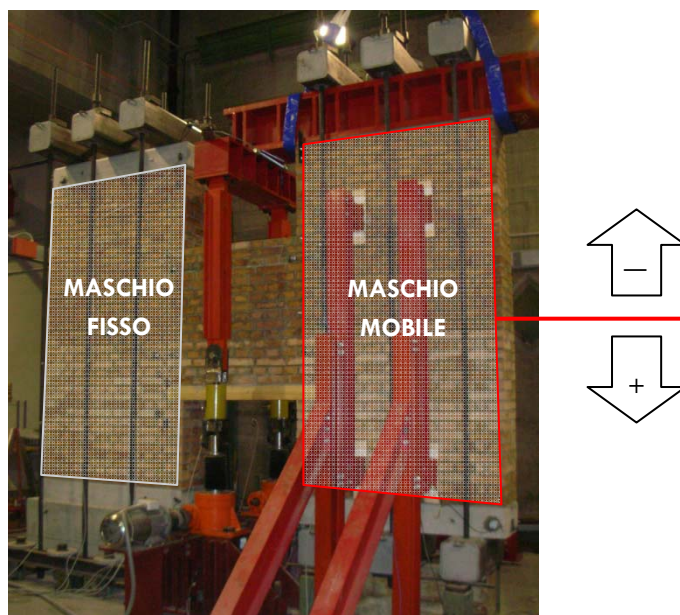
FIGURA 8: PROSPETTO FRONTALE DEL PROVINO MS1 DOPO L'APPLICAZIONE DEI TIRANTI (UNO FRONTE E UNO RETRO)





**FIGURA 9: PROSPETTO FRONTALE DEL PROVINO MS2 DOPO L'APPLICAZIONE DEI PROFILI (SUL RETRO)**

Come detto, le prove si sono svolte con uno spostamento imposto in direzione verticale, in forma di carico ciclico, dove un ciclo comprende uno spostamento verso l'alto (a partire da uno zero di riferimento), uno verso il basso e il ritorno allo zero. Con il progredire della prova, gli spostamenti imposti sono stati di ampiezza sempre maggiore. Per quanto riguarda la convenzione di segno utilizzata, lo spostamento verso il basso è stato considerato positivo, di conseguenza quello verso l'alto negativo.



**FIGURA 10: IL VERSO DELLO SPOSTAMENTO, UGUALE IN TUTTE LE PROVE**

Per valutare le deformazioni che caratterizzano la fascia di piano durante la seconda e la terza fase della prova, sono stati applicati al provino 30 strumenti, di diversa tipologia a seconda dell'informazione necessaria a comprendere il comportamento del materiale nel punto considerato.

La schematizzazione seguente mostra la disposizione degli strumenti sul provino, rimasta invariata per tutte le prove effettuate, e la denominazione degli stessi che permette di distinguerne la tipologia.

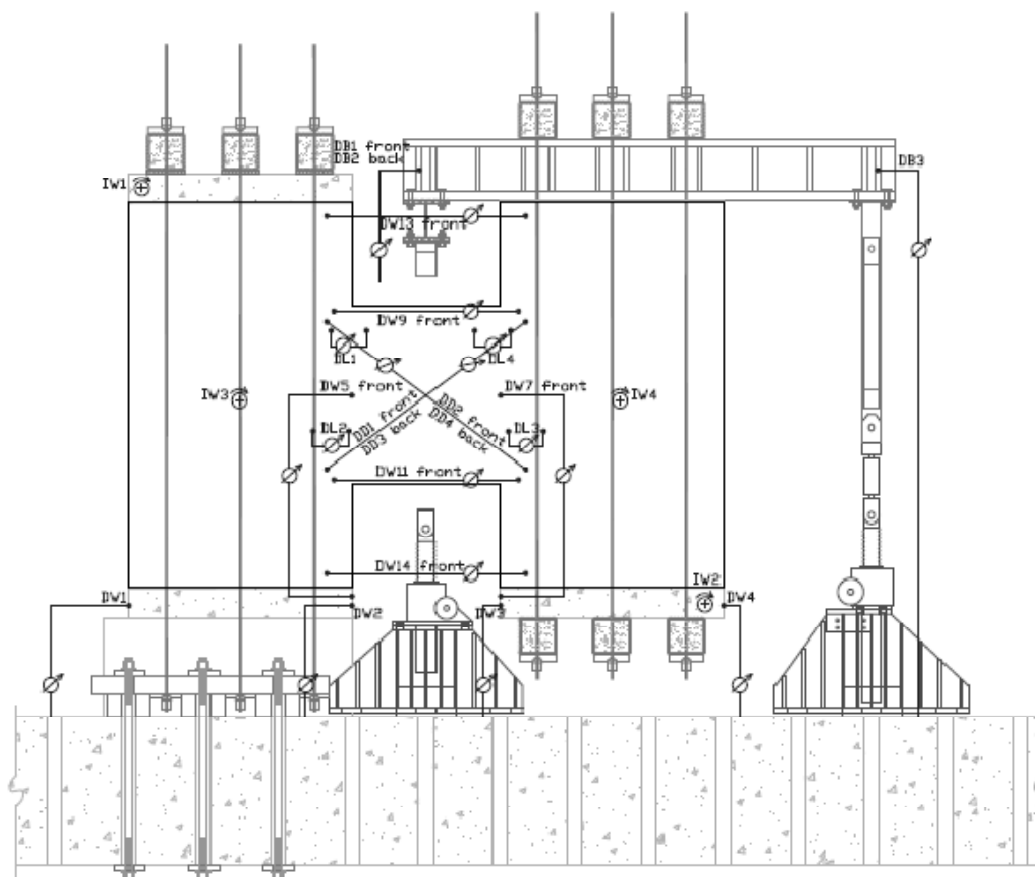


FIGURA 11: GLI STRUMENTI DISPOSTI SUI PROVINI

La classificazione degli strumenti è la seguente:

- a) **Trasduttori rotativi:** si tratta di dispositivi che forniscono, in uscita, una grandezza elettrica che risulta essere proporzionale all'entità o alla variazione della grandezza fisica analizzata. Sul provino sono individuati dalle sigle DB1, DB2, DB3 (registrano gli spostamenti verticali della trave in acciaio posizionata sopra la parte mobile del provino), DD1, DD2, DD3, DD4 (registrano gli spostamenti diagonali della fascia di piano), DW5, DW7 (rilevano lo spostamento della fascia di piano in senso longitudinale), DW9, DW11 (rilevano lo spostamento degli estremi superiore ed inferiore della fascia di piano), DW13, DW14 (registrano gli spostamenti relativi tra i due maschi murari rispettivamente nel punto più alto e in quello più basso del provino, nonché l'entità della rotazione dovuta alle tre celle di carico).



FIGURA 12: TRASDUTTORE ROTATIVO

- b) **Inclinometri:** si tratta di strumenti in grado di misurare rotazioni, con un range di inclinazione di  $\pm 10^\circ$ . Quelli disposti sul provino sono denominati IW1, IW2, IW3, IW4 (forniscono informazioni sulle rotazioni impresse dalle celle di carico ai maschi murari).



FIGURA 13: INCLINOMETRO

- c) **Resistivi lineari:** si tratta di dispositivi che rilevano lo spostamento fra due punti, posti ad una distanza prefissata, attraverso una variazione di potenziale. Tale segnale elettrico viene poi convertito in distanza attraverso una costante di conversione. Si compongono di una parte fissa e di una mobile (un contatto scorrevole), che vengono posizionate ciascuna sopra i due punti di cui si vuole conoscere lo spostamento. Nella prova si tratta degli strumenti denominati DL1, DL2, DL3, DL4 (permettono di valutare l'entità delle fessurazioni provocate ai quattro vertici della fascia di piano), DW1, DW2 (registrano gli spostamenti della base in calcestruzzo della parte fissa del provino).



FIGURA 14: RESISTIVO LINEARE

Ad uno dei due lati della fascia di piano è stato inoltre applicato un sottile strato di pittura per poter registrare in modo più accurato la formazione e la crescita delle fessure durante i diversi cicli di carico.



**FIGURA 15: STRATO DI PITTURA DISPOSTO SU UNO DEI DUE LATI DEL PROVINO**

#### 5.4 PROVA MS1

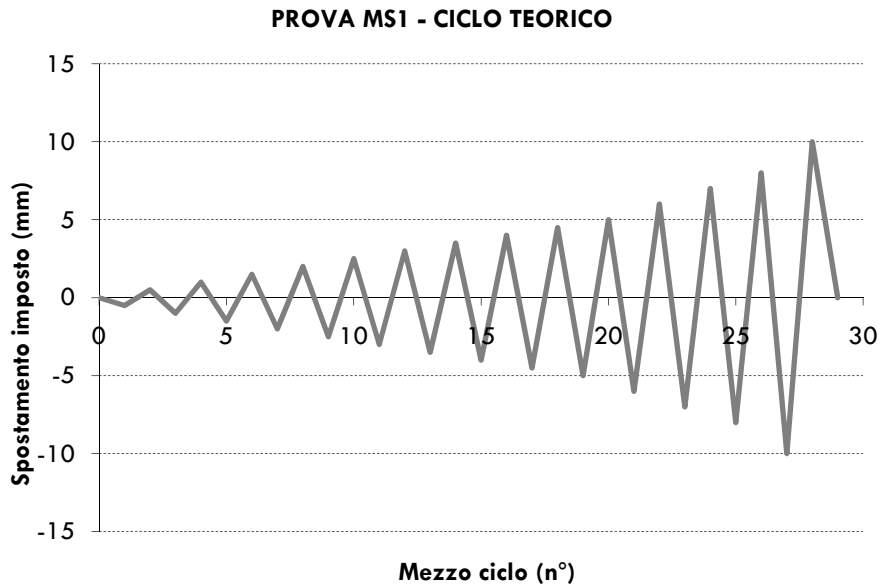
Il provino realizzato per le prove MS1 e MS1r è composto da due maschi accoppiati delle dimensioni di 1.50 m x 2.60 m e da una fascia di piano delle dimensioni di 1.00 m x 1.20 m. Lo spessore della parete è di 0.38 m corrispondente, come detto, ad un muro a tre teste di mattoni. Le dimensioni della fascia di piano comprendono anche l'architrave ligneo delle dimensioni di 0.12 m x 1.30 m.



**FIGURA 16: IL PRIMO PROVINO AL MOMENTO D'INIZIO DELLA PROVA MS1**

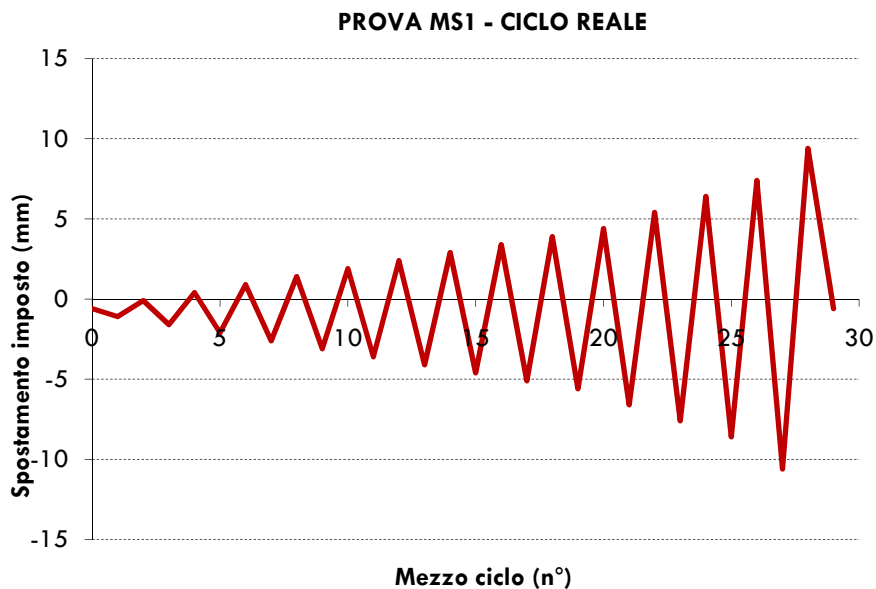
### 5.4.1 L'ESECUZIONE DELLA PROVA MS1

La prova MS1 è stata realizzata utilizzando il seguente diagramma di carico teorico.



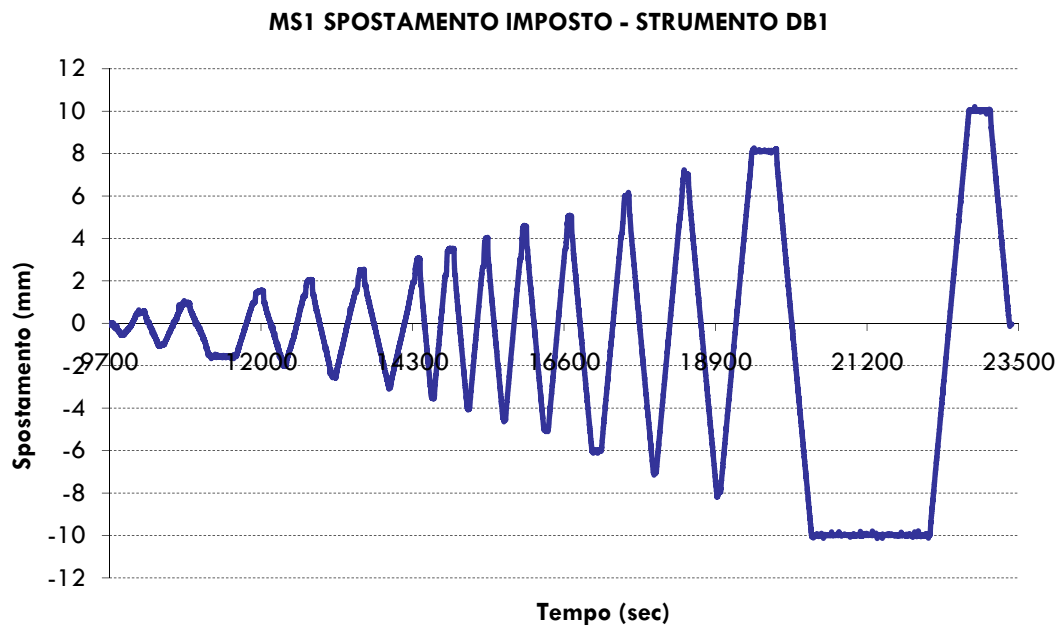
**FIGURA 17: CICLO TEORICO DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS1**

Nella realtà, tuttavia, a causa di difficoltà iniziali dovute alla presenza di tensione residua nei martinetti, lo schema di carico non risulta essere simmetrico e lo snervamento viene raggiunto prima nei picchi positivi che in quelli negativi. Pertanto la prova si considera iniziata a partire da uno spostamento di +0.6 mm per permettere, nella fase precedente, l'assestamento della strumentazione.



**FIGURA 18: CICLO REALE DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS1**

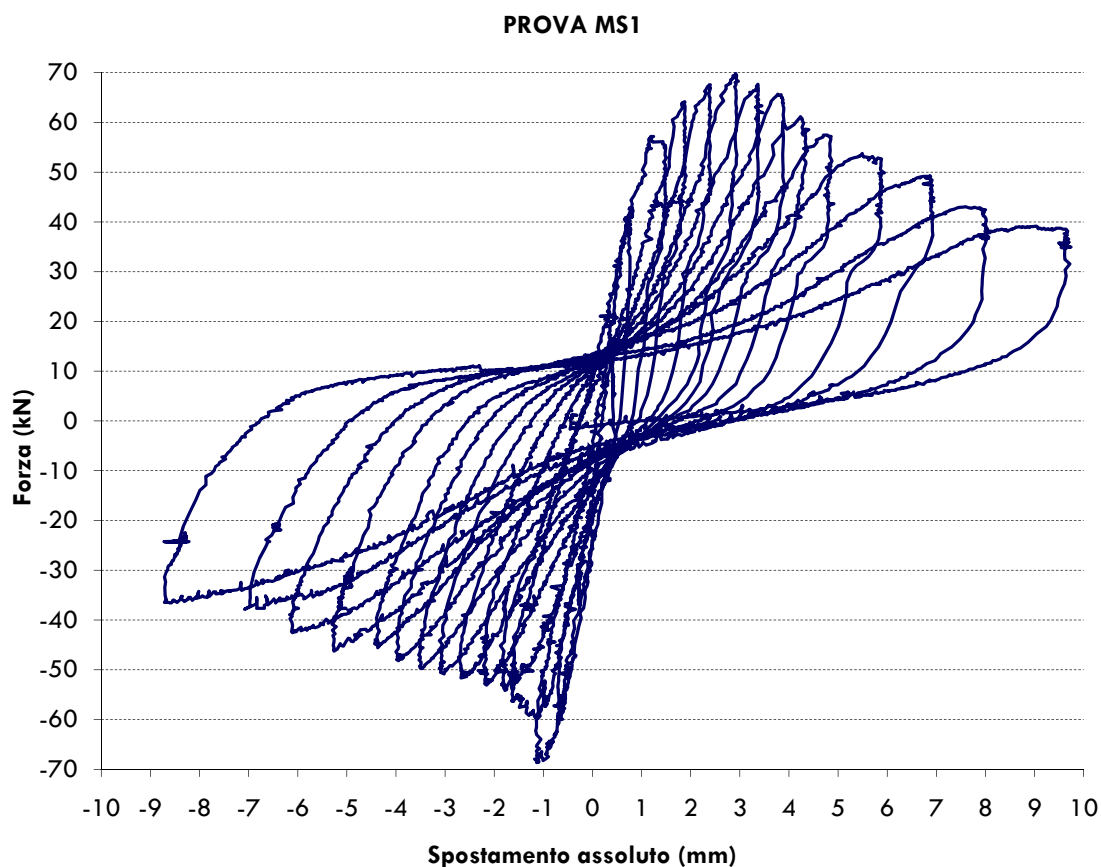
Di seguito viene quindi rappresentato il diagramma degli spostamenti imposti così come rilevato dallo strumento DB1, posti in funzione del tempo anziché del numero di cicli.



**FIGURA 19: CICLO DI SPOSTAMENTI IMPOSTI RILEVATI DALLO STRUMENTO DB1**

Come si può vedere, i dati derivanti dagli strumenti posti sul provino sono stati raccolti ad intervalli di 1 secondo, ad eccezione dei resistivi lineari DL1, DL2, DL3, DL4, i cui dati sono stati rilevati da una seconda postazione di controllo, ad intervalli compresi fra i 30 secondi e il minuto.

#### 5.4.2 I RISULTATI DELLA PROVA MS1

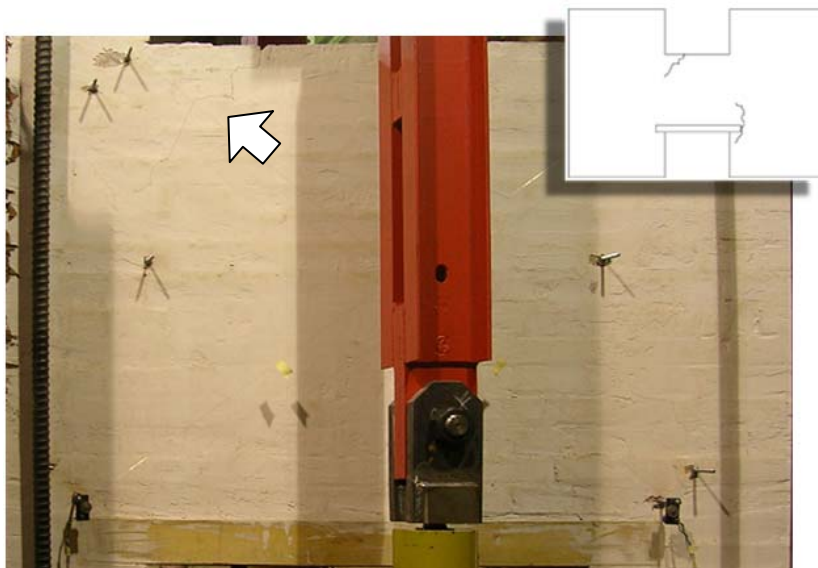


**FIGURA 20: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO DELLA PROVA MS1**

Il diagramma taglio-spostamento riportato sopra è quello ottenuto al termine della prova MS1 (ovvero al termine della seconda fase della prova sul primo campione, come da schematizzazione effettuata nel paragrafo 5.3). I valori sono stati ricavati calcolando la media degli strumenti applicati sul provino per ottenere lo spostamento assoluto della fascia di piano.

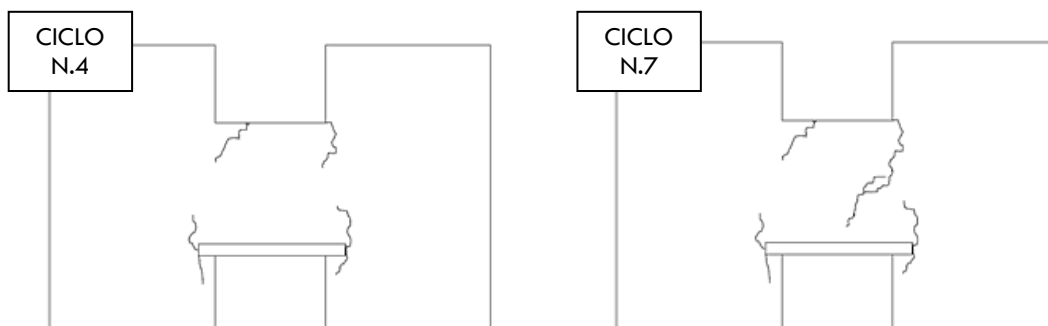
La forza raggiunta al termine del tratto lineare è di circa 56 kN, mentre il carico massimo raggiunto è stato di circa 70 kN.

Valutando l'andamento dello stato fessurativo con il progredire della prova attraverso i cicli in cui si sono sviluppate le lesioni più significative, si assiste alla comparsa delle prime nel corso del ciclo n.3. L'area di appoggio della trave in legno si distingue subito come zona critica: oltre a presentarsi come discontinuità nella parete (mediante l'intaglio con cui si inserisce nella muratura), altri fattori influenzano la comparsa e la diffusione di fessurazioni in quest'area, come verrà descritto nel dettaglio in un secondo momento.



**FIGURA 21: PRIME LESIONI IN CORRISPONDENZA DEL CICLO DI SPOSTAMENTO N.3**

Il ciclo n.4 vede la formazione di due lesioni in corrispondenza degli altri due vertici della fascia di piano, che si ampliano notevolmente nel corso del ciclo n.7, accanto allo sviluppo di una fessurazione diagonale.



**FIGURA 22: FESSURE FORMATESI NEL CORSO DEI CICLI N.4 E N.7**

Nel corso del ciclo n.9 si forma un'altra fessura diagonale in corrispondenza della sezione di mezzeria della trave in legno. Tale sviluppo ha indotto a credere, a questo livello della prova, che il

collasso finale si sarebbe prodotto attraverso la formazione di due fessurazioni diagonali definite dall'unione tra quelle sviluppatesi inizialmente ai vertici e quelle diagonali comparse in un momento successivo.

In realtà, il ciclo n.10 mostra uno sviluppo verticale delle fessure formatesi ai vertici con loro unione, mentre le fessure diagonali non si sviluppano ulteriormente, andando pertanto verso una rottura per meccanismo di *rocking*.



FIGURA 23: SVILUPPO DELLE FESSURE VERTICALI (CICLO N.10)

Nel corso del ciclo n.13 tali fessure diventano passanti e l'ampiezza delle fessure verticali aumenta fino a conclusione della prova, in corrispondenza del ciclo n.15.

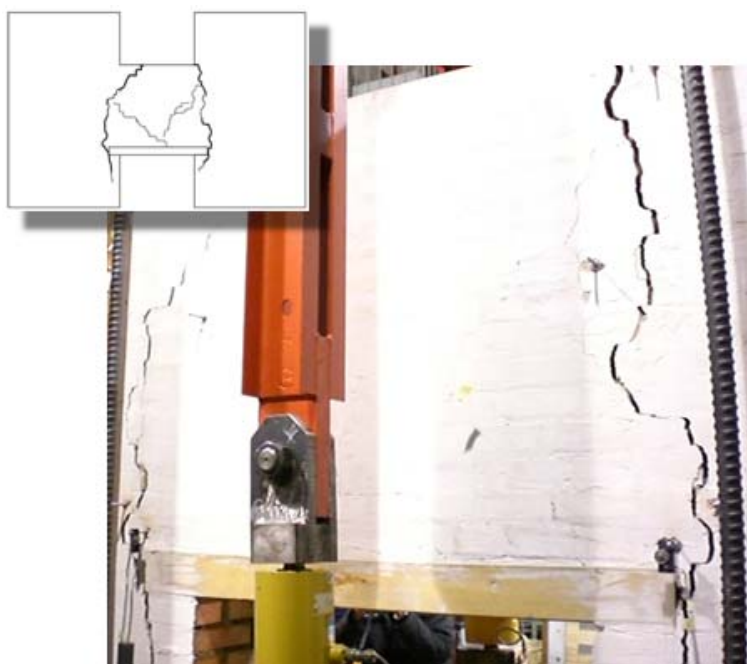


FIGURA 24: APERTURA COMPLETA DELLE FESSURE (CICLO N.15)



Come osservabile dal diagramma taglio-spostamento di figura 20 la capacità resistente della fascia di piano diminuisce sensibilmente all'aumentare del numero di cicli di carico. Pertanto, al termine della prova è stata raggiunta una tensione residua pari a circa il 60% della tensione massima. La diminuzione della resistenza è dovuta al progressivo danneggiamento del materiale, legato allo sviluppo e alla propagazione di fessure.

La rottura finale, dunque, è avvenuta con un meccanismo di *rocking*, ovvero un collasso a blocchi rigidi, dovuto ad una bassa o inesistente azione assiale di compressione nella fascia di piano. L'unico elemento di collegamento tra i due maschi murari è costituito pertanto dall'architrave ligneo.

## 5.5 PROVA MS1R

Si tratta della terza e ultima fase (vedi paragrafo 5.3) della prova sul primo campione. La modalità di rinforzo, come detto, è data da due barre in acciaio tipo *dywidag*, uno degli interventi più frequentemente applicati in caso di edifici fatiscenti. La precompressione applicata alle barre ha quindi introdotto un'azione assiale all'interno della fascia di piano, che ha permesso anche di richiudere le fessure apertesesi nel corso della fase di carico precedente (MS1), per una forza applicata totale di circa 85 kN. Tale consolidamento ha pertanto restituito alla fascia di piano la sua funzione di accoppiamento dei due maschi murari.

Oltre a ciò, un ulteriore vantaggio derivante dall'applicazione di tiranti in acciaio è l'aumento della resistenza a taglio del materiale, grazie alla compressione applicata (come accennato nel capitolo 2, la muratura è uno dei materiali sensibili alla pressione di confinamento).

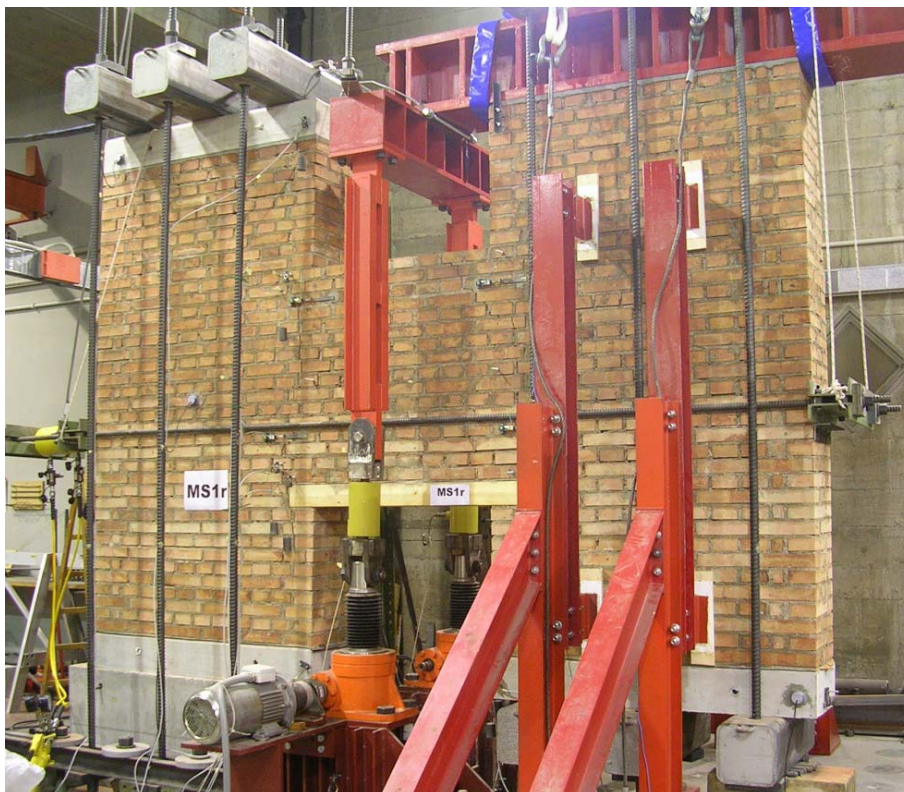


FIGURA 25: IL RINFORZO MEDIANTE BARRE IN ACCIAIO

### 5.5.1 L'ESECUZIONE DELLA PROVA MS1R

La prova è stata eseguita alcuni giorni dopo il termine della prova MS1 precedente, per poter applicare il rinforzo descritto nel paragrafo precedente. Una volta applicate le barre dywidag è ricominciata la fase di applicazione del carico a partire da spostamenti piccoli sempre più ampi, con le medesime convenzioni di segno illustrate precedentemente.

Il ciclo teorico di carico è stato il seguente.

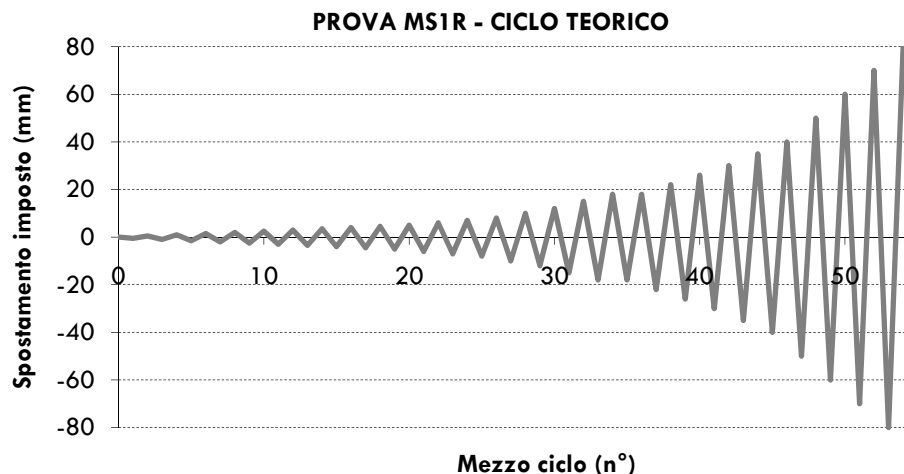


FIGURA 26: CICLO TEORICO DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS1R

Questa volta non si è presentato il problema di tensione residua dei martinetti posti precedentemente, quindi il ciclo reale risulta con buona approssimazione coincidente con quello teorico e, pertanto, simmetrico. L'unica differenza è data dall'ultimo ciclo di carico, dove i martinetti sono stati portati a fine corsa per concludere la prova a provino completamente collassato (escursione di 200 mm).

Rispetto alla prova MS1, si nota che i picchi degli spostamenti imposti nella terza fase sono di gran lunga superiori, dell'ordine di 8-10 volte.

Viene riportato anche il diagramma degli spostamenti imposti registrato dallo strumento DB1, funzione del tempo della prova.

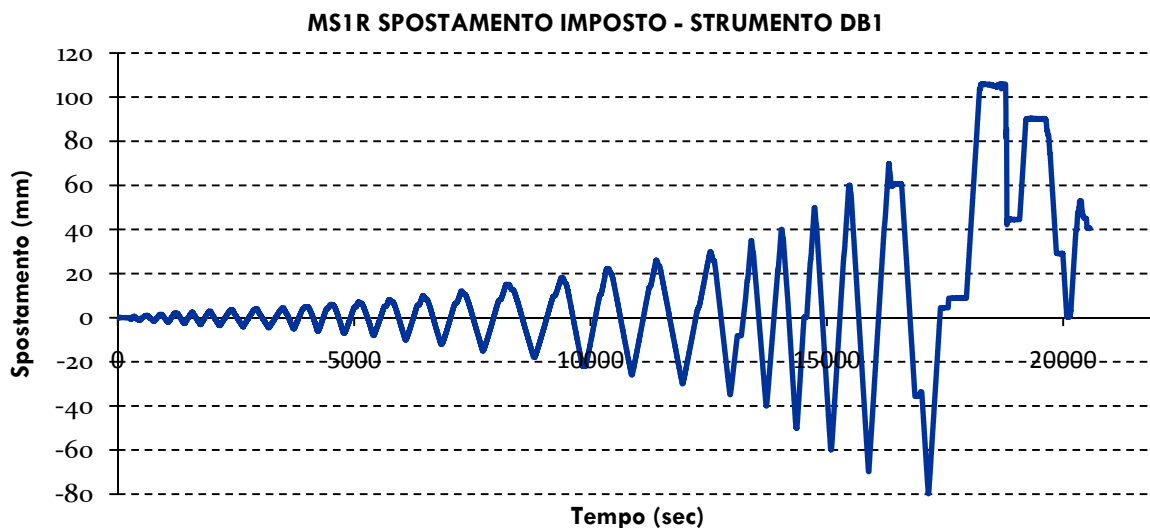
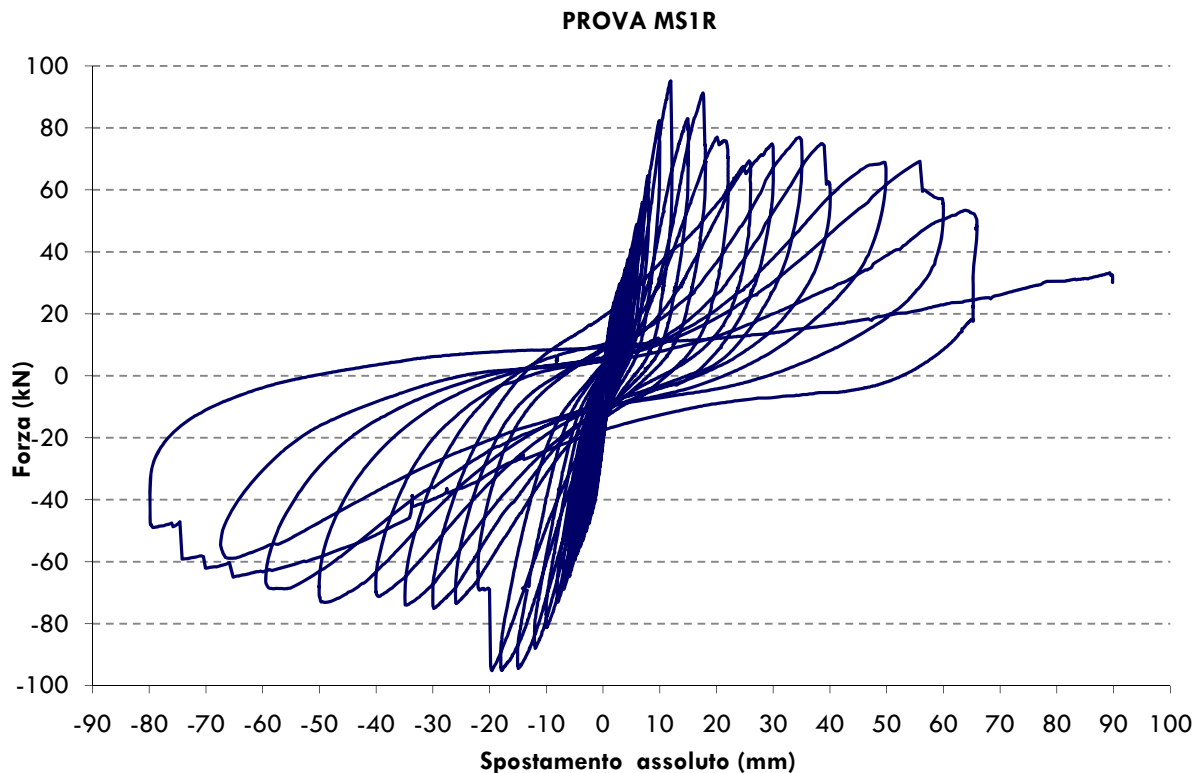


FIGURA 27: CICLO REALE DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS1R

Si nota che, a causa dell'estensiva fessurazione del provino al termine della prova MS1r (con rottura anche dell'architrave ligneo), non è stato possibile mantenere un andamento ciclico dello spostamento.

### 5.5.2 I RISULTATI DELLA PROVA MS1R



**FIGURA 28: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO DELLA PROVA MS1R**

Il diagramma taglio-spostamento illustra il comportamento del provino nel corso di questa parte della prova con rinforzo. Le ultime fasi dello spostamento imposto, corrispondenti alla perdita dell'andamento ciclico, non sono riportate nel diagramma, in quanto si ritiene che il provino sia giunto a collasso.

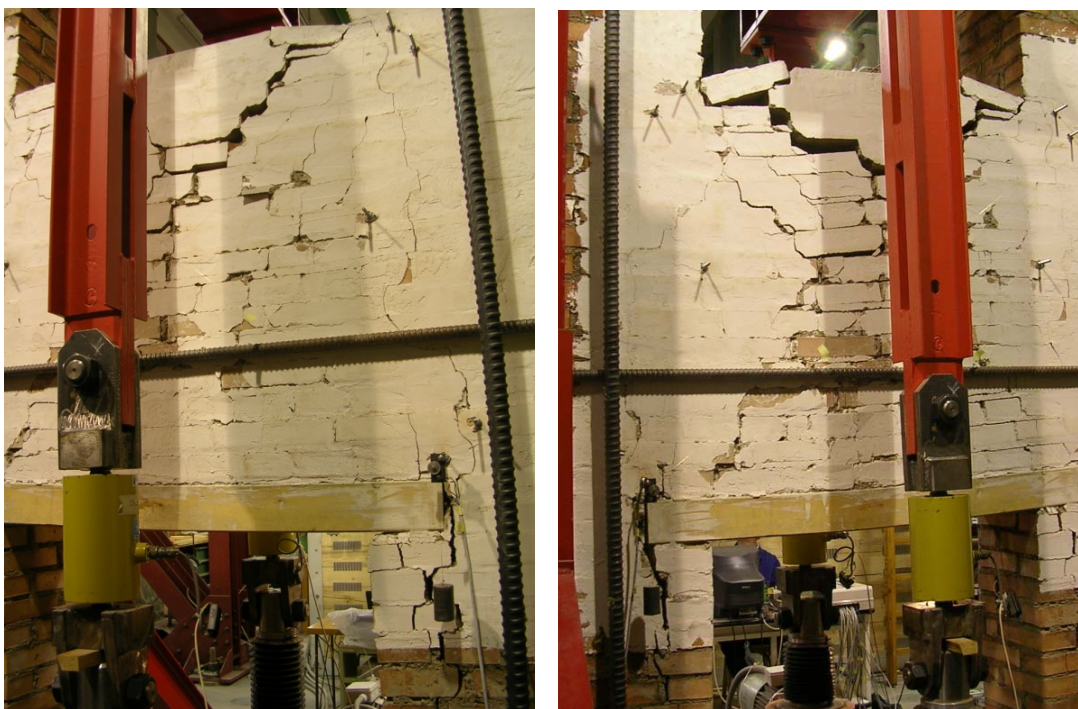
La resistenza massima raggiunta durante la prova è stata di circa 95 kN (un aumento pari a circa il 40% rispetto alla prova senza rinforzo), mentre quella al termine del tratto lineare di circa 82 kN. L'applicazione delle barre di rinforzo, dunque, ha contribuito ad aumentare notevolmente la resistenza a taglio del materiale muratura, proprio come previsto inizialmente. La rigidità del sistema rimane relativamente buona fino al ciclo n.13 (anche se più bassa rispetto a quella mostrata nel corso della prova MS1), seguito da un evidente degrado di rigidità e resistenza, fino allo spostamento finale di 100 mm, dove si raggiunge una resistenza residua pari a 40 kN, ovvero circa il 40% della tensione massima ottenuta durante la prova.

Per i primi 14 cicli di carico, non si è avuta nessuna nuova lesione, anche con uno spostamento imposto pari a 10 mm. A partire dal ciclo n.15 si forma una nuova fessura diagonale.



**FIGURA 29: PRIMA FESSURA COMPARSA DURANTE LA PROVA MS1R**

Nei cicli successivi le fessure diagonali si sono moltiplicate e propagate, portando progressivamente la fascia di piano al collasso.



**FIGURA 30: FORMAZIONE E SVILUPPO DI FESSURE DIAGONALI DURANTE LA PROVA MS1R**

Il collasso finale è stato caratterizzato anche dalla rottura dell'architrave in legno, completamente spezzato.

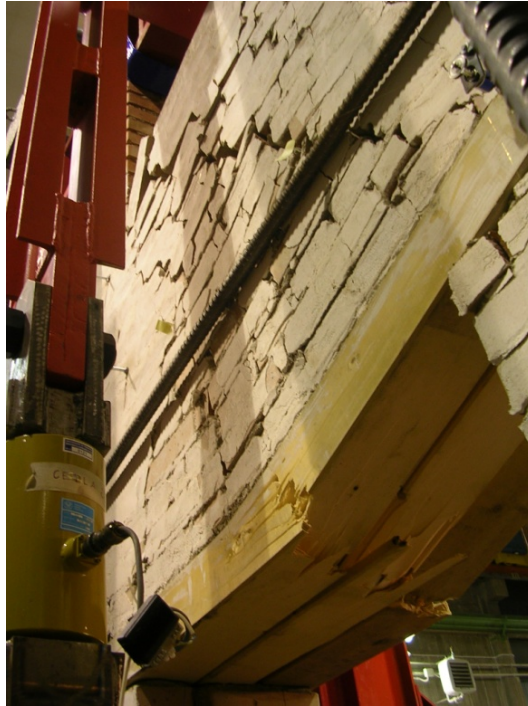


FIGURA 31: STATO DEL PROVINO AL TERMINE DELLA PROVA MS1R

## 5.6 PROVA MS2

Il secondo provino differisce dal primo essenzialmente per quanto riguarda le modalità di realizzazione dell'architrave; se prima era costituito da una trave in legno, ora è composta da due materiali: una piattabanda realizzata con gli stessi mattoni impiegati nella realizzazione del provino, della larghezza pari a  $2/3$  dello spessore del provino, a rappresentare la facciata esterna dell'edificio (da cui idealmente viene estrapolato) e una trave in legno della larghezza pari a  $1/3$  dello spessore della parete. L'architrave in legno è stata posizionata un corso di mattoni più in alto rispetto a quello su cui si appoggia la piattabanda, affinché entrambi si trovino allo stesso livello lungo il lato superiore. La piattabanda e l'architrave ligneo sono semplicemente posti l'uno accanto all'altro senza alcun legame fra essi.

C'è una lieve modifica nelle dimensioni del provino dovuta a difficoltà realizzative. I due maschi murari accoppiati, infatti, misurano  $1.42\text{ m} \times 2.60\text{ m}$ . La fascia di piano diventa, al contrario, leggermente più larga, con una dimensione di  $1.05\text{ m} \times 1.15\text{ m}$  di altezza. Lo spessore del provino, invece, rimane invariato e pari a  $0.38\text{ m}$ .



FIGURA 32: IL SECONDO PROVINO AL MOMENTO DELLA PROVA MS2

### 5.6.1 L'ESECUZIONE DELLA PROVA MS2

La prova MS2 è stata realizzata utilizzando il seguente diagramma di carico teorico.

Si ricorda che le convenzioni di segno sono le medesime utilizzate per le prove MS1 e MS1r, dunque con lo spostamento di segno positivo quando diretto verso il basso.

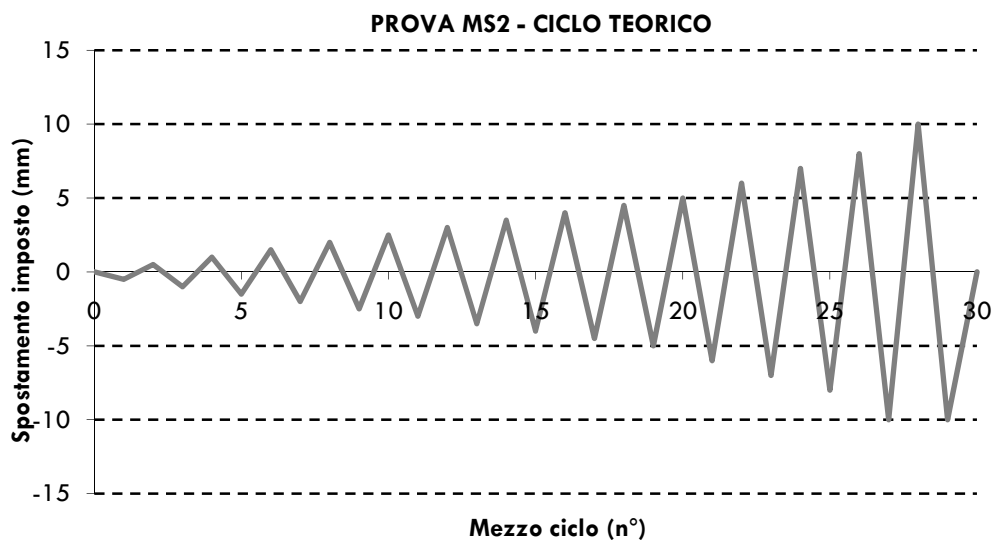


FIGURA 33: CICLO TEORICO DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS2

Le tensioni residue nei martinetti sono state azzerate fin dal principio, per cui lo schema di carico risulta in buona misura simmetrico. Pertanto, il diagramma degli spostamenti teorico e quello reale si possono considerare uguali.

Viene di seguito riportato anche il diagramma degli spostamenti imposti rilevato dallo strumento DB1, posti in funzione del tempo (come per la prova MS1, i dati vengono trasmessi con un intervallo di 1 secondo).

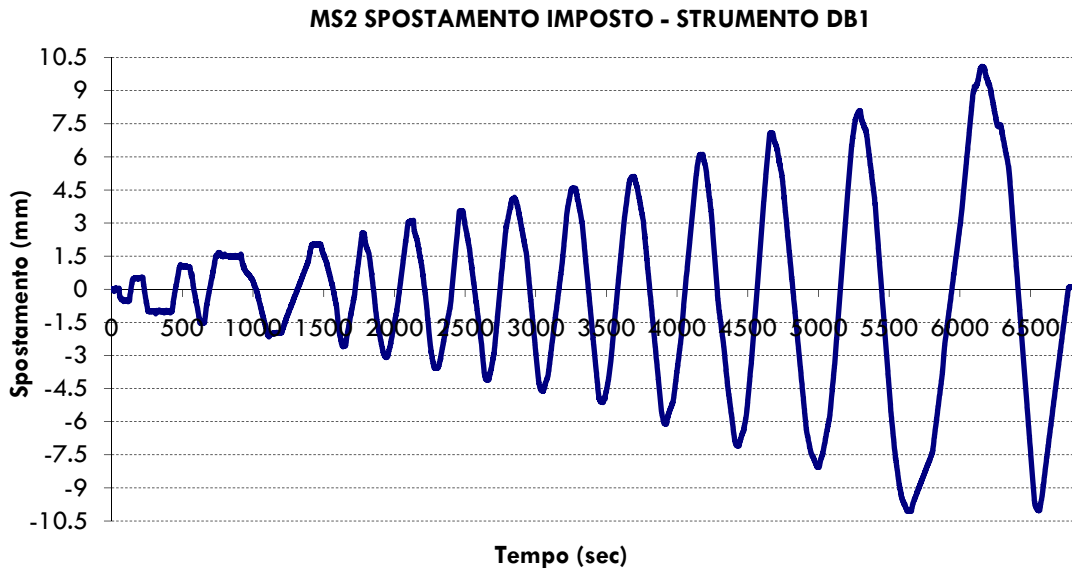


FIGURA 34: CICLO REALE DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS2

#### 5.6.2 I RISULTATI DELLA PROVA MS2

Il diagramma taglio-spostamento al termine della prova MS2 è il seguente (sempre derivante dalla media degli spostamenti registrati dagli strumenti posti sul provino).

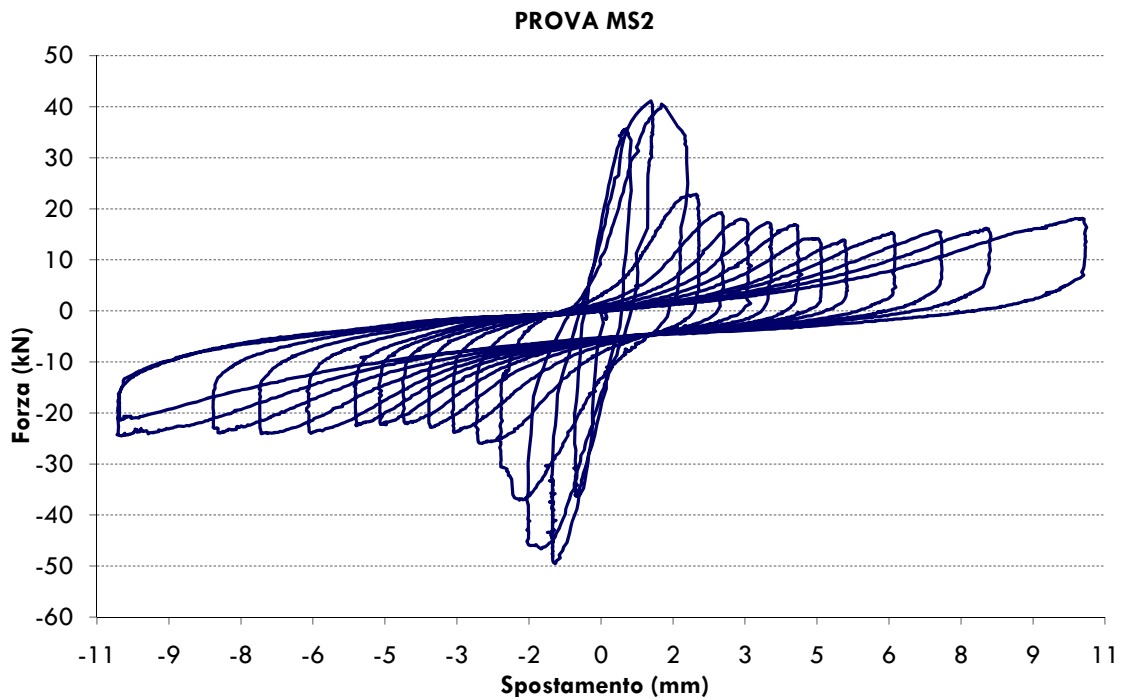
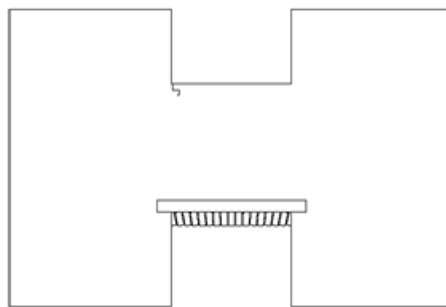


FIGURA 35: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO DELLA PROVA MS2

Rispetto al caso del muro MS1, il degrado della resistenza nel muro MS2 è chiaramente molto più rapido. La resistenza del materiale nelle due direzioni di carico è inoltre diversa: nel verso positivo, la resistenza del materiale è pari a circa 42 kN, mentre nella direzione opposta circa 50 kN. La forza raggiunta al termine del tratto lineare è di circa 31 kN.

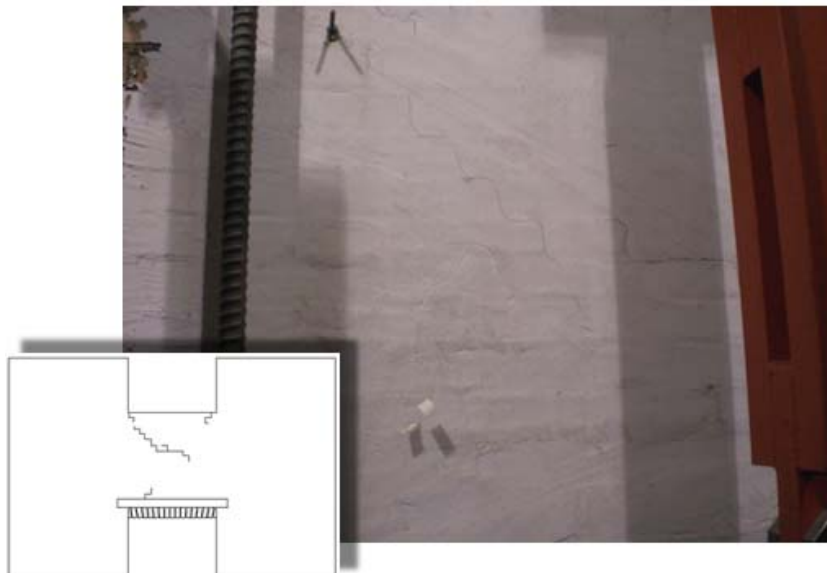
La rigidità del sistema rimane pressoché inalterata per i primi tre cicli di carico, poi comincia il degrado dovuto al progressivo danneggiamento del materiale, fino allo spostamento finale di 10 mm, con il quale ha avuto termine la seconda fase della prova sul campione MS2. La resistenza minima è stata pari a 15 kN, con un lieve aumento nella fase finale fino ad un valore di 18 kN.

La prima fessurazione compare già durante il ciclo di carico n.2, sebbene non così significativa da modificare sensibilmente la rigidità del materiale, nell'angolo in alto a sinistra, guardando il provino dal lato della trave in legno (retro), come rappresentato nello schema sottostante.



**FIGURA 36: PRIMA FESSURA FORMATASI SUL PROVINO MS2 (CICLO N.2)**

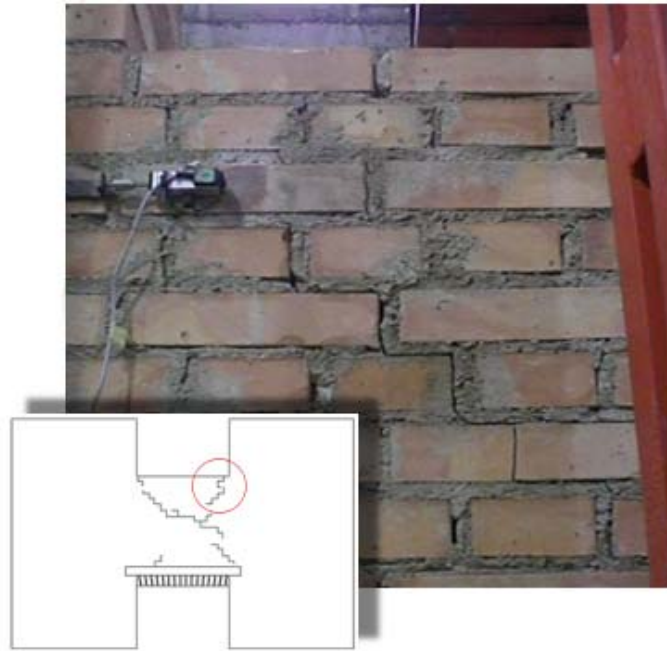
Nel corso del ciclo n.3 la fessura creatasi in precedenza si allarga sensibilmente e altre due fessure si aprono in corrispondenza di due vertici opposto, uno superiore e uno inferiore.



**FIGURA 37: APERTURA DELLA PRIMA FESSURA DIAGONALE (CICLO N.3)**

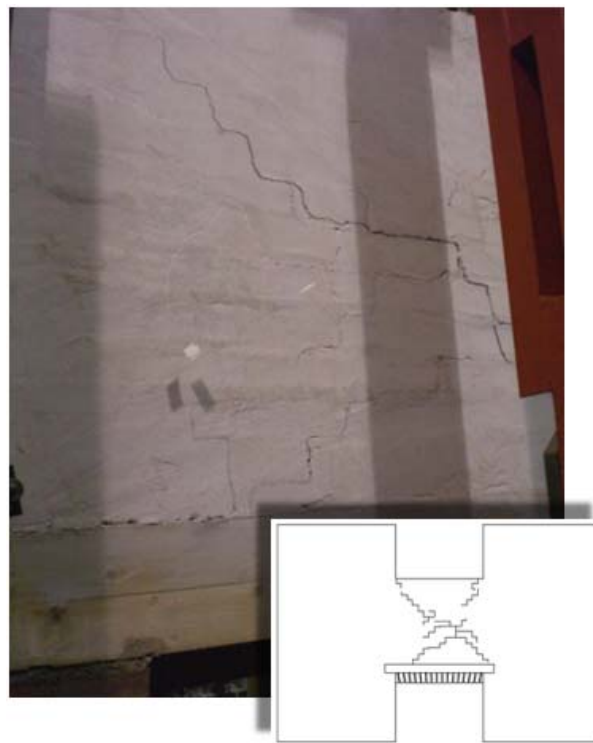
Nel ciclo n. 4 si ha un ampliamento delle fessure precedentemente createsi, mentre nel n.5 si ha anche un progressivo aumento di spessore delle stesse, tanto che sono visibili non soltanto sullo strato di intonaco disposto sul retro del provino (come nel caso del provino MS1), ma anche sulla parte frontale, lato piattabanda in mattoni.





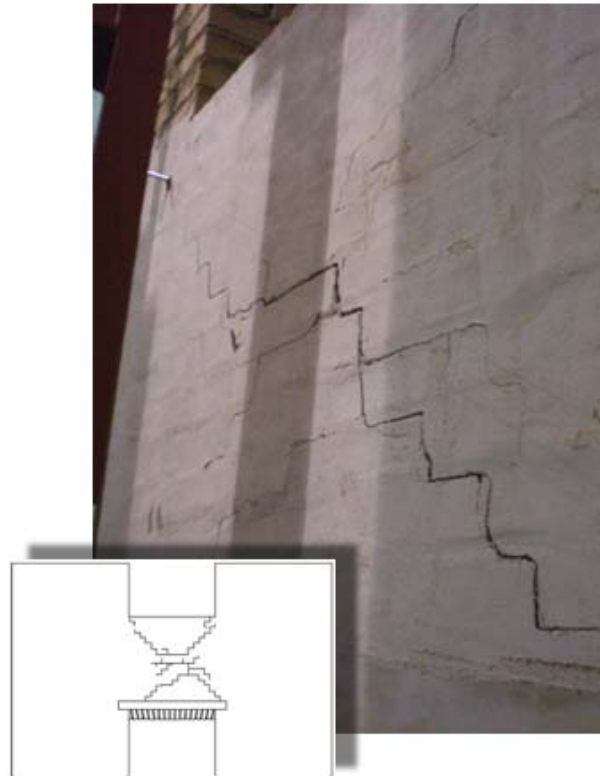
**FIGURA 38: FESSURE CHIARAMENTE VISIBILI ANCHE SUL PROSPETTO FRONTALE (CICLO N.5)**

Nel corso del ciclo n.7 le fessurazioni diagonali si uniscono in un'unica fessurazione ben marcata. Diventa quindi evidente la progressiva formazione di due puntoni a compressione, tipico del modo di rottura per fessurazione diagonale.



**FIGURA 39: FESSURAZIONE DIAGONALE BEN MARCATA (CICLO N.7)**

Nel ciclo n.10 l'unione delle fessurazioni diagonali diventa sempre più netta e accanto alla fessurazione principale si sviluppano anche fessurazioni minori; dopo l'ampliamento di qualche fessura, il ciclo n.15 vede la conclusione della prova con lo stato finale riportato di seguito.



**FIGURA 40: COLLASSO FINALE CON FESSURAZIONI DIAGONALI MULTIPLE (CICLO N.15)**

La rottura finale, pertanto, è caratterizzata da un'intensa fessurazione diagonale, che ha causato una decisiva diminuzione, dopo i primi tre cicli di carico, della resistenza del materiale (subito dopo la comparsa della prima vera e propria lesione diagonale).

La resistenza residua, dunque, è pari al 45% della resistenza massima riscontrata nella prova. Al termine dei 15 cicli applicati, questa volta, le fessurazioni riguardano anche la piattabanda in mattoni (nel caso del muro MS1, non c'erano segni di danno visibili sulla trave di legno che è giunta a rottura soltanto in occasione della prova MS1r).

## 5.7 PROVA MS2R

Si tratta della fase finale della prova sul secondo campione. La scelta della modalità di rinforzo questa volta è caduta su profili ad "L", fissati al provino mediante spinotti assicurati con resina epossidica. L'azione assiale relativa alla fascia di piano è dunque assicurata, questa volta, dal profilo ad "L" (si tratta effettivamente di due profili che si uniscono al centro della fascia di piano): prima di tutto la muratura viene precompressa con lo stesso metodologia applicata nella prova MS1r (cioè utilizzando due barre in acciaio *dywidag*), quindi è stato installato il profilo e, una volta in opera, la coppia di barre in acciaio è stata allentata, in modo da trasferire l'azione assiale agli spinotti fissati nella muratura (che si ritrovano così sollecitati a taglio). I profili ad "L" sono una delle tipologie di rinforzo utilizzate, in quanto permettono non solo il consolidamento della fascia di piano, ma offrono anche un appoggio per la posa in opera di nuovi solai.

Una volta sistemato il profilo ad "L", la prova MS2r viene avviata con la modalità consueta, utilizzando cicli sempre più ampi di spostamenti imposti.



FIGURA 41: IL RINFORZO MEDIANTE PROFILO AD "L"

### 5.7.1 L'ESECUZIONE DELLA PROVA MS2R

Dopo l'installazione del profilo a "L", la prova è stata ripresa con la medesima convenzione di segno utilizzata in precedenza.

Il ciclo teorico di carico è indicato nel grafico sottostante.

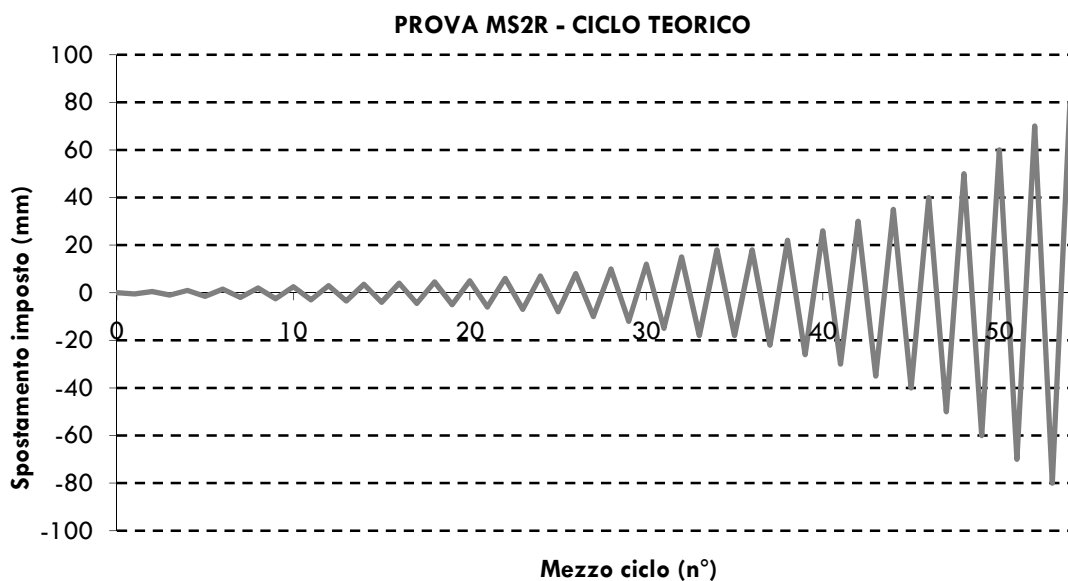


FIGURA 42: CICLO TEORICO DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS2R

Anche in questo caso, poiché la prova MS2r riparte da dov'era stata lasciata la prova MS2 e la posizione della strumentazione non è stata modificata (solo azzerata per avviare la terza fase della

prova), il ciclo teorico di spostamenti è identico a quello reale. Anche in questo caso, come per la prova MS1r, la loro entità è stata di gran lunga superiore a quella della prova effettuata senza il rinforzo. L'ultimo spostamento di 200 mm è stato utilizzato per condurre il provino a rottura.

Si riporta per conferma anche il diagramma degli spostamenti imposti rilevato dallo strumento DB1, funzione del tempo della prova.

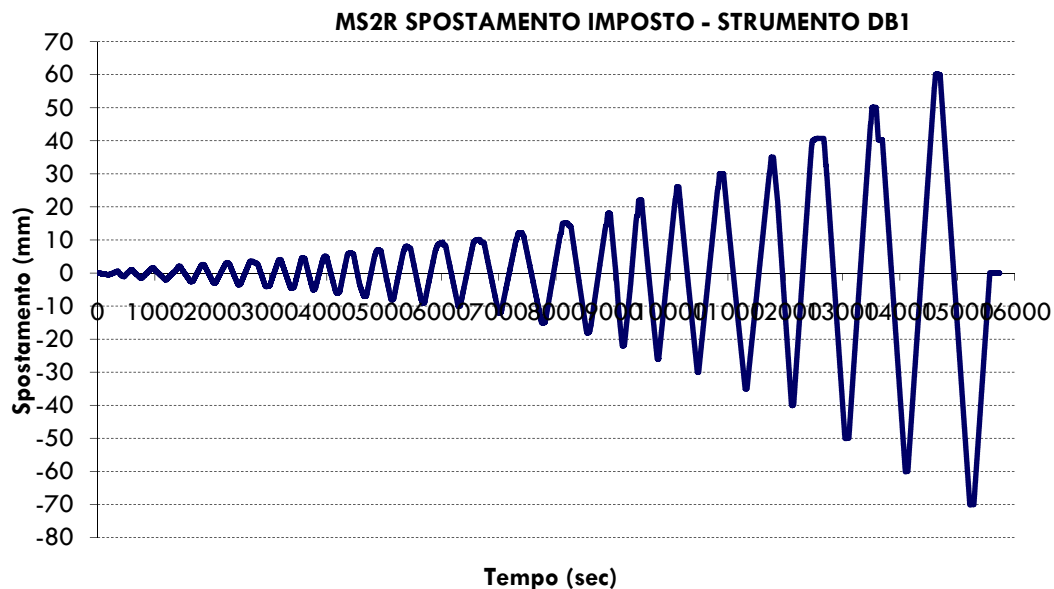


FIGURA 43: CICLO REALE DI SPOSTAMENTO PER LA PROVA MS2R

A differenza della prova MS1r si è potuto mantenere un andamento ciclico degli spostamenti fino al termine della prova.

### 5.7.2 I RISULTATI DELLA PROVA MS2R

La curva taglio-spostamento che descrive il comportamento del provino è la seguente.

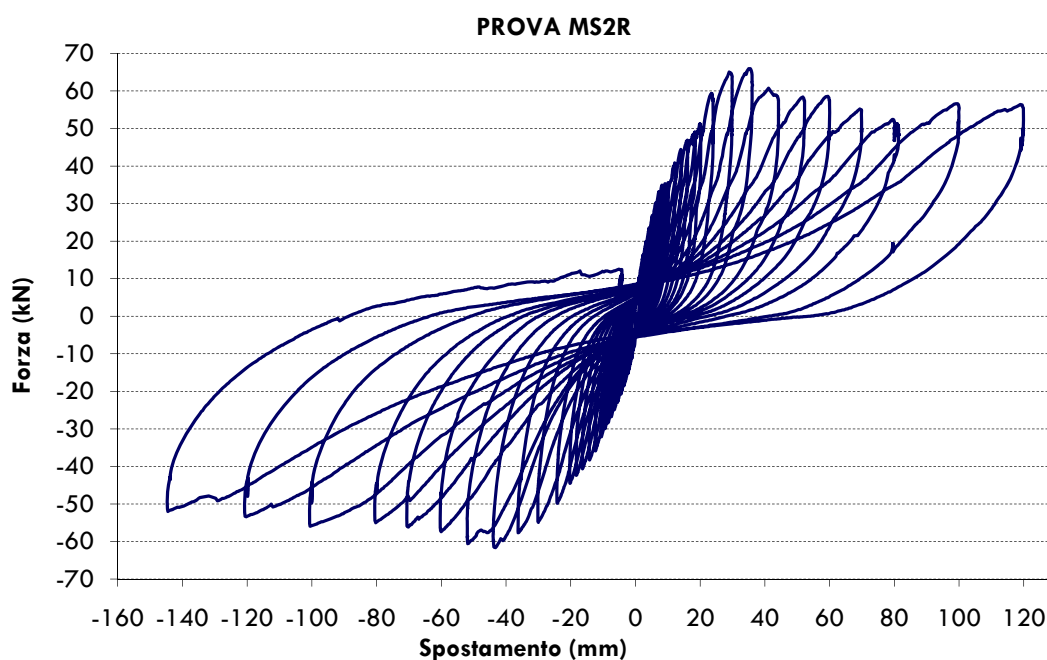


FIGURA 44: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO DELLA PROVA MS2R

La resistenza massima raggiunta durante la prova è stata di circa 60 kN nella direzione di carico negativa (corrispondente ad un aumento di circa il 50% rispetto alla prova senza rinforzo) e di circa 65 kN in quella positiva, mentre quella al termine del tratto lineare di circa 36 kN. Anche la tipologia di rinforzo che utilizza un profilo ad “L” in luogo di due barre in acciaio ha dunque contribuito ad aumentare la resistenza a taglio del materiale.

Le lesioni si sono sviluppate, questa volta in maniera più confusa e irregolare rispetto alla prova con rinforzo MS1r. La progressione della fessurazione è riportata con qualche foto esemplificativa.



**FIGURA 45: ESEMPI DELLO STATO FESSURATIVO SVILUPPATOSI NEL CORSO DELLA PROVA**

Il collasso finale del provino è stato caratterizzato dalla rottura completa della piattabanda, che si è fisicamente separata dalla fascia di piano soprastante.

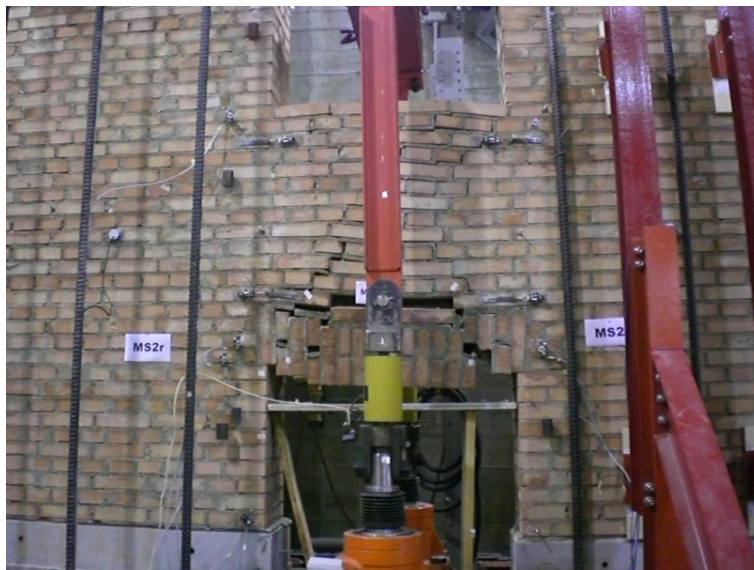


FIGURA 46: DISTACCO DELLA PIATTABANDA AL TERMINE DELLA PROVA MS2R

La rigidità elastica, al termine della prova, si è abbassata notevolmente, a causa del diffuso danneggiamento finale che ha caratterizzato il provino. La capacità resistente, invece, subisce una riduzione più lenta e la tensione residua rimane comunque pari all'85% della tensione massima.

## 5.8 DETERMINAZIONE DELLE PROPRIETÀ MECCANICHE DEI PROVINI

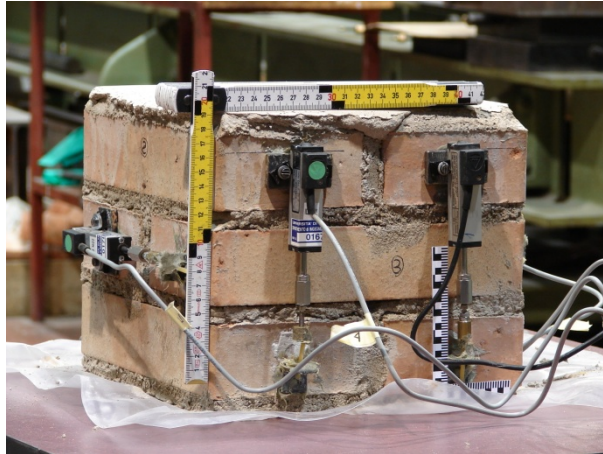
Le proprietà meccaniche dei provini sono state determinate effettuando alcune prove a taglio e a compressione su muretti. E' stato così possibile ottenere i valori della resistenza a compressione e del modulo elastico (attraverso le prove di compressione), di resistenza a taglio e il modulo di elasticità tangenziale (attraverso le prove a taglio).

In seguito alle prove, i valori delle proprietà meccaniche dei due provini MS1 e MS2 sono risultate diverse fra loro per difficoltà connesse alla posa in opera. Tali dettagli verranno forniti nei capitoli successivi, mentre nei paragrafi seguenti saranno illustrate le modalità di svolgimento delle prove e i parametri meccanici ottenuti.

### 5.8.1 LE PROVE A COMPRESSIONE

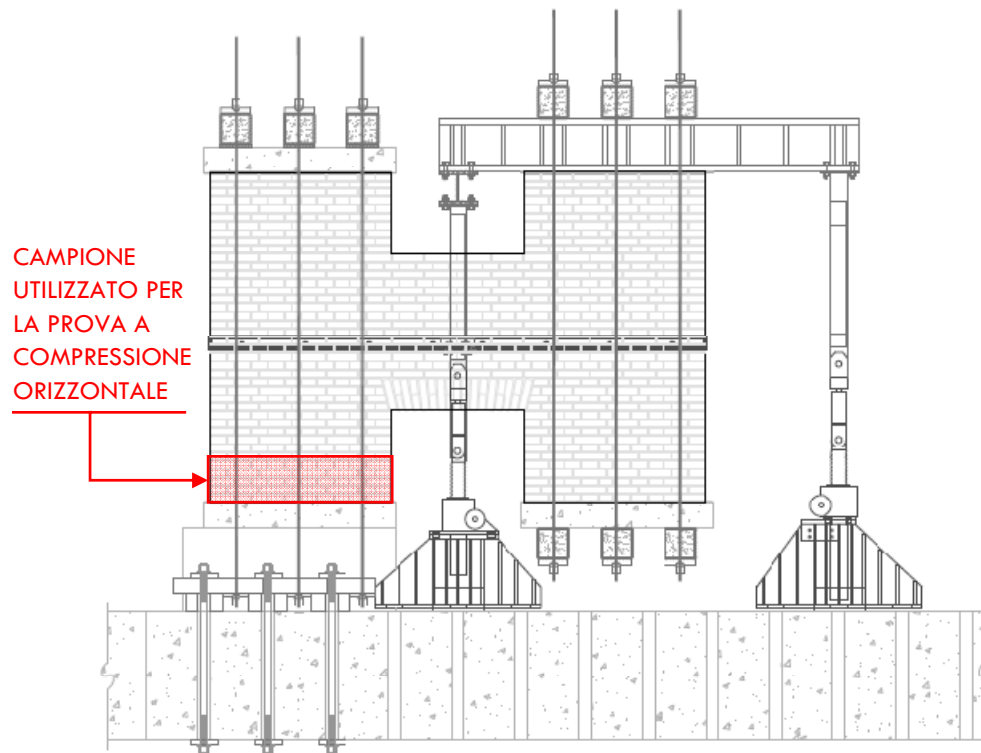
Sono state effettuate due tipologie di prove a compressione:

- a) Prova a compressione ortogonale ai giunti di malta orizzontali: sono state realizzate utilizzando muretti delle dimensioni di 0.25 x 0.25 x 0.215 m (corrispondente a due teste di mattoni), realizzati appositamente durante le fasi di costruzione del provino, per la determinazione della resistenza a compressione e del modulo elastico del materiale. Per controllare lo spostamento sono stati posti sul pilastro sei strumenti della tipologia dei resistivi lineari (vedi paragrafo 5.3).



**FIGURA 47: TIPICO MURETTO UTILIZZATO PER LE PROVE A COMPRESIONE ORTOGONALI AL GIUNTO DI MALTA ORIZZONTALE**

- b) *Prova a compressione parallela ai giunti di malta orizzontali*: questa prova è stata effettuata utilizzando parte di uno dei maschi murari del primo provino, dopo aver eseguito le prove MS2 e MS2r. Non sono stati posizionati strumenti per il controllo dello spostamento.



**FIGURA 48: PARTE DEL PROVINO UTILIZZATA NELLA PROVA A COMPRESIONE ORIZZONTALE**



FIGURA 49: L'APPARECCHIATURA DELLA PROVA A COMPRESSIONE ORIZZONTALE

Considerando la direzione  $x$  quella orizzontale (ovvero parallela ai giunti di malta principali) e la direzione  $y$  (ovvero quella ortogonale ai giunti principali), le prove a compressione hanno condotto ai risultati illustrati nella tabella seguente:

Le proprietà meccaniche		
Pilastrino MS1	direzione $x$	direzione $y$
Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$f_{cx} = \text{N.D.}$	$f_{cy} = 9.44$
Modulo di Young (MPa)	$E_x = \text{N.D.}$	$E_y = 4820$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.39$	
Pilastrino MS2	direzione $x$	direzione $y$
Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$f_{cx} = 7.01$	$f_{cy} = 26.88$
Modulo di Young (MPa)	$E_x = \text{N.D.}$	$E_y = 11112$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.35$	

TABELLA 3: LE PROPRIETÀ MECCANICHE DERIVANTI DALLE PROVE A COMPRESSIONE SU MURETTO

### 5.8.2 LE PROVE A TAGLIO

Anche in questo caso sono state effettuate due tipologie di prove a taglio:

- Prova a taglio su muretto: si tratta di un provino composto da tre corsi di mattoni sovrapposti, identico a quelli utilizzati per le prove a compressione (dimensioni  $0.25 \times 0.25 \times 0.215$  m), a cui è stata applicata una sollecitazione di taglio sul corso centrale attraverso una cerniera sferica posta al centro della piastra superiore dell'apparecchiatura. La velocità di applicazione del carico è stata tra  $0.1$  e  $0.4$   $\text{N/mm}^2\text{min}$ . Per controllare lo spostamento sono stati applicati due strumenti sulle due facce opposte libere dall'apparecchiatura di prova, della tipologia dei resistivi lineari (vedi paragrafo 5.3).



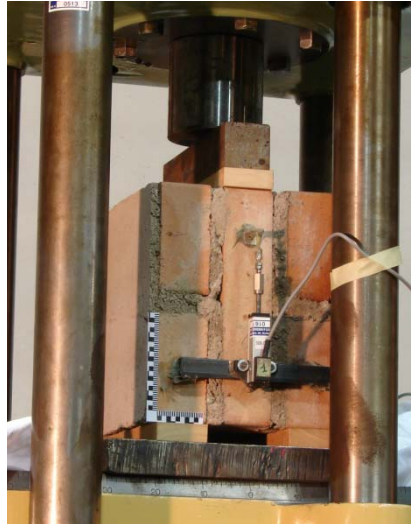


FIGURA 50: LA PROVA A TAGLIO SU MURETTO

- b) Prova a taglio sul provino rimaneggiato: dopo la realizzazione delle prove MS1 e MS1r, il provino è stato modificato per la realizzazione di una prova a taglio. E' stato realizzato un foro delle dimensioni di 0.25 x 0.25 m direttamente nel maschio murario rimasto fisso durante la prova. Per misurare gli spostamenti, sono stati utilizzati quattro strumenti di tipo resistivo lineare, due su un lato e due sull'altro e un martinetto posto nel foro ha fornito la sollecitazione, ad incrementi costanti di 2 kN.



FIGURA 51: L'APPARATO DELLA PROVA A TAGLIO SUL PROVINO RIMANEGGIATO

La prova a taglio su provino rimaneggiato è stata effettuata soltanto sul campione delle prove MS1 e MS1r, mentre la prova a taglio su muretti è stata realizzata per entrambi i provini.

I risultati derivanti dalla prova a taglio su muretto relativamente alle proprietà meccaniche del provino MS1 non sono state ritenute affidabili (difetto di realizzazione del muretto) a causa del basso valore di rottura riscontrato. Pertanto vengono riportati i valori derivati dal modulo elastico e dalle deformazioni, secondo le indicazioni normative (Norme Tecniche sulle Costruzioni 2008).

**Le proprietà meccaniche - prova a taglio su muretto**
**Pilastrino MS1**

Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$\tau = 0.016$
Modulo di elasticità tangenziale (MPa)	$G_{xy} = 1873$

**Pilastrino MS2**

Resistenza a compressione monoassiale (MPa)	$\tau_{xy} = 0.2$
Modulo di elasticità tangenziale (MPa)	$G_{xy} = 3854$

**TABELLA 4: LE PROPRIETÀ MECCANICHE DEI PROVINI DALLE PROVE A TAGLIO SU MURETTI**
**Le proprietà meccaniche - prova a taglio su provino rimaneggiato**
**MS1**

Resistenza a taglio (kN)	$\tau = 0.157$
--------------------------	----------------

**TABELLA 5: LE PROPRIETÀ MECCANICHE DALLA PROVA A TAGLIO SU PROVINO RIMANEGGIATO**

Determinate le proprietà meccaniche dei provini MS1 e MS2, il prossimo passo è ora quello di realizzarne un modello numerico mediante il programma agli elementi finiti ABAQUS, utilizzando come legame costitutivo il modello di danno e plasticità isotropo descritto nel capitolo 3, analogamente a quanto svolto per i pannelli sollecitati a taglio, le cui prove sono state abbondantemente descritte nel corso del capitolo 4. Sarà quindi valutata la risposta del modello a carico ciclico e i risultati saranno confrontati con i diagrammi taglio-spostamento ottenuti sperimentalmente.

## CAPITOLO 6

# ANALISI NUMERICA DELLE PROVE SU FASCIA DI PIANO

### 6.1 DESCRIZIONE DEI MODELLI NUMERICI

#### 6.1.1 LA GEOMETRIA

Nel capitolo precedente sono state descritte quattro prove sperimentali realizzate presso il Laboratorio di Prove Materiali e Strutture del Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale dell'Università degli Studi di Trieste. Per valutare la corrispondenza tra i risultati numerici e quelli sperimentali, sono stati eseguiti quattro modelli corrispondenti alle prove MS1, MS1r, MS2 e MS2r. Il legame costitutivo utilizzato per il comportamento non lineare della muratura è sempre il modello di danno e plasticità isotropo, già valutato nelle prove riportate nel capitolo 4.

Dal punto di vista degli elementi (i cosiddetti *parts*) utilizzati per comporre i modelli all'interno del programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1), si può dire che sono in gran parte gli stessi per tutte e quattro le analisi, ad eccezione di alcuni dettagli che verranno illustrati nei paragrafi a seguire.

Sostanzialmente, ciascun modello è formato da una **parte principale a forma di H**, che rappresenta la fascia di piano e i due maschi murari accoppiati. Le dimensioni di questo elemento variano a seconda del provino rappresentato, secondo quanto descritto nel capitolo 5 relativo alle prove su fascia di piano: come da campioni sperimentali, dunque, le dimensioni dei *parts* ad H sono uguali a due a due (MS1 e MS1r, MS2 e MS2r). La figura 1 mostra le parti utilizzate per costruire i modelli.

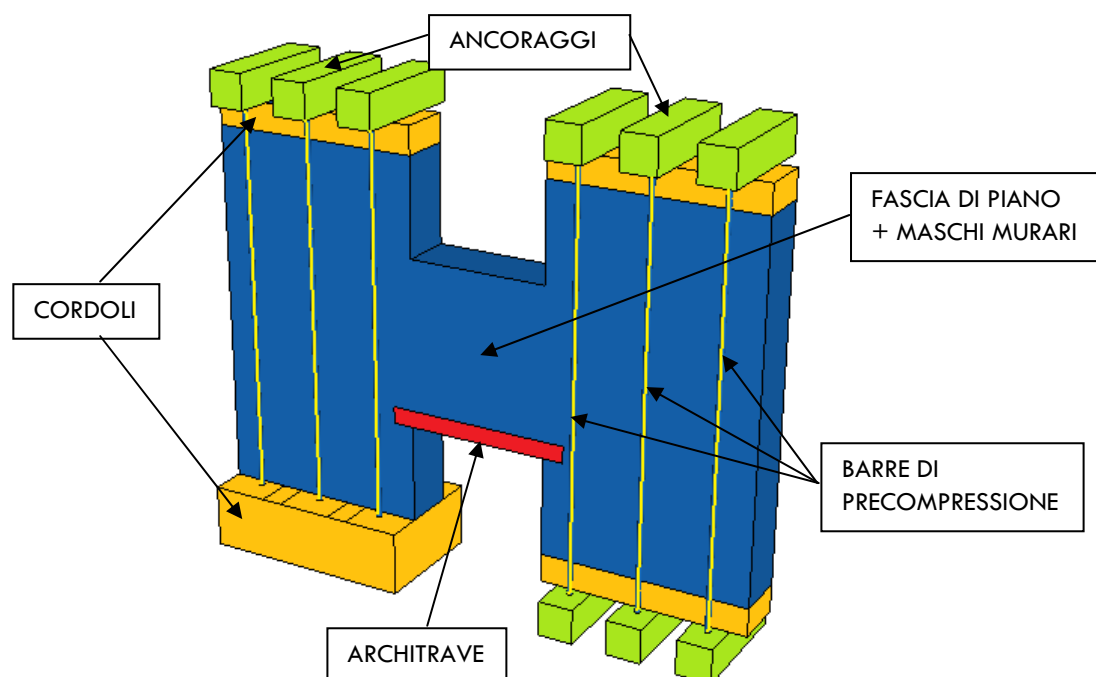


FIGURA 1: PARTI CHE COMPONGONO I MODELLI NUMERICI

All'elemento principale a forma di H sono collegate **quattro parti rettangolari** a cui è stato assegnato il materiale calcestruzzo: esse rappresentano nella realtà, per quanto riguarda il pannello fisso di sinistra, uno dei cordoli in calcestruzzo (solido sulla sommità del maschio) e la base di calcestruzzo fissa in basso (solido alla base del maschio), mentre per il pannello mobile, rappresentano la trave in acciaio tipo HE (solido sulla sommità del maschio) e l'altro cordolo in calcestruzzo (solido alla base del maschio). Quindi sono stati realizzate **nove parti rettangolari di dimensioni minori** rispetto alle precedenti, che rappresentano gli ancoraggi delle barre *dywidag* utilizzate per la precompressione dei maschi murari: nella realtà si tratta di cordoli in acciaio con calcestruzzo gettato all'interno, ma nell'analisi numerica per semplicità è stato assegnato il materiale calcestruzzo. Di conseguenza, sono stati realizzati dodici cilindri di forma allungata a rappresentare le barre *dywidag* a cui, naturalmente, è stato assegnato il materiale acciaio.

Infine, per ogni modello è stato realizzato **un solido che rappresenta l'architrave**, che differisce a seconda del provino rappresentato per quanto riguarda il materiale applicato (legno per i modelli MS1 e MS1r, muratura/legno per i modelli MS2 e MS2r). I modelli rappresentanti le prove MS1r e MS2r, come sarà descritto nel dettaglio a breve, sono costituiti da alcuni elementi aggiuntivi che rappresentano il rinforzo applicato nella terza fase delle prove sperimentali sui due campioni in muratura (vedi capitolo 5).

Tutti gli elementi che compongono il modello sono solidi 3D deformabili. Come per i pannelli sollecitati a taglio descritti nel capitolo 4, anche i modelli delle prove su fascia di piano sono stati assemblati nel programma utilizzando diversi vincoli tra gli elementi. In particolare, sono stati utilizzati un vincolo e un'interazione. Il **vincolo** è quello denominato **TIE** (capitolo 4, paragrafo 4.3.1) ed è stato impiegato per il collegamento delle seguenti parti:

- Elemento ad H - architrave
- Ancoraggi - barre di precompressione
- Cordoli - ancoraggi

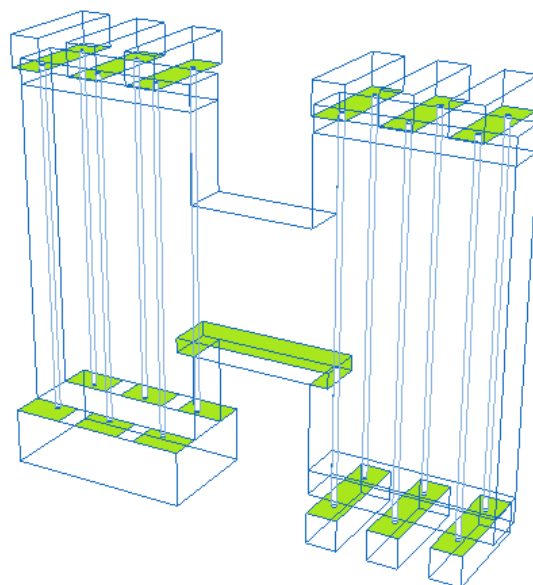


FIGURA 2: LE AREE COLLEGATE CON VINCOLO TIPO TIE

L'interazione fra superfici, a simulare un semplice contatto, è stato utilizzato fra i maschi murari e i cordoli, con le stesse proprietà utilizzate per i pannelli sollecitati a taglio del capitolo 4: una componente normale tipo "HARD" e una componente tangenziale data da un coefficiente di attrito pari a 0.8.

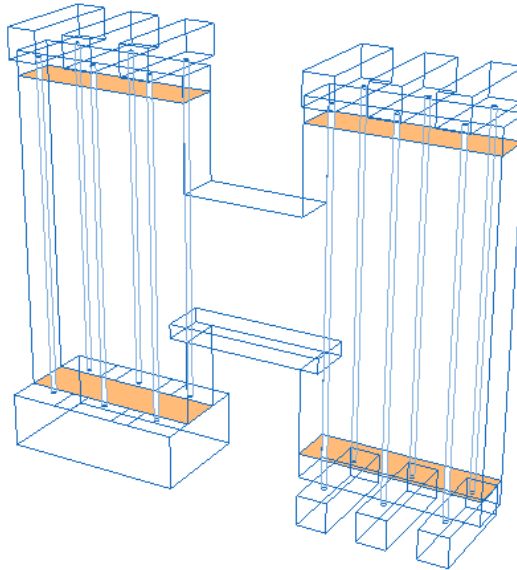


FIGURA 3: LE AREE FRA CUI È STATA DEFINITA UN'INTERAZIONE

Passando alle **condizioni al contorno**, sono stati distinti due periodi con diverso grado di vincolo a seconda della fase di analisi del modello numerico.

1. **STEP1 - Precompressione iniziale:** per quanto riguarda quello che è stato definito lo STEP1, ovvero il corrispondente della prima fase delle prove sperimentali (la precompressione), sono stati assegnati due incastri alle superfici inferiori dei modelli, precisamente all'elemento che rappresenta la base in calcestruzzo e ai tre ancoraggi del pannello mobile. Per i modelli che simulano le prove MS1r e MS2r questi vincoli sono stati mantenuti anche nello step di compressione per l'applicazione dei rinforzi.

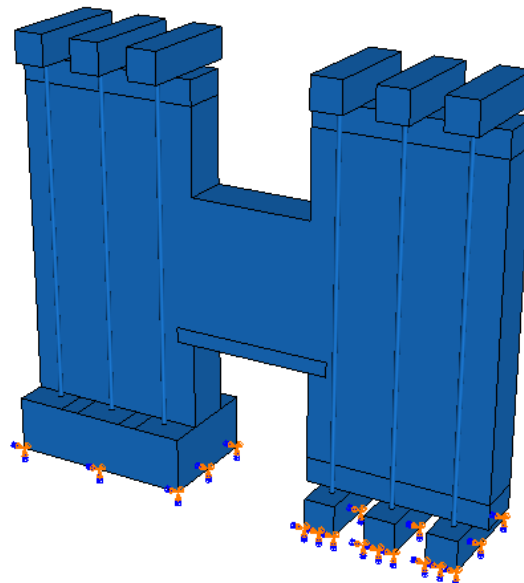


FIGURA 4: STEP1 - CONDIZIONI AL CONTORNO

2. **STEP 2 - Spostamento ciclico:** per lo STEP 2, che corrisponde alla seconda e alla terza fase delle prove sperimentali (dove si effettua la prova a spostamento imposto ciclico), è stato mantenuto soltanto l'incastro al di sotto del maschio murario fisso, mentre quello mobile è stato lasciato libero di spostarsi verticalmente. Al posto del vincolo precedente, dunque, è stato applicato lo spostamento, come descritto nel prossimo paragrafo.

### 6.1.2 I CARICHI

Ciascuno dei quattro modelli è stato caricato con lo stesse azioni, l'unica differenza riguarda l'intensità delle stesse: in particolare, per lo spostamento imposto, i valori delle ampiezze massime raggiunte sono stati applicati sulla base di quanto riscontrato durante le prove sperimentali. Di conseguenza, lo spostamento massimo applicato nell'analisi numerica è quello ottenuto al termine di ciascuna delle fasi delle prove sperimentali.

Pertanto, secondo i due step di carico descritti nel paragrafo precedente, i carichi applicati sono stati i seguenti:

1. **Contrazione termica:** è stata assegnata agli elementi che rappresentano le barre *dywidag* per simulare la precompressione applicata ai provini che riproduce i carichi derivanti dalle parti superiori dell'ipotetica struttura da cui sono estrapolati. Dato che le barre sono in acciaio è stato utilizzato un coefficiente di dilatazione termica pari a  $\alpha = 0.00012$  utilizzando il modulo "Expansion" contenuto all'interno dei comportamenti meccanici a disposizione del materiale. Quindi è stata applicata una variazione di temperatura pari a -70 (il segno negativo indica la contrazione termica), considerando un valore iniziale di temperatura nullo, pari al valore necessario a raggiungere la precompressione di 255 kN (0.447 N/mm<sup>2</sup>) applicata nella realtà ai maschi murari. Il valore è stato inserito nel campo "Predefined Field Variables" nella fase in cui si definiscono i carichi.

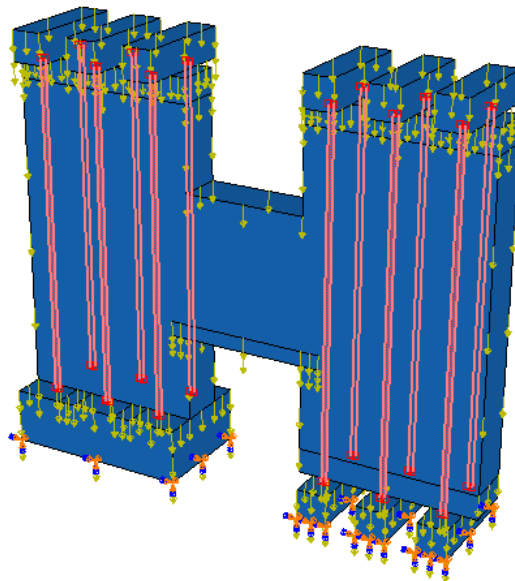


FIGURA 5: LA MODALITÀ DI APPLICAZIONE DELLA PRECOMPRESSIONE INIZIALE

2. **Spostamenti imposti:** sono stati applicati ad ampiezza sempre crescente, inizialmente con variazioni di mezzo millimetro (uno nelle prove con rinforzo), poi di uno e con il procedere dell'analisi ad incrementi sempre più ampi. Come detto precedentemente, a seconda del modello, l'ampiezza finale ha avuto valori differenti, come illustrato in tabella 1.

Spostamenti massimi	
MS1 (mm)	10
MS1r (mm)	70
MS2 (mm)	10
MS2r (mm)	120

TABELLA 1: SPOSTAMENTI MASSIMI RAGGIUNTI NEI MODELLI NUMERICI

Oltre ai carichi definiti nei diversi step di analisi, sono stati anche assegnati i **pesi propri** alle varie parti del modello, con i valori riportati in tabella 2. I valori sono riportati in  $N/mm^3$  per la scelta effettuata, nel modello, di utilizzare come unità di misura delle lunghezze i millimetri e delle forze i Newton.

Peso proprio dei materiali	
PP acciaio ( $N/mm^3$ )	$7.8 \cdot 10^{-5}$
PP calcestruzzo ( $N/mm^3$ )	$2.5 \cdot 10^{-5}$
PP legno ( $N/mm^3$ )	$6 \cdot 10^{-5}$
PP muratura ( $N/mm^3$ )	$1.8 \cdot 10^{-5}$

TABELLA 2: VALORI DEL PESO PROPRIO DEI MATERIALI UTILIZZATI

Le prove MS1r e MS2r a cui sono applicati gli elementi di rinforzo hanno un terzo step di carico che si pone in posizione intermedia tra i due descritti precedentemente e che avviene con le stesse modalità della precompressione iniziale, dunque attraverso la contrazione termica dell'elemento di rinforzo applicato.

### 6.1.3 LE PROPRIETÀ MECCANICHE

Si riportano le proprietà meccaniche dei quattro materiali utilizzati in ciascuno dei modelli: **acciaio**, **calcestruzzo**, **legno** e **muratura**. Per i primi tre è stato definito solamente il comportamento elastico lineare, mentre per la muratura, esattamente come per le prove a taglio su pannelli, è stato definito anche il comportamento non lineare.

Acciaio - Comportamento elastico	
Modulo di Young (MPa)	$E = 210000$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.3$

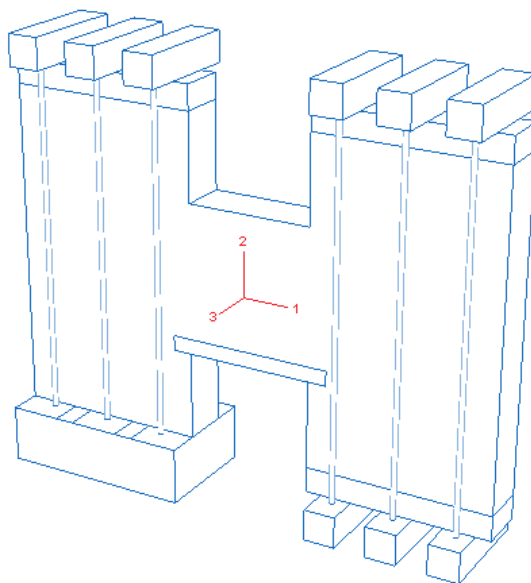
TABELLA 3: CARATTERISTICHE DELL'ACCIAIO

**Calcestruzzo - Comportamento elastico**

Modulo di Young (MPa)	$E = 40000$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.3$

**TABELLA 4: CARATTERISTICHE DEL CALCESTRUZZO**

Per il legno è stato definito un comportamento elastico ortotropo, data la notevole differenza nella risposta del materiale in direzione parallela e ortogonale alle fibre. Le direzioni 1, 2 e 3 sono state definite nel seguente modo come rappresentato in figura 5.

**TABELLA 5: IL SISTEMA DI RIFERIMENTO****Legno - Comportamento elastico ortotropo**

D1111 (MPa)	12861	D1122 (MPa)	676	D1212 (MPa)	700
D2222 (MPa)	907	D1133 (MPa)	866	D1313 (MPa)	700
D3333 (MPa)	930	D2233 (MPa)	532	D2323 (MPa)	40

**TABELLA 6: CARATTERISTICHE DEL LEGNO**

Per la muratura, i valori elastici utilizzati derivano in parte dalle prove sperimentali, in parte da osservazioni derivanti dalle prove a taglio dei pannelli illustrati nel capitolo 4. In particolare, i coefficienti di Poisson sono quelli calcolati con le prove su muretti, mentre i moduli di Young sono circa la metà di quelli ottenuti nelle stesse prove: questo perché i valori sono relativi alla direzione ortogonale ai giunti di malta principali, mentre (come per i modelli numerici del capitolo 4) la direzione maggiormente sollecitata a taglio è quella orizzontale (giunti orizzontali come piani di debolezza). Si veda il capitolo 7 per le modalità con cui sono stati calcolati i valori.

**Muratura MS1 - Comportamento elastico**

Modulo di Young (MPa)	$E = 2210$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.39$

**TABELLA 7: CARATTERISTICHE DELLA MURATURA (MS1)**



<b>Muratura MS2 - Comportamento elastico</b>	
Modulo di Young (MPa)	$E = 5000$
Coefficiente di Poisson	$\nu = 0.35$

TABELLA 8: CARATTERISTICHE DELLA MURATURA (MS2)

Il comportamento non lineare, invece, richiede l'inserimento dei parametri nel modulo *Concrete Damage Plasticity*, con le modalità seguenti:

- **angolo di dilatanza ( $\psi$ ):** nonostante il carico da precompressione sia distribuito in sei carichi concentrati di 85 kN posti sulla sommità dei maschi murari, è stato calcolato un carico distribuito equivalente, analogamente a quanto svolto nel caso del pannello W4 (vedi capitolo 4) che era caratterizzato da un carico concentrato. Il carico distribuito equivalente è stato ipotizzato lungo tutta la lunghezza dei due provini. Anche se i maschi murari e la fascia di piano dei campioni MS1 e MS2 non hanno la stessa lunghezza (quello del secondo provino sono leggermente più corti), il valore dell'angolo di dilatanza non varia in maniera sostanziale. Dalle stesse curve sperimentali utilizzate per determinare i valori da applicare ai pannelli W1, W2 e W4 sollecitati a taglio e già descritti in precedenza, è stato ricavato un valore di  $\psi$  pari a  $23^\circ$ . Benché le prove MS1r e MS2r rappresentino un test su materiale giunto a rottura nella fase precedente, l'applicazione dei rinforzi fa sì che le fessure vengano richiuse, ragion per cui idealmente viene ripristinata l'integrità dei provini; il valore assunto per l'angolo di dilatanza dei modelli numerici che rappresentano queste due prove, pertanto, deriva dalla somma della compressione verticale e orizzontale ed è pari a  $18^\circ$ .
- **eccentricità, K e viscosità:** sono rimasti invariati rispetto alle analisi numeriche già svolte sui pannelli sollecitati a taglio e i valori sono rispettivamente 0.1, 1 e  $10^{-4}$ .
- **rapporto tra la resistenza a compressione biassiale e quella monoassiale  $f_{b0}/f_{c0}$ :** non essendo nota dalla caratterizzazione delle proprietà meccaniche la resistenza a compressione biassiale dei provini MS1 e MS2, il valore del rapporto è stato assunto pari al valore unitario ( $f_{b0}/f_{c0} = 1$ ), ipotizzando così per sicurezza un valore della resistenza a compressione biassiale uguale a quello monoassiale.

Riassumendo, dunque, i parametri di *Concrete Damage Plasticity* inseriti per i tutti e quattro i modelli numerici sono:

<b>Parametri di Concrete Damage Plasticity</b>	
<b>MS1, MS1r, MS2, MS2r</b>	
Angolo di dilatanza	$\psi = 23^\circ$ per MS1 e MS2, $\psi = 18^\circ$ per MS1r e MS2r
Eccentricità	$\epsilon = 0.1$
$f_{b0}/f_{c0}$	$f_{b0}/f_{c0} = 1$
K	$K = 1$
Viscosità	$\nu = 10^{-4}$

TABELLA 9: TABELLA RIASSUNTIVA DEI PARAMETRI DEL CONCRETE DAMAGE PLASTICITY

Per quanto riguarda la definizione del comportamento a compressione e a trazione del materiale, sempre come per le analisi precedenti, per semplicità è stato scelto un comportamento elasto-plastico perfetto per la compressione e descritto in termini di energia di frattura a trazione. I valori dipendono dal modello numerico di riferimento. Di seguito si riportano i valori del modello numerico corrispondente alla prova MS1.

<b>MS1 - Comportamento non lineare</b>		
	<b>Yield stress</b>	<b>Inelastic strain</b>
Comportamento a compressione	9.44	0
	9.44	1
	<b>Yield stress</b>	<b>Fracture energy</b>
Comportamento a trazione	0.18	0.085

**TABELLA 10: COMPORTAMENTO A TRAZIONE E A COMPRESSIONE PER MS1**

Nella definizione delle proprietà meccaniche del modello MS1r si tiene anche conto del degrado della rigidità raggiunta al termine della seconda fase della prova (corrispondente alla prima serie di spostamenti imposti a materiale integro), modificando pertanto il valore del modulo di Young per quanto riguarda le proprietà elastiche del materiale muratura (MS1) da un valore di  $E = 2210N/mm^2$  a una rigidità residua calcolata pari a circa  $E = 450N/mm^2$ . La resistenza a taglio residua al termine della seconda fase di prova, prima dell'applicazione delle barre di rinforzo, come detto è il 40% di quella originale.

<b>MS1r - Comportamento non lineare</b>		
	<b>Yield stress</b>	<b>Inelastic strain</b>
Comportamento a compressione	9.44	0
	9.44	1
	<b>Yield stress</b>	<b>Fracture energy</b>
Comportamento a trazione	0.22	1

**TABELLA 11: COMPORTAMENTO A TRAZIONE E A COMPRESSIONE PER MS1R**

<b>MS2 - Comportamento non lineare</b>		
	<b>Yield stress</b>	<b>Inelastic strain</b>
Comportamento a compressione	26.88	0
	26.88	1
	<b>Yield stress</b>	<b>Fracture energy</b>
Comportamento a trazione	0.14	0.085

**TABELLA 12: COMPORTAMENTO A TRAZIONE E A COMPRESSIONE PER MS2**

Come per il modello MS1r, anche MS2r tiene conto del degrado di rigidità e resistenza raggiunto al termine della fase di carico precedente. Così, da una rigidità iniziale  $E = 5000 \text{ N/mm}^2$  di ottiene una residua pari a  $E = 400 \text{ N/mm}^2$ . Si ricorda che la resistenza a taglio prima dell'applicazione dei profili a "L" di rinforzo era pari al 60% di quella originale.

<b>MS2r - Comportamento non lineare</b>		
	<b>Yield stress</b>	<b>Inelastic strain</b>
Comportamento a compressione	26.88	0
	26.88	1
	<b>Yield stress</b>	<b>Fracture energy</b>
Comportamento a trazione	0.15	1.5

TABELLA 13: COMPORTAMENTO A TRAZIONE E A COMPRESSIONE PER MS2R

## 6.2 RISULTATI DELL'ANALISI NUMERICA

### 6.2.1 PROVA MS1

Il modello numerico della prova MS1 si presenta nel modo illustrato in figura 6. Il primo elemento che lo distingue dagli altri modelli è la presenza dell'elemento solido prismatico che costituisce l'architrave in legno della prova MS1.

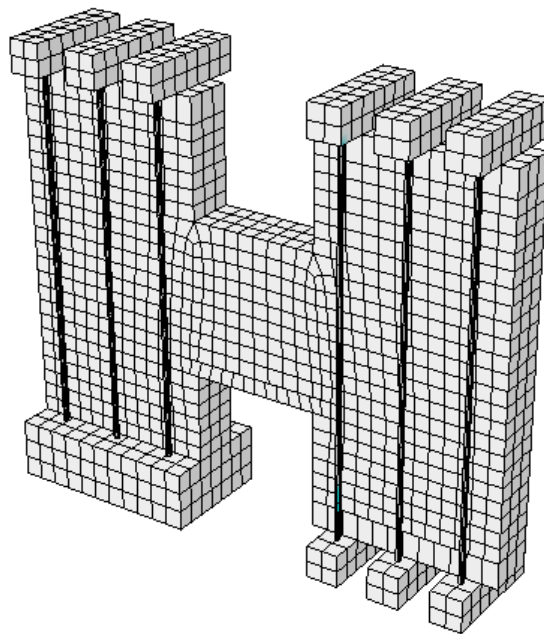


FIGURA 6: IL MODELLO MS1

In figura 7 è illustrato il diagramma taglio-spostamento ottenuto dal modello numerico. Viene inoltre posta in confronto con quella ricavata dai dati sperimentali (tratteggiata). Nel complesso, la curva numerica descrive abbastanza bene il comportamento del materiale per quanto riguarda la prova MS1, specialmente nel tratto corrispondente ai primi cicli di carico. Nel verso degli spostamenti positivi, il degrado della resistenza è più repentino rispetto a quanto riscontrato nella prova sperimentale, mentre

dal lato degli spostamenti negativi l'andamento si mantiene prossimo alla curva sperimentale fino ad uno spostamento di circa 5-6 mm. La resistenza residua finale è più bassa di quella registrata realmente.

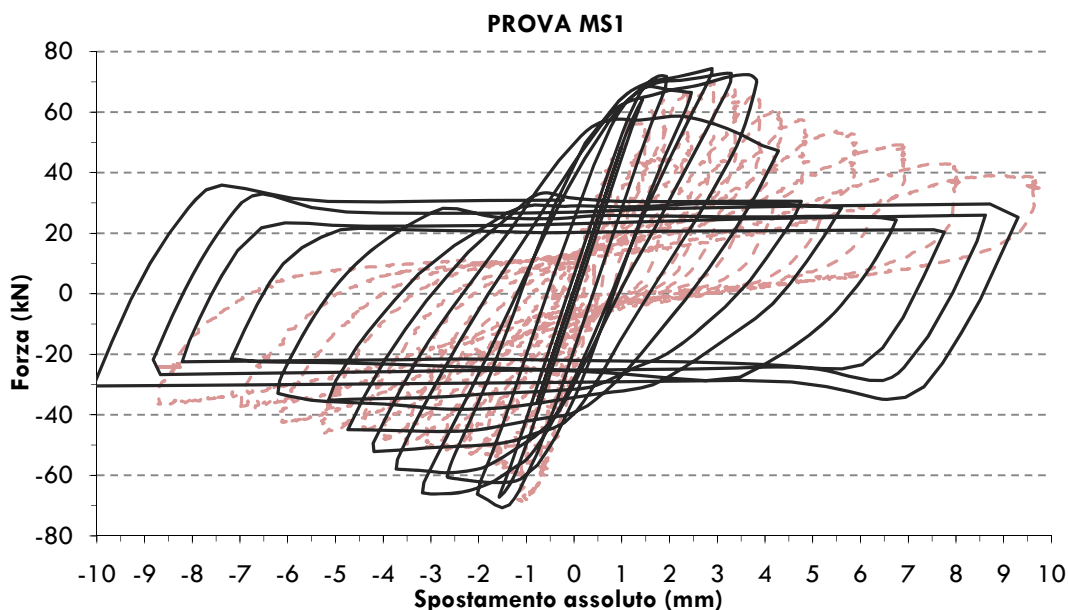


FIGURA 7: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO PER L'ANALISI MS1

I cicli sono significativamente più larghi di quelli delle prove sperimentali e questo dipende in gran parte dal modello numerico, che non vede il danno come una vera e propria discontinuità nel materiale, quanto come una deformazione plastica. Infatti, come è possibile vedere nelle immagini successive, il progressivo danneggiamento del materiale si traduce in una deformazione permanente che si allarga sempre più, rispecchiando inizialmente la rottura reale del materiale, ma che alla fine dell'analisi ricopre l'intera fascia di piano per unione di tutte le deformazioni create nella fase di sollecitazione.

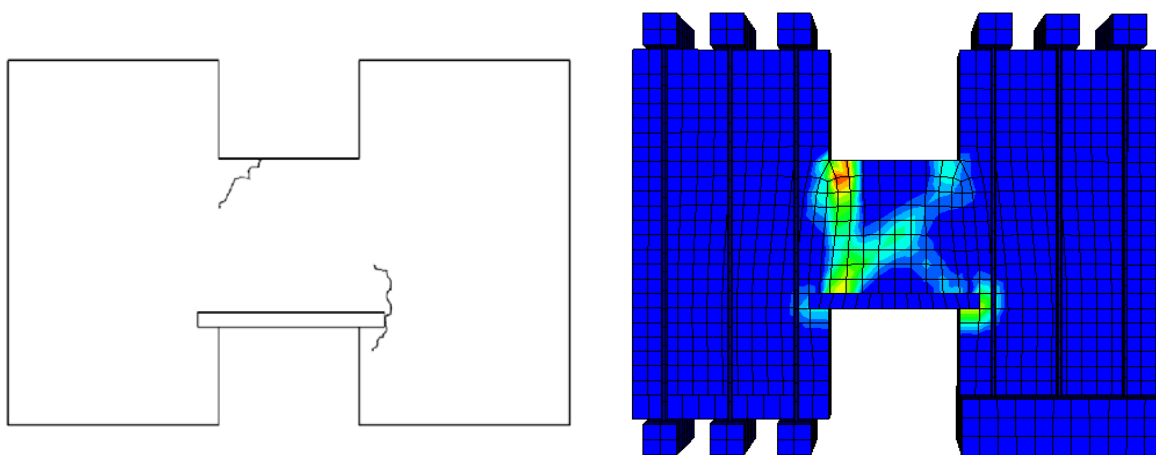
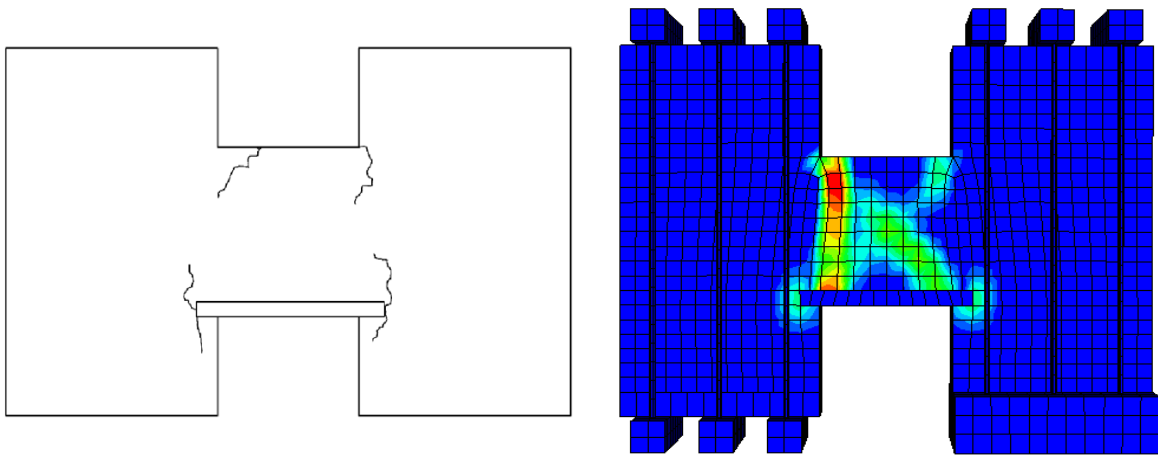
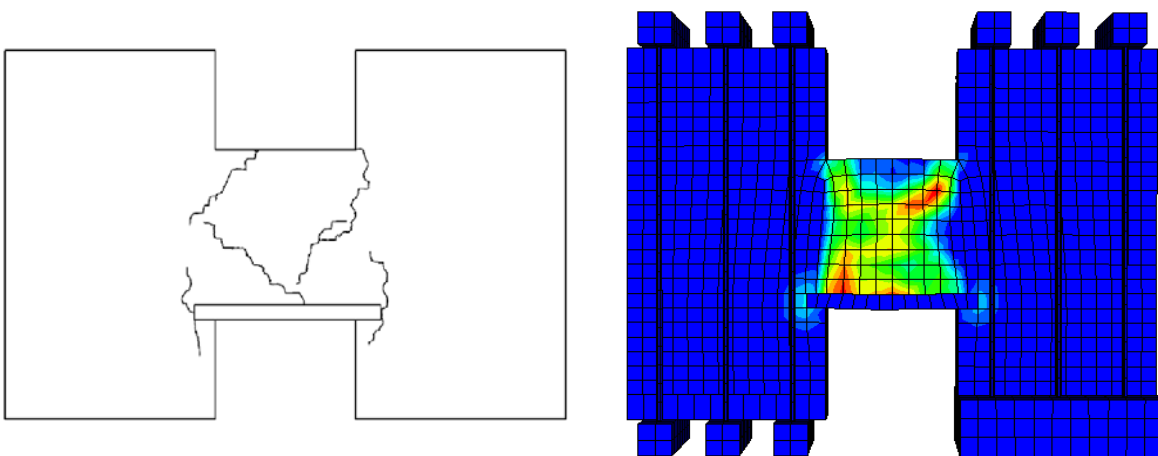


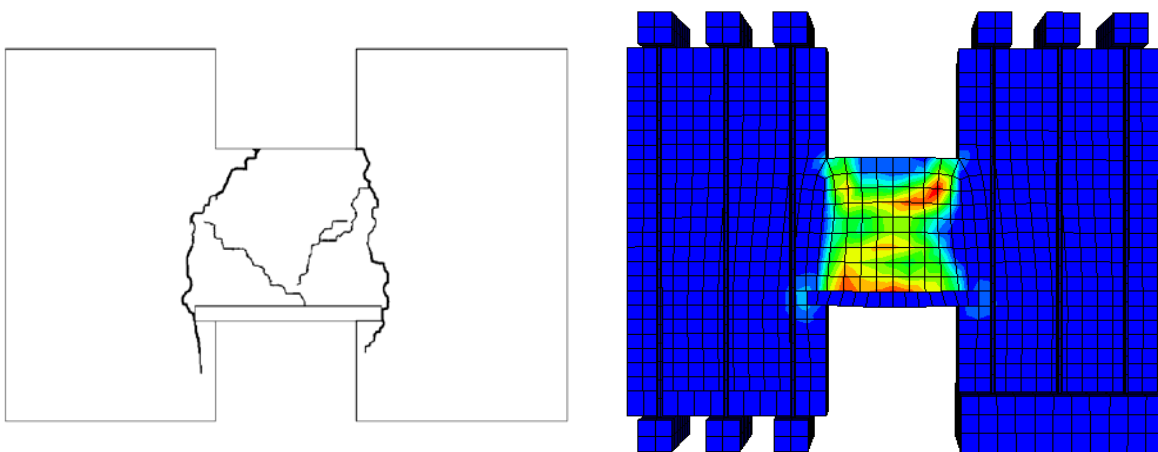
FIGURA 8: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI -2 mm



**FIGURA 9: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI -3 mm**



**FIGURA 10: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI -5 mm**



**FIGURA 11: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI -6 mm**

Come si può vedere dalla sequenza riportata sopra, anche il danno rispecchia il diagramma tensioni-deformazioni: infatti, è molto più simile alla fessurazione reale nelle prime fasi dello spostamento e differisce invece ad uno stato deformativo avanzato, proprio per l'unione dei vari danneggiamenti che si sono prodotti durante le fasi di spostamento.

### 6.2.2 PROVA MS1R

Il modello numerico della prova MS1r si presenta come in figura 12. Nel modello, rispetto al precedente MS1, vengono introdotte le barre di rinforzo rappresentate da due elementi cilindrici sviluppati prevalentemente lungo un asse e due elementi solidi che riproducono le piastre in acciaio ai lati della muratura per distribuire il carico derivante dalla precompressione ed evitare concentrazioni di tensione.

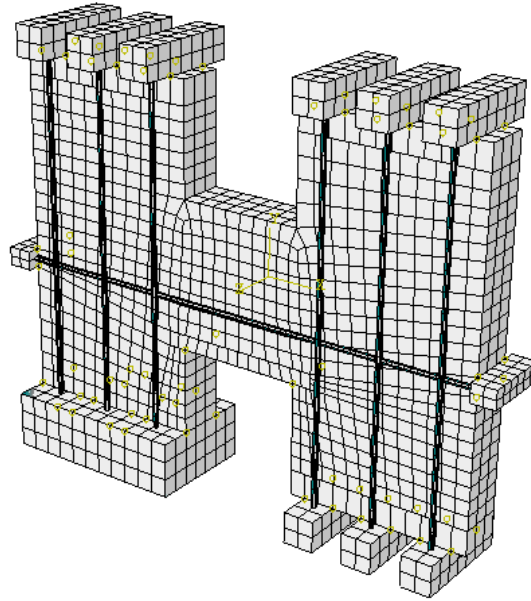


FIGURA 12: IL MODELLO MS1r

In figura 13 è riportato anche per la prova MS1r il diagramma taglio-spostamento, rapportato alla curva ricavata dalla prova sperimentale (tratteggiata).

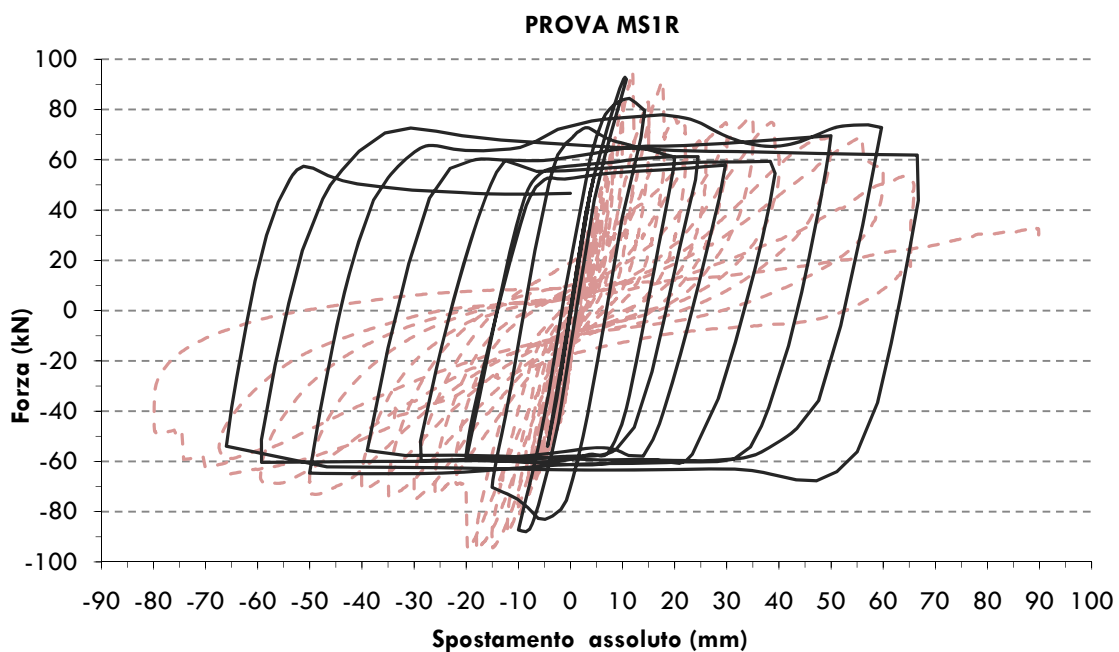


FIGURA 13: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO PER L'ANALISI MS1r

Anche in questo caso i cicli teorici sono significativamente più larghi di quelli reali; si nota una migliore corrispondenza iniziale del diagramma dal lato degli spostamenti positivi, mentre per quanto riguarda la resistenza a taglio nei cicli più avanzati si nota una buona corrispondenza fino a rottura.

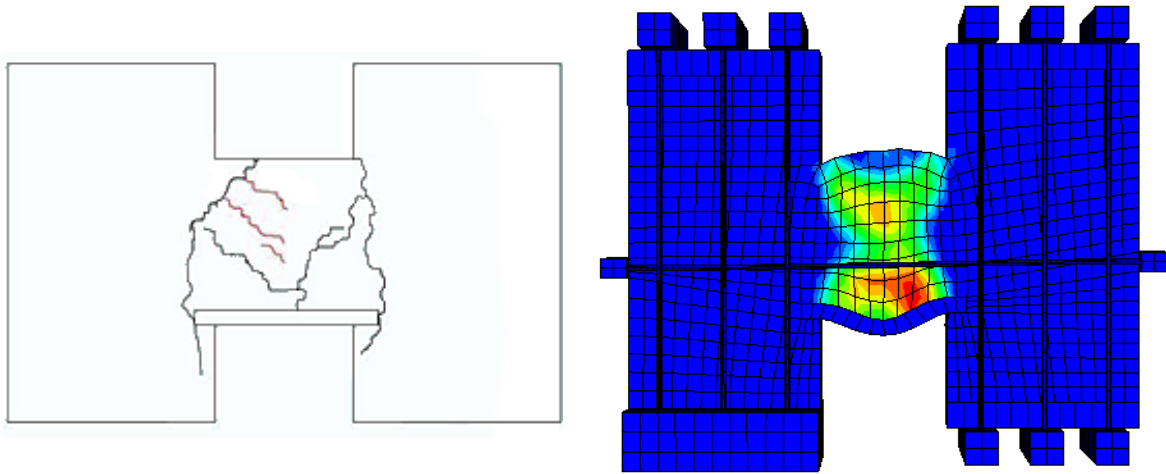


FIGURA 14: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI  $\pm 20$  mm

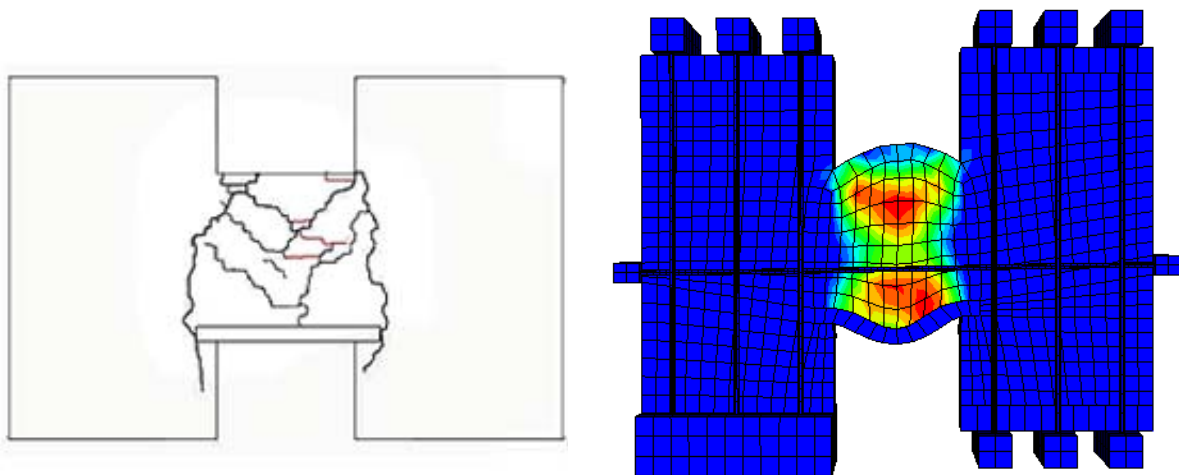


FIGURA 15: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI  $\pm 35$  mm

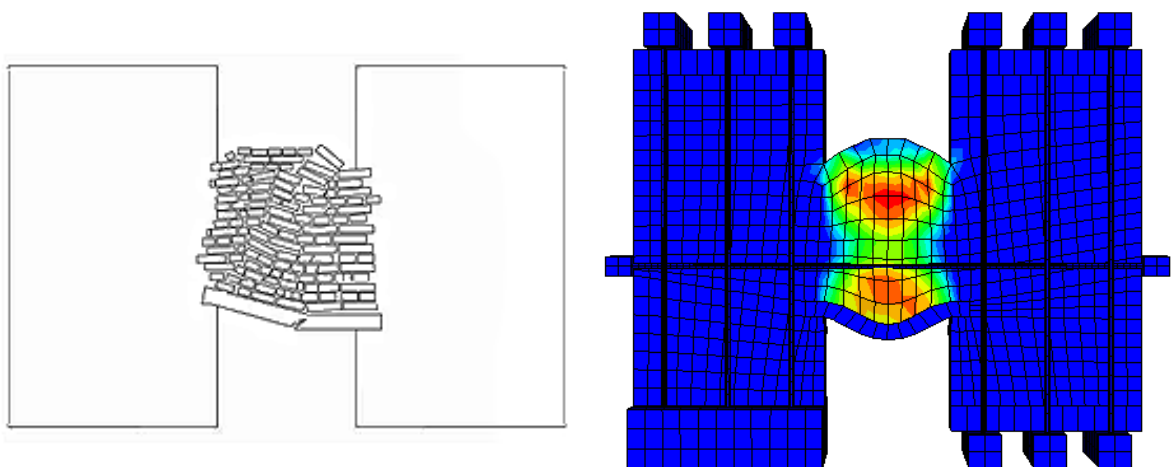


FIGURA 16: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO A COLLASSO

Come si può vedere dalla sequenza riportata sopra, la concentrazione di deformazioni (in rosso la più intensa), corrisponde all'area in cui si formano le fessurazioni, ma il degrado è così diffuso nel provino, da far sì che nel modello le deformazioni irreversibili si uniscano tutte insieme. Si vede, ad ogni modo, che la rottura avviene per sviluppo di fessurazioni diagonali, anziché per *rocking*, come nel corso della prima parte della prova MS1.

### 6.2.3 PROVA MS2

Il modello numerico della prova MS2 si presenta come in figura 17. La differenza principale con il modello MS1 è l'architrave: si tratta di un elemento solido con due partizioni, ad una delle quali è stato assegnato il materiale legno (la più piccola, corrispondente ad  $1/3$  della larghezza dell'architrave), mentre all'altra il materiale muratura (corrispondente ai restanti  $2/3$ ). Quest'ultima partizione rappresenta la piattabanda in mattoni realmente posta in opera nel provino MS2 sottoposto a prova a spostamento imposto descritta nel corso del capitolo 5. Per tenere conto della diversa orientazione del materiale rispetto all'intero provino e quindi della diversa resistenza nella direzione considerata, è stato assegnato un valore differente per quanto riguarda la resistenza a trazione, in particolare si è preso  $f_t = 0.05 \text{ N/mm}^2$ , con modulo di Young nella direzione ortogonale ai giunti orizzontali e pari a  $E_y = 11112 \text{ N/mm}^2$ .

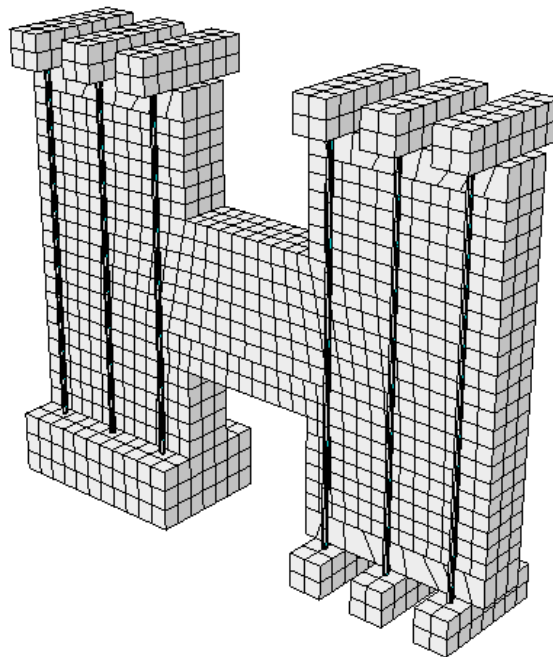
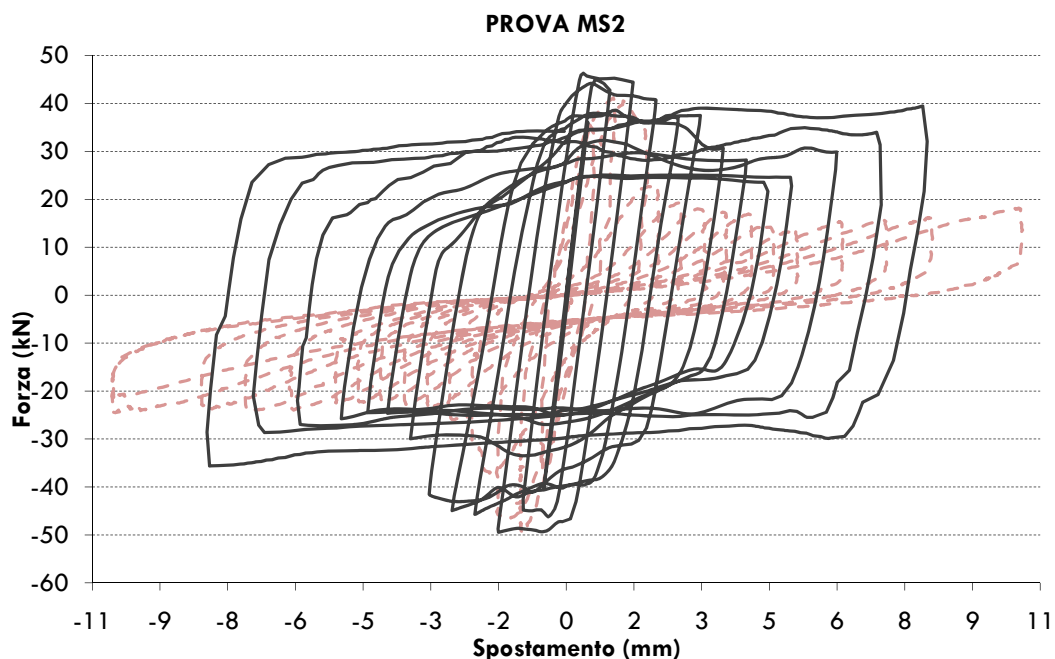


FIGURA 17: IL MODELLO MS2

Il diagramma taglio-spostamento ottenuto dal modello numerico viene riportato di seguito; si nota che nel diagramma teorico, il materiale giunge a rottura leggermente prima del raggiungimento dello spostamento massimo di 10 mm. Anche il diagramma sperimentale, comunque, mostra un andamento diverso dai precedenti, con un lieve recupero di resistenza negli ultimi cicli di carico (curva tratteggiata).

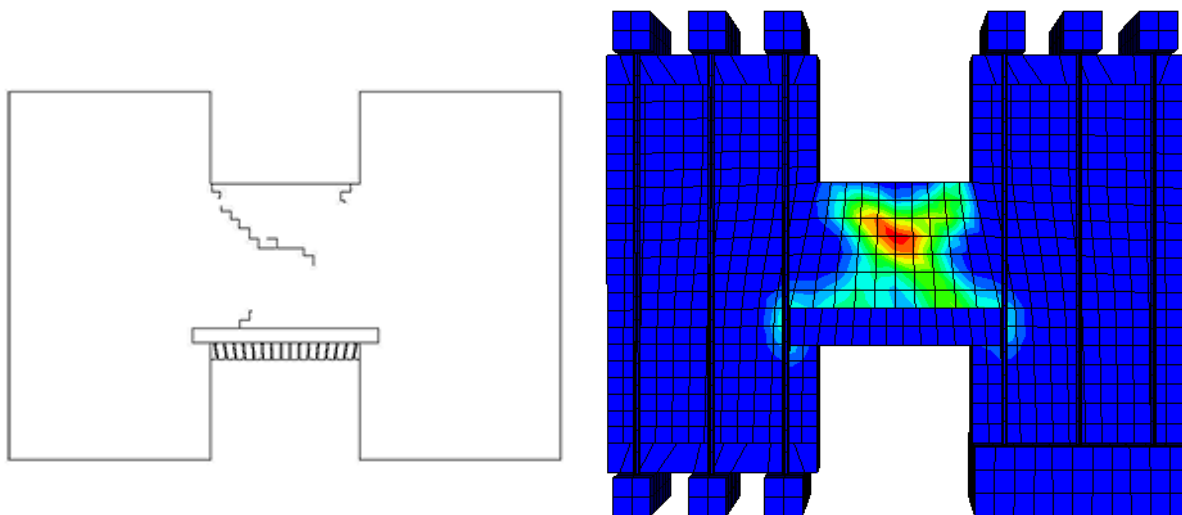




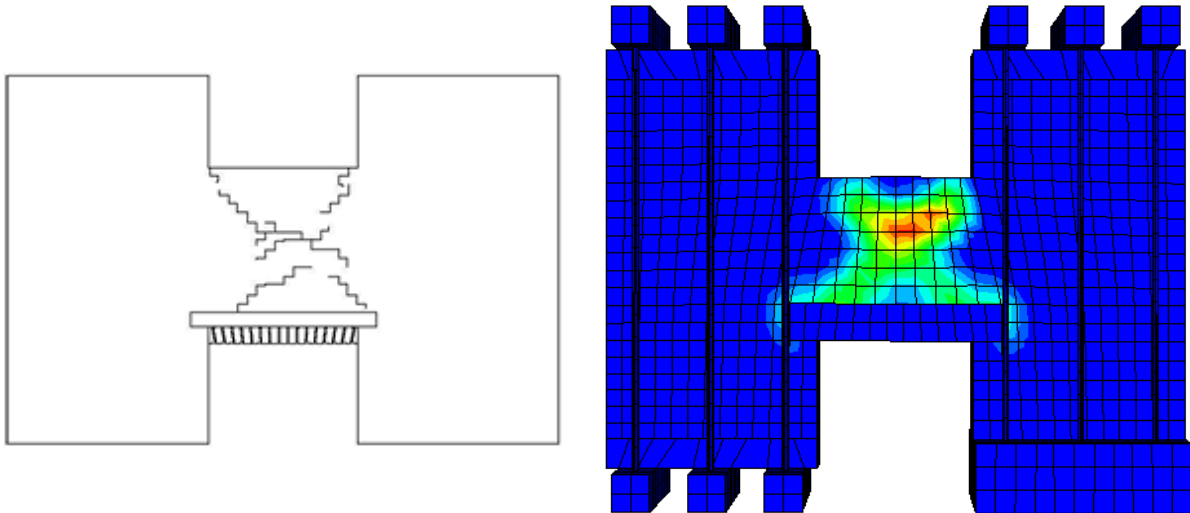
**FIGURA 18: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO PER L'ANALISI MS2**

Non sussiste un'esatta corrispondenza tra i due diagrammi dopo i primi cicli di carico: infatti, la resistenza del materiale viene leggermente sovrastimata nell'analisi numerica.

Vengono riportate alcune sequenze della fase fessurativa, per porle in confronto con il modello numerico.



**FIGURA 19: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI +2 mm**

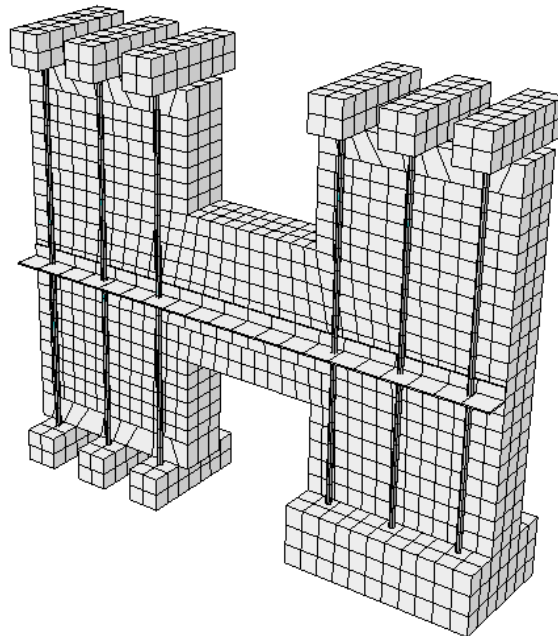


**FIGURA 20: DANNO REALE E DEL MODELLO NUMERICO AD UNO SPOSTAMENTO DI -3 mm**

Per quanto riguarda la rappresentazione del danno nel modello numerico, si nota una buona corrispondenza con la formazione delle fessure nel provino. Ad uno spostamento di +2 mm si vede chiaramente la fessura che va dall'angolo in alto a sinistra a quello in basso a destra maggiormente sviluppata di quella nella direzione opposta, come nel provino reale. Allo spostamento di -3 mm si vede il progresso nel danno con lo sviluppo delle fessurazioni lungo entrambe le diagonali.

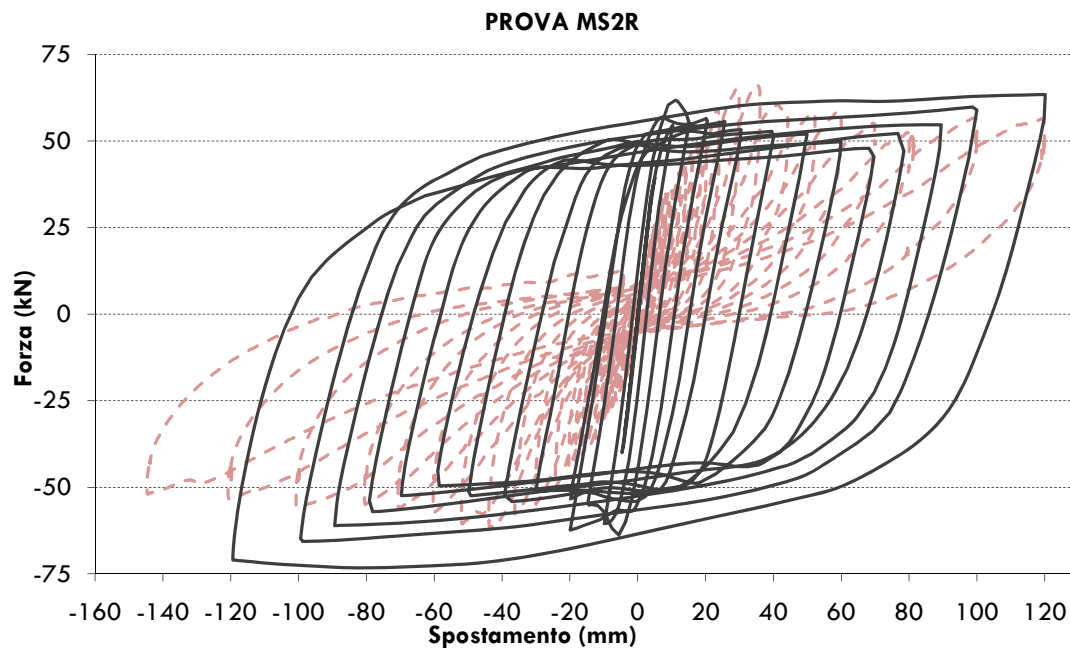
#### 6.2.4 PROVA MS2R

Il modello numerico della prova MS2r si presenta nel seguente modo:



**FIGURA 21: IL MODELLO MS2r**

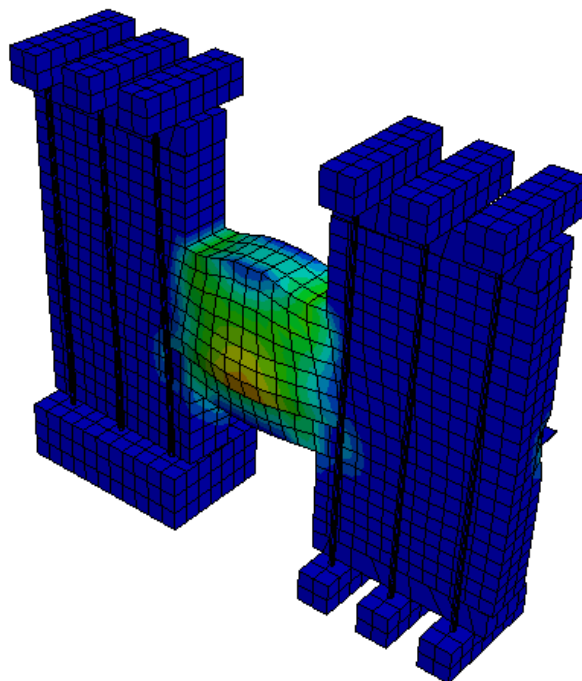
In figura 16 è riportato il diagramma taglio-spostamento messo in relazione con la curva sperimentale:



**FIGURA 22: IL DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO PER L'ANALISI MS2R**

L'andamento del diagramma per quanto riguarda i valori di resistenza a taglio massimi è abbastanza buono, anche se la corrispondenza non è perfetta per quanto riguarda i cicli iniziali, soprattutto dal lato degli spostamenti negativi; l'energia di deformazione plastica rappresentata dall'area racchiusa in ogni ciclo tuttavia è decisamente più grande rispetto alla prova sperimentale.

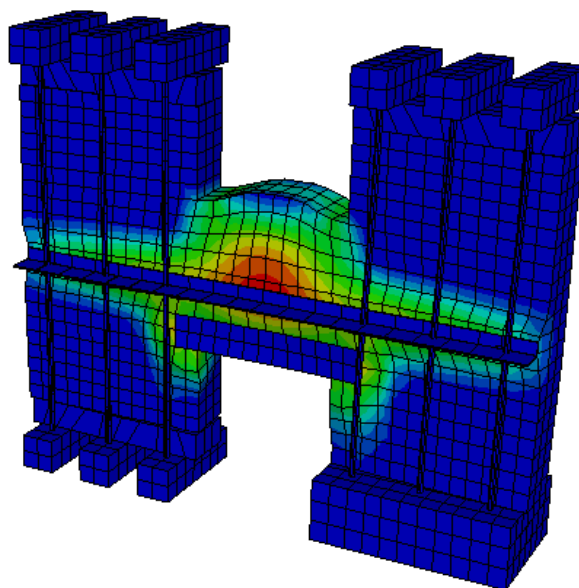
Vengono riportate di seguito le foto delle fasi finali di rottura del provino accanto al risultato ottenuto con il modello numerico.



**FIGURA 23: CONFRONTO TRA IL COLLASSO REALE E QUELLO DEL MODELLO NUMERICO (FRONT)**

Nelle due immagini, quella reale e quella tratta dal modello numerico, si nota la stessa situazione. Il materiale tende a rompersi particolarmente al di sopra dell'architrave di mattoni e ad essere espulso

verso l'esterno a causa della compressione data dai due profili ad "L" che sollecitano il materiale su un solo lato del provino.



**FIGURA 24: CONFRONTO TRA IL COLLASSO REALE E QUELLO DEL MODELLO NUMERICO (BACK)**

Nel complesso, pertanto, le quattro prove vengono simulate abbastanza bene. La corrispondenza tra i diagrammi taglio-spostamento è buona, nonostante alcune imprecisioni di cui si tratterà in modo particolare nei prossimi due capitoli. Anche la rappresentazione, nel modello numerico, del danno permanente è buona: si riscontra una certa corrispondenza con la fessurazione reale, anche se nelle fasi avanzate della simulazione, il danno si unisce in un'unica deformazione, perdendo la netta definizione del modo di rottura che si osserva nei primi cicli di carico.

Nei capitoli 7 e 8 si illustreranno quindi le ragioni per cui i risultati numerici e sperimentali non sono esattamente coincidenti e le difficoltà riscontrate nella realizzazione dei modelli e nella determinazione di alcuni parametri.

## CAPITOLO 7

### RISULTATI DELLE INDAGINI PARAMETRICHE

#### 7.1 PARAMETRI NON NOTI DALLE PROVE SPERIMENTALI

Nel capitolo precedente sono stati illustrati i risultati ottenuti dall'analisi numerica delle fasce di piano di cui sono state fatte prove sperimentali nel Laboratorio di Prove Materiali e Strutture dell'Università degli Studi di Trieste. Nei diagrammi taglio-spostamento ricavati si sono notate alcune differenze con le curve sperimentali, sia in termini di valori finali, che in termini di andamento generale del diagramma. Come verrà illustrato in seguito, le discrepanze riscontrate sono dovute in parte a difetti nella realizzazione dei provini e dei test, in parte a un'eccessiva semplificazione del comportamento del materiale nel legame costitutivo utilizzato per descrivere il tratto non lineare nel programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1).

Prima di queste difficoltà, tuttavia, che verranno definite meglio nel capitolo successivo, è importante dire che il diagramma taglio-spostamento ottenuto per ciascun modello numerico è stato il risultato di un'indagine parametrica realizzata in quanto alcuni dati necessari in input non erano noti: non sono state eseguite, infatti, tutte le prove sperimentali su muretti adatte a caratterizzare completamente il materiale. In particolare, mancavano quattro valori importanti:

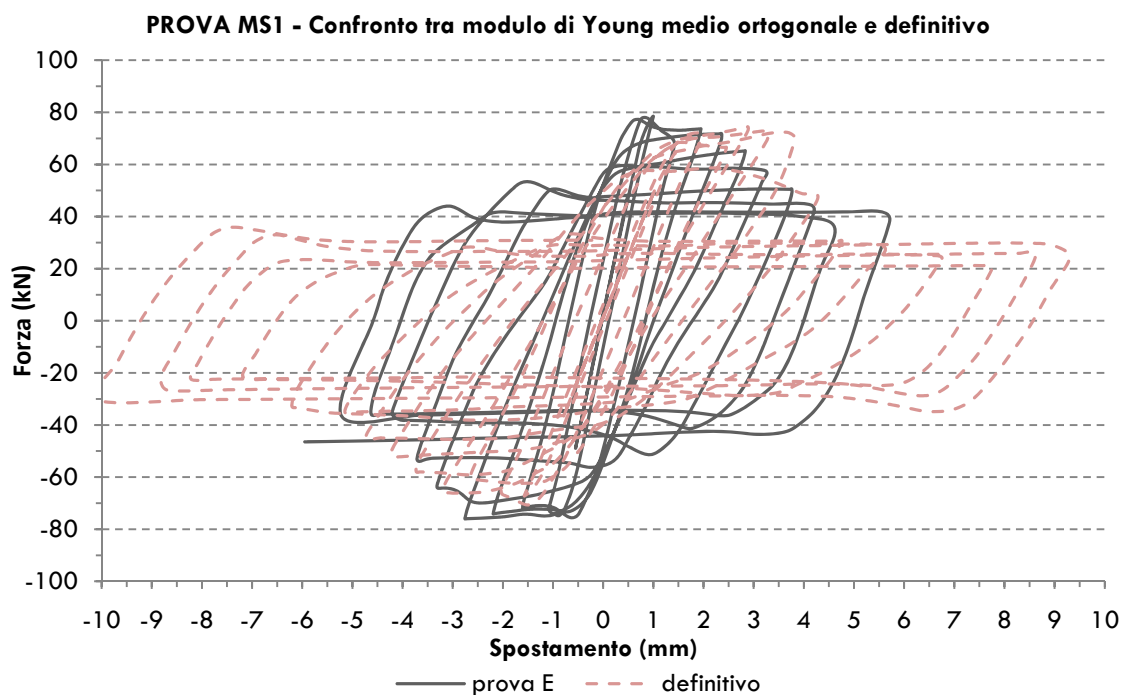
- **il modulo di Young nella direzione parallela ai giunti di malta principali ( $E_x$ ):** si tratta di un valore importante in quanto è proprio questa la direzione dei giunti di malta orizzontali, i piani di debolezza della muratura; anche nelle prove su pannelli sollecitati a taglio descritte nel capitolo 4, dovendo scegliere uno dei due moduli di Young per effettuare l'analisi con il modello di danno e plasticità isotropo, si è scelto il valore dato nella direzione  $x$ . Anche nei modelli numerici che simulano il comportamento dei provini MS si ha una sollecitazione di taglio, benché la prova sia stata organizzata e realizzata in maniera diversa rispetto a quanto fatto per i pannelli dell'ETH. Si suggerisce quindi l'utilizzo del modulo di Young della direzione  $x$  anche per le prove MS.
- **la resistenza a compressione biassiale della muratura ( $f_{b0}$ ):** è necessaria per definire il valore del rapporto tra la resistenza a compressione monoassiale e biassiale.
- **la resistenza a trazione ( $f_t$ ) e l'energia di frattura del modo I di rottura ( $G_f^I$ ):** servono a definire il comportamento del materiale dell'intera regione di trazione. Nell'ambito delle prove su muretti relative alla caratterizzazione del materiale dei campioni MS, non sono state eseguite prove volte ad ottenere risultati relativi al comportamento a trazione.

Per l'esecuzione del modello numerico, pertanto, sono state fatte delle ipotesi su quali potessero essere i valori reali e sono state eseguite alcune analisi con il metodo *trial-and-error*.

Nei paragrafi successivi verranno quindi illustrate le scelte effettuate e verranno espresse alcune considerazioni riguardo alla risposta del modello al variare dei valori di input.

## 7.2 IL MODULO DI YOUNG

Il primo parametro determinato è stato il modulo di Young. Le analisi *trial-and error* sono iniziate utilizzando inizialmente i valori dell'elasticità determinati nella direzione ortogonale ai letti di malta orizzontali. Di seguito viene riportato il diagramma taglio-spostamento ottenuto con il valore medio determinato nel corso della prova su muretti relativa al campione MS1,  $E_y = 4820 \text{ N/mm}^2$ .



**FIGURA 1: CONFRONTO  $E_{\text{medio}}$  ORTOGONALE E RISULTATO NUMERICO FINALE**

L'andamento del degrado della rigidezza e della resistenza nei due diagrammi appare inizialmente molto simile (a parità degli altri parametri, in effetti, varia solamente il modulo di Young), ad eccezione ovviamente della diversa pendenza della retta in campo elastico lineare. La sostanziale differenza tra i due è che, allo spostamento di 4.5 mm, il diagramma taglio-spostamento ricavato utilizzando nell'analisi il modulo elastico medio della direzione ortogonale ai giunti orizzontali, subisce un improvviso aumento della resistenza che denota la rottura finale dell'elemento. In seguito verranno illustrate in maniera più dettagliata le ragioni di questo comportamento durante l'analisi numerica. In corrispondenza di questo andamento del diagramma, dunque, l'analisi è stata interrotta, perché non analogo al comportamento tenuto dall'elemento strutturale nel corso della prova sperimentale.

Sono state, in seguito, svolte due prove con i valori massimo e minimo determinati dagli strumenti nel corso della prova a compressione su muretto ortogonale alla direzione dei giunti orizzontali. Si tratta di due valori pari a  $E_y = 5664 \text{ N/mm}^2$  e  $E_y = 3975 \text{ N/mm}^2$ . La prova ha mostrato che prima di giungere a collasso, lo spostamento più ampio è stato ottenuto con il valore più piccolo del modulo di Young, prima di avere l'incremento di resistenza che segnala la rottura dell'elemento nell'analisi numerica.

Questa osservazione è in accordo con quanto affermato nel primo paragrafo relativamente all'utilizzo del modulo di Young della direzione ortogonale all'interno di questo modello costitutivo isotropo. Infatti, generalmente il valore di  $E$  nella direzione parallela ai giunti di malta orizzontali è inferiore rispetto a quello della direzione ortogonale, come confermato dalle proprietà dei pannelli dell'ETH, dove  $E_x = 2460 \text{ N/mm}^2$ , mentre  $E_y = 5460 \text{ N/mm}^2$ .

Ricercando, quindi, il valore più appropriato da applicare al modulo di Young, sono stati utilizzati i risultati di uno studio sulla muratura, in cui si determina un modo di computare le proprietà del materiale omogeneizzato affinché siano verosimili<sup>1</sup>.

Nelle considerazioni, l'autore sottolinea la dipendenza delle proprietà dal rapporto tra giunti verticali e unità. I provini MS sono realizzati con una tessitura tale che le unità sono messe alternativamente di testa e di taglio:

- giunti verticali e unità di testa: il rapporto è di  $10 \text{ mm}/125 \text{ mm} = 0.08$
- giunti verticali e unità di taglio: il rapporto è di  $10 \text{ mm}/250 \text{ mm} = 0.04$

La media dei rapporti 0.08 e 0.04 è pari a 0.06, che viene quindi assunto come valore medio per tutti i provini. Andando a verificare sul diagramma di figura 2 che mette in relazione le proprietà globali del materiale e questo rapporto, è possibile determinare la relazione tra i moduli di Young nelle direzioni  $x$  e  $y$ .

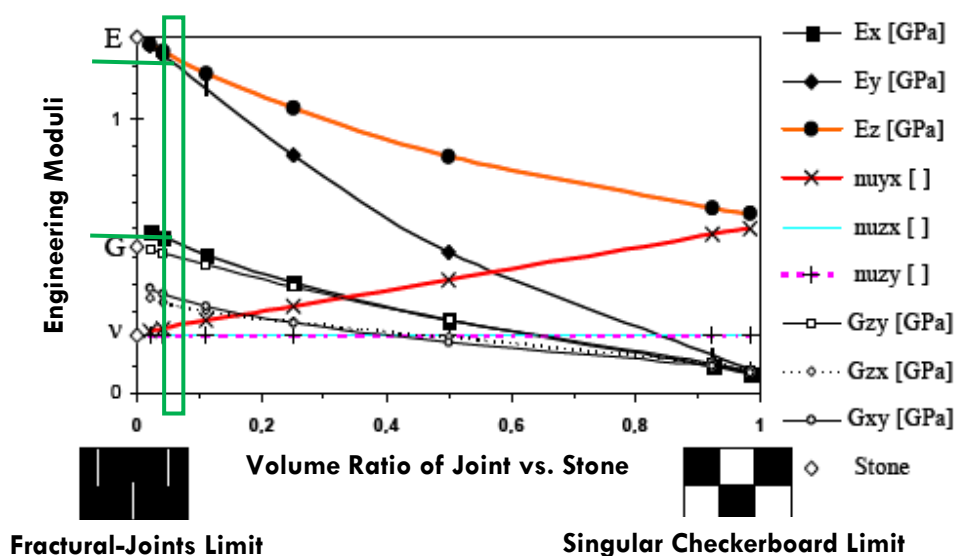


FIGURA 2: DIAGRAMMA CHE RELAZIONA I MODULI ELASTICI E IL RAPPORTO GIUNTO VERTICALE-UNITÀ

Il rapporto tra  $E_x$  ed  $E_y$  ricavabile dal diagramma in corrispondenza di un rapporto tra giunti e unità di 0.06 è 0.45. A questo punto è sufficiente calcolare il modulo di Young nella direzione orizzontale per i provini MS1 e MS2:

- **MS1:**  $E_y = 4820 \text{ N/mm}^2$ , moltiplicando per 0.45 si ottiene  $E_x = 2210 \text{ N/mm}^2$
- **MS2:**  $E_y = 11112 \text{ N/mm}^2$ , moltiplicando per 0.45 si ottiene  $E_x = 5000 \text{ N/mm}^2$

<sup>1</sup> R.Haberkern, *Modern Masonry Walls - Plaster versus Open Joints*, CFA/DAGA'04, Strasbourg, 2004. Si tratta di un lavoro svolto presso il Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Stuttgart, Germany

Le analisi numeriche svolte con questi valori hanno dato i risultati definitivi riportati all'interno del capitolo 6.

### 7.3 LA RESISTENZA A TRAZIONE E L'ENERGIA DI FRATTURA

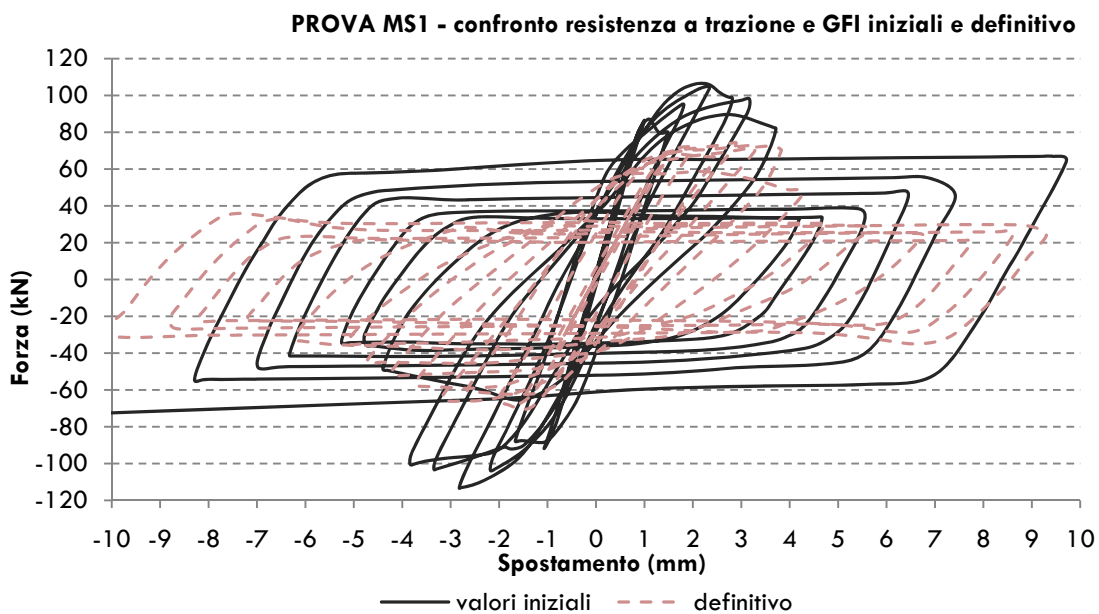
E' noto che la muratura sia un materiale caratterizzato da una scarsa resistenza a trazione. Per questa ragione, il valore di tale proprietà non viene generalmente determinato, ritenendo molto più interessante il calcolo della resistenza a compressione.

Tuttavia, nell'ambito dell'analisi numerica e, in particolare, utilizzando come legame costitutivo il modello di danno e plasticità isotropo implementato in ABAQUS (v.6.6.1), è molto importante conoscere anche questo aspetto per un corretto inserimento dei parametri in input ed esecuzione dell'analisi.

Al momento della creazione dei quattro modelli con l'intento di simulare il comportamento della prove MS, non risultava alcuno svolgimento di prove a trazione sui provini, né nella direzione perpendicolare ai giunti di malta orizzontali, né in quella parallela. Si è deciso, così, di procedere nuovamente secondo il metodo *trial-and-error*, per identificare i seguenti parametri:

- la resistenza a trazione della muratura  $f_t$
- l'energia di frattura GFI

Come valori di partenza sono stati utilizzati quelli determinati nelle prove a taglio su pannelli dell'ETH, che avevano una caratterizzazione completa del materiale. Il primo tentativo, dunque, viene illustrato in figura 3.



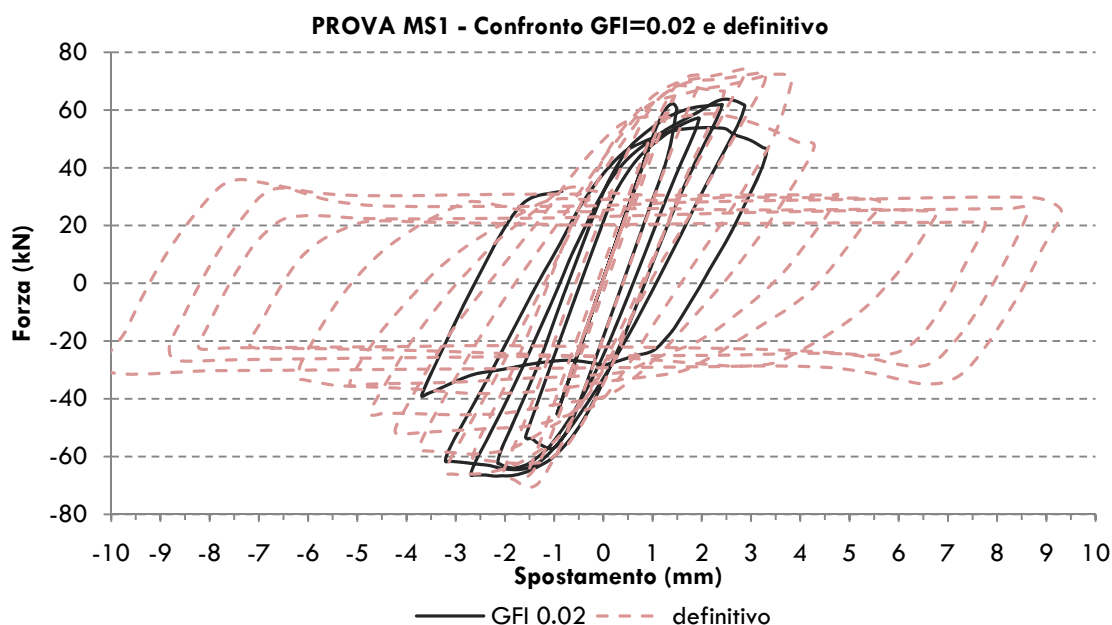
**FIGURA 3: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO OTTENUTO CON I VALORI DEI PANNELLI DELL'ETH**

I valori utilizzati sono stati  $f_t = 0.28 \text{ N/mm}^2$ , mentre  $GFI = 0.02 \text{ Nmm/mm}^2$ . Come si vede dal diagramma di figura 3, la resistenza a taglio del materiale è di gran lunga superiore a quella reale: viene addirittura superato, inizialmente, il valore di 100 kN. Inoltre si manifesta una rottura ben prima del raggiungimento di uno spostamento prossimo ai 10 mm, accanto all'improvviso crollo di resistenza a taglio



tra i 3-4 mm di spostamento. E' stata così formulata l'ipotesi, per quanto riguarda la resistenza a trazione, che il valore assegnato fosse troppo alto e si è scelto di iniziare l'indagine parametrica valutando il corretto valore della resistenza a trazione: quello corrispondente, per la prova MS1, ad un valore di resistenza a taglio compreso fra 70 e 75 kN (la prova sperimentale riporta come valore massimo 72 kN), sarebbe stato considerato quello corretto.

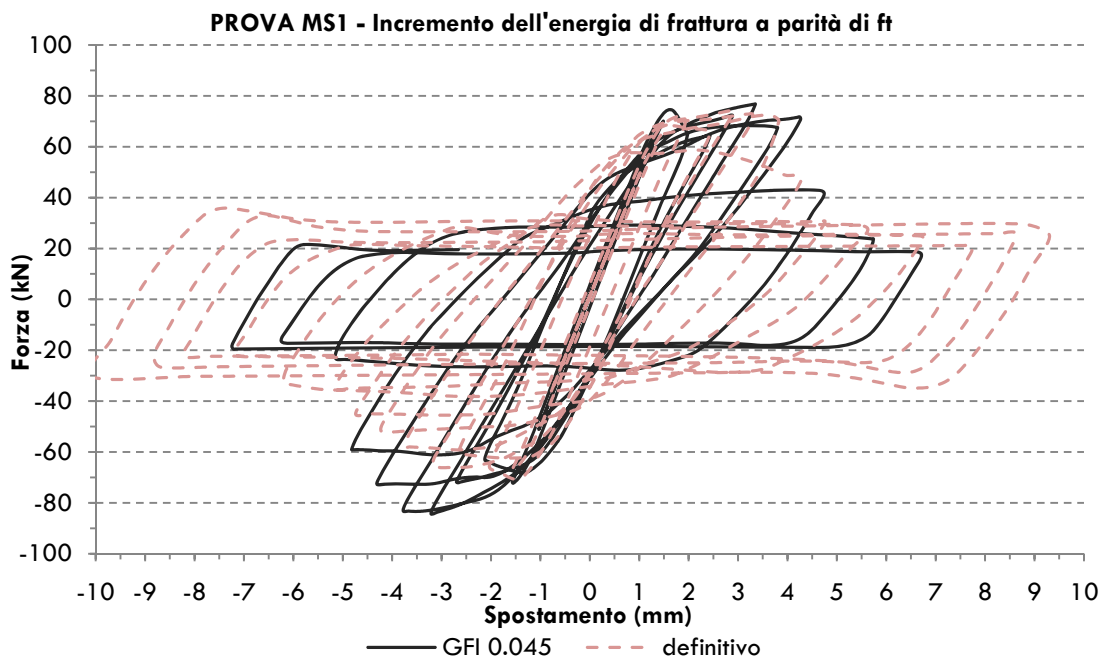
Il valore finale che maggiormente corrisponde ai requisiti è  $f_t = 0.18 \text{ N/mm}^2$ . E' importante specificare però, che per valori della resistenza a trazione compresi fra 0.21 e 0.17  $\text{N/mm}^2$ , il valore della resistenza a taglio è stato fortemente dipendente anche dall'energia di frattura. Infatti, nelle prime prove, mantenendo fisso il valore  $GFI = 0.02 \text{ Nmm/mm}^2$ , nel corso dell'analisi numerica svolta con il valore  $f_t = 0.21 \text{ N/mm}^2$ , è stato raggiunto il valore di taglio richiesto in partenza. Tuttavia, ad uno spostamento pari a -3.5 mm, si è verificato nuovamente un crollo della resistenza, già osservato nel diagramma taglio-spostamento di figura 3 (fig.4).



**FIGURA 4: CONFRONTO TRA ENERGIE DI FRATTURA**

L'andamento visibile nel diagramma ha indotto ad interrompere l'analisi numerica, in quanto il crollo di resistenza, oltre ad essere di grande entità (20 kN), si è verificato piuttosto precocemente rispetto all'andamento della curva sperimentale, quando invece il valore massimo della resistenza a taglio viene raggiunto a circa 3.5 mm di spostamento (mentre qui, dal lato degli spostamenti positivi, il crollo della resistenza è avvenuto a circa 2.5 mm di spostamento e con un'entità pari a 15 kN).

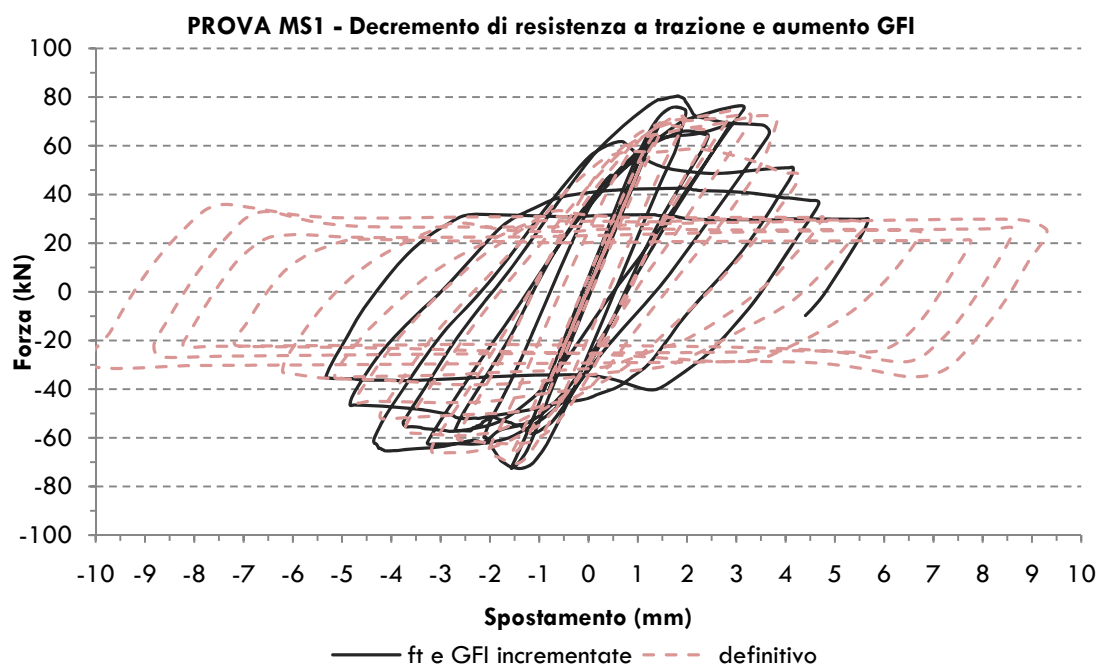
I tentativi successivi di trovare il giusto equilibrio fra la resistenza a trazione del materiale e l'energia di frattura sono illustrati nelle figure seguenti. Si deve sottolineare che la procedura è stata per modifica alterna dei valori. A partire dal diagramma di figura 4, è stata alzata l'energia di frattura, portandola ad un valore indicativo pari a  $GFI = 0.045 \text{ Nmm/mm}^2$ .



**FIGURA 5: PRIMO INCREMENTO DELL'ENERGIA DI FRATTURA A PARITÀ DI RESISTENZA A TRAZIONE**

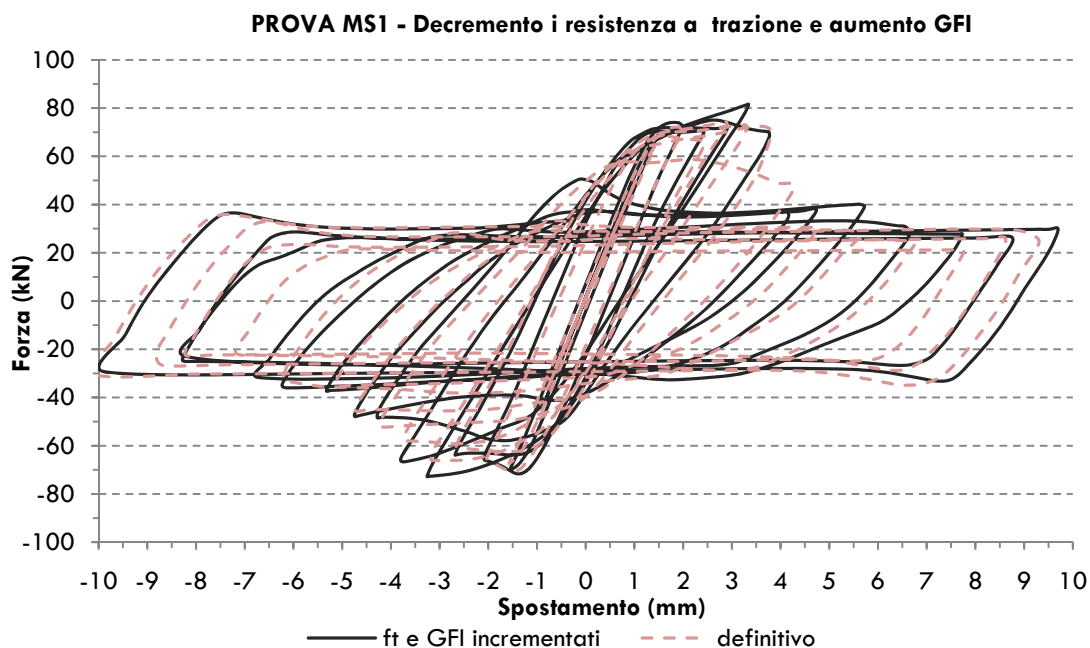
Il risultato, questa volta, mostra che il crollo della resistenza a taglio del materiale avviene per uno spostamento più grande, pari a circa -5 mm dal lato di quelli negativi e di 3.5 mm per quelli positivi. Si ha avuto però un incremento di resistenza a taglio del materiale nelle fasi iniziali, richiedendo così una diminuzione della resistenza a trazione. Il risultato ottenuto inoltre, mostra che il materiale giunge a rottura pochi mm dopo: infatti, a partire da -6 mm di spostamento, la resistenza del materiale inizia a subire un incremento, dopo il raggiungimento di un valore minimo pari a -18 kN, decisamente troppo basso per i valori ottenuti dalla prova sperimentale, che ricordiamo essere di circa 35 kN per la prova MS1.

La successiva modifica è stata di  $f_t = 0.20 \text{ N/mm}^2$  con  $GFI = 0.055 \text{ Nmm/mm}^2$ .



**FIGURA 6: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO CON NUOVI VALORI DI  $f_t$  E GFI**

L'analisi precedente mostra già un buon andamento: nonostante i valori di resistenza a taglio raggiunti siano ancora leggermente elevati, la forma del diagramma ricorda già quella definitiva. Fino a questo momento, le analisi era state interrotte prima del loro completamento, dato che mostravano di non giungere allo spostamento massimo richiesto. A partire da questa analisi, invece, si riscontra la necessità di completare l'analisi, per affinare la scelta dei valori.



**FIGURA 7: DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO CON NUOVI VALORI DI  $f_t$  E GFI**

Il diagramma precedente mostra l'andamento quasi definitivo della curva taglio-spostamento, ottenuto utilizzando i seguenti valori:  $f_t = 0.19 \text{ N/mm}^2$  e  $GFI = 0.08 \text{ Nmm/mm}^2$ . C'è ancora un repentino crollo della resistenza presso i 3-4 mm di spostamento e l'analisi numerica mostra la rottura del materiale un paio di mm prima di quella reale. Nel complesso, tuttavia, si tratta già di una buona approssimazione della curva sperimentale.

Il diagramma taglio-spostamento definitivo, ottenuto con ancora qualche tentativo, è stato il risultato dei valori  $f_t = 0.18 \text{ N/mm}^2$  e  $GFI = 0.085 \text{ Nmm/mm}^2$ .

Dalle variazioni effettuate per determinare i corretti valori della resistenza a trazione e dell'energia di frattura del materiale, si è visto che, almeno per quanto riguarda il provino MS1, la capacità deformativa del materiale è piuttosto alta. Considerate ad esempio le proprietà meccaniche determinate all'ETH per i pannelli sollecitati a taglio, i valori erano, come detto in precedenza,  $f_t = 0.28 \text{ N/mm}^2$  e  $GFI = 0.02 \text{ Nmm/mm}^2$ . In termini di energia richiesta per generare una fessura, si hanno valori molto più alti nel pannello MS1, anziché nei pannelli dell'ETH, a fronte di una resistenza a trazione inferiore. Poiché l'energia di frattura del modo I non è altro che l'area sottesa del diagramma tensioni-deformazioni per il materiale sollecitato a trazione, questo significa che, a parità di resistenza a trazione, il ramo di *softening* è meno ripido per un'energia di frattura più grande; viceversa la rottura del materiale è più repentina (verso la rottura fragile) quando il valore dell'energia di frattura è minore (fig.8).

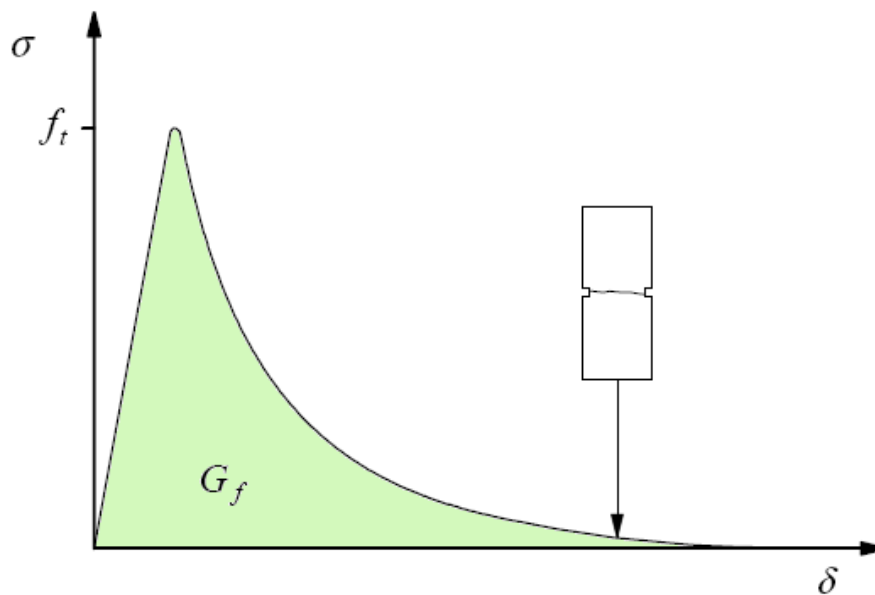


FIGURA 8: ENERGIA DI FRATTURA E PENDENZA DEL RAMO DI SOFTENING

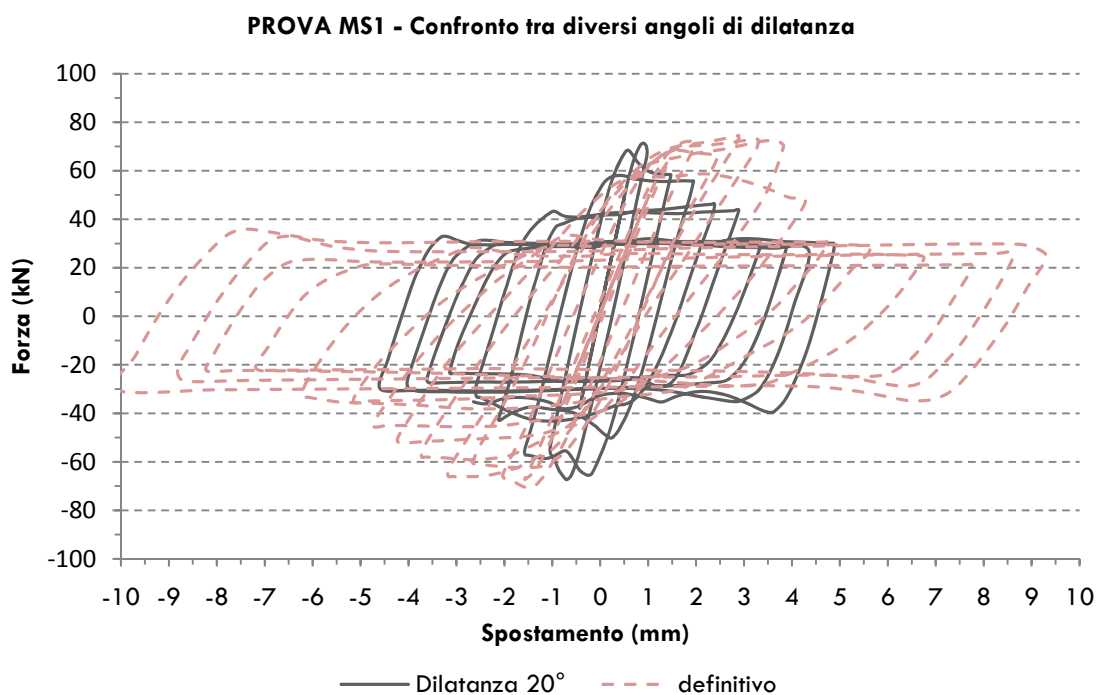
E' bene ricordare, comunque, che nella muratura la componente che consente una maggiore deformabilità è la malta, dal comportamento più duttile rispetto al mattone. Di conseguenza, l'energia di frattura è strettamente legata alle caratteristiche della malta (composizione, proprietà meccaniche) e ad un buon aggrappamento alle unità. Anche l'impiego di laterizio pieno e forato e le dimensioni delle unità influenzano l'energia richiesta per l'apertura di una fessura.

#### 7.4 L'ANGOLO DI DILATANZA NELLE PROVE MS

Nell'analisi numerica dei provini MS sussisteva anche un problema connesso alla scelta del parametro angolo di dilatanza da applicare al modello. Per le prove su pannelli sollecitati a taglio descritti nel capitolo 4 questo compito era reso più facile da una chiara distribuzione del carico verticale al di sopra dell'elemento, con il quale, attraverso una curva sperimentale che relaziona angolo di dilatanza e pressione di confinamento<sup>2</sup>, è stato possibile determinare con facilità il valore più appropriato da inserire nel modello numerico. Al contrario, nel caso dei provini di forma ad H delle prove MS, il carico verticale era applicato sui due maschi murari, mentre la fascia di piano non era direttamente caricata. Dato che si voleva studiare il comportamento della fascia di piano, si presentava l'incertezza di inserire un valore dell'angolo di dilatanza relativo ad un materiale senza pressione di confinamento (quindi prendere in considerazione la "zona" fascia di piano) oppure calcolarlo mediante il carico verticale applicato ai maschi murari. Sono stati fatti alcuni tentativi valutando così l'andamento del diagramma tensione-deformazioni con angolo di dilatanza  $\psi = 20^\circ$  (corrispondente alla precompressione dei maschi murari) e con un angolo di  $\psi = 35^\circ$  (corrispondente ad un'assenza di carico verticale, come da fascia di piano).

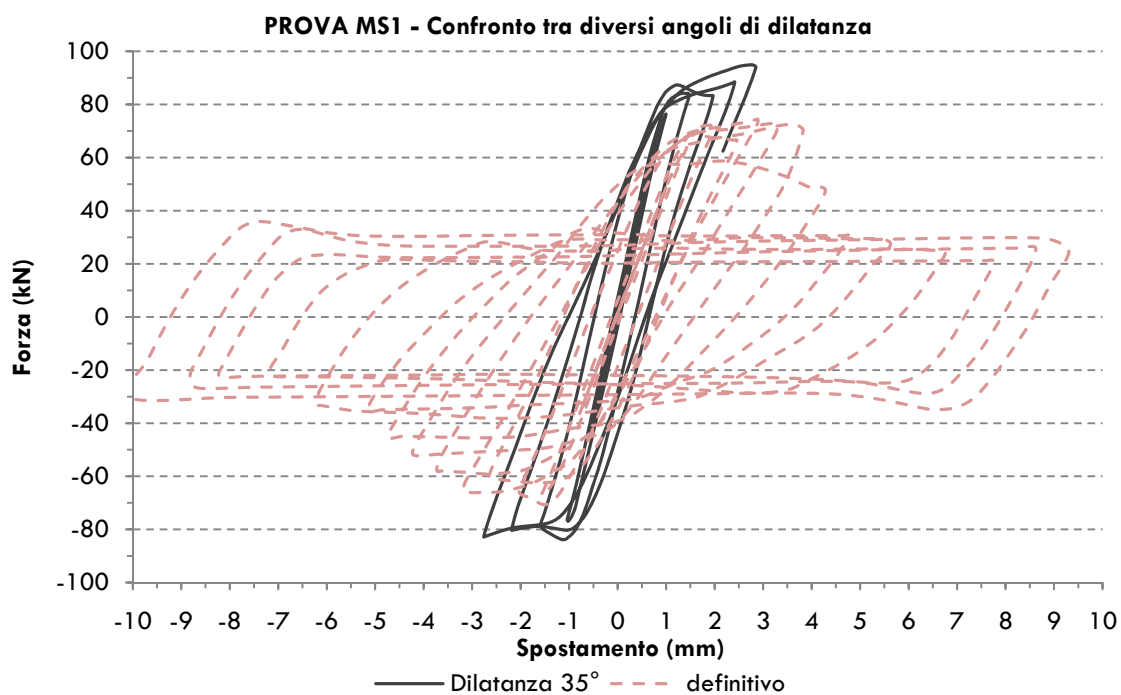
I risultati ottenuti vengono riportati nei diagrammi che seguono, sempre posti in relazione con il diagramma taglio-spostamento ottenuto al termine delle analisi numeriche.

<sup>2</sup> Lourenço P.B., *Computational Strategies for Masonry Structures*, Delft, 1996



**FIGURA 9: CONFRONTO CON DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO; ANGOLO PARI A 20°**

La prova con il valore pari a  $\psi = 20^\circ$  ricavato dal carico verticale applicato ai maschi murari non ha dato buon esito: un valore di resistenza a taglio di picco entro il primo millimetro di spostamento (invece che verso i 3 mm come nella prova sperimentale) e a seguire un crollo rapido con il tipico fenomeno di incremento della resistenza che segnala la rottura a partire dai 4 mm (-3.5 mm dal lato degli spostamenti negativi).



**FIGURA 10: CONFRONTO CON DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO; ANGOLO PARI A 35°**

L'analisi con  $\psi = 35^\circ$  non è stata prolungata oltre i primi cicli di spostamento, in quanto dava una resistenza a taglio esagerata rispetto a quanto ottenuto dalle analisi numeriche fino a quel momento (la caratteristica dell'angolo di dilatanza è proprio quella per la quale un qualunque valore dell'angolo permette di aumentare la resistenza a taglio della muratura: tanto più è grande, tanto maggiore sarà la resistenza del materiale).

L'utilizzo di un valore intermedio come tentativo rientrante nella casistica *trial-and-error* ha suggerito che la soluzione stava proprio in questo: i due valori utilizzati precedentemente erano da considerarsi gli estremi della variazione dell'angolo di dilatanza all'interno del provino. Pertanto si è optato per una soluzione alternativa, già utilizzata in qualche modo anche per il pannello sollecitato a taglio W4, nelle prove dell'ETH: questo pannello si caratterizzava per un carico verticale concentrato, posizionato con una certa eccentricità rispetto alla mezzeria. In questo caso era stato calcolato un carico distribuito equivalente e il valore era stato utilizzato per determinare l'angolo di dilatanza. Il risultato era stato una curva taglio-spostamento molto vicina ai risultati sperimentali. Per quanto riguarda i pannelli MS, dunque, si è considerato di prendere il carico applicato ai due maschi murari e di ipotizzarlo uniformemente distribuito su maschi e fascia di piano: è stato quindi calcolato un valore del carico distribuito per tutta la lunghezza di 4000 mm del provino, ottenendo come angolo di dilatanza un valore  $\psi = 23^\circ$ , utilizzato con successo nel diagramma taglio-spostamento definitivo. Era impensabile, infatti, una differenza così alta nei valori dell'angolo di dilatanza all'interfaccia maschio murario-fascia di piano; inoltre, gli angoli della fascia di piano sono quelli maggiormente sollecitati nel corso dei cicli iniziali e lo sviluppo delle fessure a partire da essi ha determinato, nelle prove sperimentali, il modo di rottura dell'elemento strutturale. Anche nel modello numerico si è verificata questa condizione: infatti, con un valore di  $\psi = 35^\circ$ , non solo si sono raggiunti valori di resistenza molto maggiori rispetto a quelli reali, ma si è verificato il fenomeno di rottura per formazione di fessurazioni diagonali, anziché la rottura per *rocking* che ha caratterizzato il provino MS1 nelle prove sperimentali.

## 7.5 LA CARATTERIZZAZIONE DEL MATERIALE

L'analisi numerica è senza dubbio uno strumento con un grande potenziale, in grado di fornire buone previsioni del comportamento di elementi strutturali o addirittura di intere strutture. Tuttavia, per una corretta realizzazione dei modelli numerici, è importante svolgere tutte le prove necessarie ad una completa caratterizzazione del materiale, in modo da non avere incertezze sui parametri da impiegare. Nel caso dei pannelli ad H delle prove MS, le analisi numeriche sono state svolte dopo le prove sperimentali, quindi è stato possibile colmare le lacune tarando i diagrammi taglio-spostamento numerici su quelli ottenuti dalle prove sperimentali. È stato quindi un modo di valutare la capacità di predire il comportamento da parte del modello numerico, conoscendo già il risultato: dato che veniva applicato, infatti, un modello costitutivo non lineare realizzato appositamente per il calcestruzzo ad un altro materiale quasi fragile quale la muratura, era necessario verificarne pregi e difetti con un'analisi post-test.

## CAPITOLO 8

### LE RAGIONI DELLA DIVERGENZA TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

#### 8.1 I RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI

Nel capitolo 6 sono stati esposti i risultati dell'analisi numerica effettuata con il modello di danno e plasticità isotropo implementato all'interno del programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1). I diagrammi taglio-spostamento ottenuti al termine delle analisi sono stati sovrapposti a quelli derivanti dalle prove sperimentali per un confronto diretto dei risultati. E' stato subito possibile notare la differenza tra i due tipi di diagrammi.

Verranno ora illustrate, pertanto, le principali discrepanze tra i diagrammi sperimentale e numerico e le ragioni per le quali esse si verificano.

#### 8.2 LE DIFFERENZE

E' sufficiente uno sguardo al diagramma taglio-spostamento della prova MS1 sovrapposto alla curva sperimentale per capire quali sono le difficoltà nella previsione corretta del comportamento del materiale muratura.

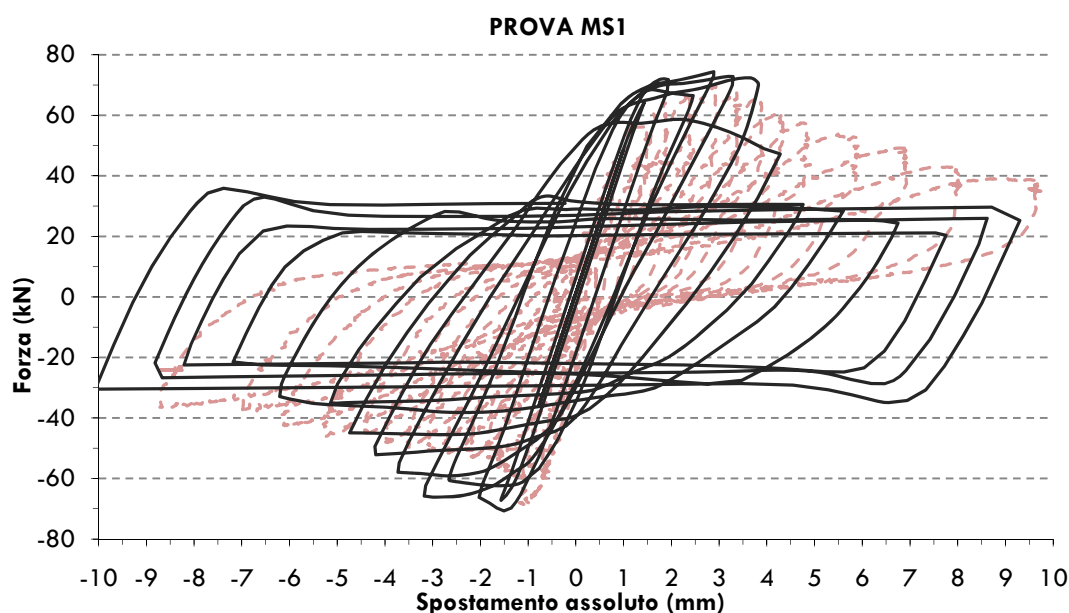


FIGURA 1: IL DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO OTTENUTO DAL MODELLO MS1

Gli aspetti che prevalentemente distinguono il diagramma numerico da quello sperimentale sono:

- andamento dei valori di picco della resistenza a taglio di ogni ciclo non esattamente corrispondente a quello della prova sperimentale; in particolare, si ha un degrado della resistenza a taglio del materiale più repentino di quanto non si riscontri nella realtà. La resistenza residua al termine della prova, inoltre, è molto più basso di quello reale, mentre nel corso dei primi cicli, benché più vicini alla curva sperimentale, si nota una leggera sovrastima della resistenza del materiale;
- area sottesa dal diagramma taglio-spostamento per ogni ciclo più grande nell'analisi numerica che in quella reale. L'energia di deformazione plastica calcolata, dunque, è maggiore di quella reale, in dipendenza anche dal modo in cui il modello considera il danno;
- aumento della resistenza del materiale dopo il collasso finale del provino, che non avviene nella realtà (se non per fenomeni di tipo attritivo) e quindi resistenza illimitata del materiale.

Verranno ora illustrate le ragioni per cui non sussiste un'esatta corrispondenza tra il diagramma numerico e quello sperimentale. Le responsabilità sono da ambo le parti: difetti nel materiale e nella realizzazione dei provini fanno sì che le proprietà meccaniche determinate nelle prove su muretti costruiti parallelamente ai pannelli diano risultati che non considerano questi errori; dall'altro lato, eccessive semplificazioni nel modello costitutivo utilizzato per descrivere il comportamento non lineare del materiale non producono risultati sufficientemente accurati.

### 8.3 I DIFETTI DELLE PROVE SPERIMENTALI

I difetti delle prove sperimentali consistono in errori nella realizzazione dei provini o nelle misurazioni, naturalmente non prevedibili e riproducibili all'interno di un modello numerico.

Per quanto riguarda le prove MS1 e MS2, i principali difetti sono stati riscontrati nel materiale impiegato per la realizzazione del provino e nella geometria. Vediamoli pertanto uno ad uno.

#### 8.3.1 I DIFETTI DEL MATERIALE: PROVE MS1 E MS3

Può accadere che, nel corso della fabbricazione di un pannello in muratura, ci siano delle imprecisioni nelle fasi di realizzazione che influiscono poi sulle caratteristiche meccaniche e quindi sul comportamento globale dello stesso. In particolare, se ci sono difetti localizzati, la determinazione delle caratteristiche del materiale tramite prove su muretti costruiti parallelamente alla muratura, fa sì che essi non siano inclusi nelle proprietà stesse. In un modello numerico, pertanto, vengono inserite caratteristiche meccaniche globali che non possono prendere in considerazione questi difetti della fase realizzativa, strettamente connessi alla manodopera.

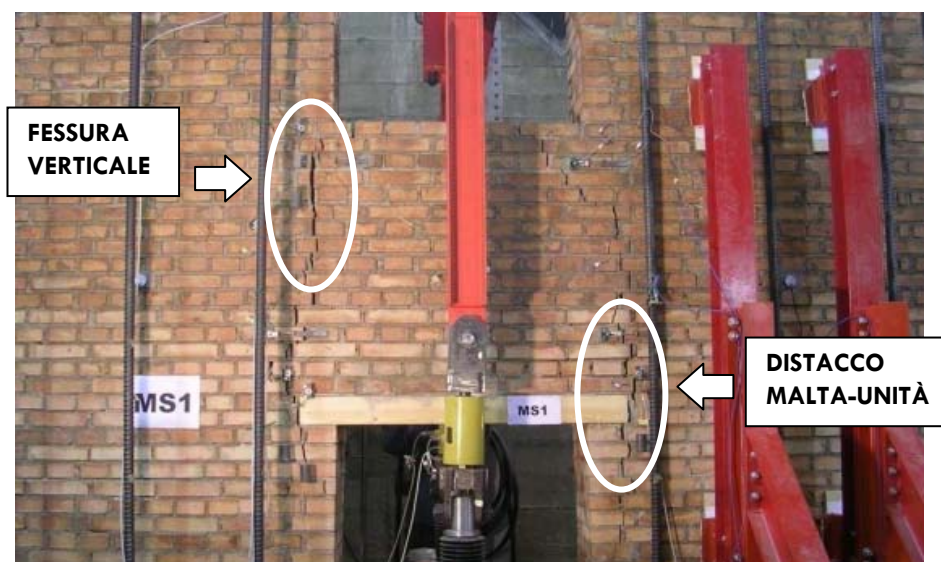
E' il caso del campione realizzato per la prova MS1 (e di conseguenza MS1r). L'immagine riportata sotto permette già di identificare quale sia stato l'errore nella fabbricazione del pannello. Si nota che le metà superiore e inferiore hanno due diverse colorazioni (più chiara la parte inferiore, più scura la superiore).





**FIGURA 2: DIVERSO COLORE TRA LE DUE PARTI DEL PANNELLO**

Un secondo indizio in merito ad un difetto nella fabbricazione del provino è giunto al termine della prova MS1, quando è stata osservata una diversa modalità di rottura della muratura nella metà inferiore e in quella superiore. In particolare, le fessure osservate nella metà inferiore sono caratterizzate prevalentemente dal distacco malta-unità all'interfaccia fra le stesse; al contrario, le fessure della metà superiore passano indistintamente attraverso giunti di malta e unità, con andamento pressoché verticale.



**FIGURA 3: EVIDENTE DIFFERENZA NEL MODO DI ROTTURA DEL PROVINO**

La situazione suggerisce che non sia stata impiegata la stessa malta in tutto il provino. Per convalidare l'ipotesi, sono stati prelevati dei campioni di malta al termine della prova MS1r e, per valutare la qualità del materiale, anche del laterizio, al fine di ottenere informazioni sulla composizione chimica.

Il luogo di prelievo dei campioni è evidenziato in figura 4 e 5.



**FIGURA 4: LUOGO DEL PRELIEVO DEL PRIMO CAMPIONE DI MALTA, APPENA AL DI SOPRA DELLA TRAVE IN LEGNO**



**FIGURA 5: LUOGO DEL PRELIEVO DEL SECONDO CAMPIONE DI MALTA, APPARTENENTE ALLA METÀ SUPERIORE**

Il campione di laterizio è stato prelevato circa al centro della fascia di piano, come riportato in figura 6. Non notando particolari differenze nello stesso all'interno della muratura, è stato effettuato un solo prelievo.



**FIGURA 6: LUOGO DI PRELIEVO DEL CAMPIONE DI LATERIZIO**

### 8.3.1.1 ANALISI AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO

Il microscopio stereoscopico è uno strumento che permette di analizzare un campione attraverso una visione binoculare, che produce due immagini con angoli differenti le quali, sovrapposte, forniscono una visione tridimensionale degli elementi studiati, a differenza del microscopio ottico, che fornisce un'immagine senza profondità di campo. Il principale vantaggio dell'analisi al microscopio stereoscopico è che non è richiesta alcuna preparazione del provino, a differenza del microscopio ottico.

Il primo campione ad essere analizzato al microscopio stereoscopico è stato quello di laterizio. Quest'analisi ben si prestava al provino, in quanto già a occhio nudo erano visibili impurità e inclusioni che si desiderava visionare più dettagliatamente.

Le informazioni sulla struttura del materiale sono state ottenute già con un ingrandimento di 13x (fig. 7). Come si può vedere, il laterizio si presenta piuttosto disomogeneo, con aree biancastre date da accumuli di ossido di calcio, altre più rosse, probabilmente laterizio macinato e aggiunto all'impasto durante la produzione e elementi grigi, a testimonianza della presenza di ossido di ferro.

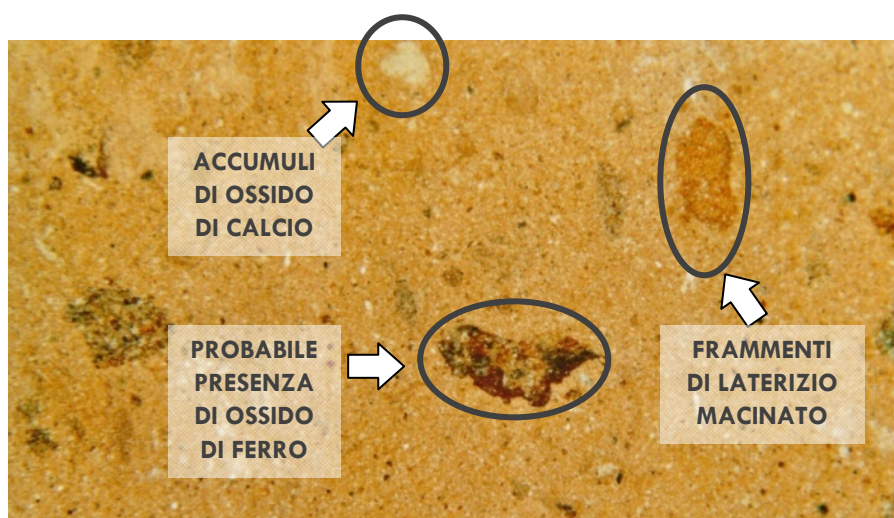


FIGURA 7: IL LATERIZIO AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO (13x)

Quindi, dopo il laterizio, è stata la volta dei due campioni di malta. Anch'essi si prestavano bene all'analisi al microscopio stereoscopico, in quanto già a prima vista si presentavano diversi per colore e rugosità superficiale.

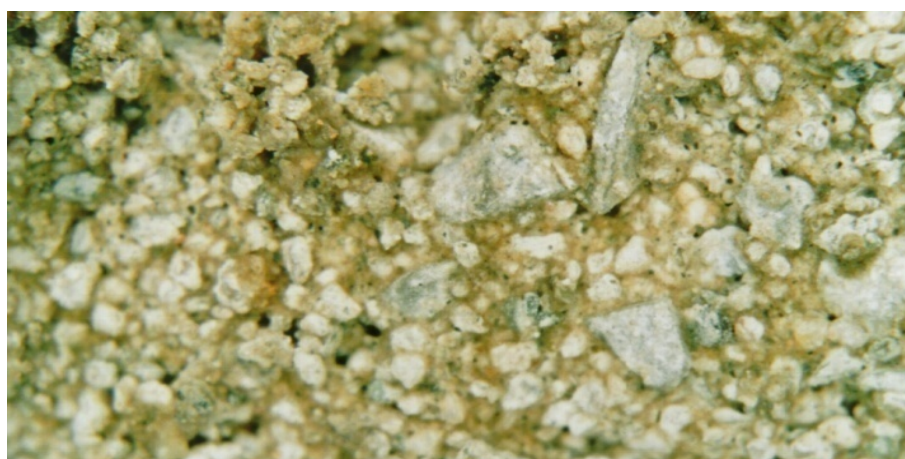
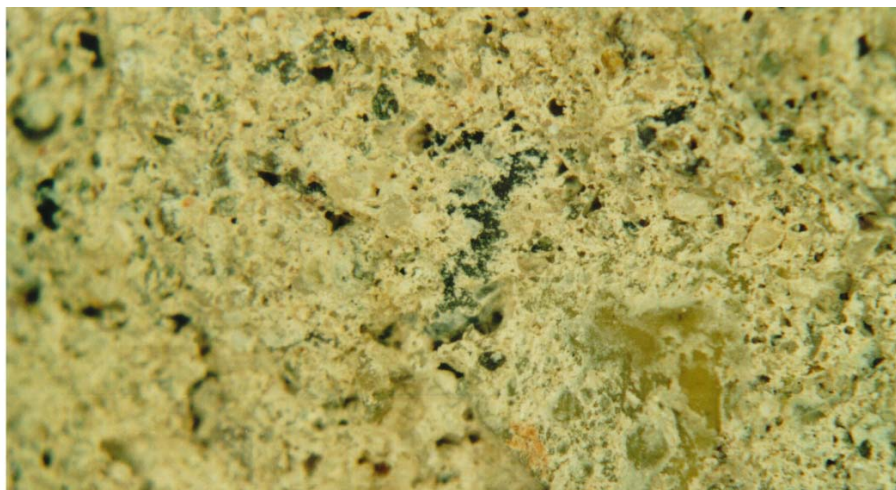


FIGURA 8: LA MALTA 1 AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO

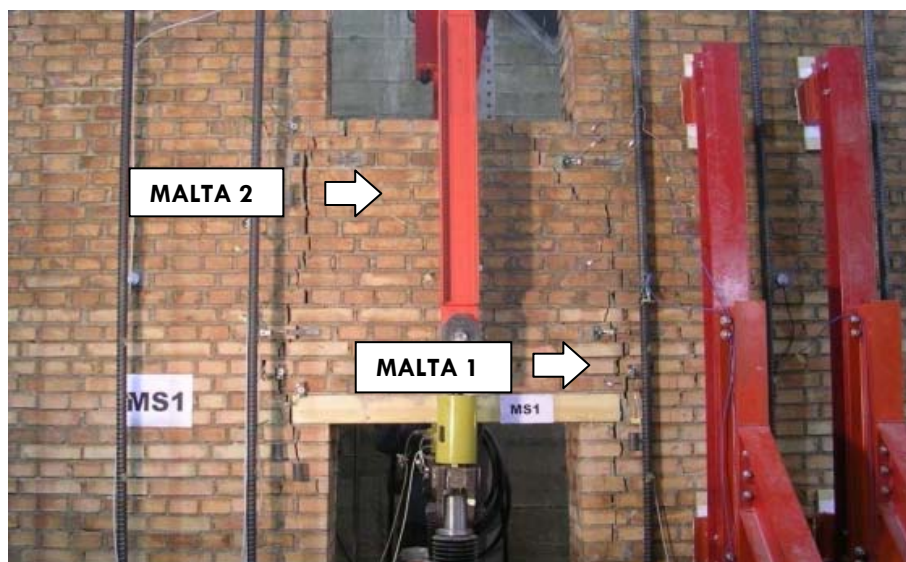
Il campione prelevato dalla parte inferiore del provino MS1 viene qui denominato malta 1 (fig. 8). Al microscopio si presenta caratterizzato da inerti piuttosto omogenei per colore e dimensione, ma con scarsa quantità di legante, insufficiente a garantire una buona aderenza pasta-inerte.

La differenza si nota immediatamente non appena posto in analisi il campione di malta prelevato dalla metà superiore del provino MS2, di seguito denominato malta 2.



**FIGURA 9: LA MALTA 2 AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO (13x)**

La malta 2 si presenta più ricca di legante e con un migliore aggrappamento pasta-inerte, i quali tuttavia sono meno omogenei per forma e dimensione rispetto a quelli impiegati nella malta 1. La maggior quantità di legante garantisce anche una migliore aderenza ai laterizi stessi, a differenza della malta 1. Questo spiega in modo piuttosto chiaro il diverso modo di rottura riscontrato nella parte superiore e inferiore del pannello MS1.



**FIGURA 10: LA TIPOLOGIA DI MALTA ACCANTO AL CORRISPONDENTE MODO DI ROTTURA**

### 8.3.1.2 ANALISI CON FLUORESCENZA AI RAGGI X

La tecnica della fluorescenza utilizza i raggi X per eccitare gli elettroni del materiale e permette di risalire così alla composizione elementare dello stesso attraverso l'analisi della radiazione emessa. Si tratta di una metodologia che consente di analizzare intere aree superficiali di un campione, fornendo però un'analisi qualitativa della composizione. Per un'analisi quantitativa, invece, lo strumento deve essere tarato con un campione di composizione nota e di matrice simile al provino da analizzare. Nel caso in esame, è stata effettuata un'analisi qualitativa, per avere un primo risultato sulla composizione chimica dei materiali prelevati dal provino MS1.

Per quanto riguarda il laterizio, si nota subito la presenza di un picco piuttosto elevato di ossido di ferro, che era già stata intuita nell'analisi al microscopio stereoscopico, per la presenza di inclusioni di colore scuro. L'ossido di ferro, inoltre, conferisce al materiale la sua tipica colorazione rossastra.

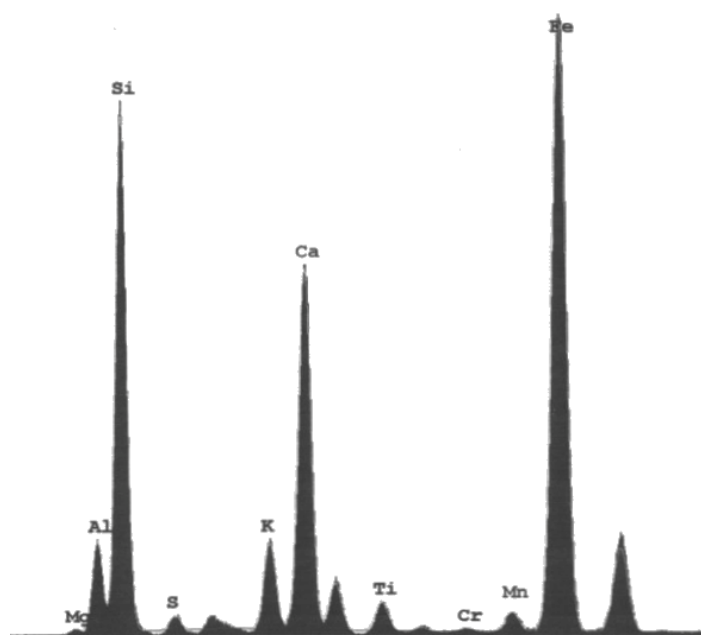


FIGURA 11: FLUORESCENZA AI RAGGI X DEL LATERIZIO

Altro valore piuttosto elevato riscontrato nell'analisi del laterizio è il silicio (circa 28% della composizione totale), nonché una discreta quantità di calcio, probabilmente dovuta agli accumuli bianchi di ossido di calcio illustrati nelle foto fatte con il microscopio stereoscopico.

In seguito all'analisi del laterizio, sono state sottoposte a fluorescenza ai raggi X le due malte. Il picco predominante per entrambe è quello del calcio (circa 65%), a testimonianza del fatto che l'intento era di realizzare una malta di calce.

La malta 2, inoltre, si caratterizza anche per una grande quantità di zolfo (15%) e, nella stessa quantità, di potassio. La presenza dello zolfo è spiegabile con una probabile aggiunta di gesso nell'impasto.

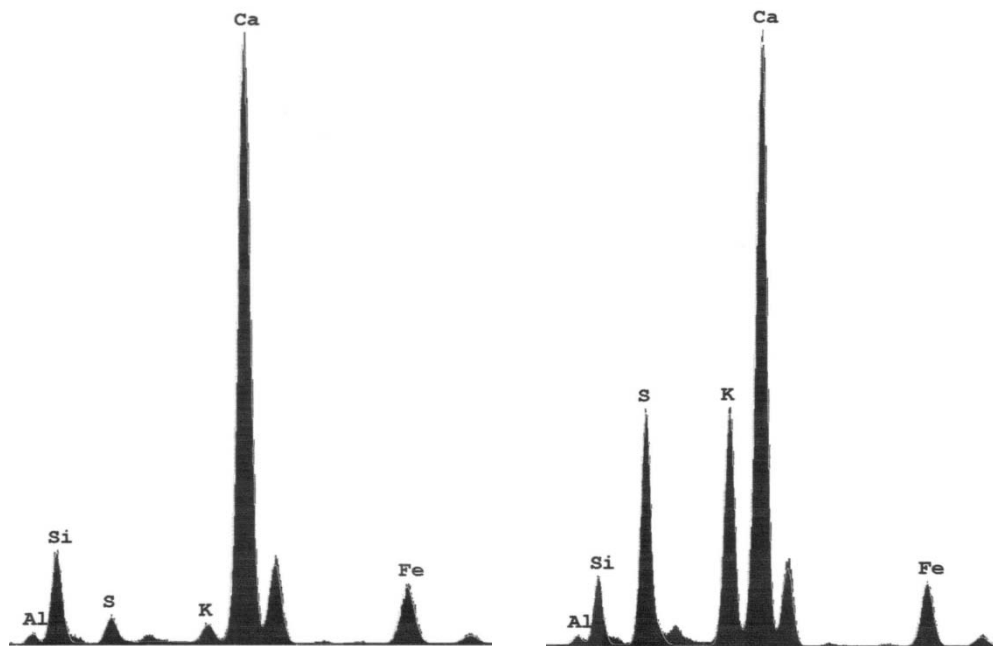


FIGURA 12: LA MALTA 1 (A SINISTRA) E LA MALTA 2 (A DESTRA) NELLA FLUORESCENZA AI RAGGI X

### 8.3.1.3 ANALISI AL MICROSCOPIO ELETTRONICO SEM-EDAX

L'analisi SEM-EDAX abbina le potenzialità del microscopio elettronico (SEM = *Scanning Electron Microscope*) ad un dispositivo per la microanalisi in dispersione di energia (EDAX = *Energy Dispersive Analysis with X-Ray*).

Il microscopio elettronico, rispetto a quello ottico, permette di raggiungere ingrandimenti decisamente più alti (fino a 20000x). Sinteticamente, il funzionamento del SEM si basa sulla generazione di un flusso di elettroni che viene trasmesso alla camera in cui è posizionato il campione, che viene investito da questo raggio. Il materiale emette così elettroni secondari a basso livello energetico ed elettroni retro diffusi (*Back Scattered Electrons*): questi ultimi in particolare determinano la tonalità di grigio con cui l'elemento verrà visualizzato sullo schermo; infatti, tanto maggiore è il numero di elettroni retro diffusi (in stretta dipendenza dal numero atomico), tanto più chiari appariranno gli elementi nelle immagini. Pertanto, le tonalità più chiare di grigio corrispondono a componenti atomicamente pesanti.

Perché questo avvenga tuttavia, i campioni devono essere dotati di conducibilità termica, quindi per i materiali non metallici come quelli esaminati in questo frangente, è necessaria un'operazione di *sputtering*, ovvero di rivestimento del materiale con un sottile strato metallico (generalmente si ricopre con oro).

Quando l'analisi è in corso di svolgimento, è possibile quantificare gli elementi presenti nel campione attraverso il dispositivo per la microanalisi abbinato al SEM: infatti, le lunghezze d'onda e le energie sono caratteristiche per ciascuno degli elementi chimici, per cui dalla semplice lettura dello spettro si possono ricavare le quantità relative degli elementi presenti nel campione. In questo modo si possono ottenere informazioni complete sulla struttura, natura e proprietà degli elementi che compongono il materiale analizzato.

Le dimensioni dei provini preparati per l'analisi del laterizio e delle due malte sono inferiori al cm, come di consueto. Iniziando con il laterizio, non appena raggiunto l'ingrandimento di 32x si è notata la presenza di alcune inclusioni, come da figura 13. L'analisi EDAX ha rilevato un'elevata presenza di calcio (confermata peraltro anche dall'analisi qualitativa di fluorescenza ai raggi X). La presenza di aggregati di ossido di calcio rivela dunque che l'impasto per la fabbricazione dei laterizi non è stato macinato con sufficiente cura e che la temperatura di cottura è stata piuttosto bassa.

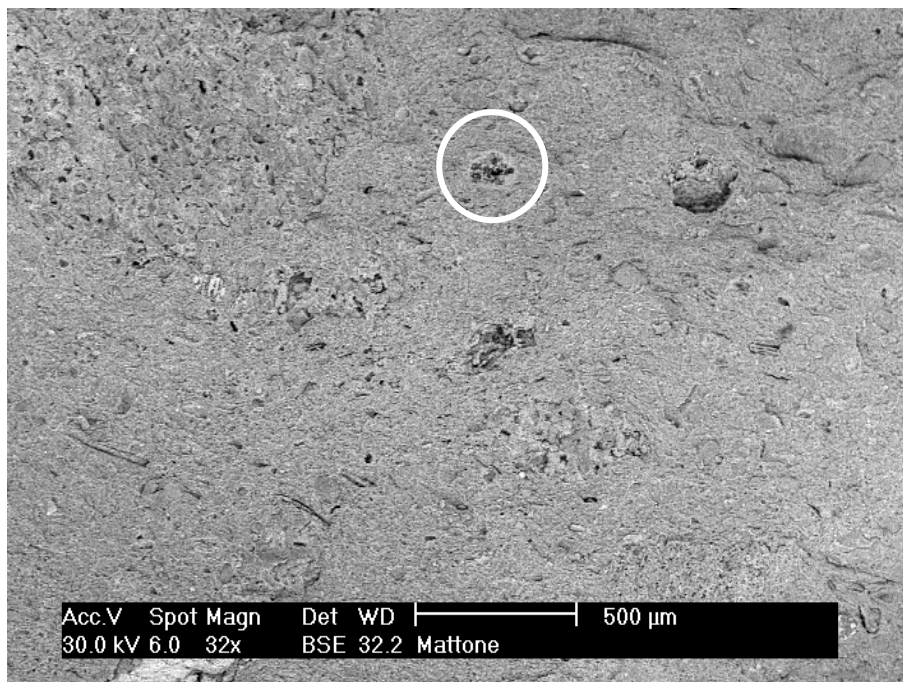


FIGURA 13: LE INCLUSIONI DEL LATERIZIO NELL'ANALISI SEM-EDAX (32X)

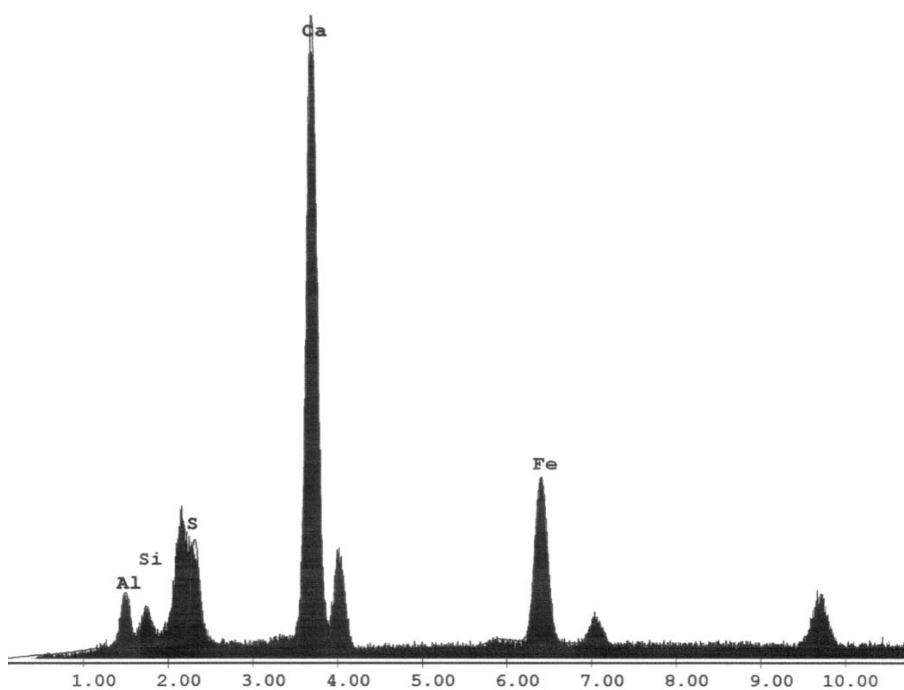


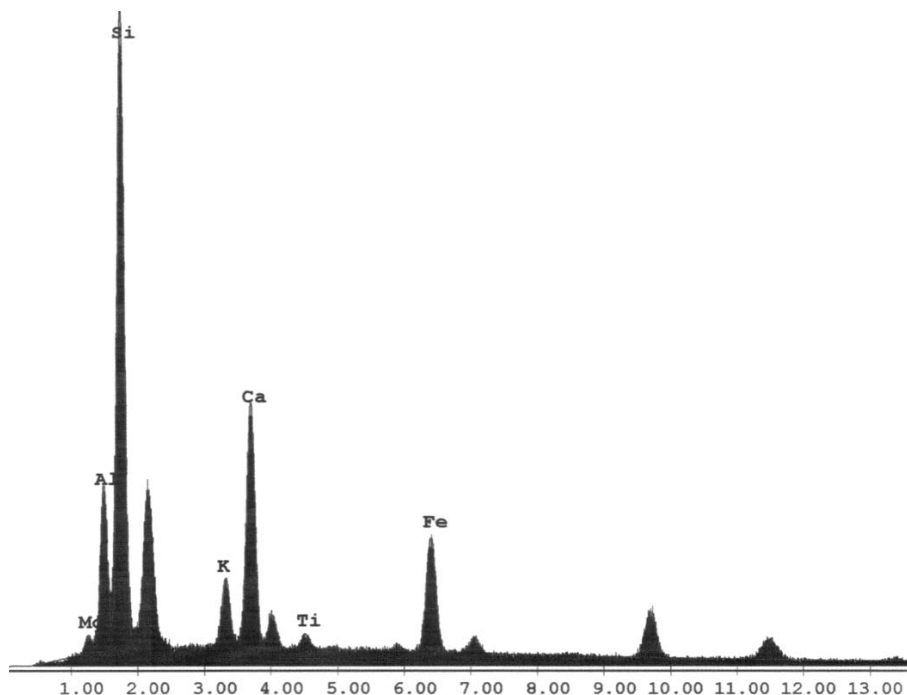
FIGURA 14: L'ANALISI DELL'INCLUSIONE EVIDENZIATA IN FIGURA 13

Le inclusioni in questione contengono non solo un'elevata quantità di calcio, ma anche una piccola parte di ferro. Per avere un'idea, invece, della composizione generale, è stata fatta un'analisi media sulla superficie del campione, con i risultati riportati nella tabella sottostante.

<b>LATERIZIO: analisi media</b>		
ELEMENTO	% FISICA	% IN PESO ATOMICO
Mg	1.74	2.34
Al	11.63	14.06
Si	47.68	55.37
K	4.89	4.08
Ca	17.98	14.63
Ti	1.39	0.95
Fe	14.69	8.58
TOT	100.00	100.00

**TABELLA 1: ANALISI MEDIA DELLA SUPERFICIE DEL CAMPIONE DI LATERIZIO**

Anche i valori dell'analisi EDAX non privi di errori per quanto riguarda i valori quantitativi, ma si presuppone un margine di tolleranza dell'1-2%.



**FIGURA 15: L'ANALISI MEDIA SUL LATERIZIO RIPORTATA IN TABELLA 1**

Per quanto riguarda le malte, si è partiti con l'analisi della malta 1, per la quale sono stati considerati due provini, corrispondenti a due diverse parti del campione originariamente prelevato dalla muratura. Il primo è preso dalla superficie interna del campione, mentre il secondo è un frammento dell'interfaccia malta-laterizio.



Come già dedotto dall'analisi al microscopio stereoscopico, la parte interna del materiale ingrandita a 69x mostra la presenza di una grande quantità di inerti scarsamente connessi alla pasta, come si vede nell'immagine seguente.

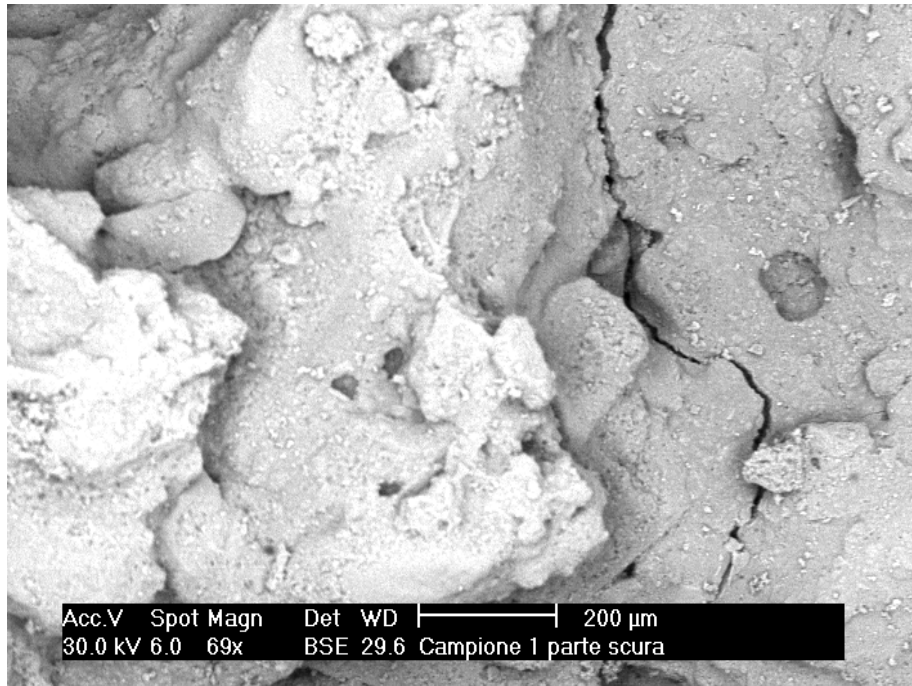


FIGURA 16: ANALISI SEM-EDAX DELLA PARTE INTERNA DEL CAMPIONE DI MALTA 1 (69x)

In alcune aree risulta anche piuttosto difficile distinguere nettamente pasta e inerte. E' possibile dunque che la fabbricazione della malta sia stata interrotta e poi ripresa in un secondo momento, con l'aggiunta di un'ulteriore quantità di acqua nell'impasto in fase di presa già parzialmente avvenuta.

L'analisi quantitativa mostra il seguente risultato:

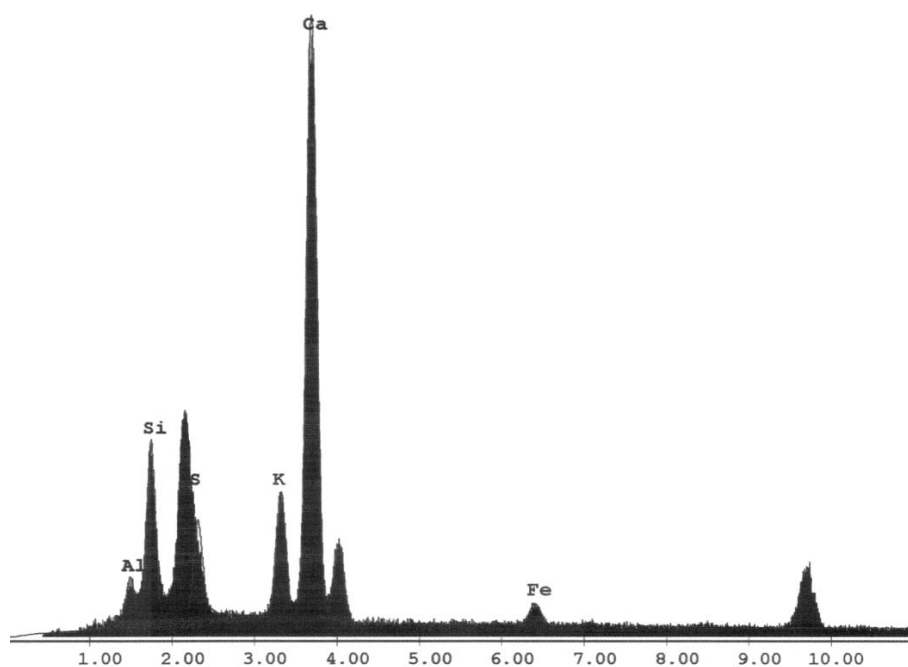
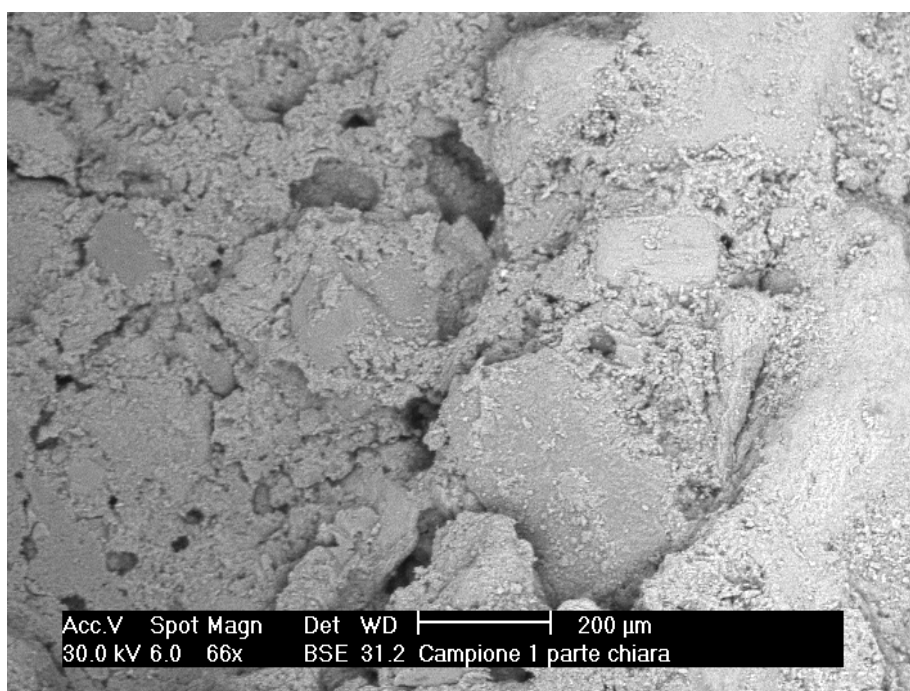


FIGURA 17: ANALISI MEDIA SULLA PARTE INTERNA DEL PROVINO DI MALTA 1

<b>MALTA 1: analisi media della parte interna</b>		
ELEMENTO	% FISICA	% IN PESO ATOMICO
Al	4.67	6.54
Si	16.68	21.50
S	8.39	9.47
K	9.77	9.05
Ca	56.34	50.89
Fe	3.95	2.56
TOT	100.00	100.00

**TABELLA 2: ANALISI MEDIA DELLA SUPERFICIE DEL CAMPIONE DI LATERIZIO**

Per quanto riguarda l'analisi della superficie di contatto con il laterizio, l'esito conferma quanto già visto con la fluorescenza. L'immagine seguente mostra un ingrandimento a 66x.

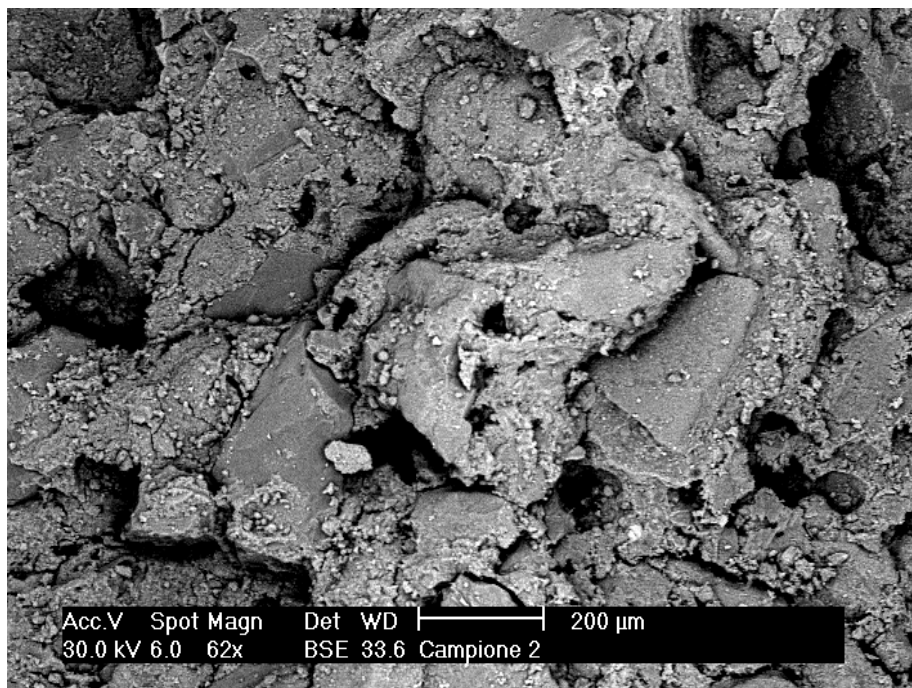


**FIGURA 18: ANALISI SEM-EDAX DELLA MALTA 1 LUNGO LA SUPERFICIE DI CONTATTO CON IL LATERIZIO**

L'analisi media sulla superficie mostra circa i valori ottenuti in quella sulla superficie interna, ad eccezione di una maggiore quantità di silicio, probabilmente dovuta al contatto con il laterizio.

Per quanto riguarda la malta 2, ad un ingrandimento di 62x si nota subito che la qualità della malta è certamente superiore alla precedente, anche se comunque non di grande pregio. Si vedono inerti piuttosto grandi per il tipo di legante di forma spigolosa, quindi probabilmente provenienti da cave.

Osservando l'immagine che segue, ci si accorge che il legante aderisce meglio agli inerti di colore più chiaro rispetto a quelli più scuri, dove si nota qualche distacco. Per conoscere quindi le differenze tra le due tipologie di inerte, è stata eseguita l'analisi EDAX.



**FIGURA 19: ANALISI SEM-EDAX DELLA MALTA 2 (62x)**

I risultati evidenziano che gli inerti di colore più scuro sono essenzialmente dei silicati, mentre di colore più chiaro sono inerti calcarei. Pertanto, ne risulta che l'aderenza con i silicati non è buona, mentre con i calcarei è più soddisfacente. La presenza di silicati nella malta può essere giustificata dalla presenza di frammenti di argilla frantumata inseriti nell'impasto.

#### 8.3.1.4 ANALISI AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO PER LA PROVA MS3

Al momento della stesura del presente lavoro, è in fase di preparazione una nuova prova su fascia di piano, denominata prova MS3. Prima dell'inizio delle analisi si notano già alcune anomalie dal punto di vista dell'omogeneità del materiale impiegato, come si evince dall'immagine seguente.

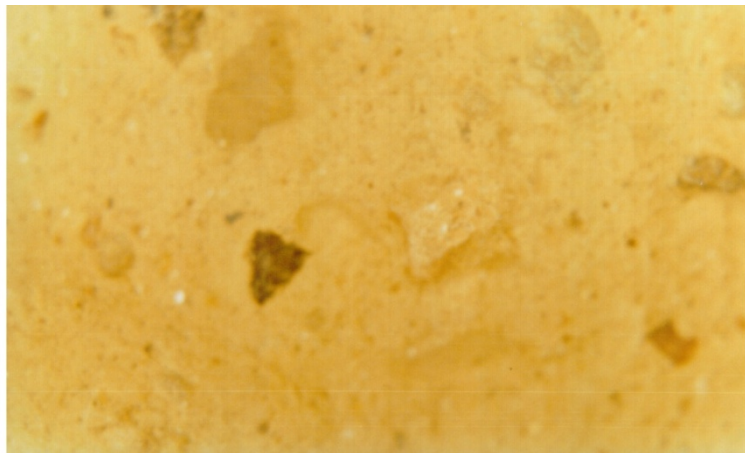


**FIGURA 20: IL PROVINO MS3 AL TERMINE DELLA COSTRUZIONE**

Osservando il provino MS3, si vedono chiaramente alcune aree di colore rosso più intenso, mentre le altre hanno il colore tradizionalmente rosato dei laterizi impiegati anche nelle prove precedenti. Si è deciso così di compiere un'analisi al microscopio stereoscopico su due provini appartenenti alle due tipologie di laterizio, per valutarne le caratteristiche. Il risultato viene riportato nelle due immagini seguenti (fig. 21 e 22).



**FIGURA 21: ANALISI AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO DEL LATERIZIO ROSSO**



**FIGURA 22: ANALISI AL MICROSCOPIO STEREOSCOPICO DEL LATERIZIO ROSA**

Si nota subito la maggior presenza di impurezze e di calcinaroli dalle dimensioni piuttosto consistenti per il laterizio rosso; esso, inoltre, mostra una cattiva tessitura di fondo. Analogamente, anche il laterizio rosa mostra una marcata disomogeneità (come già illustrato nelle analisi svolte per il pannello MS1), ma migliore di quella del laterizio rosso, come si vede nel raffronto delle figure 21 e 22.

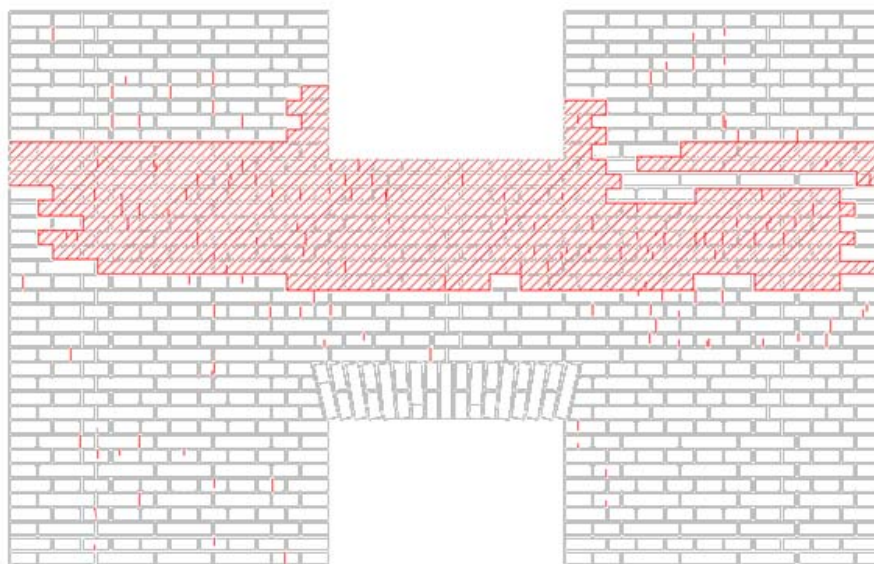
Dato il gran numero di fessure visibili già durante la posa in opera del materiale (fig. 23 e 24), si può sospettare che la resistenza meccanica del laterizio rosso sia diversa da quella del laterizio impiegato in tutte le prove descritte. Poiché non è stato possibile svolgere ulteriori indagini SEM-EDAX anche per questi campioni, è stata realizzata una prova di porosità aperta: infatti, più è poroso il materiale, più è fragile. La prova di porosità aperta consiste nel pesare inizialmente i campioni a secco, ovvero asciutti, quindi vengono immersi in acqua fino a saturazione. I campioni bagnati vengono pesati nuovamente e la differenza in peso riscontrata fornisce informazioni sulla porosità (in termini percentuali) del materiale. Il numero di campioni con cui è stata svolta questa prova è tuttavia piuttosto esiguo: tre

campioni del laterizio rosso (denominati A1, A2 e A3) e due di quello rosa (B1 e B2). Il risultato, tuttavia, mostra un certa dispersione di dati del laterizio rosso, rispetto a quello rosa: è possibile quindi, sulla base della prova di porosità aperta e sulle indagini svolte al microscopio stereoscopico, fare un'ipotesi preliminare sulla maggiore disomogeneità del laterizio rosso rispetto a quello rosa. Per confermare queste assunzioni tuttavia, sarà necessario realizzare delle prove al fine di determinare le proprietà meccaniche dei due materiali.

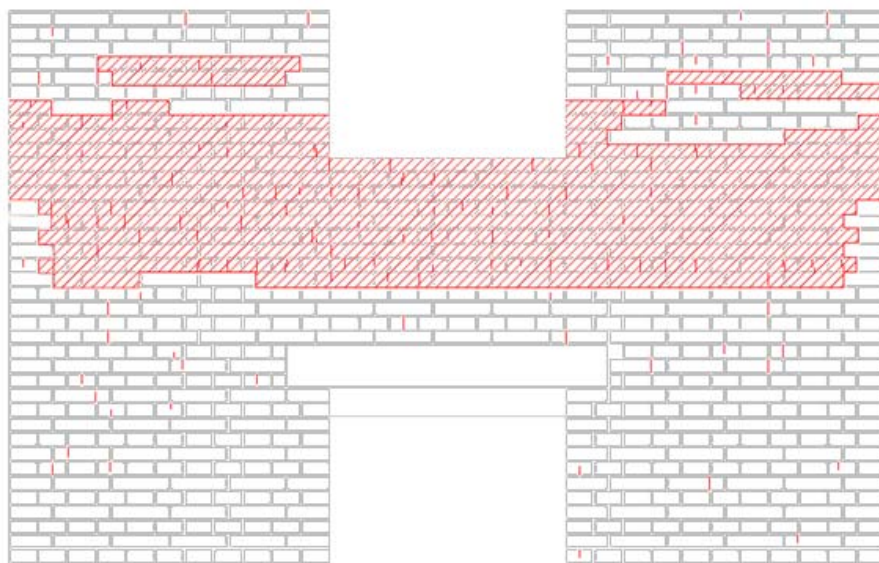
<b>LATERIZI MS3: prova di porosità aperta</b>			
CAMPIONE	Peso asciutto (g)	Peso bagnato (g)	Porosità (%)
A1	2793	3177	13.75
A2	2810	3216	14.45
A3	2795	3190	14.13
B1	2920	3356	14.93
B2	2812	3232	14.94

**TABELLA 3: RISULTATI PROVA DI POROSITÀ APERTA SUI LATERIZI DEL PROVINO MS3**

Di seguito si riportano i prospetti frontale (denominato "front") e retrostante ("back") con le fessure rilevate al termine della fase di posa in opera del provino MS3, evidenziando le aree in cui si trovano i laterizi rossi.



**FIGURA 23: PROSPETTO FRONT PROVINO MS3 CON FESSURE E AREA DI LATERIZI ROSSI**

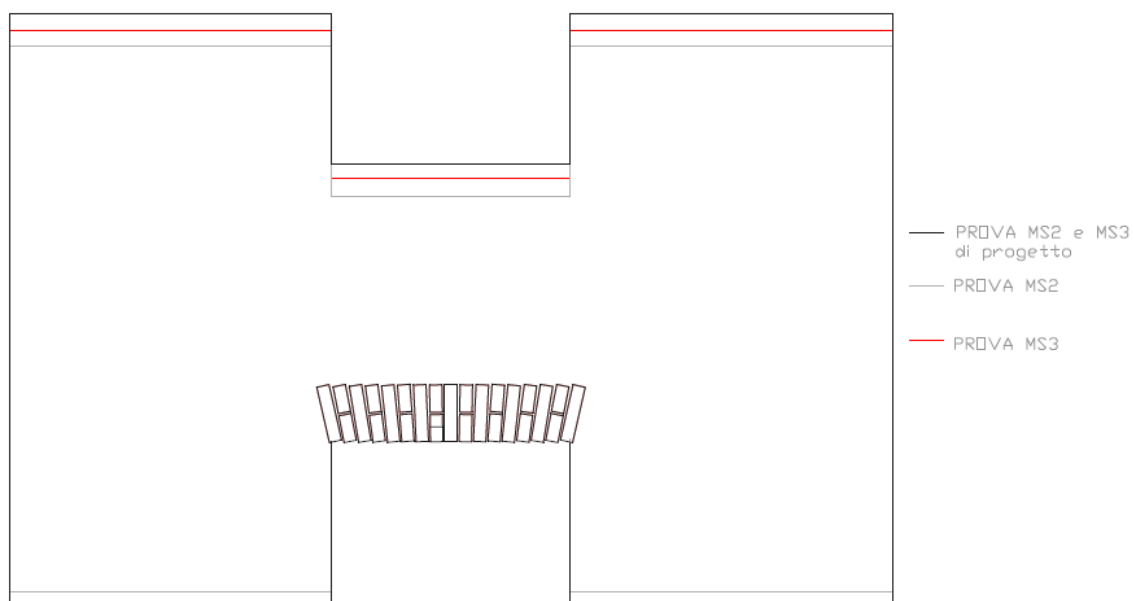


**FIGURA 24: PROSPETTO BACK PROVINO MS3 CON FESSURE E AREA DI LATERIZI ROSSI**

Dalle figure 23 e 24 si evince che il maggior numero di fessure esistenti prima dell'inizio delle prove su questo campione cade nell'area in cui sono posizionati i laterizi rossi.

### 8.3.2 I DIFETTI GEOMETRICI: PROVE MS2 E MS3

Nella realizzazione di pannelli in muratura, oltre all'utilizzo di materiale di scarsa qualità o disomogeneo all'interno del provino stesso, è possibile che ci siano errori per cui l'elemento finale differisce da quello di progetto. Nel caso in esame si parla dei provini MS2 e MS3, i quali differiscono, per alcune caratteristiche, dal progetto originale (fig. 25).



**FIGURA 25: DIFFERENZE GEOMETRICHE FRA PROVINI**

Nelle due tabelle seguenti vengono riportate le caratteristiche previste per i tutti i provini realizzati, sia dal punto di vista del progetto, sia dell'elemento realizzato.

**CARATTERISTICHE DEFINITE IN PROGETTO**

ELEMENTO	MS1	MS2 e MS3
N° di corsi totali	38	40
N° di corsi nella fascia di piano (lato <i>front</i> )	16	15
N° di corsi all'altezza dell'architrave in mattoni	/	11
N° di corsi all'altezza dell'architrave in legno	10	12

**TABELLA 4: CARATTERISTICHE DEI PROVINI IN FASE DI PROGETTO****CARATTERISTICHE DEI PROVINI REALIZZATI**

ELEMENTO	MS1	MS2	MS3
N° di corsi totali	38	37	38
N° di corsi nella fascia di piano (lato <i>front</i> )	16	13	14
N° di corsi all'altezza dell'architrave in mattoni	/	10	10
N° di corsi all'altezza dell'architrave in legno	10	11	12

**TABELLA 5: CARATTERISTICHE DEI PROVINI REALIZZATI**

Dalle tabelle 4 e 5 e dalla figura 25 si possono trarre alcune considerazioni: i provini MS2 e MS3 sono stati progettati in maniera da essere uguali, affinché i risultati delle prove sperimentali siano confrontabili. In realtà le differenze relative alle dimensioni, in particolar modo quelle della fascia di piano, non permettono un raffronto diretto dei risultati. Inoltre, sempre relativamente alla fascia di piano, si nota che l'architrave in legno posta sul lato "back" del provino MS3 è posizionata sul 12° corso di mattoni, un corso più in alto rispetto al provino MS2, il che comporta un disallineamento tra l'architrave in legno e quella in mattoni nel loro lato superiore.

Infine, nel provino MS3 ci sono anche delle imperfezioni nella posa in opera della malta: lo spessore medio dei giunti è di 1 cm, ma in alcuni punti del pannello si evidenziano giunti orizzontali di dimensioni comprese fra 1.3 e 2 cm, soprattutto nei primi corsi di malta. E' bene ricordare che un aumento nello spessore del giunto di malta può comportare una resistenza del materiale nettamente inferiore a quanto atteso. In alcune zone, inoltre, non appare essere perfettamente aderente al laterizio, se non addirittura assente.

## 8.4 I DIFETTI DEL MODELLO NUMERICO

Le differenze tra i diagrammi ottenuti dalle prove sperimentali e dalle analisi numeriche, come visto, possono dipendere molto dalle modalità di preparazione dei provini. Dall'altro lato, ci sono anche le semplificazioni introdotte nel modello costitutivo utilizzato nel programma agli elementi finiti, che non può considerare contemporaneamente tutti i modi di rottura del materiale. Per quanto riguarda il modello di danno e plasticità isotropo utilizzato va anche sottolineato il fatto che non si tratta di un legame costitutivo ideato per la muratura ma, nello specifico, per il calcestruzzo (vedi capitolo 3). In particolare, vengono evidenziate alcune caratteristiche dei diagrammi taglio-spostamento ottenuti dalle analisi svolte e riportate nel presente lavoro, che contraddistinguono forse una semplificazione troppo grande del

comportamento del materiale. In particolare, gli aspetti presi in considerazione sono l'angolo di dilatanza, il parametro di degrado della rigidità del materiale e il modo di considerare il danneggiamento.

#### 8.4.1 L'ANGOLO DI DILATANZA

Il significato dell'angolo di dilatanza è già stato abbondantemente descritto nel corso del capitolo 4 (par. 4.3.3). Dato che in quel frangente, l'angolo di dilatanza non è stato considerato dal punto di vista del degrado del materiale, è importante evidenziare che i valori di questo parametro decrescono all'aumentare del danno. In seguito si parlerà più nel dettaglio di questo, ma ciò che è interessante ora è osservare che all'interno delle curve taglio-spostamento ottenute applicando un carico monotono, al momento reale della rottura del provino corrisponde, nell'analisi numerica, un improvviso crollo nella resistenza a taglio del materiale. L'analisi, tuttavia, come mostra il diagramma di figura 25, non si interrompe, ma continua con una resistenza limitata, ma pressoché infinita.

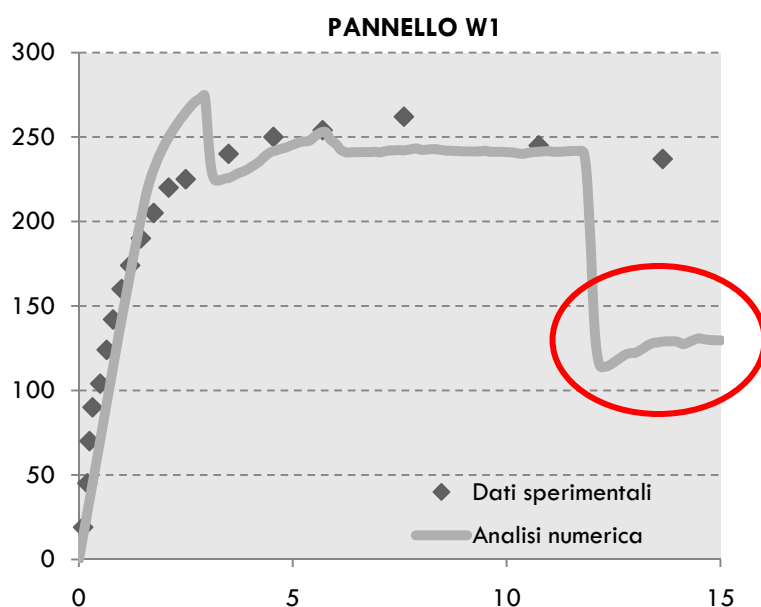


FIGURA 26: RESISTENZA RESIDUA EVIDENZIATA NEL DIAGRAMMA TAGLIO-SPOSTAMENTO DELLA PROVA W1

Questo è dovuto alla caratteristica dell'angolo di dilatanza: questo parametro aumenta la resistenza a taglio del materiale. Pertanto, anche un valore molto piccolo può dar luogo ad una resistenza residua a taglio illimitata. Questo fatto è confermato dal diagramma taglio-spostamento del pannello W2, al quale, a causa della grande entità del carico verticale, si sarebbe dovuto assegnare un valore nullo. Non essendo contemplato nel modello costitutivo tuttavia, è stata assegnato il valore più prossimo possibile allo zero, cosa che ha determinato anche in questo caso una resistenza residua (fig. 27).



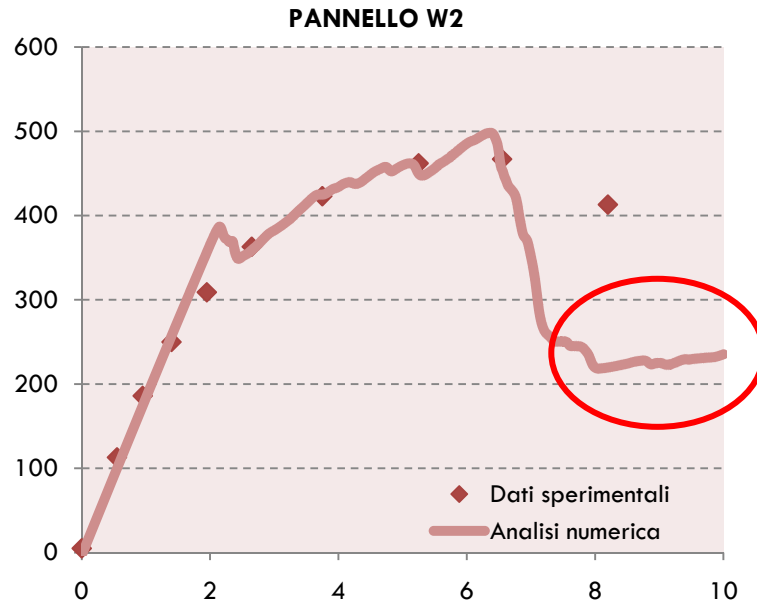


FIGURA 27: RESISTENZA RESIDUA NELLA PROVA W2

Nelle prove a carico ciclico, invece, tutto questo si traduce in un improvviso aumento della resistenza a taglio del materiale, che prosegue costantemente ciclo dopo ciclo, come illustrato in figura 28.

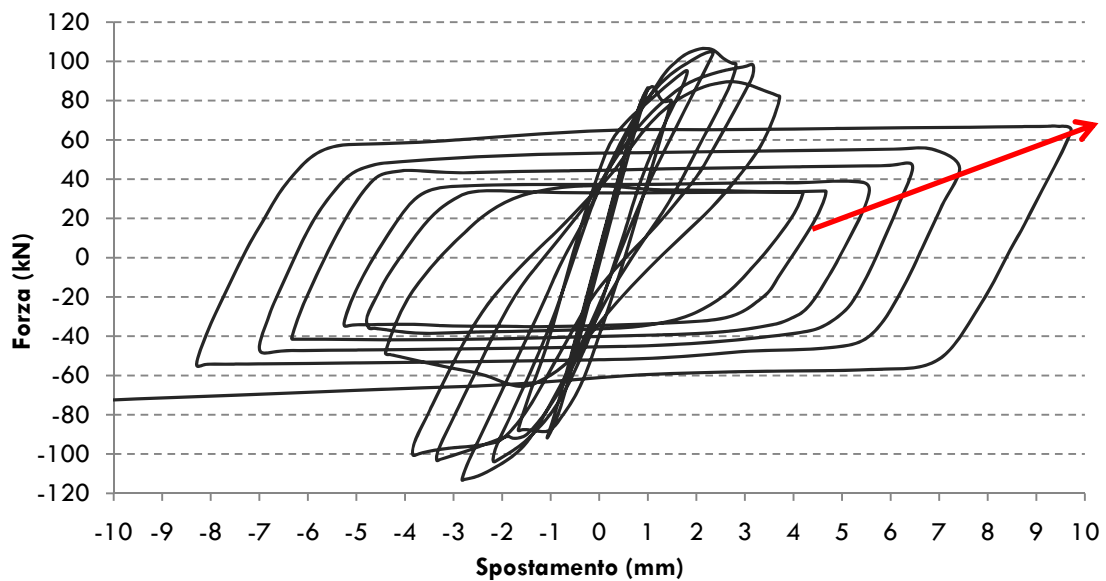


FIGURA 28: L'AUMENTO DELLA RESISTENZA DOPO IL COLLASSO A CARICO CICLICO

In entrambi i casi pertanto si sottolinea la dipendenza di resistenze residue (o addirittura di aumenti della resistenza) in seguito al collasso da un parametro che viene considerato costante durante l'intera analisi, ma che in realtà dovrebbe variare in relazione alla pressione di confinamento del materiale e alla progressione del danno.

### 8.4.2 IL DEGRADO DELLA RIGIDEZZA

Altro aspetto sicuramente importante nella muratura è il danneggiamento del materiale. Esso, infatti, è fortemente dipendente dalla direzione considerata, in particolare da tre direzioni: quella parallela ai giunti orizzontali, ortogonale agli stessi e ortogonale al piano medio del pannello. In realtà, il modello di danno e plasticità isotropo tiene conto di un danneggiamento isotropo del materiale, considerandolo quindi uguale in qualsiasi direzione.

Nella muratura, come già detto abbondantemente nei capitoli precedenti, i reali piani di debolezza della muratura sono i giunti di malta orizzontali e l'interfaccia tra essi e le unità, mentre i giunti verticali sono caratterizzati da un danneggiamento meno consistente. Sarebbe, quindi, importante poter considerare queste due direzioni preferenziali in maniera distinta, anche se il peso in termini di calcolo per il programma agli elementi finiti in cui viene implementato il modello è molto più grande, in quanto il tensore delle tensioni non è più espresso semplicemente in termini di tensioni principali, ma deve essere considerato quello completo oppure quello principale ruotato di un certo angolo rispetto al sistema di riferimento scelto (fig. 29).

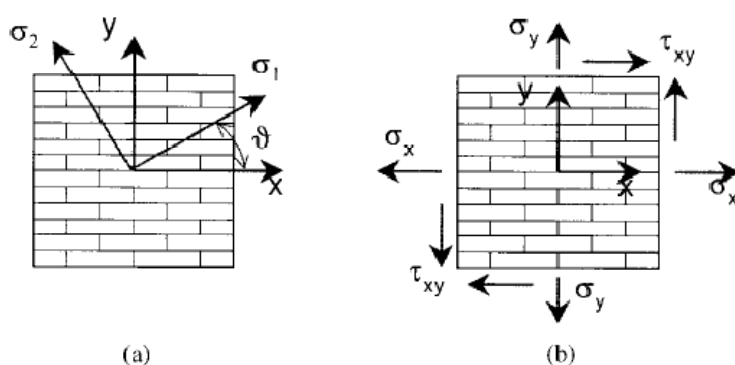


FIGURA 29: STATI DI TENSIONE PLURIASSIALI NELLA MURATURA

Dati i risultati ottenuti, ad esempio, con la prova MS1, si può affermare con buona probabilità che la minore resistenza a taglio del materiale a rottura è fortemente dipendente da questa semplificazione fatta a livello di comportamento del materiale, sia elastico che in fase di danneggiamento (fig. 30).

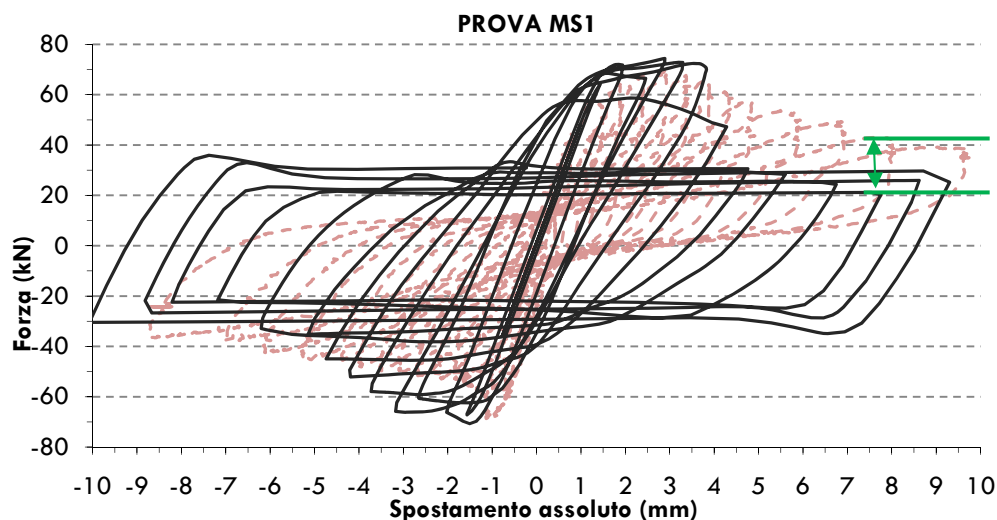


FIGURA 30: DIFFERENZA IN STATI DI DANNO AVANZATI

### 8.4.3 IL DANNEGGIAMENTO

La fase di analisi del provino MS1 riportata in figura 31 mostra come viene considerato il danneggiamento nel materiale. Accanto al calcolo del degrado della rigidezza, infatti, viene calcolata anche la deformazione irreversibile (vedi capitolo 3 per le equazioni costitutive). Il risultato che si ottiene a video non mostra una vera e propria separazione del continuo laddove si è prodotto il danno, quanto piuttosto una deformazione plastica a cui sono applicate le proprietà del danno (ovvero ad esempio, la capacità di richiudersi durante le prime fasi di carico del materiale nel momento dell'inversione di carico, quindi in termini tensionali nel passaggio dalla regione di trazione a quella di compressione).

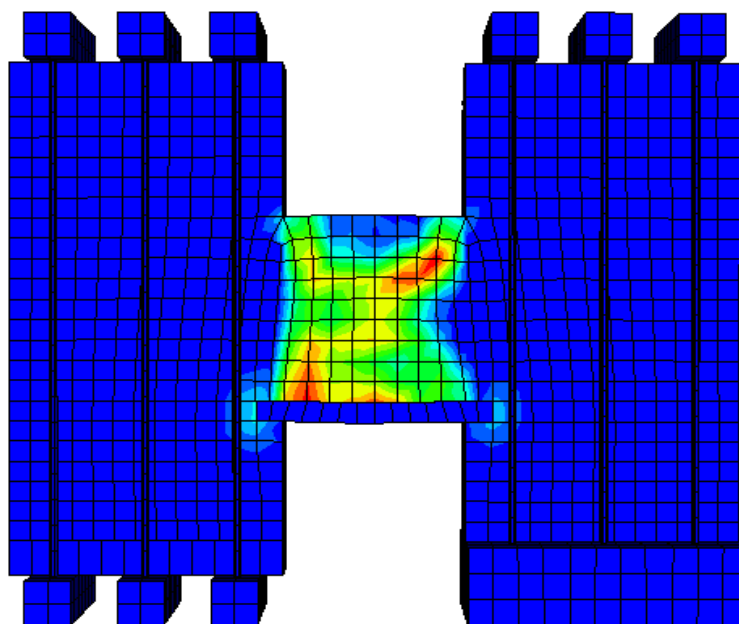


FIGURA 31: UNA FASE DI ANALISI DEL PROVINO MS1

Con il progredire della storia di carico, il materiale reale sviluppa un gran numero di microfessure che poi crescono e si uniscono formando macrofessure. Nel caso del modello numerico, queste microfessure sono le prime deformazioni irreversibili, che progressivamente si fondono, cosicché nel risultato finale si trova l'elemento sollecitato caratterizzato da una deformazione plastica diffusa, che non distingue più nettamente il meccanismo di rottura visibile nelle fasi iniziali di carico. Questo potrebbe spiegare la ragione per cui l'area sottesa dal diagramma taglio-spostamento per un ciclo di carico, che rappresenta l'energia di deformazione plastica, è maggiore di quella riscontrata realmente nelle prove sperimentali.

## 8.5 CONCLUSIONI

Riprendendo quanto esposto nel paragrafo 8.2, si possono quindi trarre alcune conclusioni sulle differenze tra i diagrammi numerici e quelli sperimentali.

Prima di tutto, la differenza nell'andamento: sono le proprietà meccaniche del materiale a definirne il comportamento. Se da un lato i valori del provino realizzato non corrispondono a quelli ricavati dalle prove su muretti costruiti parallelamente alle fasi di costruzione del pannello, ma non con le stesse modalità della posa in opera, si inseriscono in realtà delle quantità che non corrispondono al vero. Dall'altro lato, ovvero da quello dell'analisi numerica, il materiale viene considerato a danneggiamento

isotropo, cosa che non avviene nella realtà, dove il danneggiamento è chiaramente dipendente dalla direzione. In secondo luogo, il modello è fatto in maniera tale che il materiale viene considerato omogeneo, ma oltre al fatto che nell'analisi numerica, la muratura viene considerata come un continuo in cui non c'è distinzione tra unità e malta, nelle parte sperimentale si realizzano provini che non impiegano un materiale omogeneo: questa disomogeneità, peraltro, può riguardare il singolo componente (disomogeneità nel laterizio) e l'intero pannello (disomogeneità nel tipo di malta o laterizio impiegato).

Accanto, quindi, all'aleatorietà connessa con la realizzazione della muratura, dipendente sia dalla manodopera che dalla qualità del materiale, si affiancano le semplificazioni eccessive del modello, con analisi dalla resistenza residua illimitata (errore in ambito numerico) e con modalità di danneggiamento non date esattamente da una vera e propria separazione degli elementi del continuo.

Se poco si può fare dal punto di vista pratico per evitare gli errori connessi con la costruzione, se non seguire attentamente lo sviluppo dei lavori e verificare il materiale impiegato con severi controlli di qualità, qualcosa di più si può fare dal punto di vista del modello numerico, che può essere ulteriormente perfezionato per rispondere alle esigenze richieste di accuratezza, riportate nel corso di questo capitolo, mantenendo comunque ancora un buon livello di efficienza dal punto di vista dell'onere computazionale. E' proprio di questo che ci si occuperà nei prossimi due capitoli.

## CAPITOLO 9

# IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ANISOTROPO

Nelle analisi svolte e descritte nei capitoli precedenti è stato utilizzato un modello di danno e plasticità isotropo implementato nel programma agli elementi finiti ABAQUS (v.6.6.1). Il legame costitutivo è basato sulla teoria di Lubliner et al. e successive modifiche (Lee & Fenves).

La più grande semplificazione di questo modello è proprio quella di considerare il materiale isotropo, caratteristica che, come già sottolineato in precedenza, non è del tutto adatta a descrivere il danneggiamento del materiale muratura. Così, per portare il modello costitutivo verso una formulazione ortotropa, si è scelto di analizzare la teoria di chi ne ha già sviluppato una anisotropa. Da Voyiadjis et al., infatti, è stato formulato un modello di danno e plasticità anisotropo, che si basa proprio sulla formulazione originaria di Lubliner et al.

L'estensione della formulazione isotropa al caso anisotropo è stata fatta per una più accurata interpretazione del comportamento del calcestruzzo; questo perché l'evoluzione delle microfessure nel materiale si presenta diversa in ogni direzione (anisotropia indotta dal danno), mentre in altri casi, come ad esempio nei metalli, per l'evoluzione dei vuoti è possibile utilizzare un modello isotropo. La muratura, come già detto precedentemente, si pone nel caso intermedio: il danno infatti segue le direzioni dei giunti di malta orizzontali e verticali. Di questo si parlerà tuttavia in seguito, mentre ora viene descritta in maniera più approfondita la formulazione anisotropa.

La relazione tra le tensioni nominali e le tensioni efficaci, precedentemente data da una variabile di danno scalare è ora definita da un **tensore di danno** del quarto ordine secondo la seguente relazione:

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (9.1)$$

Questo è il punto di partenza per considerare il degrado della rigidità del materiale in seguito alla comparsa delle fessurazioni, ovvero il legame tra la configurazione non danneggiata (efficace) e quella danneggiata che, a differenza del modello isotropo, qui si basa sull'ipotesi **di equivalenza dell'energia elastica di deformazione**; in altri termini l'energia elastica di deformazione del materiale danneggiato è equivalente a quella del materiale integro:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}^e \quad (9.2)$$

dove, come nel modello isotropo precedentemente descritto,  $\sigma_{ij}$  è il tensore delle tensioni nominale (danneggiato), mentre  $\bar{\sigma}_{ij}$  è quello efficace (non danneggiato);  $\varepsilon_{ij}^e$  è poi la parte elastica del tensore delle deformazioni nominale, mentre  $\bar{\varepsilon}_{ij}^e$  di quelle efficaci (a differenza della formulazione originale dove Voyiadjis et al. ipotizzavano per semplicità l'equivalenza della deformazione, che tuttavia crea problemi dal punto di vista matematico, dando luogo infatti tensori di rigidità secanti non simmetrici). Viene nuovamente considerata come punto di partenza la **decomposizione della deformazione elasto-plastica**:

il tensore delle deformazioni, sia relativo alle tensioni nominali che a quelle efficaci, può essere espresso come

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad \text{e} \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^e + \bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad (9.3 \text{ a,b})$$

Per quanto riguarda la **componente elastica** lineare, si ricorre sempre alla legge di Hooke:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl}^e \quad (9.4)$$

dove, in caso di materiale isotropo elastico lineare, il **tensore di rigidezza elastica non danneggiata**  $\bar{E}_{ijkl}$  si definisce come

$$\bar{E}_{ijkl} = 2\bar{G}I_{ijkl}^d + \bar{K}I_{ijkl} \quad (9.5)$$

con:

- $I_{ijkl}^d = I_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$  parte deviatorica del tensore identità;
- $\bar{G} = \frac{\bar{E}}{(2(1+\nu))}$  modulo di elasticità tangenziale effettivo, che esprime il rapporto fra la tensione tangenziale efficace e la deformazione angolare;
- $\bar{K} = \frac{\bar{E}}{(3(1-2\nu))}$  modulo di elasticità volumetrica, che esprime il rapporto tra la pressione agente sul materiale e la relativa diminuzione di volume.

La componente plastica, invece, si può ottenere sempre a partire dalla legge di Hooke applicata in caso di deformazione elastica lineare, ma scritta questa volta per il materiale danneggiato:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (9.6)$$

In questo caso  $E_{ijkl}$  è il tensore di rigidezza elastica danneggiata.

Se prima la relazione tra la rigidezza del materiale non danneggiato e quella danneggiato era data dalla (3.11) attraverso il parametro di degrado della rigidezza elastica, ora la stessa equazione viene data in **termini di tensore di danno**:

$$E_{ijkl} = M_{ijmn}^{-1} \bar{E}_{mnpq} M_{pqkl}^{-T} \quad (9.7)$$

Quindi se ricomponiamo il tensore delle deformazioni totali secondo la sua componente elastica e plastica si ottiene, secondo quanto detto sopra:

- nella configurazione non danneggiata:  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{E}_{ijkl}^{-1} \bar{\sigma}_{kl} + \bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad (9.8)$

- nella configurazione danneggiata:  $\varepsilon_{ij} = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^p \quad (9.9)$

Prendiamo ora la **forma incrementale della decomposizione del tensore delle deformazioni** derivando rispetto al tempo; per quanto riguarda la configurazione non danneggiata, la forma della relazione rimane invariata:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^e + \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p = \bar{E}_{ijkl}^{-1} \dot{\bar{\sigma}}_{kl} + \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p \quad (9.10)$$

Non è possibile, invece, scrivere lo stesso per quanto riguarda il caso danneggiato in quanto  $E_{ijkl}$  dipende dal tensore di danno, come da (9.7), ed esso è a sua volta funzione di:

$$M_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - \varphi_{kj})^{-1} + (\delta_{il} - \varphi_{il})^{-1} \delta_{kj} \right) \quad (9.11)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker (tensore identità del secondo ordine),  $\varphi_{ij}$  è un **tensore di danno del secondo ordine** che tiene conto della differente evoluzione del danno sotto diversi percorsi di carico. E' proprio la dipendenza da questo fattore che impedisce di scrivere la decomposizione incrementale del tensore delle deformazioni nella configurazione danneggiata. Si definiscono ora, pertanto, tutti i parametri che permettono di determinare il tensore di danno e di conseguenza tensioni e deformazioni nella configurazione danneggiata.

Prima, però, è importante specificare che anche in questo modello si considera il diverso comportamento del materiale a trazione e a compressione. Data la complessità delle variabili in gioco si è ricorsi alla **tecnica della decomposizione spettrale** per scomporre il tensore delle tensioni nella somma di una parte positiva e di una negativa, che rappresentano rispettivamente le tensioni di trazione e quelle di compressione. Entrambe le configurazioni, sia quella danneggiata che quella non danneggiata possono essere rappresentate, infatti, in questo modo:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^- \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^+ + \bar{\sigma}_{ij}^- \quad (9.12 \text{ a,b})$$

Queste parti positiva e negativa del tensore delle tensioni possono essere ad esso relazionate mediante le seguenti equazioni:

$$\bar{\sigma}_{kl}^+ = P_{klpq}^+ \sigma_{pq} \quad (9.13)$$

$$\bar{\sigma}_{kl}^- = [I_{klpq} - P_{ijpq}^+] \sigma_{pq} = P_{klpq}^- \sigma_{pq} \quad (9.14)$$

dove  $P_{klpq}^+$  e  $P_{klpq}^-$  sono i tensori di proiezione definiti come:

$$P_{ijpq}^+ = \sum_{k=1}^3 H(\hat{\sigma}^{(k)}) n_i^{(k)} n_j^{(k)} n_p^{(k)} n_q^{(k)} \quad (9.15)$$

$$P_{klpq}^- = I_{klpq} - P_{ijpq}^+ \quad (9.16)$$

con  $H(\hat{\sigma}^{(k)})$  funzione di Heaviside, valutata alla k-esima tensione principale del tensore  $\sigma_{ij}$ , con  $n_i^{(k)}$  la k-esima corrispondente direzione principale unitaria.

In questo modo è possibile avere due equazioni disaccoppiate che descrivono l'evoluzione a trazione e a compressione; infatti si può ora affermare, analogamente alle (3.12) e (3.13), che:

$$\bar{\sigma}_{ij}^+ = M_{ijkl}^+ \sigma_{kl}^+ \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{ij}^- = M_{ijkl}^- \sigma_{kl}^- \quad (9.17 \text{ a,b})$$

cioè vale la stessa relazione definita inizialmente tramite il tensore di danno, ma le componenti a trazione e compressione vengono considerate separatamente.  $M_{ijkl}^+$  e  $M_{ijkl}^-$  rappresentano dunque i tensori di danno a trazione e a compressione, definiti come:

$$M_{ijkl}^+ = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - \varphi_{kj}^+)^{-1} + (\delta_{il} - \varphi_{il}^+)^{-1} \delta_{kj} \right) \quad (9.18)$$

$$M_{ijkl}^- = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - \varphi_{kj}^-)^{-1} + (\delta_{il} - \varphi_{il}^-)^{-1} \delta_{kj} \right) \quad (9.19)$$

In questo caso, pertanto, le variabili di danno sono dei tensori, che prendono dunque il posto degli scalari  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$  del modello isotropo, nella valutazione del degrado della rigidità del materiale dovuto al danno. Dalle (9.18) e (9.19) si osserva, inoltre, che anche il tensore di danno del secondo ordine  $\varphi$  viene decomposto in una parte positiva e una negativa.

Pertanto, la relazione tra il tensore delle tensioni efficaci e quelle nominali decomposte assume la seguente forma:

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl}^+ \sigma_{kl}^+ + M_{ijkl}^- \sigma_{kl}^- \quad (9.20)$$

mentre il tensore di danno del quarto ordine è dato dalla seguente somma:

$$M_{ijpq} = M_{ijkl}^+ P_{klpq}^+ + M_{ijkl}^- P_{klpq}^- \quad (9.21)$$

La somma sopra definita dalla (9.21) consente di specificare che  $M_{ijkl} \neq M_{ijkl}^+ + M_{ijkl}^-$  così come  $\varphi_{ij} \neq \varphi_{ij}^+ + \varphi_{ij}^-$ , per non incorrere in errori.

Ecco, quindi, definito in termini di danno anisotropo il diverso comportamento del materiale a trazione e a compressione. Veniamo ora al problema connesso all'**energia dissipata durante il processo di fessurazione**, per poter poi definire la legge di scorrimento oltre il campo elastico e giungere quindi alla definizione del tensore di danno.

Le equazioni costitutive del modello sono derivate dal secondo principio della termodinamica, espressione dell'energia libera di Helmholtz. Essa viene espressa come funzione di una serie di variabili di stato interne:

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon^{\pm ep}, \varepsilon^{-ep}, \varphi_{ij}^+, \varphi_{ij}^-, \varphi_{eq}^+, \varphi_{eq}^-) \quad (9.22)$$

dove

- $\varphi_{ij}^\pm$  rappresenta il tensore di danno anisotropo del secondo ordine
- $\varphi_{eq}^\pm$  rappresenta la variabile di danno equivalente (cioè accumulata) a trazione e a compressione ed è utilizzata per caratterizzare l'incrudimento del danno isotropo, il quale a sua volta rappresenta la genesi e la propagazione dei microdifetti nel materiale
- $\varepsilon^{\pm ep}$  rappresenta la deformazione plastica equivalente, ovvero accumulata, a trazione e a compressione ed è utilizzata per caratterizzare l'incrudimento isotropo.

Derivando rispetto al tempo la (9.22), insieme alla disuguaglianza di Clausius-Duhem che stabilisce per il caso isoterma che  $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\psi} \geq 0$ , dopo alcune semplificazioni si ottiene la seguente relazione:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (9.23)$$

di conseguenza



$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + Y_{ij}^+\dot{\phi}_{ij}^+ + Y_{ij}^-\dot{\phi}_{ij}^- - c^+\dot{\varepsilon}^{+ep} - c^-\dot{\varepsilon}^{-ep} - K^+\dot{\phi}_{eq}^+ - K^-\dot{\phi}_{eq}^- \geq 0 \quad (9.24)$$

dove le forze coniugate di danno e plasticità espresse nella disuguaglianza sono definite come:

$$\begin{aligned} Y_{ij}^+ &= -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi_{ij}^+}, Y_{ij}^- = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi_{ij}^-}, K^+ = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi_{eq}^+} \\ K^- &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \phi_{eq}^-}, c^+ = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{+ep}}, c^- = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{-ep}} \end{aligned} \quad (9.25 \text{ a-f})$$

La disuguaglianza di Clausius-Duhem può, dunque, essere riscritta in modo da ottenere **l'energia dissipata** per il processo di danno e plasticizzazione:

$$\Pi = \Pi^d + \Pi^p \geq 0 \quad (9.26)$$

dove:

$$\bullet \quad \Pi^d = Y_{ij}^+\dot{\phi}_{ij}^+ + Y_{ij}^-\dot{\phi}_{ij}^- - K^+\dot{\phi}_{eq}^+ - K^-\dot{\phi}_{eq}^- \geq 0 \text{ sono tutte le componenti di danno} \quad (9.27)$$

$$\bullet \quad \Pi^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - c^+\dot{\varepsilon}^{+ep} - c^-\dot{\varepsilon}^{-ep} \geq 0 \text{ sono tutte le componenti plastiche} \quad (9.28)$$

Una volta definite queste disuguaglianze, è possibile ottenere gli **incrementi delle variabili interne** utilizzando la **legge di scorrimento**. A differenza del caso isotropo, tuttavia, la legge di scorrimento non utilizza un unico potenziale che racchiude in sé sia il comportamento plastico che il danno, come in (3.27), ma si tratta di due elementi distinti, dato che è stata effettuata la separazione dei due comportamenti già nella disuguaglianza precedente.

Si hanno così il **potenziale di dissipazione plastico**  $F^p$  e il **potenziale di dissipazione di danno a trazione**  $g^+$  e **a compressione**  $g^-$ . Tali funzioni, accostate ad opportuni moltiplicatori di Lagrange  $\dot{\lambda}^p$  e  $\dot{\lambda}_d^\pm$ , sono determinate in modo da definire la seguente funzione:

$$\Omega = \Pi - \dot{\lambda}^p F^p - \dot{\lambda}_d^+ g^+ - \dot{\lambda}_d^- g^- \geq 0 \quad (9.29)$$

Utilizzando il principio di massima dissipazione (il quale stabilisce che lo stato attuale delle forze termodinamiche è quello che massimizza la funzione di dissipazione rispetto a tutti gli altri stati ammissibili possibili), la funzione  $\Omega$  può essere massimizzata mediante le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial c^\pm} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{ij}^\pm} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial K^\pm} = 0 \quad (9.30 \text{ a-d})$$

Sostituendo dunque le equazioni (9.27) e (9.28) che definiscono l'energia dissipata all'interno delle condizioni (9.30 a-d) si ricavano **le leggi di evoluzione per le variabili di stato**:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\phi}_{ij}^+ = \dot{\lambda}_d^+ \frac{\partial g^+}{\partial Y_{ij}^+}, \quad \dot{\phi}_{ij}^- = \dot{\lambda}_d^- \frac{\partial g^-}{\partial Y_{ij}^-}, \quad \dot{\varepsilon}^{+ep} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial c^+}, \\ \dot{\varepsilon}^{-ep} &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial c^-}, \quad \dot{\phi}_{eq}^+ = \dot{\lambda}_d^+ \frac{\partial g^+}{\partial K^+}, \quad \dot{\phi}_{eq}^- = \dot{\lambda}_d^- \frac{\partial g^-}{\partial K^-} \end{aligned} \quad (9.31 \text{ a-g})$$

A questo punto ci sono tutti gli elementi per definire le equazioni costitutive del modello di danno elasto-plastico, a partire dal dominio di elasticità. La principale differenza con il modello isotropo precedente è che vengono utilizzate **tre superfici di snervamento** diverse anziché una soltanto: una

superficie per la plasticità, una per il danno a trazione e una per il danno a compressione. Esse sono in accordo con le diverse funzioni potenziali definite precedentemente per ciascuno dei tre stati.

Cominciando con il caso di **carico monoassiale**, la relazione tensioni-deformazioni del materiale viene definita, analogamente al caso monoassiale isotropo, come:

$$\sigma^{\pm} = (1 - \varphi^{\pm})\bar{E}\bar{\varepsilon}^{\pm e} = (1 - \varphi^{\pm})\bar{E}(\bar{\varepsilon}^{\pm} - \bar{\varepsilon}^{\pm p}) \quad (9.32)$$

Dove gli incrementi di deformazione plastica efficace equivalente sono definiti come:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{+ep} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{11}^p \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{-ep} = -\dot{\bar{\varepsilon}}_{11}^p \quad (9.33)$$

Per ottenere i valori finali  $\bar{\varepsilon}^{+ep}$  e  $\bar{\varepsilon}^{-ep}$  è sufficiente integrare rispetto al tempo tali valori incrementali.

Come già detto nel modello precedente, in caso di carico monoassiale la propagazione delle fessure avviene nella direzione trasversale a quella di carico a trazione e nella direzione parallela a compressione.

Lo sviluppo del modello si basa su alcune osservazioni fatte sui diagrammi tensione-deformazione del calcestruzzo in condizioni di carico monoassiale; in particolare:

- sia a trazione che a compressione, in regime di *softening* il materiale è indebolito dal degrado della rigidità elastica; tuttavia tale degrado si manifesta in maniera diversa a trazione e a compressione;
- nella regione a trazione, danno e plasticità hanno inizio insieme al raggiungimento della tensione massima, mentre nella regione a compressione il danno ha inizio prima della plasticità.

Tali considerazioni si possono ritenere valide anche per la muratura.

Passando al caso di **carico pluriassiale**, si devono estendere le equazioni di evoluzione ai carichi pluriassiali. La deformazione plastica efficace in questo caso viene, pertanto, definita come:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{+ep} = r(\hat{\sigma}_{ij})\dot{\bar{\varepsilon}}_{max}^p \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\varepsilon}}^{-ep} = -(1 - r(\hat{\sigma}_{ij}))\dot{\bar{\varepsilon}}_{max}^p \quad (9.34)$$

con  $r(\hat{\sigma}_{ij})$  fattore di peso che dipende dalle tensioni principali e definito come in (3.20).

Infine, per quanto riguarda il caso di carico ciclico, Voyiadjis et al. sostengono la difficoltà di definirlo all'interno di un modello anisotropo. Con un'evoluzione anisotropa del danno è piuttosto complesso considerare l'effetto di apertura e chiusura delle fessure nel corso di un'applicazione ciclica del carico. Particolarmente importante è la definizione del recupero della rigidità del materiale nel passaggio dalla regione di trazione a quella di compressione, come già detto nel capitolo 3. L'equazione che definisce il danno riportata precedentemente (9.21) non incorpora alcun parametro per il recupero della rigidità del materiale a compressione, così come non incorpora alcun accoppiamento tra il danno a trazione e quello a compressione. A partire dalla definizione isotropa del recupero della rigidità di Lee & Fenves descritta nel capitolo 3 (equazioni 3.15 e 3.16) vengono proposti due approcci per l'estensione al caso anisotropo: il primo approccio consiste nel moltiplicare il tensore di danno del secondo ordine  $\varphi_{ij}^+$  per il fattore di recupero della rigidità  $s$  (come da 3.16).

$$M_{ijkl}^+ = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} (\delta_{kj} - s\varphi_{kj}^+)^{-1} + (\delta_{il} - s\varphi_{il}^+)^{-1} \delta_{kj} \right) \quad (9.35)$$

che va poi a sostituire l' $M_{ijkl}^+$  definito in (9.18).

Un altro approccio per migliorare l'accoppiamento tra il danno a trazione e quello a compressione e allo stesso tempo incorporare il recupero della rigidità elastica è quello di riscrivere l'equazione che definisce il parametro di danno scalare del modello isotropo per il caso anisotropo: nel modello isotropo si descrive  $\varphi = 1 - (1 - s\varphi^+)(1 - \varphi^-)$ , che nel caso anisotropo diventa:

$$\varphi_{ij} = \delta_{ij} (\delta_{ik} - s\varphi_{ik}^+) (\delta_{jk} - \varphi_{jk}^-) \quad (9.36)$$

che può essere poi sostituito nell'equazione che definisce  $M_{ijkl}$  (9.11). Si è scelto nel modello anisotropo di considerare soltanto la variabile di recupero della rigidità nel passaggio dalla regione di trazione a quella di compressione, benché il modello implementato in ABAQUS permetta anche di avere un lieve recupero della rigidità anche verso opposto. La decisione si basa sull'idea che nel passaggio dalla regione di compressione a quella di trazione le fessure dovute al carico di compressione possano crescere ancora nella regione di trazione (anziché chiudersi), nel qual caso si avrebbe ulteriore degrado della rigidità e non un recupero.

Viene ora definita la prima delle tre superfici di snervamento, che è la **superficie di snervamento plastica**, molto simile a quella formulata da Lee & Fenves (1998), espressa in termini di tensioni e di deformazioni efficaci:

$$f = \sqrt{3J_2} + \alpha I_1 + \beta H(\hat{\sigma}_{max}) \hat{\sigma}_{max} - (1 - \alpha) \bar{c}^- (\bar{\epsilon}^{-ep}) = 0 \quad (9.37)$$

dove gli elementi che compongono la funzione sono gli stessi definiti nel modello isotropo tranne:

- $\bar{\epsilon}^{-ep} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^{-ep} dt$  deformazione plastic equivalente a compressione
- $\bar{c}^-$  funzione di incrudimento isotropo a compressione, definita dalla seguente legge esponenziale:

$$\dot{\bar{c}}^- = b(Q - \bar{c}_i^-) \dot{\bar{\epsilon}}^{-ep} \quad (9.38)$$

dove  $\bar{c}_i^- = \bar{c}^- - f_{c0}$ ,  $Q$  e  $b$  sono delle costanti del materiale, che caratterizzano rispettivamente le tensioni sature e il tasso di saturazione.

Una volta raggiunta la superficie di snervamento, il materiale è al limite elastico; in seguito il legame tensioni-deformazioni è definito mediante la legge di scorrimento. La direzione dello scorrimento plastico non è normale a  $f$  (scorrimento non associato), pertanto il potenziale plastico  $F^p$  è diverso dalla funzione di snervamento  $f$ . Infatti si ha, sempre analogamente al caso isotropo:

$$F^p = \sqrt{3J_2} + \alpha^p I_1 \quad (9.39)$$

Data la funzione, dunque, la **direzione di scorrimento plastico** viene definita da:

$$\frac{\partial F^p}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{ij}}{\sqrt{3J_2}} + \alpha^p \delta_{ij} \quad (9.40)$$

In entrambe le funzioni  $\alpha^p$  è la costante di dilatazione.

Resta da definire il **moltiplicatore plastico**, che si ottiene riarrangiando la derivata della funzione di scorrimento plastico. Prima di tutto si deve verificare la condizione di consistenza, ovvero che:

$$f \leq 0; \dot{\lambda}^p \geq 0; \dot{\lambda}^p f = 0; \dot{\lambda}^p \dot{f} = 0 \quad (9.41)$$

Poi si deriva la funzione di snervamento rispetto al tempo e si ottiene:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^{-ep}} \dot{\bar{\varepsilon}}^{-ep} = 0 \quad (9.42)$$

Quindi differenziando la funzione di snervamento rispetto al tensore delle tensioni efficace ( $\bar{\sigma}_{ij}$ ) e nuovamente rispetto alla deformazione plastica equivalente a compressione efficace ( $\bar{\varepsilon}^{-ep}$ ), con una serie di sostituzioni nelle equazioni costitutive definite nel modello si arriva alla definizione del **moltiplicatore plastico**:

$$\dot{\lambda}^p = \frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \bar{E}_{ijkl} \dot{\bar{\varepsilon}}_{kl} \quad (9.43)$$

dove

$$\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \bar{E}_{ijkl} \frac{\partial F^p}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} + (1 - \bar{w}) \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^{-ep}} \frac{\partial F^p}{\partial \hat{\sigma}_{min}} \quad (9.44)$$

Per quanto riguarda le **superfici di danno a trazione e a compressione**, esse sono realizzate per poter considerare separatamente lo sviluppo del danno nelle due regioni. E' stata utilizzata la funzione di crescita del danno proposta da Chow e Wang (1987), ma generalizzata per incorporare il danno a trazione e a compressione separatamente:

$$g^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} Y_{ij}^\pm L_{ijkl}^\pm Y_{ij}^\pm} - K^\pm(\varphi_{eq}^\pm) \leq 0 \quad (9.45)$$

con:

- $K^\pm$  = funzione di incrudimento isotropo del danno a trazione e compressione. Quando non c'è danno  $K^\pm = K_0^\pm$
- $K_0^\pm$  = area sotto la porzione lineare del diagramma tensione-deformazione:  $K_0^\pm = \frac{f_0^{\pm 2}}{2\bar{E}}$
- $Y^\pm$  = forza principale di danno che ne caratterizza l'evoluzione (interpretata qui come la velocità di rilascio dell'energia)

Le **funzioni di incrudimento del danno a trazione e a compressione** utilizzate nel modello sono le seguenti:

$$\dot{K}^+ = \frac{K^+}{B^+ + K_0^+/K^+} \exp \left[ -B^+ \left( 1 - \frac{K^+}{K_0^+} \right) \right] \dot{\varphi}_{eq}^+ \quad (9.46)$$

$$\dot{K}^- = \frac{K_0^-}{B^-} \exp \left[ -B^- \left( 1 - \frac{K^-}{K_0^-} \right) \right] \dot{\varphi}_{eq}^- \quad (9.47)$$

Nelle equazioni i parametri  $B^\pm$  sono utilizzati per ridurre la **sensibilità della mesh**:

$$B^{\pm} = \left[ \frac{G_f^{\pm} \bar{E}}{l f_0^{\pm 2}} - \frac{1}{2} \right]^{-1} \geq 0 \quad (9.48)$$

con  $l$  lunghezza caratteristica, che di solito è appunto assimilabile alle dimensioni della mesh.

La **condizione di consistenza** viene verificata facendo in modo che siano soddisfatte le condizioni di Kuhn-Tucker:

$$g^{\pm} \leq 0; \lambda_d^{\pm} g^{\pm} = 0 \text{ e } \dot{g}^{\pm} \begin{cases} < 0 \Rightarrow \lambda_d^{\pm} = 0 \\ = 0 \Rightarrow \lambda_d^{\pm} = 0 \\ = 0 \Rightarrow \lambda_d^{\pm} > 0 \end{cases} \quad (9.49)$$

Con queste definizioni, pertanto, il danno a trazione può cominciare indipendentemente dal danno a compressione e/o parallelamente ad esso.

Anche in questo caso si deve calcolare il **moltiplicatore di danno a trazione e a compressione**  $\lambda_d^{\pm}$ . Si comincia sempre effettuando la derivata della funzione di danno rispetto al tempo:

$$\dot{g}^{\pm} = \frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{mn}^{\pm}} \dot{Y}_{mn}^{\pm} + \frac{\partial g^{\pm}}{\partial K^{\pm}} \frac{\partial K^{\pm}}{\partial \varphi_{eq}^{\pm}} \dot{\varphi}_{eq}^{\pm} = 0 \quad (9.50)$$

Definite le derivate delle funzioni  $g^{\pm}$  rispetto alla forza  $Y_{mn}^{\pm}$  e alla funzione di incrudimento isotropo del danno  $K^{\pm}$ , si ottengono pertanto i seguenti valori dei **moltiplicatori di danno a trazione e compressione**:

$$\lambda_d^{\pm} = \frac{\frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{mn}^{\pm}} \dot{Y}_{mn}^{\pm}}{-\beta \frac{\partial g^{\pm}}{\partial K^{\pm}} \frac{\partial K^{\pm}}{\partial \varphi_{eq}^{\pm}}} \quad (9.51)$$

A questo punto è possibile definire anche l'obiettivo stabilito all'inizio, ovvero la **forma incrementale del tensore di danno del secondo ordine**:

$$\dot{\varphi}_{ij}^{\pm} = \frac{\frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{mn}^{\pm}} \dot{Y}_{mn}^{\pm} \frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{ij}^{\pm}}}{-\beta \frac{\partial g^{\pm}}{\partial K^{\pm}} \frac{\partial K^{\pm}}{\partial \varphi_{eq}^{\pm}}} \quad (9.52)$$

Si ottiene così la relazione che lega il danno (a trazione e compressione) e il tensore delle tensioni.

$$\dot{\varphi}_{rs}^{\pm} = X_{rskl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (9.53)$$

La matrice che determina tale relazione è data da

$$X_{rskl} = B_{rsij}^{-1} A_{ijkl} \quad (9.54)$$

dove:

$$B_{ijpq} = \delta_{pi}\delta_{qj} - \frac{\frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{mn}^{\pm}} \frac{\partial Y_{mn}^{\pm}}{\partial \varphi_{pq}^{\pm}} \frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{ij}^{\pm}}}{-\beta \frac{\partial g^{\pm}}{\partial K^{\pm}} \frac{\partial K^{\pm}}{\partial \varphi_{eq}^{\pm}}} \quad (9.55)$$

$$A_{ijkl} = \frac{\frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{mn}^{\pm}} \frac{\partial Y_{mn}^{\pm}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g^{\pm}}{\partial Y_{ij}^{\pm}}}{-\beta \frac{\partial g^{\pm}}{\partial K^{\pm}} \frac{\partial K^{\pm}}{\partial \varphi_{eq}^{\pm}}} \quad (9.56)$$

Dalla forma incrementale del tensore di danno del secondo ordine è possibile esprimere la derivata rispetto al tempo del tensore di danno  $M_{ijkl}$ :

$$\dot{M}_{ijkl} = \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \varphi_{rs}^{\pm}} \dot{\varphi}_{rs}^{\pm} \quad (9.57)$$

sostituendo la (9.54) si ottiene la relazione

$$\dot{M}_{ijkl} = G_{ijklmn} \dot{\sigma}_{mn} \quad (9.58)$$

dove

$$G_{ijklmn} = \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \varphi_{rs}^{\pm}} X_{rsmn} \quad (9.59)$$

Sostituendo nella derivata rispetto al tempo della relazione fondamentale (9.1) si ricava l'equazione:

$$\dot{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{M}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (9.60)$$

ottenendo quindi una relazione tra le forme incrementali del tensore danneggiato e quello non:

$$\dot{\sigma}_{ij} = m_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (9.61)$$

dove

$$m_{ijkl} = M_{ijkl} + G_{ijpqkl} \sigma_{pq} \quad (9.62)$$

Come per il modello isotropo, si deve scegliere la modalità di **integrazione** per la risoluzione delle equazioni delle tensioni e delle deformazioni scritte in forma incrementale; per farlo, è possibile definire l'**operatore tangente elasto-plastico**, che si ricava a partire dall'equazione costitutiva  $\dot{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e$  e, utilizzando la legge di scorrimento, si ottiene la seguente relazione nella configurazione efficace:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (9.63)$$

dove l'operatore tangente elasto-plastico è proprio  $\bar{D}_{ijkl}$ , definito da:

$$\bar{D}_{ijkl} = \bar{E}_{ijkl} - \frac{1}{h} \bar{E}_{ijrs} \frac{\partial F^p}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} \bar{E}_{mnkl} \quad (9.64)$$

E' importante sottolineare che quando si calcola l'operatore tangente elasto-plastico, tutti gli altri parametri sono già stati determinati.

Per quanto riguarda il calcolo nella **configurazione danneggiata**, era già stato detto in precedenza dell'impossibilità di definire una relazione del tipo

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = M_{ijpq}^{-T} \dot{\varepsilon}_{pq}^e \quad (9.65)$$

per la presenza del tensore di danno del secondo ordine. Per determinare una correlazione tra la configurazione non danneggiata e quella danneggiata si utilizza allora l'equivalenza dell'energia elastica di deformazione nella sua forma incrementale:

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}^e \quad (9.66)$$

e si sostituisce nell'equivalenza sopra la relazione (9.59) che lega tensione danneggiata a tensione non danneggiata. Si ottiene di conseguenza la relazione:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = m_{ijkl}^{-T} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (9.67)$$

Come per l'incremento di deformazione plastica, l'ipotesi di equivalenza dell'energia dissipata viene utilizzata anche per determinare un operatore tangente elasto-plastico che leghi incrementi di tensioni e deformazioni nella configurazione danneggiata:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (9.68)$$

Quindi l'operatore tangente nella configurazione deformata si definisce:

$$D_{ijkl} = \left( m_{ijmn}^{-1} \bar{D}_{mnpq} m_{pqkl}^{-T} - \frac{1}{h} m_{ijmn}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} E_{tukl} (\bar{D}_{mnpq} m_{pqrs}^{-T} - \bar{D}_{mnpq} M_{pqrs}^{-T}) \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{rs}} \right) \quad (9.69)$$

Dall'analisi dei modelli isotropo e anisotropo emerge subito l'effettiva maggiore complessità del secondo, soprattutto in termini di implementazione in un programma agli elementi finiti per il calcolo numerico, dato il gran numero di variabili da prendere in considerazione; dall'altro lato, tuttavia, si sottolinea la completezza del modello e dunque la concreta possibilità di una più accurata descrizione del comportamento del materiale.

Ci si pone ora l'obiettivo di suggerire una formulazione ortotropa del modello di danno e plasticità, che si ponga in posizione intermedia rispetto ai due modelli descritti finora, che prenda in considerazione nello specifico gli elementi necessari per una corretta descrizione del materiale muratura. La formulazione di base viene suggerita nel capitolo 10.





# CAPITOLO 10

## IL MODELLO DI DANNO E PLASTICITÀ ORTOTROPO

### 10.1 CONSIDERAZIONI SUI MODELLI PRECEDENTI

Prima di proporre nuove soluzioni per la formulazione di un modello ortotropo, è bene riassumere gli svantaggi o le inadeguatezze dei legami costitutivi esposti nei capitoli 3 e 9, che si notano quando vengono applicati all'analisi strutturale di elementi in muratura. Le caratteristiche per cui verranno suggerite forme alternative vengono riportate suddivise per ciascuna formulazione.

Il modello di danno e plasticità isotropo si presenta non perfettamente adatto a descrivere il comportamento del materiale muratura per i seguenti motivi:

1. **Isotropia del modello:** non viene considerata la diversa risposta del materiale lungo gli assi di simmetria definiti dalla direzione dei letti di malta; di solito si assume come sistema di riferimento che l'asse orizzontale ( $x$ ) coincida con la direzione dei giunti orizzontali, mentre l'asse verticale ( $y$ ) coincide con la direzione dei giunti verticali; lungo queste direzioni, le proprietà meccaniche sono diverse (ortotropia).

2. **Variabile di danno scalare:** essa esprime l'area specifica di superficie danneggiata, ma si tratta di un valore scalare, identico qualsiasi sia la direzione considerata nel materiale; al contrario, una formulazione corretta per la muratura dovrebbe prevedere una rappresentazione tensoriale: il danno nella muratura è diverso a seconda della direzione considerata, ma simmetrico rispetto ai tre piani di normali coincidenti con gli assi del materiale.

3. **Angolo di dilatanza costante:** la dilatanza è considerata costante lungo tutta l'analisi: il valore, tuttavia, dipende da più fattori, che verranno illustrate nei paragrafi successivi, per cui in realtà tale valore non è costante.

4. **Scorrimento plastico solamente non-associato:** il modello isotropo implementato nel programma agli elementi finiti ABAQUS non consente di utilizzare un valore nullo dell'angolo di dilatanza, dunque non permette di considerare uno scorrimento plastico associato; questo comporta una resistenza residua a taglio della muratura pressoché illimitata anche per un valore assegnato molto piccolo (vedi capitolo 8).

Il modello di danno e plasticità anisotropo, al contrario, appare eccessivamente complesso per la descrizione del materiale muratura, sebbene contenga in sé anche il caso ortotropo:

1. **Anisotropia del modello:** come già detto precedentemente, è sufficiente che il legame costitutivo descriva la risposta ortotropa del materiale muratura, sfruttando quindi le simmetrie del materiale.

2. **Variabile di danno tensoriale:** la variabile di danno risulta anche fin troppo articolata rispetto al valore scalare definito nell'originale modello isotropo. Anche per il legame costitutivo ortotropo si deve ricorrere ad un tensore, ma è sufficiente che sia di ordine inferiore.

3. **Angolo di dilatanza costante:** anche il modello anisotropo considera la dilatanza costante, anche se questa scelta è comprensibile, dato il gran numero di variabili già utilizzate.

Il modello anisotropo si può considerare il punto di partenza per la formulazione di un modello ortotropo. Vengono dunque ora proposte le principali modifiche che potrebbero essere apportate, nel tentativo di risolvere le problematiche riscontrate nelle formulazioni precedenti e rispondere alle esigenze specifiche del materiale muratura.

## 10.2 ORTOTROPIA E DANNO

In analogia al caso dei modelli illustrati in precedenza, le equazioni costitutive del modello ortotropo saranno espresse in termini di **tensioni efficaci**, ovvero, si ricorda, le tensioni medie su piccola scala agenti sulla porzione di materiale non danneggiato tra microfessurazioni. La tensione nominale, invece, è quella riferita al materiale danneggiato (vedi capitoli 3 e 9).

L'obiettivo di questa sezione è quello di semplificare il tensore di danno del quarto ordine utilizzato all'interno del modello di danno e plasticità anisotropo, in modo da adattarlo al danneggiamento ortotropo della muratura. E' possibile farlo a partire da un **tensore di danno del secondo ordine**  $\Phi_{ij}$  e ottenendo uno del quarto a numero di variabili ridotto. Infatti, il danno influenza la rigidezza elastica riducendola all'aumentare della densità del danno e, dal punto di vista matematico, per operare con un tensore del quarto ordine quale è il tensore elastico nell'ambito tridimensionale, serve un tensore del quarto ordine.

Dato che lo stato tensionale della muratura può essere definito in termini di tensioni principali e di un angolo  $\vartheta$  che definisce l'orientamento delle direzioni principali rispetto agli assi del materiale (fig. 1 a) oppure utilizzando tensore delle tensioni completo (fig. 1 b), è possibile scrivere anche il tensore di danno in questo modo: con un'ipotesi più semplicistica, le variabili di danno possono essere considerate degli scalari associati con ciascuna delle direzioni principali di anisotropia del materiale, dunque tre in tutto.

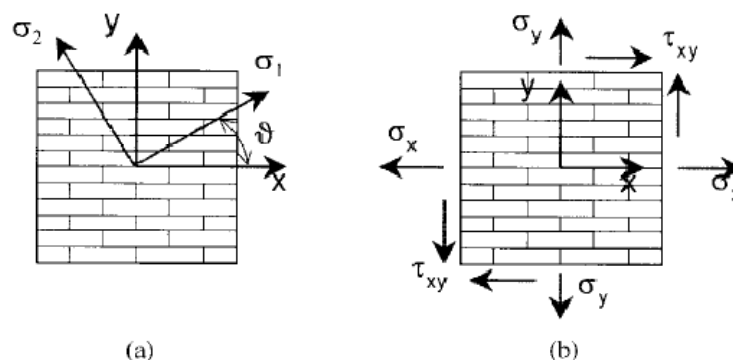


FIGURA 1: RAPPRESENTAZIONE DELLO STATO TENSIONALE NELLA MURATURA

La definizione di tensore di danno del secondo ordine (secondo le direzioni principali di danno) è data quindi dalla seguente relazione (Murakami e Ohno, 1981):

$$\hat{\Phi} = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (10.1)$$

dove i  $\varphi_i$  sono i valori principali di danno, definiti come rapporto tra l'area di materiale danneggiata ( $\delta A_{Di}$ ) e quella totale ( $\delta A_i$ ) appartenente al piano ortogonale a  $\mathbf{n}_i$ ; gli  $\mathbf{n}_i$  sono i vettori unitari delle direzioni principali del tensore  $\hat{\Phi}$ :

$$\varphi_i = \frac{\delta A_{Di}}{\delta A_i} \quad (10.2)$$

in altre parole,

$$\hat{\Phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

Quindi se le direzioni principali di tensione e di danno fossero coincidenti, la relazione sarebbe data da:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\varphi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\varphi_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (10.4)$$

La principale difficoltà nel definire lo sviluppo ortotropo del danno è che nella maggior parte dei casi le direzioni principali del tensore delle tensioni e quelle del tensore di danno non sono coincidenti, ma c'è una rotazione tra i due, dovuto ad un effetto di taglio. Pertanto la matrice di danno scritta in termini di direzioni principali di tensione è:

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

In un modello ortotropo, i piani di simmetria del materiale sono tre, le cui normali sono le direzioni degli assi di simmetria del materiale (parallela ai giunti orizzontali, parallela ai giunti verticali e ortogonale al piano della parete). Quando inizia a svilupparsi il danno, un generico materiale eterogeneo inizialmente dotato di questa simmetria può evolvere in uno stato di anisotropia, con alterazione finale, quindi, della simmetria del materiale. La muratura, tuttavia, è realizzata con componenti il cui orientamento e proprietà meccaniche fanno sì che le microfessure siano generalmente parallele o perpendicolari alla direzione delle simmetrie del materiale, definite dai giunti di malta. Quando si sviluppa il danno, la simmetria iniziale del materiale rimane pressoché invariata, per cui non è necessario valutare una complessa anisotropia indotta dal danno.

Come detto all'inizio del paragrafo, attraverso il parametro di danno è possibile relazionare la configurazione efficace a quella nominale (quindi quella non danneggiata a quella danneggiata).

Pertanto, attraverso il tensore di danno, la trasformazione dell'area totale in quella efficace è data dalla seguente relazione:



Pertanto se la matrice di cedevolezza intatta si esprime nei seguenti termini quando descrive un materiale ortotropo

$$C_{ijkl}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & & & \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & & & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & & & \\ & & & \frac{1}{G_{12}} & & \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} & \\ & & & & & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

La matrice di cedevolezza danneggiata, con danno espresso nella (10.11), diventa:

$$C_{ijkl}^o = \begin{bmatrix} (1-\varphi_1)^2 \frac{1}{E} & (1-\varphi_1)(1-\varphi_2) \frac{-\nu}{E} & (1-\varphi_1)(1-\varphi_3) \frac{-\nu}{E} & & & \\ (1-\varphi_1)(1-\varphi_2) \frac{-\nu}{E} & (1-\varphi_2)^2 \frac{1}{E} & (1-\varphi_2)(1-\varphi_3) \frac{-\nu}{E} & & & \\ (1-\varphi_1)(1-\varphi_3) \frac{-\nu}{E} & (1-\varphi_2)(1-\varphi_3) \frac{-\nu}{E} & (1-\varphi_3)^2 \frac{1}{E} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \right)^2 \frac{1+\nu}{E} \\ & & & & & \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}} \right)^2 \frac{1+\nu}{E} \\ & & & & & \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}} \right)^2 \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

Questo tensore corrisponde ad una formulazione del danno ortotropo, semplificazione di quello anisotropo, espressa nelle direzioni principali di danno.

Si ottengono così le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} E_1 &= (1-\varphi_1)^2 E & E_2 &= (1-\varphi_2)^2 E & E_3 &= (1-\varphi_3)^2 E \\ G_{12} &= \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \right)^2 \frac{E}{2(1+\nu)} & G_{23} &= \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}} \right)^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \\ G_{31} &= \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}} \right)^2 \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \nu_{12} &= \frac{(1-\varphi_1)}{(1-\varphi_2)} \nu & \nu_{13} &= \frac{(1-\varphi_1)}{(1-\varphi_3)} \nu & \nu_{21} &= \frac{(1-\varphi_2)}{(1-\varphi_1)} \nu \end{aligned} \quad (10.14a-l)$$

$$v_{23} = \frac{(1 - \varphi_2)}{(1 - \varphi_3)} v \quad v_{31} = \frac{(1 - \varphi_3)}{(1 - \varphi_1)} v \quad v_{32} = \frac{(1 - \varphi_3)}{(1 - \varphi_2)} v$$

Infine, anche in questo modello formulato specificatamente per la muratura, ciascuna variabile di danno viene distinta per il comportamento a trazione e a compressione, data l'analogia con le curve tensione-deformazione del calcestruzzo.

Il valore del parametro di danno per ciascuna delle tre direzioni di ortotropia ( $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$ ) può essere calcolato in modo del tutto analogo alla formulazione utilizzata per il modello di danno e plasticità isotropo, solo che in questo caso gli scalari sono tre nelle tre direzioni considerate:

$$\varphi^+ = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a^+} \right) \left( 1 + a^+ - \frac{1 + a^+ + \sqrt{1 + (a^+)^2}}{2} \right) \right]^{(a^+/b^+)} \quad (10.15)$$

$$\varphi^- = 1 - \left[ \left( \frac{1}{a^-} \right) \left( 1 + a^- - \frac{1 + a^-}{2} \right) \right]^{(a^-/b^-)} \quad (10.16)$$

con  $a, d$  e  $b$  parametri determinabili sperimentalmente. In particolare, effettuando una serie di test a collasso sul muretti, si potrebbero classificare questi parametri in un tabella a seconda del tipo di tessitura della muratura, delle unità impiegate (e delle loro dimensioni in particolare), della malta utilizzata e dall'aderenza con le unità (ovvero, se è possibile constatarlo, ove essa sia carente o addirittura assente). In questo modo sarebbe possibile determinare l'evoluzione del danno in modo che si avvicini maggiormente al tipo di muratura che si desidera analizzare (dato che, come si è detto nel capitolo introduttivo, il termine muratura comprende un'ampia casistica e dipende dalla tessitura, dalle unità e dalla malta impiegate), anziché un metodo universale per calcolare tutte le murature con parametri costanti e valori medi. Tramite questi valori, inoltre, si potrebbero cogliere aspetti che generalmente non si riescono a considerare, soprattutto in relazione al problema dell'interfaccia unità-malta, strettamente dipendente dalla manodopera e dalla qualità dei materiali impiegati.

Dopo aver determinato la matrice di danno, il modello rispecchia quindi la formulazione anisotropa, a partire dalla decomposizione del tensore delle deformazioni nella somma di una parte elastica e di una plastica, sia per la configurazione efficace che per quella nominale:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^e + \bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (10.17 \text{ a,b})$$

La teoria del danno nel continuo viene quindi formulata su base termodinamica, attraverso il secondo principio della termodinamica e la disuguaglianza di Clausius-Duhem. Viene quindi definita l'energia libera di Helmholtz  $\psi$  (espressa come la quantità di lavoro che il sistema può compiere sull'ambiente), data sempre da una parte elastica, una plastica e una di danno.

La legge di evoluzione dei parametri di danno è sempre legata alla superficie potenziale di danno  $g^\pm$ , distinta a trazione e a compressione, espressa come:

$$\dot{\varphi}_i^\pm = \lambda_a^\pm \frac{\partial g^\pm}{\partial Y_i^\pm} \quad (10.18 \text{ a,b})$$

La legge di evoluzione delle deformazioni irreversibili, invece, dipende dalla superficie potenziale plastica  $F^p$ , nella forma:

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10.19)$$

Della superficie potenziale plastica e, in particolare, dei parametri che la definiscono si parlerà più dettagliatamente nel prossimo paragrafo.

Per tener conto del recupero della rigidezza in caso di carico ciclico, si utilizza sempre il parametro  $s$ , definito appunto **parametro di recupero della rigidezza elastica**, che viene accostato al parametro di danno nel passaggio dalla regione a trazione a quella a compressione, dove questo fenomeno si manifesta maggiormente ed influenza il comportamento e la resistenza del materiale. Il tensore di danno, infatti, non contiene parametri che tengano conto di questo aspetto, perché è necessario un termine che accoppi il danno a trazione a quello a compressione, che invece sono disaccoppiati nel tensore.

La variabile di degrado si può esprimere sempre attraverso la seguente relazione:

$$\varphi = 1 - (1 - s\varphi^+)(1 - \varphi^-) \quad (10.20)$$

Infine, la superficie di snervamento utilizzata è la stessa, sia nel modello di danno e plasticità isotropo che anisotropo; pertanto essa viene riproposta anche qui nel modello ortotropo:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, \kappa^\pm) = \frac{1}{(1 - \alpha)} (\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta(\kappa^\pm) \langle \hat{\sigma}_{max} \rangle) - c^-(\kappa^\pm) \quad (10.21)$$

### 10.3 ANGOLO DI DILATANZA E SCORRIMENTO NON ASSOCIATO

L'angolo di dilatanza  $\psi$  è un parametro importante nella descrizione del comportamento non lineare della muratura, in quanto permette di prendere in considerazione l'aumento di volume del materiale in seguito all'applicazione di sollecitazioni taglianti, caratteristica tipica dei materiali fragili e quasi fragili (sensibili alla pressione di confinamento). Nel caso specifico della muratura, si ricorda, è dato dal rapporto tra il sollevamento nella direzione ortogonale ai giunti di malta orizzontali e lo scorrimento a taglio nella direzione parallela.

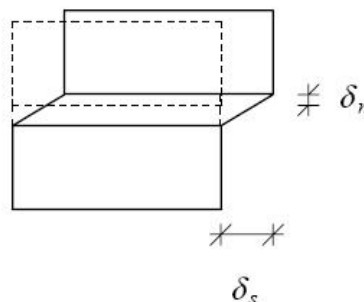


FIGURA 2: RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DELL'ANGOLO DI DILATANZA

In conseguenza all'aumento di volume, generalmente, il materiale subisce delle deformazioni anelastiche a taglio, impedito però in presenza di una pressione di confinamento: a seguito dell'aumento

della pressione, cresce anche la resistenza a taglio della muratura. Infatti, l'immagine seguente, risultato delle prove sperimentali e delle analisi numeriche di Rots (1997), riporta l'influenza dell'angolo di dilatanza, curve ottenute considerando la pressione di confinamento costante e le unità a comportamento elastico-lineare.

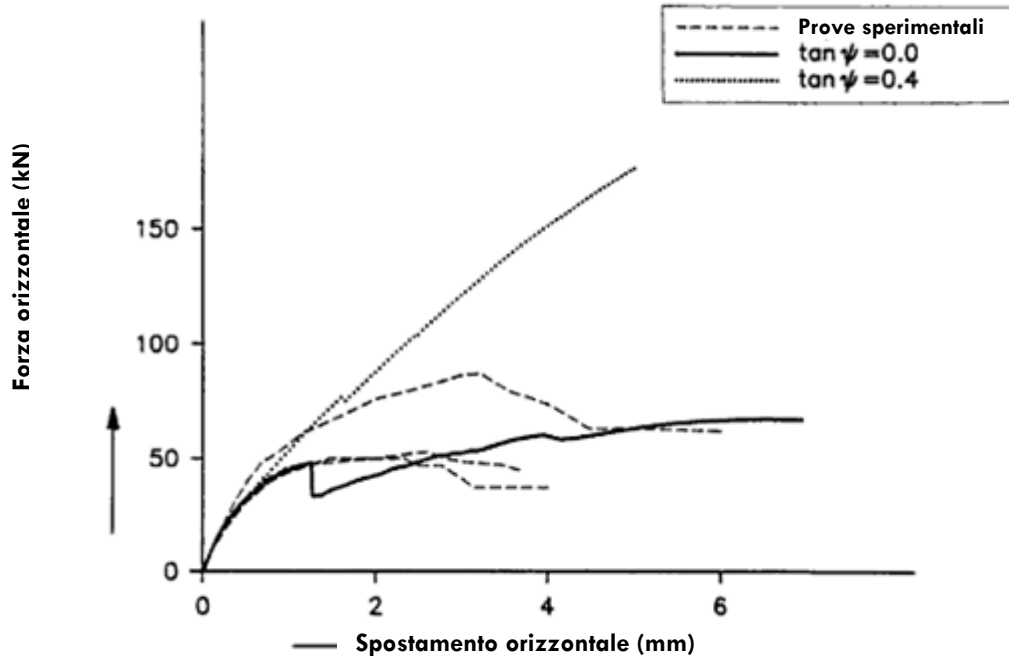


FIGURA 3: INFLUENZA DELL'ANGOLO DI DILATANZA

Si vede che la risposta del materiale al variare dell'angolo di dilatanza è completamente diversa: il materiale a cui è stato assegnato un angolo di dilatanza  $\psi = 22^\circ$  mostra una rigidezza maggiore rispetto a quello con valore  $\psi = 0^\circ$ , quindi anche la resistenza a taglio del materiale è sensibilmente più grande. E' quindi estremamente importante fare attenzione all'utilizzo corretto di questo valore: a favore di sicurezza, per non sovrastimare la resistenza a taglio della muratura, questo valore potrebbe essere considerato nullo, anche se si tratta probabilmente di una scelta troppo conservativa. L'alternativa, invece, sarebbe quella di considerare un angolo di dilatanza variabile con la pressione normale, in modo da evitare momenti in cui la resistenza è sovrastimata.

Determinare un legame tra la pressione di confinamento e l'angolo di dilatanza, in base a quanto osservabile dalle prove sperimentali, non è complicato: i risultati ottenuti mostrano che è sufficiente una relazione lineare, che è stata utilizzata anche nelle analisi numeriche descritte nel capitolo 4 su pannelli sollecitati a taglio, al variare del carico verticale.



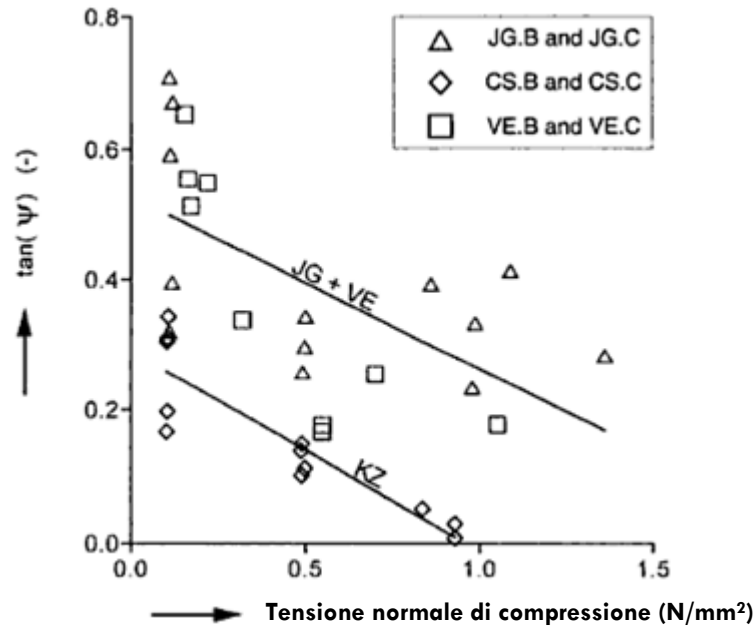


FIGURA 4: LA DILATANZA FUNZIONE DELLA TENSIONE NORMALE DI COMPRESSIONE AL VARIARE DEL TIPO DI UNITÀ

Dal diagramma è possibile osservare anche la dipendenza dell'angolo di dilatanza dal tipo di unità impiegata: la retta più in alto (JG+VE), utilizzata nel capitolo 4, corrisponde a mattoni di argilla, mentre quella più in basso (KZ) a mattoni in silicato di calcio. Come si vede chiaramente in entrambi i casi, la dilatanza è fortemente dipendente dalla pressione di confinamento, in particolare per alti valori della stessa decresce fino ad annullarsi.

E' possibile valutare come cambia la risposta a taglio della muratura al variare della pressione di confinamento e dell'angolo di dilatanza attraverso le analisi numeriche svolte nel capitolo 4. Prendendo i pannelli W1 e W2, rispettivamente soggetti ad un carico verticale di  $0.61 \text{ N/mm}^2$  e  $1.91 \text{ N/mm}^2$ , si nota che la resistenza a taglio del materiale ad alti valori del carico (W2) è molto più grande. Il confronto è riportato nella figura seguente.

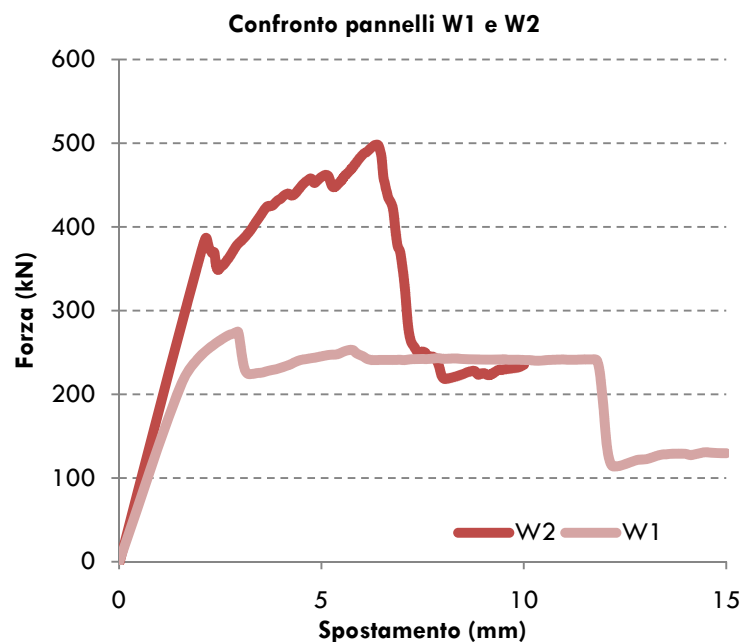


FIGURA 5: CONFRONTO TRA I DIAGRAMMI TAGLIO-SPOSTAMENTO DEI PANNELLI W1 E W2

Si ricorda che al pannello W1 era stato assegnato un angolo di dilatanza  $\psi = 16^\circ$ , mentre a W2, non potendo assegnare il valore nullo, un  $\psi = 0.05^\circ$ . Se in via cautelativa fosse stato inserito un valore nullo anche per il pannello W1, la resistenza del materiale rispetto alle prove sperimentali sarebbe stata molto più bassa (si ricorda che per un valore nullo non è consentito alcuno scostamento nella direzione ortogonale a quella dei giunti orizzontali). Per finire, a conferma di quanto detto sopra, benché i due pannelli abbiano le stesse proprietà meccaniche, la differenza nella pressione normale incrementa di molto la resistenza a taglio del materiale. L'angolo di dilatanza, però, mostra una maggiore deformabilità del materiale, grazie alla possibilità di avere una deformazione anelastica a taglio, dando come risultato uno spostamento di sommità del pannello maggiore prima del collasso nel pannello W1 anziché in W2.

Altro aspetto molto importante poi da prendere in considerazione nella realizzazione del modello numerico, è quello per cui l'angolo di dilatanza decresce in maniera esponenziale all'aumentare dello scorrimento a taglio anelastico, a pressione di confinamento mantenuta costante.

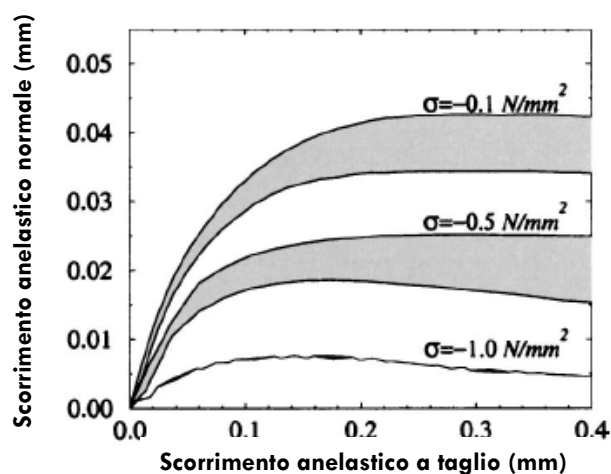


FIGURA 6: ANDAMENTO DELL'ANGOLO DI DILATANZA A VALORI DELLA PRESSIONE NORMALE COSTANTI

Questa caratteristica è stata osservata anche quando il materiale è sottoposto a carico ciclico. Il comportamento dilatante tende a regredire con il progredire dei cicli. La progressione del danno, pertanto, diminuisce la caratteristica espansione volumetrica del materiale sollecitato a taglio. L'angolo di dilatanza, pertanto, non solo dipende dalla pressione normale, ma decresce con il progredire del danno fino ad annullarsi a rottura. Se non si annulla all'interno di un modello numerico, si ha un errore, che porta il diagramma taglio-spostamento ad avere una resistenza residua infinita, come illustrato nel capitolo 8. È importante quindi che l'angolo di dilatanza venga fermato alle alte pressioni di confinamento e alle grandi deformazioni/danneggiamenti, dove il miglioramento della resistenza è molto limitato.

Nell'ambito del modello di danno e plasticità ortotropo, il parametro viene inserito all'interno della funzione che governa lo scorrimento plastico, ovvero la superficie potenziale plastica:

$$F^p = \sqrt{3}J_2 + I_1 \tan\psi \quad (10.22)$$

dove  $\psi$  è l'angolo di dilatanza e  $J_2$  il tensore delle tensioni deviatoriche (data l'adeguatezza di questa funzione nei modelli precedentemente descritti, viene mantenuta invariata anche in questa frangente).

Si vuole ora definire il parametro di dilatanza per far sì che contenga tutte le caratteristiche descritte sopra: sensibilità alla pressione normale, al danno e, di conseguenza, suo annullamento a rottura.

Si consideri, dunque, un angolo di dilatanza funzione di:

$$\psi = \psi(\psi_0, \sigma_n, \varphi) \quad (10.23)$$

Dove  $\psi_0$  è l'angolo di dilatanza iniziale,  $\sigma_n$  la tensione normale nel punto considerato e  $\varphi$  è il parametro di danno del materiale. Nell'ipotesi dunque di un decremento esponenziale del valore con il danno e del suo aumento o diminuzione con il variare della pressione normale, si può ipotizzare l'utilizzo di una funzione del tipo:

$$\psi = [\psi_0 + \psi(\sigma_n)][1 - \varphi e^{-(1-\varphi)}] \quad (10.24)$$

Si suggerisce il calcolo del valore iniziale attraverso curve derivate da prove sperimentali. In particolare, quella utilizzata per il calcolo dell'angolo di dilatanza per tutte le analisi numeriche svolte nel presente lavoro è

$$\psi_0 = -0.52\sigma_n + 0.6 \quad (10.25)$$

Generalizzando le relazioni lineari tra l'angolo di dilatanza e la pressione normale possono date nella seguente forma:

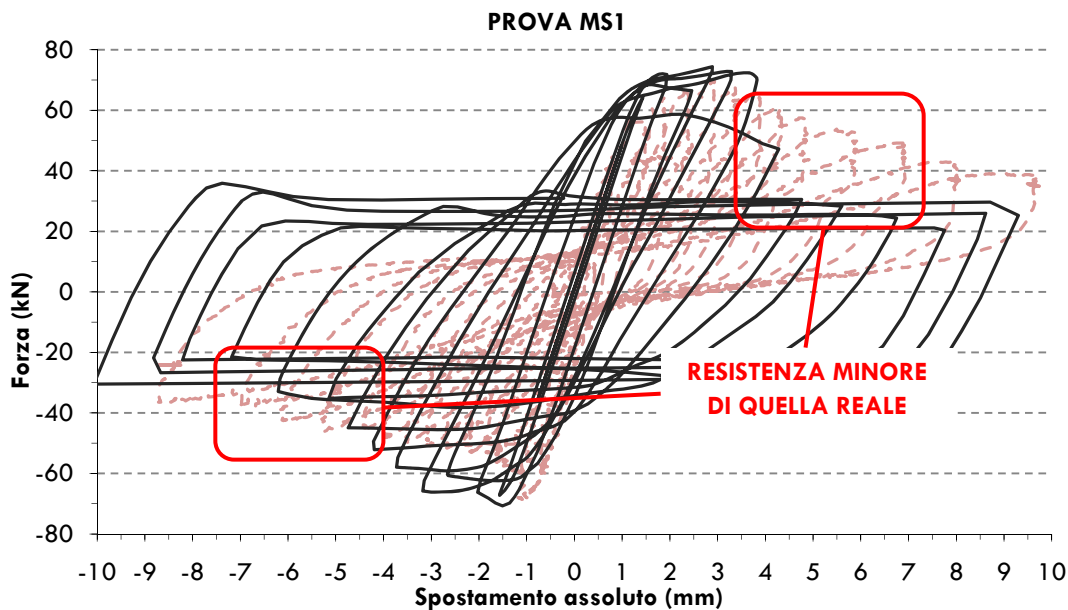
$$\psi_0 = a\sigma_n + b \quad (10.26)$$

Dove  $a$  e  $b$  sono delle costanti determinate a livello sperimentale e possono essere classificate per tipologia di unità impiegata nell'elemento strutturale.

La funzione (10.24) permette all'angolo di dilatanza di annullarsi sia in presenza di alte pressioni di confinamento, sia in caso di materiale completamente danneggiato. In questo modo è possibile avere anche uno scorrimento associato del materiale, dove la superficie potenziale plastica coincide con la superficie di snervamento.

L'assunzione di un angolo di dilatanza variabile implica un maggior onere computazionale a livello di analisi numerica; utilizzando la formulazione termodinamica (come detto nei paragrafi precedenti) per il calcolo delle deformazioni irreversibili e del danno, è importante verificare che la variabilità della dilatanza permetta alla disuguaglianza di Clausius-Duhem di essere sempre verificata.

Esempio concreto della necessità di utilizzare una dilatanza variabile nel modello numerico sono state le analisi numeriche realizzate per studiare il comportamento della fascia di piano. Prendendo ad esempio il caso del provino MS1, si sa che qui è stato posto un angolo di dilatanza pari a  $\psi = 23^\circ$ , ma che, suddividendo per regioni a seconda della pressione normale, i maschi murari avrebbero avuto un angolo iniziale di  $\psi = 20^\circ$  e la fascia di piano, libera da ogni confinamento,  $\psi = 35^\circ$ . In questo modo, la resistenza della fascia di piano è stata sottostimata, mentre quella dei maschi murari sovrastimata. Il primo dei due aspetti in particolare può essere osservato nel diagramma taglio-spostamento di figura 7: l'area del diagramma al di là del ciclo di ampiezza 3 mm per gli spostamenti positivi e -4.5 mm per quelli negativi, la resistenza a taglio calcolata è inferiore a quella realmente misurata nel corso delle prove sperimentali, anche se verso gli ultimi cicli di carico, verso la rottura del provino, i valori di un angolo di dilatanza variabile avrebbero dovuto essere prossimi allo zero.



**FIGURA 7: PROVINO MS1: I DIFETTI DELL'ANGOLO DI DILATANZA COSTANTE**

#### 10.4 SVILUPPI FUTURI DEL MODELLO

La realizzazione di un modello costitutivo che descriva il comportamento non lineare della muratura deve basarsi prima di tutto su un'estensiva serie di prove sperimentali a spostamento imposto su muretti, diversi per tessitura e tipo di unità e malta impiegate, per caratterizzare in modo completo le proprietà meccaniche del materiale e lo sviluppo del danno con la progressione del carico, così da rendere il modello, per quanto possibile, adatto a descrivere murature di tipologie anche piuttosto diverse fra loro.

Allo stesso tempo, va implementato il modello, ad esempio con una *subroutine* UMAT all'interno di ABAQUS, verificando l'efficacia dell'utilizzo dei tre parametri di danno lungo i tre assi del materiale nel simulare il comportamento dei muretti testati in laboratorio.

In secondo luogo, è importante implementare il modello ortotropo in modo che comprenda anche l'angolo di dilatanza variabile, estendendo così le analisi numeriche dai muretti a veri e propri pannelli o elementi strutturali (come le fasce di piano studiate nel Laboratorio di Prove Materiali e Strutture dell'Università di Trieste).

## CONCLUSIONI

La muratura è un materiale da costruzione di facile realizzazione pratica, ma di difficile interpretazione per quanto riguarda la formulazione di modelli costitutivi che ne descrivano la risposta alle sollecitazioni nel modo più accurato possibile.

È stato illustrato il gran numero di legami costitutivi presenti in letteratura destinati a descrivere la risposta della muratura, a partire da ipotesi molto semplicistiche (ad esempio il modello “*no tension*”, che trascura del tutto la resistenza a trazione del materiale) a formulazioni ben più complesse (ad esempio il modello ortotropo di Lourenço et al. (1997), che prevede addirittura due superfici di snervamento diverse a trazione e a compressione).

È stata analizzata l'eventualità di estendere l'utilizzo di un modello di danno e plasticità isotropo all'analisi di elementi strutturali in muratura, benché la formulazione originaria fosse basata sul comportamento del calcestruzzo. Le analogie nella risposta dei due materiali, ad ogni modo, hanno permesso di ottenere una serie di curve taglio-spostamento per la muratura abbastanza prossime a quelle ricavate grazie alle prove sperimentali, dapprima su semplici pannelli sollecitati a taglio, poi su fasce di piano in muratura, di complessità maggiore rispetto al caso precedente.

Dopo queste ultime analisi in particolare, è emersa la necessità di apportare alcune modifiche al modello di danno e plasticità isotropo affinché fosse più accurato nella descrizione del comportamento della muratura e rispondesse nello specifico ad alcune peculiari esigenze ricavate dall'osservazione dei modelli numerici svolti.

In particolare, in base ai risultati ottenuti, è stata ipotizzata la possibilità di adeguare l'isotropia del modello inizialmente utilizzato, estendendolo ad una risposta ortotropa secondo gli assi del materiale muratura, e di modificare il parametro denominato angolo di dilatanza, che esprime l'aumento di volume subito dal materiale quando sottoposto ad un'azione di taglio, il quale è stato considerato costante nelle analisi svolte sia su pannelli che su fascia di piano, ma nella realtà è variabile e dipende dalla pressione di confinamento del materiale e dallo sviluppo del danno.

Accanto a questo è risultata evidente la necessità di condurre prove sperimentali complete, per caratterizzare ogni aspetto del materiale, dal comportamento a compressione e a trazione, a tutti i moduli elastici necessari a svolgere, in un secondo tempo, una corretta analisi numerica. Oltre a questo, la necessità di seguire attentamente la realizzazione delle opere per non incorrere in difetti di costruzione e l'impiego di materiali di qualità per disporre di un composito per quanto possibile omogeneo sono apparsi aspetti importanti per far sì che un modello numerico non si discosti dalla realtà a causa di difetti realizzativi.

Per concludere, come detto in introduzione, un modello numerico deve soddisfare esigenze di accuratezza e di semplificazione, affinché non incorra in un eccessivo onere computazionale al momento dell'analisi numerica, ma ottenga al tempo stesso risultati prossimi al comportamento reale. Al termine di questo lavoro è stata suggerita una formulazione ortotropa che prenda in considerazione difetti e

imprecisioni osservate nei modelli di danno e plasticità isotropo e anisotropo, per rispondere in maniera più completa alle esigenze della muratura. È importante, tuttavia, sviluppare e implementare questo modello in modo da verificare se effettivamente risponde alle richieste di semplicità, ovvero se l'utilizzo di un parametro di dilatanza variabile non renda eccessivamente onerosa l'analisi. Sicuramente, invece, risponderà ad esigenze di accuratezza, in quanto è il risultato di osservazioni e deduzioni fatte esplicitamente per la muratura, senza dover passare per l'utilizzo di modelli destinati in origine ad altri materiali.

## BIBLIOGRAFIA

ABAQUS Theory Manual, Version 6.6, 2006

BERTO L., SAETTA A., SCOTTA R., VITALIANI R., *An orthotropic damage model for masonry structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, n. 55, 2002, pag. 127-157

BERTO L., SAETTA A., SCOTTA R., VITALIANI R., *Shear behaviour of masonry panel: parametric FE analyses*, International Journal of Solids and Structures, vol. 41, 2004, pag. 4383-4405

BINDA L., FONTANA, A. and FRIGERIO, G., *Mechanical behavior of brick masonries derived from unit and mortar characteristics*, in: Proc. 8th Int. Brick and Block Masonry Conf., eds. J.W. de Courcy, Elsevier Applied Science, London, UK, 1988, p. 205-216

BINDA L., SAISI A., *Research on historic structures in seismic areas in Italy*, Progress in Structural Engineering and Materials, 2005, pag. 71-85

CALDERINI C., *Un modello costitutivo per la muratura: formulazione ed implementazione per l'analisi di strutture complesse*, PhD thesis, Università degli Studi di Genova, 2004

CARPINTERI A., DAVINI C., LEMBO M., MARFIA S., *Modellazione del calcestruzzo fibrorinforzato*, PhD tesi, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", 2007

CICEKLI U., VOYIADJIS G.Z., ABU AL-RUB R.K., *A plasticity and anisotropic damage model for plain concrete*, International Journal of Plasticity, 23 (2007), 1874-1900

DAVOLI P., BERNASCONI A., FILIPPINI M., FOLETTI S., *Comportamento meccanico dei materiali*, McGraw Hill, maggio 2005

DEL PIERO G., *Le costruzioni in muratura*, Collana di Ingegneria Strutturale, n.2, CISM, Udine, 1984

DUDINE A., *Analisi sperimentale del comportamento sotto carichi ciclici delle fasce di piano in edifici storici a muratura portante*, tesi di laurea, relatore prof. ing. I. Clemente, correlatori prof. ing. L. Macorini, prof. ing. N. Gattesco, A.A. 2007/08

GANZ H.R., THÜRLIMANN B., *Shear Design of Masonry Walls*, Proceedings of a session held in conjunction with Structures Congress '85/ "New Analysis Techniques for Structural Masonry", ASCE/Chicago, 1985

HENDRY A.W., KHALAF F.M., *Masonry Wall Construction*, Spon Press, Londra, 2001

JANKOWIAK T., LODYGOWSKY T., *Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model*, Foundations of civil and environmental engineering, n° 6, Poznan, 2005

KHAN A.S., HUANG S., *Continuum Theory of Plasticity*, Wiley-Interscience, New York 1995

KOLARI K., *Damage mechanics model for brittle failure of transversely isotropic solids - Finite element implementation*, Dissertation for the Degree of Doctor of Science in Technology, VTT Publications, Helsinki 2007

- KRAJCINOVIC D., *Damage mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1996
- LEE J., FENVES G.L., *Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 124, n. 8, 1998, pag. 892-900
- LEMAITRE J., DESMORAT R., *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2005
- LOURENÇO P.B., *An orthotropic continuum model for the analysis of masonry structures*, TNO Building and Construction Research, Computational Mechanics, 1995
- LOURENÇO P.B., *Computational strategies for masonry structures*, report, Delft University Press, Delft, 1996
- LOURENÇO P.B., *A user/programmer guide for the micro-modelling of masonry structures*, report, TU Delft, The Netherlands, 1996
- LOURENÇO P.B., *Two aspects related to the analysis of masonry structures: size effect and parameter sensitivity*, TNO Building and Construction Research, Computational Mechanics, 1997
- LOURENÇO P.B., ROCA P., GONZALEZ J.L., OÑATE E., *Experimental and Numerical Issues in the Modelling of the Mechanical Behaviour of Masonry*, Structural Analysis of Historical Constructions II. Barcelona, 1998
- LOURENÇO P.B., *Simulations of size effect in masonry structures*, Proceeding FRAMCOS-3, Fracture Mechanics of Concrete Structures, 1998
- LOURENÇO P.B., *Sensitivity analysis of masonry structures*, Proceedings of the 8th Canadian Masonry Symposium, Jasper, Canada, p. 563-574, 1998
- LOURENÇO P.B., ROTS J.G., *Possibilities of Modeling Masonry as a Composite Softening Material: Interface Modeling and Anisotropic Continuum Modeling*, Proceedings of the 12th Engineering Mechanics Conference, ASCE, San Diego, U.S., p. 56-61, 1998
- LOURENÇO P.B., ROTS J.G., BLAAUWENDRAAD J., *Continuum Model for Masonry: Parameter Estimation and Validation*, Journal of Structural Engineering, vol. 124, n.6, 1998, p. 642-652
- LOURENÇO P.B., *Computations of historic masonry constructions*, Progress in Structural Engineering and Materials 4(3), 2002, p.301-319
- LUBLINER J., OLIVER J., OLLER S., OÑATE E., *A plastic-damage model for concrete*, Journal of Solids Structures, vol. 25, n.3, pag. 299-326, 1989
- LUCIANO R., SACCO E., *Un modello did anno per le murature*, Convegno IGF XIII, Cassino, maggio 1997
- MARTIN J.B., NAPPI A., *Internal variable formulation for perfectly plastic and linear hardening relations in plasticity*, European Journal of Mechanics ,A/Solids, vol. 9, n. 2, 1990, p. 107-131
- MCKENZIE W.M.C., *Design of Structural Masonry*, Palgrave Macmillan, New York, 2001
- NAPPI A., TIN-LOI F., *Numerical model for masonry implemented in the framework of a discrete formulation*, Structural Engineering and Mechanics, v. 11, n.2, 2001, p. 171-184



NAPPI A., *Internal variable approach for elastic plastic analysis in the presence of damage*, Proceedings of the International Conference on Mechanical Behaviour of Materials, p. 45, 1992

NAPPI, A., *System identification for yield limits and hardening moduli in discrete elastic-plastic structures by nonlinear programming*, Applied Mathematical Modelling, vol. 6, n. 6, 1982, p. 441-448

PAPA E., NAPPI A., *Numerical modelling of masonry: A material model accounting for damage effects and plastic strains*, Applied Mathematical Modelling, vol. 21, n.6, 1997, p. 319-335

ROTS J.G., *Structural masonry: an experimental/numerical basis for practical design rules*, Civieltechnisch Centrum Uitvoering Research en Regelgeving, Netherlands

USHAKSARAEI R. AND PIETRUSZCZAK S., *Failure Criterion for Structural Masonry based on Critical Plane Approach*, Journal of Engineering Mechanics, 128(7), 2001, p.769-779

VAN ZIJL G., *Modeling Masonry Shear-Compression: Role of Dilatancy Highlighted*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n.11, 2004, pag. 1289-1296.

VOYIADJIS G.Z., TAQIEDDIN Z.N., KATTAN P.I., *Anisotropic damage-plasticity model for concrete*, International Journal of Plasticity 24 (2008), pagg. 1946-1965

WAWRZYNEK A., CINCIO A., *Plastic-damage macro-model for non-linear masonry structures subjected to cyclic or dynamic loads*, Proceedings of Conference

## SITI INTERNET

<http://www.kaemart.it/lab-prog-cad/lecco/colombo/materiale/lezioni05-06/L08-Simulazione-parte2.pdf>

<http://www.supercivilcd.com/FRICTION.htm>

<http://www.tecnocentro.it/ita/tabellapispec.htm#generica>