

Mettiamoci in gioco

ELISABETTA MATASSI
Liceo Scientifico “E. L. Martin”
Latisana (UD)
betta.mat@alice.it

EMMA CURCI
Liceo Scientifico “E. L. Martin”
Latisana (UD)
emma.curci@libero.it

SUNTO

Il laboratorio qui descritto introduce gli elementi fondamentali della teoria dei giochi e delle decisioni attraverso lo studio di alcuni tra i più interessanti giochi d'ingegno (tra questi: Le Torri di Hanoi, Burr esagonale, Quattro in riga, Labirinto tridimensionale). Iniziando dall'osservazione e dalla manipolazione di un modello tridimensionale in legno, gli allievi sono stati sollecitati a mettersi alla prova, giocando contro un avversario o contro se stessi. Partendo da una ricerca euristica delle soluzioni e delle più efficaci strategie di gioco, sono stati poi accompagnati nello studio delle caratteristiche, della storia e delle possibili soluzioni di ciascun rompicapo, fino ad approdare al concetto matematico su cui si fonda.

PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO / HIGH SECONDARY SCHOOL; TEORIA DEI GIOCHI / GAME THEORY.

1. INTRODUZIONE

“Mettiamoci in gioco” è il laboratorio con cui la Classe IV A del Liceo Scientifico “E. L. Martin” di Latisana ha partecipato all’ottava edizione della manifestazione “La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei”.

Il progetto è stato inserito nel Piano dell’Offerta Formativa dell’Istituto I.S.I.S. di Latisana per l’a. sc. 2010/2011 ed è stato finanziato attraverso un contributo regionale nell’ambito dei Bandi Regionali Annuali per la promozione e diffusione dell’educazione matematico-scientifico-informatica. Il progetto, della durata complessiva di 36 ore, si è svolto parte in orario curricolare, parte in orario extracurricolare per la difficoltà, ancor presente nel triennio del liceo scientifico non riformato, di conciliare,

con sole 3 ore settimanali, le esigenze di sviluppo del progetto con quelle di svolgimento dei programmi.

La finalità principale dell'intervento si colloca all'interno di una progettualità di più ampio respiro, volta al riconoscimento e alla promozione dell'educazione matematico-scientifica come prospettiva imprescindibile nella crescita e nella formazione dello studente. Gli aspetti peculiari del progetto sono individuabili nello scambio di esperienze didattiche e formative tra pari in contesti di apprendimento non formali, nella possibilità di confrontarsi con una didattica di progetto interdisciplinare, nonché nel sostegno e nella valorizzazione dell'eccellenza.

Lo spunto viene offerto dalla *teoria dei giochi e delle decisioni* a cui lo studente viene gradualmente introdotto attraverso lo studio di alcuni tra i più interessanti e famosi giochi d'ingegno. Partendo dall'analisi di un modello in legno¹, lo studente viene sollecitato a mettersi alla prova "giocando" contro un avversario o contro se stesso. Partendo da una ricerca puramente euristica delle soluzioni o delle più efficaci strategie di gioco, lo studente viene accompagnato nello studio della struttura, della storia e della possibile soluzione di ciascun rompicapo fino ad approdare all'eventuale algoritmo risolutivo.

Ciascuno dei giochi proposti presenta una precisa fisionomia e peculiarità: alcuni sollecitano l'utilizzo dell'intuizione, altri conducono a una soluzione attraverso una strategia ben precisa, altri ancora stimolano l'esercizio della memoria e il ragionamento logico. Attraverso il gioco è possibile, da un lato, scoprire alcuni tra i concetti matematici che, spesso inconsapevolmente, sottendono alle nostre scelte e ai nostri comportamenti quotidiani, dall'altro, immergersi nella vita e nelle opere di alcune tra le menti geniali che nel corso della storia hanno affrontato e risolto questioni affascinanti e insondabili, da Archimede a John Von Neumann, da Isaac Newton fino a John Nash.

Ed è proprio John Von Neumann che, al di là di alcuni scritti anticipatori del 1928, fondò la moderna *teoria dei giochi* con la pubblicazione del testo *Theory of Games and Economic Behavior* scritto con l'economista Oskar Morgenstern nel 1944. L'obiettivo di Von Neumann appare più che mai "pragmatico": comprendere se e come due "giocatori" possano individuare una situazione finale di "equilibrio", ossia di accettazione del risultato finale del gioco tale da non volerlo ulteriormente modificare in modo unilaterale.

Il *teorema di Von Neumann* garantisce l'esistenza di tale equilibrio nel caso di giochi

¹ Cfr. SANTOCANALE 2009.

finiti (con un numero finito di mosse possibili), *a somma zero* (un giocatore vince esattamente ciò che l'altro perde), *a informazione completa* (tutti i giocatori devono essere a conoscenza delle regole del gioco).

Con i suoi scritti del 1950, John Nash analizza situazioni competitive decisamente più complesse di quelle affrontate dal suo predecessore, garantendo, in talune condizioni, l'esistenza di un equilibrio ("l'equilibrio di Nash") anche in situazioni caratterizzate da una pluralità di competitori che operano scelte dalle quali tutti traggono un vantaggio o, per lo meno, minimizzano lo svantaggio.

Si tratta, senza dubbio, di una rivoluzione concettuale destinata a scardinare due secoli di teoria economica: in una competizione è possibile ottimizzare un risultato coniugando in modo intelligente competizione e collaborazione, coscienti del fatto che nessuna delle due strategie è di per sé vincente. La teoria dei giochi ha permesso di dimostrare che qualsiasi *strategia pura* (che è definita a priori) è perdente rispetto a una *strategia mista* (in cui i comportamenti si modificano in funzione degli eventi in modo probabilistico).

Appare estremamente significativo, a questo punto, il valore formativo del percorso proposto: anche gli allievi, divisi in gruppi di lavoro, si sono ritrovati all'interno di un "gioco", il cui obiettivo finale consisteva nel giungere preparati a un appuntamento, essendo in grado di esibire un loro "prodotto"; conoscevano le regole del gioco (compiti assegnati, tempistica) ed erano a conoscenza delle conseguenze di ogni singola "mossa".

Hanno compreso che, in classe, non si tratta quasi mai di giochi *a somma costante* (dove la vincita dell'uno corrisponde alla perdita dell'altro) e hanno potuto osservare come una *strategia mista* risulti estremamente più utile di una predefinita. Scrive, a tal proposito, Nicola Antonucci²:

L'Umanità ha sempre, inconsapevolmente o quasi, applicato strategie miste usando i propri dadi speciali incorporati negli ormoni, nei neurotrasmettitori e in quant'altro contribuisce ad elaborare i complessi segnali provenienti dall'ambiente... Quando la nostra calcolatrice interna elabora risultati che producono piaceri o sofferenza, ovvero stimoli o stress, questi entrano bio-chimicamente in gioco a condizionare le prossime operazioni della nostra Algebra di Valori incorporata, in modo da produrre diversi risultati comportamentali apparentemente casuali, o emotivi, o persino irrazionali, in realtà, mirate ad attuare ottimali strategie miste...

² ANTONUCCI 2010, p. 20.

2. GLI OBIETTIVI

Lo sviluppo del progetto si proponeva il raggiungimento di obiettivi cognitivi e formativi, come di seguito descritto.

Conoscenze da acquisire:

- Fondamenti della teoria dei giochi e delle decisioni, con particolare riferimento al contesto storico in cui sono maturate e in cui si sono sviluppate.
- Tipologie di giochi: giochi finiti, giochi cooperativi e non cooperativi, giochi a informazione perfetta e completa, giochi ripetuti, giochi a somma zero e a somma non zero.
- Applicazioni e interazioni della teoria in vari campi: economia e finanza, politica, sociologia, psicologia, informatica, biologia, sport.

Abilità da acquisire:

- Classificare un gioco o una situazione competitiva sulla base delle categorie introdotte.
- Dare una descrizione informale di un gioco in termini di obiettivi e strategie.
- Formalizzare alcune strategie di gioco in termini algoritmici e implementarle attraverso l'uso di un linguaggio di programmazione.
- Utilizzare una terminologia rigorosa e adeguata ai diversi contesti.
- Elaborare brevi percorsi interdisciplinari e svolgere una relazione in merito, in contesti non usuali.
- Costruire materiali divulgativi digitali e cartacei.

Obiettivi relazionali e metacognitivi:

- Lavorare in gruppo nel rispetto delle diverse abilità dei componenti in relazione a un obiettivo prefissato.

- Relazionarsi in modo corretto ed efficace tra pari (anche se sconosciuti) in un contesto informale e non usuale.
- Prendere coscienza dell'efficacia comunicativa e argomentativa della propria esposizione.

3. IL LABORATORIO

La fase di presentazione dei contenuti e di approfondimento degli stessi è stata preceduta da un'attività di carattere prettamente motivazionale: gli studenti sono stati divisi in piccoli gruppi costituiti da tre o quattro unità; ogni gruppo ha avuto la possibilità di scegliere uno o più giochi tra i diversi modelli in legno proposti dall'insegnante e la scelta è avvenuta sulla base di una pura curiosità. Inizialmente, gli studenti sono stati incoraggiati a osservare e a giocare, ricercando soluzioni e strategie solo sulla base di ragionamenti euristici o personali intuizioni.

Si è trattato di un momento particolarmente significativo: gli studenti hanno manifestato grande interesse e coinvolgimento e, in molti casi, sono stati in grado di produrre strategie risolutive innovative ed efficaci, dimostrando intuito e capacità logiche non sempre rilevabili attraverso l'ordinario lavoro di classe. Un esempio per tutti: uno studente (che negli anni precedenti non aveva mai manifestato grande interesse per lo studio della matematica) ha individuato, in modo del tutto intuitivo, la strategia risolutiva del gioco *Le Torri di Hanoi*, acquisendo l'abilità di risolvere il rompicapo con otto dischetti ed effettuando inoltre $2^8 - 1$ mosse in meno di dieci minuti.

Superata questa prima fase, fortemente significativa dal punto di vista motivazionale, gli studenti hanno approfondito lo studio e l'analisi dei giochi attraverso testi di uso scolastico e non, materiale reperito in rete e appunti forniti dai docenti. L'elenco dei siti consultati è stato estrapolato dalla sitografia citata dagli studenti nei lavori di approfondimento prodotti dai singoli gruppi.

In essi è possibile reperire informazioni in merito alla storia di ciascun rompicapo e alle strategie risolutive più originali ed efficaci. Il lavoro di analisi e approfondimento si è svolto rispettando l'autonomia dei singoli gruppi, in taluni casi venutisi a creare in modo spontaneo, in altri costituitisi sulla base delle indicazioni del docente.



Figura 1. Il gioco delle Torri di Hanoi.

Va osservato come gli allievi, quasi tutti maggiorenni, abbiano dimostrato una buona capacità di lavorare in gruppo, ripartendosi ruoli e carichi di lavoro in modo misurato ed efficace, nel rispetto delle inclinazioni e degli interessi dei singoli.

Solo a questo punto, si è proceduto a una riorganizzazione dei contenuti (che non pretendeva di essere certamente esaustiva) attraverso la presentazione di alcuni aspetti fondamentali della teoria dei giochi e delle decisioni. Gli argomenti trattati sono stati i seguenti:

1. Esempi di giochi e loro descrizione informale.
2. Cenni storici.
3. Tipologie di giochi: cooperativi e non cooperativi, a utilità trasferibile e non trasferibile.
4. Giochi ripetuti nel tempo.
5. Giochi a informazione perfetta e completa.
6. Giochi finiti.
7. Giochi a somma zero e a somma diversa da zero: il teorema di Von Neumann, il teorema di Nash.

Per quel che concerne l'organizzazione del laboratorio da presentare a "La matematica dei ragazzi", si è scelto di articolare il percorso in sei postazioni corrispondenti a sei diversi giochi ritenuti dagli studenti particolarmente significativi. Nella predisposizione dei singoli interventi si è scelto di limitare la fase espositiva, privilegiando i momenti di scambio e dialogo tra relatori e visitatori e offrendo a questi ultimi la possibilità di "mettersi in gioco" attraverso la manipolazione diretta dei materiali. La possibilità di seguire parzialmente o totalmente il percorso tra le postazioni e la flessibilità nella scelta dell'itinerario ha permesso, nel corso della manifestazione, di suddividere le classi in visita in gruppi numericamente ridotti, senza perdere la "visione d'insieme", ma favorendo lo scambio e la partecipazione attiva. L'itinerario proposto si è articolato in sei momenti, descritti di seguito.

3.1 PRIMA POSTAZIONE: LE TORRI DI HANOI (1883)

Si tratta di una tavoletta in legno sulla quale sono infisse verticalmente tre asticelle; sulla prima sono infilati alcuni dischi, in numero variabile. Obiettivo del gioco consiste nello spostare tutti i dischi dalla prima all'ultima asticella; è possibile spostarne solo uno per volta, senza sovrapporre un disco più grande a uno più piccolo. A una prima impressione, il gioco può sembrare facile: quando il numero di dischi è limitato a tre o quattro, la strategia appare abbastanza intuitiva; tuttavia l'aumentare del numero dei dischi, anche di poche unità, provoca un significativo incremento della difficoltà.

Gli allievi in visita hanno potuto sperimentare la loro abilità di gioco e la loro intuizione attraverso l'aumento graduale del numero dei dischi, e sono stati guidati alla scoperta della relazione matematica tra il numero delle mosse e il numero dei dischi. Ai più grandi è stato proposto anche l'algoritmo ricorsivo di soluzione del gioco, implementato in linguaggio Pascal, con alcune osservazioni sui problemi di convergenza e complessità computazionale.

3.2 SECONDA POSTAZIONE: IL SOLITARIO DELLA BASTIGLIA (1687)

Il gioco appartiene alla categoria dei solitari e si racconta sia stato ideato da un nobile francese, prigioniero alla Bastiglia, al tempo di Luigi XIII. Il gioco presenta molteplici versioni (una attribuibile a Leibniz nel 1710) che mantengono intatta la regola prin-

cipale: su di una plancia a forma di croce con 33 posizioni occupate da pedine, una pedina deve scavalcarne un'altra lungo le quattro direzioni principali per posizionarsi su uno spazio vuoto, eliminando la pedina scavalcata in modo che alla fine ne rimanga una sola.

Il gioco, in apparenza semplice, contempla un numero elevatissimo di soluzioni diverse e fino a 4.086.164.704.007.996 possibili soluzioni ottime, molte delle quali sono riflessioni o rotazioni di una stessa soluzione "tipo".

Dopo un breve excursus storico relativo alle origini del gioco, il visitatore veniva invitato a mettersi alla prova individuando possibili strategie risolutive e introdotto ai concetti di *blocco*, *catalizzatore*, *repulisti* e *pacchetto* (termini tecnici relativi ad alcune situazioni del gioco). Agli studenti più grandi veniva proposta una riflessione che portava all'individuazione delle caratteristiche delle operazioni eseguibili sulla scacchiera, schematizzandole dal punto di vista matematico con i concetti di operazione interna e di gruppo. La sosta presso la postazione veniva resa più gradevole da una riproduzione a tempera di un tipico paesaggio francese osservabile da una delle finestrelle della Bastiglia.

3.3 TERZA POSTAZIONE: IL SERPENTE

Il gioco del Serpente è formato da 27 cubi uniti fra loro da un filo elastico che attraversa due facce opposte del cubo o due facce contigue. Scopo del gioco è fare in modo che tutti i pezzi si assemblino fino a formare un cubo. Alla soluzione si perviene immaginando un labirinto tridimensionale in cui ogni pezzo del rompicapo viene rappresentato da un punto; il filo elastico tratterrà un percorso che andrà a toccare a uno a uno i 27 punti di una rete cubica $3 \times 3 \times 3$.

Dopo una breve presentazione del rompicapo, il visitatore veniva condotto nell'affascinante mondo dei labirinti, descrivendo quando e a quale scopo sono nate le strategie per uscirne (*algoritmo casuale*, *regola della mano destra*, *algoritmo di Tremaux*), con particolare riferimento al labirinto a siepe ripreso nel celebre film *Shining* di Stanley Kubrik, di cui veniva proposta una fedele riproduzione in miniatura, oltre a un estratto della famosissima sequenza dell'inseguimento all'interno del labirinto.

3.4 QUARTA POSTAZIONE: IL BURR ESAGONALE (1970)

Si tratta di un rompicapo costituito da 12 pezzi di legno aventi le medesime dimensioni, con una o più incisioni che ne rendono possibile l'assemblaggio.

Scopo del gioco è comporre i vari pezzi in modo da formare una struttura di tipo cristallino. La soluzione del gioco è unica e prevede la necessità di partire da 3 pezzi con 2 incisioni. I 3 pezzi con una sola incisione e dello stesso colore hanno la funzione di struttura portante del Burr. Il Burr esagonale ricorda la struttura molecolare del diamante e permette un'interessante digressione nel mondo della chimica dei diamanti: questa è stata resa fruibile ai visitatori con una serie di cartelloni esplicativi.

3.5 QUINTA POSTAZIONE: QUATTRO IN RIGA

Appartiene alla categoria dei giochi di allineamento e si può considerare una versione evoluta del più antico *Tetris*, già conosciuto in Egitto nel 1400 a. C., e del moderno *Forza Quattro* (1974), che ne rappresenta una versione bidimensionale. Si gioca in due e l'obiettivo consiste nell'allineare 4 palline in orizzontale, verticale o diagonale.

Il visitatore veniva invitato a svolgere una vera e propria partita, confrontandosi con diverse strategie di gioco: la *trappola del principiante* o la *trappola generica*, fino a una strategia ispirata dalla celebre successione di Fibonacci.

3.6 SESTA POSTAZIONE: LA TOMBOLA

Il gioco della tombola non necessita di spiegazioni, data la sua celebrità e universalità. Offre lo spunto per alcune interessanti immersioni nella psicologia del giocatore e permette un primo approccio al calcolo delle probabilità.

L'ingresso dei visitatori nel laboratorio veniva agevolato da una breve performance di un'allieva che si cimentava nella difficile "arte della giocoleria" (con 2 e 3 palline), i cui risvolti matematici, magistralmente illustrati dal matematico Allen Knutson nel corso di un intervento al Festival della Matematica di Roma del 2008, venivano qui brevemente descritti.

4. ANALISI DELL'ESPERIENZA

La valutazione del successo del progetto si fonda essenzialmente sull'osservazione del lavoro svolto dagli allievi prima, durante e dopo la manifestazione, sui materiali

prodotti (schede esplicative dei giochi, cartelloni, presentazioni in Power Point, elaborati di ricerca e approfondimento, programmi in Turbo Pascal) e sui questionari di valutazione loro somministrati alla fine dell'anno scolastico.

In particolare sono stati considerati i seguenti indicatori quantitativi:

- numero di studenti partecipanti al progetto;
- numero di materiali cartacei e/o multimediali prodotti;
- numero di studenti in visita;
- numero di questionari compilati e restituiti.

Sono stati individuati i seguenti indicatori qualitativi:

- fantasia e originalità nella preparazione dei percorsi;
- efficacia e completezza nell'esposizione;
- qualità (approfondimento, completezza, rigore) dei materiali prodotti;
- serietà e rispetto dei tempi e delle consegne.

Rispetto ai parametri di valutazione stabiliti in sede di progettazione, possiamo certamente affermare che l'esperienza si è conclusa in modo positivo.

Durante la fase di lavoro che ha preceduto la manifestazione, gli studenti hanno saputo dimostrare interesse ed entusiasmo nell'attività di gioco e ricerca delle strategie risolutive, e hanno dimostrato una buona autonomia nelle attività di gruppo, ripartendosi ruoli e compiti in modo efficace, nel rispetto delle inclinazioni dei singoli. Per quanto concerne la progettazione e realizzazione dei materiali, i diversi gruppi hanno saputo elaborare percorsi interessanti attraverso l'ausilio di materiali costruiti con attenzione e cura, in taluni casi anche con grande originalità.

Durante la manifestazione la maggior parte degli studenti ha saputo relazionarsi con i compagni in visita in modo sereno ed efficace, dimostrando buone, in taluni casi ottime, capacità dialettiche e sapendo adattare le modalità espositive alle caratteristiche e all'età dell'uditorio.

Dai questionari e dai brevi elaborati prodotti dagli allievi è emerso che la quasi totalità ha ritenuto positiva l'esperienza vissuta, in quanto ha rappresentato un modo diverso per apprendere la matematica e ha migliorato la sicurezza e le capacità espositive. Dal punto di vista invece dei rapporti interpersonali, la maggior parte degli allievi ritiene che l'esperienza non sia servita a migliorare o a rafforzare i rapporti, ormai piuttosto delineati, tra i compagni, quanto piuttosto a consolidare amicizie e collaborazioni già esistenti. Diversi studenti hanno sottolineato la difficoltà nel conciliare i tempi dedicati al progetto con le attività scolastiche tradizionali, ancora confinate in 3 ore settimanali di lezione.

Dal punto di vista dell'assimilazione dei contenuti proposti, le prove di valutazione effettuate al termine del progetto hanno evidenziato un miglioramento dei livelli di profitto degli studenti più "deboli" e, soprattutto, un rafforzamento della loro sicurezza e autostima.

Diverse e rilevanti sono state, inoltre, le ricadute dell'esperienza a breve e a lungo termine: il laboratorio è stato allestito all'interno dell'Aula del Dipartimento di Matematica e Fisica del Liceo "E. L. Martin" ed è stato visitato da molte classi dell'Istituto; gli approfondimenti prodotti dagli allievi, in forma cartacea o digitale (presentazione in Power Point, filmato), sono stati rielaborati e messi a disposizione degli studenti e degli insegnanti; il laboratorio è stato utilizzato per attività di orientamento in entrata per allievi delle scuole secondarie di primo grado.

Infine, all'inizio dell'a. sc. 2010/2011, gli studenti, ormai in quinta, hanno potuto presentare il laboratorio a Trieste, nell'ambito della manifestazione pubblica "Notte dei Ricercatori", esperienza di grande impatto emotivo ed estremamente formativa.

BIBLIOGRAFIA

ANTONUCCI N.

2010, *Dalle balle alle bolle: la finanza sull'orlo del caos. Come cavalcare l'imprevedibilità dei mercati finanziari*, Milano, Hudsucker.

SANTOCANALE L.

2009, *Giochi d'ingegno*, Milano, Mondadori.

PER APPROFONDIRE

OWEN G.

1995, *Game Theory*, New York, Academic Press.

STEWART I.

2010, *Come tagliare una torta*, Milano, Mondadori.

SITI WEB CONSULTATI

WIKIPEDIA

2010, *Teoria dei giochi*, Wikipedia l'enciclopedia libera, <http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi>, sito consultato nel 2010.

WIKIPEDIA

2010, *Labirinto*, Wikipedia l'enciclopedia libera, <<http://it.wikipedia.org/wiki/Labirinto>>, sito consultato nel 2010.

MATEMATICAMENTE.IT

2010, <<http://www.matematicamente.it>>, sito consultato nel 2010.

MAZE WORKS

2010, <<http://www.mazeworks.com/peggy/index.htm>>, sito consultato nel 2010.

POLYMATH

<http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmls/probegio/GAMEMATH/Solitario/Solitario.htm>, sito consultato nel 2012.