MatematicaMente
Dal passato al presente della didattica della matematica[1]

VERENA ZUDINI
Nucleo di Ricerca Didattica
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
vzudini@units.it

SUNTO

Nel contributo si proporrà un percorso ideale dal passato al presente*, che dalla figura del matematico Felix Klein porterà all'attuale teoria della matematica* embodied *elaborata dallo scienziato cognitivo Rafael Núñez (insieme al linguista George Lakoff). Si mostrerà come un'analisi condotta in una prospettiva storica si riveli importante per una migliore comprensione del presente della didattica della matematica, per aiutare a guardare con occhi più attenti all'interazione dinamica fra teorie e modelli diversi che caratterizza lo stato attuale della disciplina e a capire soprattutto in quali direzioni può essere utile orientarne la ricerca futura.*

PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; STORIA DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA / HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION; SCIENZE COGNITIVE / COGNITIVE SCIENCE; MATEMATICA *EMBODIED* / EMBODIED MATHEMATICS.

1. INTRODUZIONE

Perché studiare la storia della didattica della matematica? Questo interrogativo può essere naturalmente esteso alla considerazione dell'importanza di uno studio della storia in generale. Una risposta è già stata data più di duemila anni fa da un'illustre figura della cultura classica latina, Cicerone, che nel dialogo *De Oratore* (II, 9, 36)

[1] Il contributo riprende i temi trattati in un intervento tenuto dall'autrice in occasione della II edizione della Giornata di formazione per insegnanti di matematica di ogni ordine e grado *"La matematica dei ragazzi". Riflessioni metodologiche e didattica disciplinare* (Università di Trieste, 11 aprile 2014), organizzata al Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica del Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste, nell'ambito delle attività del Piano nazionale Lauree Scientifiche - Progetto "Matematica e Statistica".

attribuisce alla storia il ruolo di “testimone dei tempi, luce della verità, vita della memoria, maestra di vita”. In quest’ottica, che potrebbe apparire oggi naïve[2] e alquanto ottimistica, la storia rappresenterebbe un importante strumento che l’uomo ha a disposizione nella sua esistenza per imparare dalle esperienze pregresse e quindi trarne insegnamento, onde evitare di compiere errori già commessi da altri. La storia acquisirebbe il ruolo di uno strumento critico in grado di guidarci nel continuo riesame di soluzioni fornite in passato a problemi che in qualche modo ritornano, in una sorta di ciclicità degli eventi, che, al di là di un apparente diverso aspetto esteriore, conserverebbero un’essenza immutabile, che la storia stessa ci aiuterebbe a (ri)scoprire.

Ferme restando le critiche che si possono muovere a una posizione di questo tipo, e nello specifico alla concezione che il passato si ripresenti in qualche misura uguale nel presente (e nel futuro)[3], è innegabile l’importanza che la storia ha nel darci la consapevolezza delle nostre origini e del cammino da noi compiuto come esseri individuali e, più in generale, come umanità nel corso del tempo, utile per guidarci nella nostra vita futura. Ciò è vero nello specifico per la storia di una disciplina, e quindi anche della didattica della matematica, dove tale consapevolezza è fondamentale per orientarne gli sviluppi.

2. La storia della didattica della matematica

Va subito precisato che per *storia della didattica della matematica* si intende l’esame non solo di come i programmi di insegnamento della matematica si siano modificati nel corso del tempo nei diversi livelli scolari, ma anche di come, spesso, i metodi di insegnamento della disciplina si siano evoluti in funzione di specifiche teorie psicologico-pedagogiche. Come si è mostrato in un contributo pubblicato sulla presente rivista[4], uno studio delle interazioni tra matematica e scienze cognitive,

[2] Cfr. Karp 2014, p. 10.
[3] Cfr. Luccio 2000, p. 5.
[4] Zuccheri, Zudini 2012.

condotto in una prospettiva storica, si rivela importante per una migliore comprensione del presente della didattica della matematica.

L'evidenziazione delle connessioni fra metodi e teorie, rimarchevole già di per sé, assume un particolare rilievo qualora se ne considerino le possibili ricadute ai fini del miglioramento dell'odierna didattica della matematica. Gli studi condotti in tale ottica possono essere infatti utilizzati proficuamente nel campo della formazione degli insegnanti di matematica di ogni ordine e grado: promuovere, attraverso la riflessione storica, un confronto fra le metodologie adottate in passato e quelle attuali favorisce lo sviluppo delle capacità critiche, e aiuta così a guardare con occhi attenti all'interazione dinamica fra teorie e modelli diversi che caratterizza lo stato attuale della disciplina e a comprendere soprattutto in quali direzioni può essere utile orientarne la ricerca futura.

La didattica della matematica non è (e non è stata) avulsa dal contesto storico e socio-culturale in cui si articola e sviluppa; ne è influenzata a diverso livello (politico ed economico, filosofico e religioso) e risponde a bisogni ed esigenze che esso manifesta: ciò premesso, la storia della didattica della matematica deve porsi l'obiettivo - non facile, va detto - di ricostruire l'evoluzione della disciplina, all'interno della cultura umana in generale, della storia delle idee, della storia delle scienze. Conoscere una disciplina significa, infatti, capire i rapporti che essa intrattiene con il mondo scientifico, con la cultura e con la società[5].

La storia della didattica della matematica si pone altresì l'obiettivo di comprendere come si siano determinati storicamente i concetti che vengono utilizzati dalla disciplina e quale sia il modo appropriato di usarne il lessico[6]: vari sono i casi di

[5] Qui va ricordata l'inveterata discussione che, nella storia della scienza, contrappone chi, da un lato, ritiene che la storia di una disciplina non debba occuparsi di quanto avviene al di fuori del campo scientifico propriamente detto (facendosi paladino della concezione della "storia interna") e chi, dall'altro lato, sostiene che la storia di una disciplina debba trattare solo di ciò che accade al di fuori del campo scientifico propriamente detto (difendendo la concezione della "storia esterna").

[6] La distinzione che usualmente si fa in storia della scienza contrappone il lessico comune al lessico scientifico propriamente detto. Si può facilmente constatare, sfogliando, ad esempio, un dizionario della lingua italiana, quante siano le parole del lessico comune (quotidiano) che hanno sfumature scientifiche. Rispetto al lessico comune, quello scientifico ha il compito di eliminare le ambiguità legate all'impiego dei termini, spiegandone meglio il significato,

termini specifici, che, usati nel passato, sono impiegati oggi con un significato che è evoluto e cambiato nel tempo, e possono essere comunque intesi in modo differente da persone diverse (ad esempio, il *problem solving*)[7]. Si deve acquisire la consapevolezza del fatto che, in molte situazioni, ci si trova di fronte a "oggetti" essenzialmente polivalenti, che, come vedremo nel seguito del contributo, si prestano a essere conosciuti e definiti in modi diversi (e spesso incompatibili tra loro).

La consapevolezza storica permette, del resto, una corretta contestualizzazione: ciò è fondamentale per capire come certi modelli didattici, oggi considerati superati o erronei, abbiano avuto in passato un senso e una utilità, e per aprire così la via a una loro possibile rivalutazione e a un loro recupero nel presente. D'altra parte, la consapevolezza storica permette di comprendere come altri modelli, proposti oggi come moderni o all'avanguardia, affondino le loro radici nel passato, che viene quindi riconosciuto quale germe di idee e concezioni attuali e quale chiave fondamentale di comprensione del presente.

La storia della didattica della matematica può essere quindi esaminata da diverse "angolazioni": da un lato, come specifico ambito scientifico relativamente "giovane" che, nel darsi uno statuto epistemologico (definizione di oggetti di indagine e scelta delle metodologie di ricerca) e nel demarcare i propri confini, è stata (ed è) "obbligata" a farlo in riferimento ad altre scienze; dall'altro lato, nel suo sviluppo, nelle diverse realtà temporali, geografiche e culturali; o ancora, nello studio di particolari argomenti e metodologie di insegnamento oppure di tematiche che risultano trasversali e cross-culturali, comuni a Paesi diversi, quali l'emergere della necessità di una cooperazione a livello internazionale, la questione dell'introduzione della tecnologia o la problematica della formazione degli insegnanti[8].

---

operando, in certi casi, una riduzione e, talvolta, anche creando termini nuovi che siano univoci. I criteri nella scelta dei termini da utilizzare in un approccio di tipo scientifico possono essere, in generale, più o meno severi a seconda dei diversi orientamenti e ambiti di ricerca.

[7] Cfr. KARP 2014, p. 18.

[8] Con questo spirito e con gli obiettivi sopra delineati è stato di recente pubblicato il primo manuale internazionale di storia della didattica della matematica (KARP, SCHUBRING 2014), che intende essere un supporto sistematico e

Si può quindi pensare di seguire lo sviluppo della disciplina attraverso un percorso incentrato su uno dei suoi concetti essenziali: nello specifico, si è qui deciso di considerare come concetto di riferimento quello di *funzione*, di cui verrà illustrata nei prossimi paragrafi la concezione data, rispettivamente, dal matematico Felix Klein (1849-1925) e dallo scienziato cognitivo Rafael Núñez (a noi contemporaneo). Alla fine del percorso si comprenderà altresì il senso del titolo proposto per il presente contributo: *MatematicaMente*.

3. KLEIN, LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA E IL CONCETTO DI FUNZIONE

Matematico tedesco, professore all'Università di Gottinga, Klein è celebre come autore del *Programma di Erlangen* (1872), dove veniva data una visione unificatrice della geometria, resasi necessaria in seguito allo sviluppo delle geometrie non euclidee e all'interesse per la geometria proiettiva. Tale visione unificatrice (e organizzazione sistematica) della geometria si basava sul concetto di *gruppo*, che fu introdotto per primo dal francese Évariste Galois (1811-1832) e studiato in seguito dal norvegese Sophus Lie (1842-1899) (anche in collaborazione con lo stesso Klein). Per quanto concerne la didattica della matematica, Klein fu il promotore di un'importante riforma nell'insegnamento della matematica prima a livello nazionale, in Germania[9], quindi attraverso una Commissione internazionale per lo studio dei problemi dell'insegnamento (denominata in origine in francese *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique*, CIEM, e in tedesco *Internationale Mathematische Unterrichtskommission*, IMUK; chiamata in seguito in inglese *International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI). Tale Commissione fu fondata a Roma, al IV Congresso internazionale dei matematici (1908), e Klein ne fu il primo Presidente.

---

comprensivo nello studio della disciplina, principalmente per storici della didattica disciplinare, ma anche per storici della didattica generale e delle scienze sociali e culturali.

[9] Lo studio e l'approfondimento dei problemi dell'insegnamento trovarono nel mondo culturale tedesco di fine XIX-inizio XX secolo, e in particolare a Gottinga, terreno fertile nell'ambito di una tradizione che era stata sviluppata dal filosofo e pedagogista Johann Friedrich Herbart (1776-1841). Cfr. ZUDINI 2009.

La visione di Klein sul metodo di insegnamento della matematica nasceva dalla considerazione che, dal punto di vista storico, la matematica si era sviluppata secondo due principali direttive:
- l'una (*A*) tendente a una sistemazione cristallizzata, logica e chiusa in sé di ogni singolo settore matematico;
- l'altra (*B*) mirante a una sistemazione organica del sapere matematico come un tutt'uno[10].

Klein includeva nella prima tendenza (*A*) tutti i lavori di sistemazione rigorosa delle discipline, come gli *Elementi* di Euclide o i lavori di fondazione dell'analisi infinitesimale del XIX secolo. La seconda tendenza (*B*) era stata invece seguita soprattutto dai fondatori dell'analisi infinitesimale nel XVII secolo, anche se a essa non era estraneo neppure il pensiero degli antichi Greci, come testimoniato dalla recente scoperta (all'epoca) del trattato di Archimede *Metodo sui teoremi meccanici.*

Nell'opinione di Klein, la seconda tendenza risultava quella più produttiva per lo sviluppo della matematica, ed egli la proponeva a modello anche per l'insegnamento della stessa, in contrapposizione con quanto era stato fatto fino ad allora.

Klein sottolineava l'importanza a tutti i livelli scolari, anche dal punto di vista pedagogico, di insegnare le applicazioni per far meglio comprendere i concetti matematici, e, soprattutto, vedeva nel concetto di funzione un concetto chiave - chiave di volta di tutto l'impianto innovativo portato avanti dai "riformatori" - che aveva giocato un ruolo fondamentale nella matematica dei due secoli precedenti[11].

---

[10] Cfr. KLEIN 1924[3], pp. 82 ss. A completamento della trattazione, va detto che Klein riportava anche una terza direttiva di sviluppo (*C*), che era considerata, comunque, minore ed era rappresentata dal pensiero algoritmico.

[11] In effetti, il concetto di funzione costituisce la caratteristica principale che distingue la matematica moderna da quella dell'antichità; è un concetto chiave nel calcolo infinitesimale moderno, e il suo utilizzo rappresenta una sorta di "rivoluzione copernicana" in matematica. Lo sviluppo di tale concetto seguiva un'altra "rivoluzione" matematica prodotta dalla definizione delle curve attraverso equazioni algebriche invece che attraverso una particolare proprietà (cfr. SCHUBRING 2007; ZUCCHERI, ZUDINI 2014).

Egli riteneva che tale concetto dovesse essere introdotto nell'insegnamento in maniera precoce, a cominciare da un continuo utilizzo del metodo grafico per la rappresentazione della dipendenza funzionale nel piano cartesiano, che ormai veniva usato in tutte le applicazioni pratiche. Ciò era importante per collegarsi alla cultura "moderna" dell'epoca.

Allo stesso modo, Klein riteneva utile introdurre le prime nozioni di calcolo infinitesimale, che veniva utilizzato nelle applicazioni alle scienze della natura e ai problemi in ambito assicurativo.

Il concetto di funzione doveva attraversare come un "fermento" tutto l'insegnamento della matematica a livello di scuola secondaria, ma andava però insegnato in una delle due concezioni espresse da Eulero[12], assolutamente non attraverso definizioni formali come quella basata sulla teoria degli insiemi di Cantor, e con numerosi esempi elementari, iniziando già nella scuola secondaria inferiore con semplici rappresentazioni grafiche su carta millimetrata di funzioni del tipo $y = ax + b$ e $y = x^2$.

Le conoscenze così maturate a livello inferiore, nate da esempi concreti, avrebbero portato gli allievi, in maniera naturale, all'acquisizione, nel livello superiore, dei primi fondamenti del calcolo differenziale e integrale. In questo modo gli studenti avrebbero compreso senza "misconcezioni mistiche" i concetti del calcolo infinitesimale (ad esempio, quelli di infinito e di infinitesimo)[13].

[12] Le due definizioni di funzione riportate da Klein e da questi attribuite a Eulero sono le seguenti: la prima in base alla quale "funzione y di x" era ogni espressione analitica in x (intendendo con ciò ogni espressione contenente potenze, logaritmi, funzioni trigonometriche ecc. nella variabile x); la seconda nella quale si chiamava "funzione" una qualunque curva disegnata "libero manus ductu" ("a mano libera") nel piano cartesiano (x,y) (KLEIN 1924[3], p. 216).

[13] In ZUCCHERI, ZUDINI 2008 è analizzato un metodo didattico che, seguendo le indicazioni date da Klein e facendo riferimento alla teoria della conoscenza sviluppata dal fisico e filosofo austriaco Ernst Mach (1838-1916) su basi biologiche, venne applicato nell'insegnamento della matematica in Austria agli inizi del Novecento. Il metodo, denominato dalle autrici "metodo Jacob" dal nome di colui che lo propose, Josef Jacob (1859-1918), fu da lui illustrato in un testo, in cui si procede offrendo esempi didattici molto precisi e spiegando agli insegnanti, in modo chiaro e pratico, come introdurre i diversi argomenti. Nel caso dell'insegnamento del calcolo infinitesimale, il modo più naturale per trattare la materia a livello di scuola secondaria è, secondo Jacob, quello di basare la spiegazione su un concetto meramente intuitivo di limite e di richiamare alla mente degli allievi l'operazione pratica della misurazione della pendenza di una strada, da "trasferire" poi al caso di una funzione e del suo grafico. Cfr. anche ZUCCHERI, ZUDINI 2007.

4. La teoria della matematica *embodied* di Núñez

Psicologo cileno-svizzero, professore all'Università di San Diego (presso il Dipartimento di Scienze Cognitive), Núñez è autore, insieme al linguista cognitivo statunitense George Lakoff, del libro *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*[14], dove si presenta un nuovo modello teorico per la comprensione della natura umana della matematica e dei suoi fondamenti, che ha come sfondo di riferimento l'*embodied cognition*[15]. Nella concezione dell'*embodied cognition*, i processi cognitivi sono intesi non come espressione di una mente astratta e meramente computazionale, ma basati sulla nostra fisicità di esseri umani, dotati non solo di un cervello, ma anche di un corpo, esseri "incarnati" le cui idee ricevono forma dalle esperienze corporee, attraverso il radicamento dell'intero sistema concettuale nella vita quotidiana.

Il modello trova precise applicazioni anche al campo della matematica, nella "teoria della matematica *embodied*" proposta da Núñez e Lakoff[16].

In quanto teoria empirica sulla mente *embodied*, nel suo ambito di ricerca essa fa uso dell'apparato e dei metodi della scienza cognitiva *embodied*; in particolare, pone alla base della conoscenza matematica non assiomi e dimostrazioni, ma schemi-immagine, *frame* semantici, metafore concettuali, tutti elementi di utilizzo usuale nella scienza cognitiva. Si apre così la strada a una scienza cognitiva della matematica, intesa come disciplina che studia i meccanismi cognitivi usati nella creazione e nella concettualizzazione umane della matematica. Una matematica quindi come creazione umana, biologicamente fondata.

---

[14] Lakoff, Núñez 2000.

[15] Il termine è riportato nella dicitura in lingua inglese usuale nelle scienze cognitive; una traduzione in lingua italiana potrebbe essere "cognizione incorporata", "cognizione incarnata". Va aggiunto che, nell'ambito delle sue attività di ricerca, Núñez è Direttore, presso l'Università di San Diego, di un Laboratorio sull'*embodied cognition* (*Embodied Cognition Laboratory*). Sullo sfondo di riferimento dell'*embodied cognition*, programma di ricerca "esploso" nelle scienze cognitive alla fine del Novecento, si vedano Shapiro 2011 e Varela, Thompson, Rosch 1991.

[16] Cfr., oltre al già citato Lakoff, Núñez 2000, anche Núñez, Edwards, Matos 1999.

Nel seguito ci soffermeremo su definizione ed esempi di applicazione di *frame* semantici e di metafore concettuali, in quanto fondamentali in matematica, e in particolare nella trattazione del concetto di funzione secondo la teoria della matematica *embodied*[17].

4.1 I *FRAME* SEMANTICI

I *frame* semantici[18] rappresentano delle schematizzazioni di situazioni, di stati o di eventi; essi schematizzano le conoscenze con il supporto di unità lessicali che richiamano la situazione, lo stato, l'evento. Alcuni esempi possono essere illustrativi di quanto appena detto: si pensi all'operazione di voto o all'acquisto di un prodotto. Nel caso di votazioni, nei vari Paesi si può esercitare il proprio diritto di voto in diversi modi: andare al seggio, mostrare un documento d'identità, ritirare la scheda, segnarla e inserirla nell'urna; oppure richiedere l'invio della scheda per posta, compilarla a casa e rispedirla; oppure, ancora, effettuare l'operazione per via elettronica (secondo le modalità prestabilite). Quando si decide di acquistare un prodotto, si può andare (fisicamente) in un negozio, guardare la merce esposta, scegliere e comprare un determinato articolo; oppure usare un catalogo per posta o in rete e inviare il proprio ordine per telefono, per posta o attraverso la rete.

Dal punto di vista cognitivo, la familiarità che ciascuno di noi ha con i processi che raggiungono lo stesso obiettivo (negli esempi considerati, il voto o l'acquisto di un prodotto) si può rappresentare in un *frame* concettuale, nella teoria della semantica dei *frame*[19].

---

[17] Per quanto concerne gli schemi-immagine, a completamento della discussione dell'argomento, va detto che essi risultano fondamentali nella scienza cognitiva *embodied* per "rendere" le relazioni spaziali, quali, ad esempio, quelle relative ai concetti di *dentro* e di *fuori*. Come può essere abbastanza intuitivo da comprendere, *dentro* fa riferimento alla seguente struttura: uno schema *Contenitore*, con un *Interno* ben "delineato" rispetto a un *Confine* e a un *Esterno*. Gli schemi *Contenitore* sono le strutture cognitive che, in quest'ottica, permettono di dare un senso, ad esempio, ai diagrammi di Venn. Va aggiunto che, in generale, gli schemi-immagine hanno una funzione cognitiva che si può definire duplice: sono, per loro natura, sia percettivi che concettuali; essi sono, in effetti, una sorta di ponte, da un lato, tra linguaggio e visione e, dall'altro lato, tra linguaggio e ragionamento: vengono utilizzati non solo nella percezione e nell'immaginazione, ma anche nella concettualizzazione, come quando, ad esempio, si concettualizzano le api che sciamano nel giardino (dove non c'è un contenitore fisico in cui si trovino le api). Cfr. LAKOFF, NÚÑEZ 2000, tr. it., p. 62.

[18] *Frame* è un termine tecnico che, di norma, si utilizza nella dicitura in lingua inglese, senza traduzione, con il significato di quadro di riferimento dotato di struttura.

[19] La teoria della semantica dei *frame* è stata elaborata da Charles J. Fillmore (1919-2014), linguista statunitense, che ha avuto grande influenza sugli studi di sintassi e semantica lessicale. Collaboratore anche di Lakoff, si è occupato di un

Si parla quindi di *frame con risultato equivalente* (ERF), che comprendono:
- un risultato desiderato;
- azioni ed entità essenziali;
- una lista di modi alternativi per svolgere le azioni con le entità, al fine di raggiungere il risultato desiderato.

Nell'ambito della teoria della matematica *embodied*, si formula, ad esempio[20], la proprietà associativa dell'operazione di "aggiungere" definita sulle *collezioni di oggetti* nei termini del seguente *frame*:

ERF ASSOCIATIVO PER LE COLLEZIONI

Risultato desiderato:	*Una collezione N*
Entità:	*Collezioni A, B e C*
Operazioni:	*"aggiungere a"*
Alternative equivalenti:	*A aggiunta al[la collezione risultante dall'aggiungere B a C] produce N* oppure *[la collezione risultante dall'aggiungere A a B] aggiunta a C produce N*

4.2 Le metafore concettuali

In generale, noi esseri umani concettualizziamo i concetti astratti in termini concreti, sulla base di idee e modelli di ragionamento fondati sul nostro sistema senso-motorio.

Il meccanismo per cui l'astratto è compreso in termini del concreto viene chiamato *metafora concettuale*[21].

---

programma di ricerca (*Framenet*) che si poneva come obiettivo la descrizione on-line del lessico inglese, ispirando progetti paralleli anche in altre lingue (fra cui spagnolo, tedesco e giapponese).

[20] Cfr. Lakoff, Núñez 2000, tr. it., p. 124.

[21] Si vedano, per approfondimento, Lakoff, Johnson 1999, 2003².

La metafora non è solo un fenomeno linguistico, una figura retorica, ma è un meccanismo cognitivo che appartiene al mondo del pensiero quotidiano (in generale, inconscio, naturale e automatico, nella nostra esperienza comune) e che permette di ragionare su un tipo di cose *come se* fosse un altro. Ad esempio, si concettualizzano (nel contesto di quello che si chiama, nella teoria *embodied*, fenomeno della *fusione*) l'importanza in termini di grandezza, la somiglianza in termini di vicinanza fisica, la difficoltà come peso/fardello, la struttura organizzativa in termini di struttura fisica, l'affetto e l'emotività come calore fisico. Anche in matematica si fa uso di metafore concettuali quando, ad esempio, concettualizziamo i numeri come punti su una retta[22].

La metafora concettuale ha, altresì, un significato tecnico: in quanto mappa fondata che preserva le inferenze tra domini concettuali, è un meccanismo neurale che permette di utilizzare la struttura inferenziale di un dominio (ad esempio, la geometria) per ragionare su un altro dominio (ad esempio, l'aritmetica); essa rende così possibile applicare ciò che si conosce su una branca del sapere per ragionare su un'altra branca.

Nella teoria della matematica *embodied*, l'esempio sopra illustrato dell'*ERF associativo per le collezioni* viene riformulato sulla base della metafora "*L'ARITMETICA È COLLEZIONE DI OGGETTI*". L'ERF che abbiamo considerato viene mandato nell'ERF corrispondente per l'aritmetica:

	ERF ASSOCIATIVO PER L'ARITMETICA
Risultato desiderato:	*Un numero N*
Entità:	*Numeri A, B e C*
Operazioni:	"+"

[22] Le metafore concettuali rendono la matematica molto ricca, ma possono determinare apparenti paradossi, se non sono chiarite oppure sono considerate come verità in senso letterale. Ad esempio, *come deve essere inteso lo zero*? *Lo zero è un punto su una retta*? *Oppure è un insieme vuoto*? *O entrambe le cose*? *O ancora, lo zero è solo un numero, non un punto, né un insieme*? Non esiste un'unica risposta a questa domanda: ciascuna possibile risposta presuppone la scelta di una metafora, e, a sua volta, ogni scelta di una metafora produce inferenze diverse e definisce un oggetto di studio diverso. Cfr. LAKOFF, NÚÑEZ 2000, tr. it., p. 30.

Alternative equivalenti: $A + (B + C) = N$

oppure

$(A + B) + C = N$

4.3. IL CONCETTO DI FUNZIONE

Passiamo dall'aritmetica di base alla "matematica più sofisticata"[23] e consideriamo qui il concetto di funzione.

Nella visione "tradizionale" e in qualche modo elementare, una funzione è una legge che, dato un determinato valore di input x, restituisce un unico valore di output y:

$$\begin{array}{ccc} \textit{INPUT} & \longrightarrow & \textit{OUTPUT} \\ x & & y \end{array}$$

e la legge viene caratterizzata in termini concettuali.

Nella teoria della matematica *embodied*, si propone di introdurre il concetto di funzione dandone un'interpretazione "cognitiva", utilizzando diverse metafore concettuali. Come primo esempio, si consideri la metafora "*UNA FUNZIONE È UN INSIEME DI COPPIE ORDINATE*": se si riconcettualizzano le funzioni in termini insiemistici attraverso tale metafora, la funzione *diventa* l'insieme delle coppie ordinate, e non *è* più "la legge"[24].

Un'altra metafora che viene applicata è la seguente: "*UNA FUNZIONE MATEMATICA È UNA CURVA NEL PIANO CARTESIANO*".

Si può osservare che con quest'ultimo esempio ci ricolleghiamo a quanto sostenuto da Klein, nel contesto delle indicazioni da lui date, nel secolo scorso, per l'insegnamento del concetto di funzione a livello di scuola secondaria, in

---

[23] LAKOFF, NÚÑEZ 2000, tr. it., p. 143.

[24] Si può considerare (LAKOFF, NÚÑEZ 2000, tr. it., pp. 534-536) una scoperta della matematica il fatto che due funzioni abbastanza diverse, nel senso della "legge", determinino lo stesso insieme di coppie ordinate, e quindi siano la stessa funzione, nel senso metaforico di "insieme di coppie ordinate". Un esempio è $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, dove il simbolo "=" ha un significato preciso, basato sulla metafora suddetta, ossia quello di indicare che le due leggi di corrispondenza, al secondo e al primo membro dell'uguaglianza, diverse da un punto di vista concettuale, hanno lo stesso referente, ossia lo stesso insieme di coppie ordinate.

particolare a una delle due definizioni attribuite a Eulero, da utilizzare nell'introduzione del concetto stesso[25]. E qui il cerchio del nostro discorso, *dal passato al presente*, si chiude.

5. Considerazioni conclusive

Si è visto come il concetto di funzione possa essere diversamente introdotto secondo un'interpretazione più "tradizionale" come "legge" e secondo un'interpretazione più "cognitiva", nella teoria della matematica *embodied*, sulla base di diverse metafore concettuali, come "insieme di coppie ordinate" e come "curva nel piano cartesiano". L'illustrazione delle teorie proposte ci ha portato da Klein - figura fondamentale nell'ambito della didattica della matematica fra Ottocento e Novecento e sostenitore di una matematica "moderna", legata al mondo quotidiano delle applicazioni -, attraverso la concezione dell'*embodied cognition*, a uno degli aspetti del presente della didattica della matematica, rappresentato dalla posizione di Núñez: una matematica intesa come creazione umana, biologicamente fondata, che si può fare con cervello e mente. Si spiega così il senso del titolo dato al presente contributo: *MatematicaMente*, un composto pensato *ad hoc*, in cui si fondono *Matematica* e *Mente*, a voler sottolineare il ruolo che, in quest'ultima teoria, la mente *embodied* (incarnata/incorporata) ricopre nei processi cognitivi umani, nell'elaborazione dei concetti, nello specifico matematici[26].

Va detto che tale modo di concepire i processi cognitivi ha avuto un notevole impatto sul mondo della ricerca scientifica, in particolare sulla didattica della matematica, suscitando pareri favorevoli, ma anche critiche[27]. I due aspetti principali su cui ci si è concentrati sono quello linguistico, da un lato, e quello neuroscientifico, dall'altro. Nel primo aspetto, come abbiamo visto nell'opera di Lakoff e Núñez, è

[25] Cfr. nota 12 del presente contributo.
[26] In questa concezione riecheggia l'idea dell'importanza dell'attività corporea, muscolare nel processo di creazione e sviluppo dei concetti derivata dalla teoria di Ernst Mach e propugnata nel "metodo Jacob" (cfr. nota 13 del presente contributo).
[27] Cfr. Arzarello, Robutti 2008.

fondamentale il ruolo della metafora concettuale, che è stata prestata alla matematica dalla linguistica. Il secondo aspetto, solo sfiorato dalla trattazione di Lakoff e Núñez, chiama in causa la natura multimodale dei processi cognitivi[28], che riguarda l'ambito neurale, ma anche - ed è quello che a noi in questo contesto interessa - l'ambito educativo. L'idea che è stata proposta è quella di ampliare la prospettiva *embodied* e di integrare i due aspetti in uno schema unitario, in cui si consideri come "ingrediente" anche il ruolo che la cultura riveste nell'educazione (attraverso i segni e gli artefatti, tradizionali o tecnologici)[29]. Lo schema, chiamato *spazio APC* (acronimo di *azione*, *produzione*, *comunicazione*), vuole essere un modello per le situazioni di apprendimento della matematica in classe, nelle sue caratteristiche biologiche, culturali e istituzionali; un modello più completo e sistemico che descriva la dinamica concreta dei processi di apprendimento (attività degli studenti, mediazione dell'insegnante, uso degli artefatti)[30].

BIBLIOGRAFIA

ARZARELLO F., ROBUTTI O.
2008, *Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm*, in ENGLISH L. D. (a cura di), «Handbook of International Research in Mathematics Education», 2. Edizione, New York - London, Routledge, pp. 716-745.

GALLESE V., LAKOFF G.
2005, *The brain's concept: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge*, «Cognitive Neuropsychology», 22(3-4), pp. 455-479.

KARP A.
2014, *The history of mathematics education: Developing a research methodology*, in KARP A., SCHUBRING G. (a cura di), «Handbook on the history of mathematics education», New York - Heidelberg - Dordrecht - London, Springer, pp. 9-24.

KARP A., SCHUBRING G. (A CURA DI)
2014, *Handbook on the history of mathematics education*, New York - Heidelberg - Dordrecht - London, Springer.

[28] Cfr. GALLESE, LAKOFF 2005.
[29] Cfr. ARZARELLO, ROBUTTI 2008.
[30] Le lettere *A*, *P*, *C* richiamano gli aspetti connessi alle diverse componenti dei processi e alle loro interrelazioni: quelli di azione e interazione degli studenti (fra di loro, con l'insegnante, con gli strumenti), quelli di produzione (risposta a una domanda, proposta di altri quesiti, formulazione di una congettura, introduzione di un nuovo segno, ecc.) e quelli di comunicazione (comunicazione della soluzione scoperta a un compagno, all'insegnante, in forma orale o scritta, ecc.).

KLEIN F.
1924[3], *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I. Band. Arithmetik - Algebra - Analysis*, Berlin, Springer (1. Edizione 1908).

LAKOFF G., JOHNSON M.
1999, *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to western thought*, New York, Basic Books.
2003[2], *Metaphors we live by*, Chicago - London, The University of Chicago Press. Traduzione italiana *Metafora e vita quotidiana*, Milano, Bompiani, 2004.

LAKOFF G., NÚÑEZ R. E.
2000, *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*, New York, Basic Books. Traduzione italiana *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Torino, Bollati Boringhieri, 2005.

LUCCIO R.
2000, *La psicologia: un profilo storico*, Roma-Bari, Laterza.

NÚÑEZ R. E., EDWARDS L. D., MATOS J. F.
1999, *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education*, «Educational Studies in Mathematics», 39, pp. 45-65.

SCHUBRING G.
2007, *Der Aufbruch zum „funktionalen Denken": Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich*, «N. T. M.», 15, pp. 1-17.

SHAPIRO L.
2011, *Embodied cognition*, London - New York, Routledge.

VARELA F. J., THOMPSON E., ROSCH E.
1991, *The embodied mind*, Cambridge - London, MIT Press.

ZUCCHERI L., ZUDINI V.
2007, *On the influence of cognitive theories in the teaching of calculus in Austrian secondary schools at the beginning of the 20th century*, «Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste», 39, pp. 347-357.
2008, *The "Jacob Method": An example of application of cognitive theories in the period of the introduction of calculus in Austrian secondary mathematics instruction*, «The International Journal for the History of Mathematics Education», 3(2), pp. 57-64.
2012, *Didattica della matematica nell'Impero asburgico e nel Regno d'Italia all'inizio del XX secolo: un confronto*, «QuaderniCIRD», 4, pp. 6-19.
2014, *History of teaching calculus*, in KARP A., SCHUBRING G. (a cura di), «Handbook on the history of mathematics education», New York - Heidelberg - Dordrecht - London, Springer, pp. 493-513.

ZUDINI V.
2009, *Psicologia & matematica nell'opera di Johann Friedrich Herbart*, «Teorie & Modelli», 14(2), 91-103.