Dipartimento di scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche
"Bruno de Finetti"

Research Paper Series, N. 2, 2016

PROCESSI STOCASTICI "JUMP DIFFUSION" ASPETTI STATISTICI

ATTILIO WEDLIN
DEAMS – UNIVERSITA' DI TRIESTE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Research Paper Series

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche “Bruno de Finetti”
Piazzale Europa 1
34127, Trieste
Tel.: +390405587927
Fax: +390405587033
http://www.deams.units.it

EUT Edizioni Università di Trieste
Via E.Weiss, 21 - 34128 Trieste
Tel. +390405586183

http://eut.units.it
eut@units.it

ISBN: 978-88-8303-746-7

Research Paper Series, N. 2, 2016

PROCESSI STOCASTICI "JUMP DIFFUSION" ASPETTI STATISTICI

ATTILIO WEDLIN
DEAMS – UNIVERSITA' DI TRIESTE

ABSTRACT[1]

Questa nota introduce ai problemi di filtraggio per soluzioni di equazioni differenziali stocastiche con input costituito da processi jump – diffusion. Si fa riferimento soprattutto al modello di R. Merton riguardante l'evoluzione nel tempo del prezzo di un'attività finanziaria.

KEYWORDS: equazioni differenziali stocastiche, processi jump-diffusion, problemi di filtraggio, formula di Bayes generalizzata.

[1] **Corresponding author:** Attilio Wedlin, Dipartimento di Scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche, Università di Trieste, email: attilio.wedlin@deams.units.it; tel: 040/5587029.

1) Introduzione

Nel celebre articolo del 1976 dal titolo “Option Pricing When the Underlying Stock Returns are Discontinuous” l’economista Robert Merton propone il seguente modello stocastico per rappresentare l’evoluzione nel tempo del prezzo $S(t)$ di una attività finanziaria:

$$dS(t) = S(t).\left[\mu dt + \sigma dW(t) + dY(t)\right].$$

Detto in breve, si tratta di una equazione differenziale stocastica nel processo $S(t)$ con input costituito dal processo stocastico $X(t) = \mu.t + \sigma.W(t) + Y(t)$, ove $Y(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} Y_j$ è un processo di Poisson composto e ove $W(t)$ è un processo di Wiener, indipendente da $Y(t)$; μ e σ sono costanti note.

$X(t)$ è un semplice esempio di processo Jump – diffusion con traiettorie continue tranne che per eventuali discontinuità di salto, di ampiezza aleatoria Y_j, in epoche aleatorie τ_j. Della soluzione dell’equazione si dirà nel prossimo paragrafo.

Se sono noti tutti i parametri di $X(t)$ gli aspetti statistici a cui si accenna nel titolo non riguardano problemi di stima parametrica. Si supporrà invece che il processo $S(t)$, soluzione della suddetta equazione differenziale, non sia direttamente osservabile e che informazioni su di esso si possano ottenere dall’osservazione della traiettoria di un secondo processo stocastico, $Z(t)$, supposto correlato con $S(t)$. Problemi statistici di questo tipo sono denominati “problemi di filtraggio” (filtering problems) e la letteratura su questi temi si è essenzialmente sviluppata a partire dagli anni 60 del secolo scorso. La maggior parte di questa riguarda però processi non osservabili di diffusione che sono soluzioni di equazioni differenziali stocastiche del tipo

$$dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW(t)$$

le cui traiettorie sono funzioni quasi certamente continue. Soltanto negli ultimi trent’anni sono stati affrontati problemi di filtraggio per soluzioni di equazioni differenziali stocastiche con input costituito da processi Jump – diffusion del semplice tipo già menzionato in precedenza o più complicati come le soluzioni di equazioni del tipo

$$dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW(t) + \eta(t, X_t)dY(t)$$

ove $Y(t)$ ha traiettorie costanti a tratti e le funzioni $\mu(t, X_t)$, $\sigma(t, X_t)$ *e* $\eta(t, X_t)$ sono sufficientemente regolari. E’ obiettivo di questo lavoro dare una prima informazione su questi temi limitando al massimo gli sviluppi formali ed il ricorso a strumenti non elementari di analisi stocastica.

Va ancora precisato che i procedimenti di filtraggio, il cui obiettivo è la determinazione dello stimatore ottimale dei minimi quadrati $\hat{S}(t)$ per il processo di segnale $S(t)$, si suddividono in due classi. La prima è costituita da procedimenti di stima non-Bayesiani basati sulla trasformazione del processo osservabile $Z(t)$ nel corrispondente "processo delle innovazioni" e nell'uso di teoremi di rappresentazione per martingale. La seconda classe è costituita da procedimenti inferenziali che si basano sull'applicazione di un teorema di Bayes generalizzato che sarà presentato in un'appendice di quest'articolo.

In quanto segue useremo, salvo che nel primo problema di stima, procedimenti Bayesiani per ricavare equazioni differenziali stocastiche che descrivono l'andamento nel tempo dello stimatore $\hat{S}(t)$ in presenza di incrementi di informazione sul processo osservabile $Z(t)$. Ricordiamo infine che lo stimatore ottimale dei minimi quadrati è $\hat{S}(t) = E[S(t)/F_t^Z]$, funzione di regressione del segnale rispetto alla $\sigma -$ algebra F_t^Z generata dalle variabili osservabili $Z(s)$ con $0 \le s \le t$.

2) Cenni sui processi stocastici "jump – diffusion"

Con questo nome sono indicati processi a tempo continuo, tipicamente di tipo Markoviano, le cui traiettorie sono continue, ma affette da discontinuità di salto in epoche aleatorie. Per una semplice introduzione agli aspetti probabilistici dei processi jump – diffusion si veda il riferimento n. 15 in Bibliografia. Il più semplice processo di questo tipo è somma di un processo di Wiener standardizzato, W(t), e di un processo di Poisson, N(t), con intensità λ costante, mutuamente indipendenti:

$$X(t) = W(t) + N(t). \tag{1}$$

I due addendi sono entrambi processi di Lévy, cioè con incrementi indipendenti e omogenei, e la loro somma $X(t)$ è ancora un processo di Lévy; per quest'ultimo la funzione valor medio è $\varphi_X(t) = E[X(t)] = \lambda.t$ e la funzione di covarianza, se s < t, è $\psi_X(s,t) = Cov[X(s), X(t)] = Var[X(s \wedge t)] = s.(1+\lambda)$.

Nel seguito faremo riferimento al processo jump – diffusion (e processo di Lévy) , leggermente più complicato del precedente, di espressione

$$X(t) = b.t + \sigma.W(t) + \eta.Y(t), \tag{2}$$

ove $Y(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ è un processo di Poisson composto, ancora un processo di Lévy, indipendente da $W(t)$; i coefficienti b *ed* η sono reali e σ reale positivo. Si tratta di un modello più versatile del precedente perché le discontinuità di salto hanno un'ampiezza aleatoria dipendente dalla comune distribuzione degli $Y_j, \quad j \geq 1.$ Si verifica facilmente che per il processo (2) sussistono le:

$$\varphi_X(t) = E[X(t)] = [b + \eta.\lambda.E(Y_1)].t$$

e $$\psi_X(s,t) = Cov[X(s), X(t)] = Var[X(s \wedge t)] = [\sigma^2 + \eta^2.\lambda.E(Y_1^2)].t \;.$$

Il modello (2) può essere complicato a volontà supponendo, per esempio, che i coefficienti deterministici $b, \sigma \;\; ed \;\; \eta$ siano variabili nel tempo, ma allora il nuovo processo $X(t) = t.b(t) + \sigma(t).W(t) + \eta(t).Y(t)$ non è più un processo di Lévy. Si può supporre inoltre che tali coefficienti, oltre che dipendenti dal tempo, siano aleatori, cioè siano processi stocastici $b(\omega,t), \;\; \sigma(\omega,t) \;\; ed \;\; \eta(\omega,t)$ e neanche in questo caso il processo risultante $X(t) = t.b(\omega,t) + \sigma(\omega,t).W(t) + \eta(\omega,t).Y(t)$ è un processo di Lévy.

E' famoso nella letteratura economico – finanziaria il modello proposto da R. Merton nel 1976 per rappresentare il prezzo aleatorio $S(t)$ di un'attività finanziaria; esso è definito come soluzione dell'equazione differenziale stocastica, espressa dalla

$$dS(t) = S(t).[b.dt + \sigma.dW(t) + dY(t)] \tag{3}$$

in cui il processo integratore è quello indicato dalla (2) con $\eta = 1$. La soluzione della (3), con la condizione iniziale $S(0) = S_0$, è data dal processo stocastico

$$S(t) = S_0.\exp\left\{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right).t + \sigma.W(t)\right\}.\left[\prod_{j=1}^{N(t)}\left(1 + Y_j\right)\right] \tag{4}$$

in cui l'ampiezza Y_j della discontinuità all'epoca τ_j ha il seguente significato:

$$Y_j = \frac{S(\tau_j) - S(\tau_j^-)}{S(\tau_j^-)} \,.$$

Una variazione interessante del processo (2) è costituita dal processo jump – diffusion

$$X(t) = \sigma.W(t) + \eta.[Y(t) - \lambda.t.E(Y_1)] \tag{5}$$

che è un processo di Lévy e anche un processo martingala; in parentesi quadra compare la differenza tra il processo di Poisson composto $Y(t)$ e la sua funzione valor medio $\varphi_Y(t) = \lambda.t.E(Y_1)$. Il processo (5) è detto "processo di Poisson composto compensato" ed ha funzione valor medio identicamente nulla.

Dopo aver introdotto i processi jump – diffusion più semplici (1), (2) e (5) ci limitiamo ad accennare al processo generale di questo tipo espresso dalla

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \alpha(\omega, s)ds + \int_0^t \beta(\omega, s)dW(s) + \int_0^t \gamma(\omega, s)dY(s),$$

ove $Y(s)$ è un processo markoviano, puramente discontinuo, supposto indipendente dal processo di Wiener $W(t)$ e dalla condizione iniziale X_0. Naturalmente i coefficienti aleatori e dipendenti dal tempo α, β, γ devono soddisfare condizioni di regolarità che consentano la definizione degli integrali stocastici presenti a secondo membro. Nel seguito del lavoro questi processi jump – diffusion generali non saranno utilizzati.

Sempre con riferimento ai processi jump – diffusion più semplici, per esempio il processo (2), prenderemo ora in considerazione integrali stocastici del tipo

$$\int_0^T \Phi(t)dX(t) = \int_0^T \Phi(t).[b.dt + \sigma.dW(t) + \eta.dY(t)] = b.\int_0^T \Phi(t)dt + \sigma.\int_0^T \Phi(t)dW(t) + \eta.\int_0^T \Phi(t)dY(t)$$

,
ove l'integrando $\Phi(t)$ indica un processo stocastico con proprietà opportune, ed equazioni differenziali stocastiche, per esempio la (3), che scriviamo nella forma integrale equivalente

$$S(T) = S_0 + b.\int_0^T S(t)dt + \sigma.\int_0^T S(t)dW(t) + \int_0^T S(t)dY(t).$$

Nelle due espressioni su indicate compaiono tre tipi di integrali stocastici:

a. Integrali in media quadratica: $\int_0^T \Phi(t)dt$ e $\int_0^T S(t)dt$;
b. Integrali di Ito: $\int_0^T \Phi(t)dW(t)$ e $\int_0^T S(t)dW(t)$;
c. Integrali di Poisson: $\int_0^T \Phi(t)dY(t)$ e $\int_0^T S(t)dY(t)$.

Ritenendo che i primi due tipi di integrale stocastico siano noti al lettore (si vedano per esempio i testi 1, 9 o 11 in bibliografia), ci soffermeremo soltanto sugli integrali di Poisson. Poiché la generica traiettoria del processo di Poisson composto $Y(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ è una funzione costante a tratti, nelle somme di Riemann riferite ad una generica partizione finita di [0,T], $\sum_i \Phi(t_i).[Y(t_{i+1}) - Y(t_i)]$, i fattori in parentesi quadra saranno diversi da 0 soltanto se nell'intervallo $(t_i, t_{i+1}]$ si è verificata almeno una discontinuità del tipo Y_j. Questa considerazione giustifica intuitivamente la definizione $\int_0^T \Phi(t)dY(t) = \sum_{j=1}^{N(T)} \Phi(\tau_j).Y_j$, ove τ_j

indica la j-esima epoca di arrivo della discontinuità di ampiezza Y_j. La somma di numeri aleatori a secondo membro ha necessariamente un numero finito di addendi e ciò dipende dalle caratteristiche del processo di Poisson composto. Per eventuali approfondimenti si veda il riferimento bibliografico n. 2.

Per quanto concerne l'equazione differenziale stocastica (3) essa è del tipo $dS(t) = S(t^-)dX(t)$, noto in letteratura come "esponenziale stocastico": l'analoga equazione deterministica, $dg(t) = g(t)df(t)$, se $f(t)$ è differenziabile, ha soluzione espressa dalla $g(t) = \exp\{f(t)\}$. Se nell'equazione stocastica il processo $X(t)$ è "a variazione finita" la soluzione è l'esponenziale stocastico $S(t) = \exp\{X(t)\}$.

Si dimostra che se il processo $X(t)$ è una semi-martingala, e ciò accade se $X(t)$ è, per esempio, del tipo (2), allora la soluzione dell'equazione $dS(t) = S(t^-)dX(t)$ è data dall'espressione

$$S(t) = S_0.\exp\left\{X(t) - X(0) - \frac{1}{2}[X_c, X_c](t)\right\}.\prod_{s \le t}\left\{[1 + \Delta X(s)].e^{-\Delta X(s)}\right\} \tag{6}$$

nella quale $X_c(t)$ indica la parte continua di $X(t)$ e cioè $X_c(t) = b.t + \sigma.W(t)$, $[X_c, X_c](t)$ indica il processo "variazione quadratica di $X_c(t)$" che nel nostro caso è pari a $\sigma^2.t$ e infine $\Delta X(s) = X(s) - X(s^-)$ indica l'eventuale discontinuità all'epoca s.

3) Problemi di stima e processi jump – diffusion

I problemi di stima che tratteremo, lo ricordiamo ancora, sono "problemi di filtraggio" nei quali si tratta di trovare stimatori dei minimi quadrati $\hat{S}(t)$ per un processo di segnale $S(t)$, non osservabile, basati sulla osservabilità di un secondo processo stocastico $Z(t)$ correlato con il primo. La situazione è quella denominata in letteratura "hidden Markov models" : il processo vettoriale $[S(t), Z(t)]$ è riguardato come "parzialmente osservabile" in quanto le osservazioni sono limitate al processo $Z(t)$ mentre il processo Markoviano di interesse (detto anche "processo di segnale") è $S(t)$. E' noto che lo stimatore ottimale dei minimi quadrati è dato da $\hat{S}(t) = E\left[S(t) / F_t^Z\right]$, cioè dalla funzione di regressione di $S(t)$ rispetto alla $\sigma -$ algebra F_t^Z generata dai numeri aleatori osservabili $Z(s)$, $s \in [0, t]$.

Le tecniche di stima disponibili individuano un'equazione differenziale stocastica nel processo dello stimatore incognito $\hat{S}(t)$ la cui soluzione, se esiste unica, fornisce l'evoluzione nel tempo dello stimatore di segnale tenendo conto del progressivo aumento delle informazioni disponibili basato sull'osservazione di $Z(t)$. In generale, salvo casi particolarmente semplici, l'equazione differenziale non è risolubile e allora si ricorre a procedimenti numerici approssimati di cui in questa sede non parleremo.

L'obiettivo che ci proponiamo in questa nota è quello di chiarire, almeno a livello intuitivo, il problema di filtraggio per l'equazione differenziale stocastica (3), che per comodità riportiamo assieme alla condizione iniziale,

$$dS(t) = S(t).\left[b.dt + \sigma.dW(t) + dY(t)\right], \quad S(0) = S_0 .$$

Le informazioni disponibili su $S(t)$ saranno costituite dai valori osservabili di un processo stocastico $\{Z(t); t \geq 0\}$ correlato con il processo di segnale $\{S(t); t \geq 0\}$. Il legame più semplice tra i due processi è descritto dall'equazione $dZ(t) = S(t)dt + dB(t)$ secondo la quale il processo osservabile è sovrapposizione del processo $S(t)$ e di un "rumore aleatorio" costituito da un processo Gaussiano formalmente coincidente con la derivata di un processo di Wiener $B(t)$. Si assume di solito che $B(t)$ sia indipendente dal processo di Wiener $W(t)$ nell'altra equazione.

Più in generale, l'equazione di osservazione è del tipo $dZ(t) = h[S(t)]dt + dB(t)$, ove $h(.)$ è una fissata funzione continua e limitata.

Oltre all'equazione di osservazione $dZ(t) = S(t)dt + dB(t)$, prenderemo anche in considerazione la situazione in cui le variabili osservabili $Z(t)$ sono quelle di un processo Poissoniano la cui intensità dipende dal segnale $S(t)$: l'equazione di osservazione prende allora la forma $dZ(t) = \lambda(S_t)dt + dM(t)$, ove la funzione nota $\lambda(.)$ è assunta essere positiva, continua e limitata ed $M(t)$ è un processo martingala . L'intensità del processo Poissoniano $Z(t)$ è quindi un processo stocastico $\{\lambda(S_t); t \geq 0\}$ dipendente dal segnale $S(t)$.

Al fine di introdurre gradualmente il lettore ai problemi di filtraggio, incominceremo ad affrontare il problema di stima per un segnale più semplice di quello generato dall'equazione (3) e, precisamente, per il processo di diffusione, supposto non osservabile, generato dalla seguente equazione di P. Langevin:

$$dS(t) = -a.S(t)dt + dW(t), \quad S(0) = S_0, \quad a > 0, \tag{7}$$

nella quale l'input stocastico è costituito dal solo processo di Wiener standardizzato $W(t)$ e non, come nella (3), da un processo jump – diffusion. Ricordiamo che la soluzione della (7) è il processo

$$S(t) = S_0.e^{-a.t} + \int_0^t e^{-a(t-u)} dW(u) \tag{8}$$

di tipo Gaussiano con funzione valor medio $\varphi_S(t)$ identicamente nulla e funzione di covarianza $\psi_S(s,t) = \frac{1}{2.a} e^{-a.|t-s|}$. Ci limitiamo ad affermare che nell'ipotesi $S_0 \approx N(0, \frac{1}{2.a})$ il processo soluzione $\{S(t); t \geq 0\}$ è stazionario in senso stretto e Markoviano; in letteratura è noto con il nome "processo di Ornstein – Uhlenbeck".

Primo problema di stima

Il modello stocastico è costituito dall'equazione (7) , con la condizione iniziale $S_0 \approx N(0, v)$ supposta indipendente da $W(t)$, e dall'equazione di osservazione $dZ(t) = S(t)dt + dB(t)$, ove $B(t)$, altro processo di Wiener standardizzato, è supposto indipendente da $W(t)$. Tale modello è noto come "modello lineare Gaussiano" ed il problema di stima è risolto dal cosiddetto "filtro di Kalman – Bucy" che qui descriviamo sommariamente rinviando, per esempio, il lettore al testo di B. Oksendal e alle Lecture Notes di P. Chigansky per maggiori approfondimenti .

Il filtro fornisce due equazioni: la prima riguarda lo stimatore $\hat{S}(t) = E\left[S(t) / F_t^Z\right]$ ed è un'equazione differenziale stocastica lineare espressa dalla

$$(9) \qquad d\hat{S}(t) = -a.\hat{S}(t)dt + P(t).\left[dZ(t) - \hat{S}(t)dt\right], \quad \hat{S}(0) = 0\,,$$

ove $P(t) = E\left\{\left[S(t) - \hat{S}(t)\right]^2 / F_t^Z\right\}$ indica la varianza dello stimatore $\hat{S}(t)$. La seconda equazione del filtro riguarda appunto $P(t)$ ed è un'equazione differenziale deterministica, non lineare, detta "equazione di Riccati":

$$(10) \qquad P'(t) = -2.a.P(t) + 1 - P^2(t)\,, \quad P(0) = v\,;$$

poiché le variabili osservabili $Z(t)$ non intervengono nella (10) , tale equazione può essere risolta indipendentemente dal procedimento inferenziale.

L'equazione (9) può anche essere espressa dalla

$$d\hat{S}(t) = -\left[a + P(t)\right].\hat{S}(t)dt + P(t)dZ(t)$$

e, tenendo conto della posizione $\hat{S}(0) = 0$, la sua soluzione è il seguente processo stocastico

$$\hat{S}(t) = \int_0^t \exp\left\{-\left(a+1\right).\left(t-s\right)\right\}P(s)dZ(s)\,.$$

Può essere interessante ricordare che un primo "filtro di Kalman" per processi a tempo discreto comparve in letteratura nel 1960 e venne immediatamente applicato in settori di ricerca aereonautica (progetto Apollo) e in tanti altri campi applicativi; l'anno successivo R.E. Kalman e R.S. Bucy pubblicarono un lavoro congiunto sul filtro per processi a tempo continuo che noi abbiamo quì utilizzato. Contributi successivi ed estensioni a modelli non lineari sono dovuti principalmente a Stratonovich, Kushner, Kallianpur, Zakai e altri. Attualmente il lavoro di ricerca prosegue incessantemente e la bibliografia su questi temi è vastissima.

Secondo problema di stima

Il modello stocastico è ancora costituito dall'equazione (7) con la condizione iniziale $S_0 \approx N(0, v)$ e supposta indipendente da $W(t)$. L'equazione di osservazione sarà ora data dalla $dZ(t) = \lambda(S_t)dt + dM(t)$, ove $Z(t)$ è un processo di Poisson con intensità aleatoria $\lambda(S_t)$ ed $M(t)$ un processo di punto che è anche un processo martingala, con $\varphi_M(t)$

identicamente nulla. La suddetta equazione differenziale stocastica si ricava dalla decomposizione di Doob – Meyer per semimartingale
(si vedano per esempio i testi di B. Oksendal o di D. Applebaum).

Occorre premettere che esistono due impostazioni matematico – statistiche ai problemi di filtraggio:

a) L'impostazione dovuta principalmente a T. Kailath che fa ricorso alla trasformazione del processo osservabile $Z(t)$ nel corrispondente "processo delle innovazioni"; nell'equazione (9) del filtro di Kalman – Bucy tale processo è espresso dalla differenza $Z(t)-\int_0^t \hat{S}(s)ds$ scritta in notazione differenziale come $dZ(t)-\hat{S}(t)dt$.
b) L'impostazione dovuta principalmente a Bucy, Kallianpur e Striebel che fa ricorso ad una generalizzazione della formula di Bayes:

$$\hat{S}(t)=E_P\left[S(t)/F_t^Z\right]=\frac{E*\left[S(t).L(t)/F_t^Z\right]}{E*\left[L(t)/F_t^Z\right]} \tag{11}$$

nota come formula di Kallianpur – Striebel.

Lo stimatore del segnale $\hat{S}(t)=E_P\left[S(t)/F_t^Z\right]$, relativamente alla misura di probabilità P , è espresso dal rapporto di due funzioni di regressione relative ad una diversa misura di probabilità P*, equivalente a P, nelle quali interviene la derivata di Radon – Nikodym $L(t)=\dfrac{dP_t}{dP_t^*}$ tra le due misure di probabilità P_t e P_t^* che sono restrizioni delle P e P^* sullo spazio misurabile $\{\Omega, F_t^Z\}$. Per maggiori chiarimenti si veda l'Appendice a questa nota.

Nel secondo problema di stima che presentiamo si farà ricorso alla seconda delle due impostazioni che, con riferimento al particolare processo di osservazione descritto dall'equazione $dZ(t)=\lambda(S_t)dt+dM(t)$, suggerisce la derivata di Radon – Nikodym

$$L(t)=\frac{dP_t}{dP_t^*}=\left[\prod_{s\le t}\lambda(S_s).\Delta Z(s)\right].\exp\left\{\int_0^t\left[1-\lambda(S_s)\right]ds\right\}=\left[\prod_{j=1}^{Z(t)}\lambda(S_{\tau_j})\right].\exp\left\{\int_0^t\left[1-\lambda(S_s)\right]ds\right\},$$

ove la seconda uguaglianza è giustificata dal fatto che risulta $\Delta Z(s)=1$ solo negli istanti di arrivo $s=\tau_j$ degli eventi del processo Poissoniano.

Ponendo per comodità nella (11) $E*\left[S(t).L(t)/F_t^Z\right]=\sigma(S_t)$ e $E*\left[L(t)/F_t^Z\right]=\sigma(1)$, cosicché risulta

$$\hat{S}(t)=E_P\left[S(t)/F_t^Z\right]=\frac{E*\left[S(t).L(t)/F_t^Z\right]}{E*\left[L(t)/F_t^Z\right]}=\frac{\sigma(S_t)}{\sigma(1)} \tag{11'}$$

si dimostra che il numeratore $\sigma(S_t)$ è soluzione della seguente equazione integrale stocastica

(12) $$\sigma(S_t) = \sigma(S_0) - \alpha.\int_0^t \sigma(S_s)ds + \int_0^t \{\sigma[S_s.\lambda(S_s)] - \sigma(S_s)\} \quad d[Z(s) - s]$$

o della corrispondente equazione differenziale stocastica

$$d\sigma(S_t) = -\alpha.\sigma(S_t)dt + \{\sigma[S_t.\lambda(S_t)] - \sigma(S_t)\}d[Z(t) - t] \ .$$

Ci limitiamo a dire che dalla soluzione di questa equazione e dall'ultima uguaglianza della (11') deriva lo stimatore $\hat{S}(t)$.

Terzo problema di stima

Questo problema concerne finalmente l'equazione di stato (3) del modello di R. Merton

$$dS(t) = S(t).[b.dt + \sigma.dW(t) + dY(t)]$$

e si supporrà che il processo osservabile $Z(t)$ sia generato, in alternativa

1) dall'equazione differenziale stocastica $dZ_1(t) = S(t)dt + dB(t)$, oppure
2) dall'equazione $dZ_2(t) = \lambda(S_t)dt + dM(t)$.

Adottando in entrambi casi l'impostazione di Bucy, Kallianpur e Striebel, che implica la relazione (11'), impiegheremo le derivate di Radon - Nikodym

$$L_1(t) = \exp\left\{\int_0^t S(u)dB(u) + \frac{1}{2}\int_0^t S^2(u)du\right\}$$

e, rispettivamente,

$$L_2(t) = \left[\prod_{j=1}^{Z(t)} \lambda(S_{\tau_j})\right].\exp\left\{\int_0^t [1 - \lambda(S_s)]ds\right\}$$

per ottenere la rappresentazione dei due stimatori non lineari ottimali del processo di segnale $S(t)$

$$\hat{S}_j(t) = \frac{E*[S(t).L_j(t)/F_t^Z]}{E*[L_j(t)/F_t^Z]} = \frac{\sigma_j(S_t)}{\sigma_j(1)}, \qquad j = 1, 2 .$$

Si prova (si veda per esempio il riferimento n. 14 in bibliografia) che il numeratore $\sigma_1(S_t)$ è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

(13) $$d\sigma_1(S_t) = b.\sigma_1(S_t)dt + \sigma_1(S_t^2)dY(t)$$

e che $\sigma_2(S_t)$ è soluzione della

$$d\sigma_2(S_t) = b.\sigma_2(S_t)dt + \sigma_2\left[\lambda(S_t) - 1\right]\left\{dN(t) - dt\right\} . \tag{14}$$

Allo scopo di non appesantire l'esposizione non ci soffermeremo ulteriormente sulla determinazione dei denominatori $\sigma_j(1), \quad j = 1,2$, in quanto casi particolari degli $\sigma_j(S_t)$, né sulla determinazione degli stimatori $\hat{S}_j(t)$ nei due casi considerati in quanto l'obiettivo principale che ci siamo proposti è quello di far intuire al lettore il tipo di problemi e, a grandi linee, i procedimenti adottati per la loro soluzione con il minimo impiego di strumenti matematici e statistici.

Un'ultima considerazione giustificativa sul fatto che nel primo problema di stima affrontato non abbiamo usato i procedimenti Bayesiani impiegati negli altri due problemi di stima. Il motivo è dato dall'importanza storica dei procedimenti ricorsivi di Kalman e di Kalman e Bucy: è nostra opinione che anche in una esposizione sommaria sui problemi di filtraggio non va trascurato tale risultato che è all'origine di un filone di ricerca che ha avuto uno sviluppo formidabile, sia in campo teorico che applicativo. Ovviamente, anche nel primo problema si potevano applicare i metodi Bayesiani; per maggiori informazioni rinviamo il lettore interessato per esempio alle Lecture Notes di P. Chigansky (riferimento bibliografico n. 3).

APPENDICE

DAL TEOREMA DI BAYES ALLA FORMULA DI KALLIANPUR - STRIEBEL

Si consideri il seguente semplice problema: siamo interessati all'approssimazione del n.a. X, considerato non osservabile, basata sull'osservazione del valore del n.a. $Y = X + Z$ ove Z è assunto indipendente da X; si assume anche che i n.a. X e Z abbiano momenti secondi finiti.

E' noto che l'approssimatore lineare affine dei minimi quadrati per X , indicato con $\mathrm{P}(X \,|1, Y)$, è dato dalla proiezione ortogonale di X sullo spazio lineare generato dal numero certo 1 e dal numero aleatorio osservabile Y; supponendo di conoscere i valori dei momenti del primo e secondo ordine della coppia (X, Y) si ha:

$$\mathrm{P}(X \,|1, Y) = E(X) + \frac{Cov(X, Y)}{Var(Y)}.\left[Y - E(Y)\right] = E(X) + \frac{Var(X)}{Var(X) + Var(Z)}.\left[Y - E(X) - E(Z)\right],$$

ove l'ultima espressione è giustificata dall'indipendenza stocastica tra gli addendi di $Y = X + Z$.

E' anche noto che se le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Z(z)$ hanno forma funzionale Gaussiana allora l'approssimatore non lineare dei minimi quadrati, $E(X \,|Y)$, coincide con $\mathrm{P}(X \,|1, Y)$ poiché in tal caso la funzione di regressione di X rispetto Y è lineare affine; possiamo quindi scrivere:

$$E(X \,|Y) = \mathrm{P}(X \,|1, Y) = E(X) + \frac{Var(X)}{Var(X) + Var(Z)}.\left[Y - E(X) - E(Z)\right].$$

Se le due densità marginali $f_X(x)$ e $f_Z(z)$ non sono entrambe Gaussiane il calcolo della $E(X \,|Y)$ risulta dall'applicazione del teorema di Bayes; poiché riesce $E(X \,|Y = y) = \int_R x.f(x|y)dx$ è necessario determinare la densità condizionata $f(x|y)$ nel modo abituale, tenendo ovviamente conto dell'indipendenza tra X e Z:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Z}(x, y-x)}{\int_R f_{X,Z}(x, y-x)dx} = \frac{f_X(x).f_Z(y-x)}{\int_R f_X(x).f_Z(y-x)dx} .$$

E’ evidente che l’ultimo rapporto coincide con l’espressione del teorema di Bayes in cui la funzione di verosimiglianza, per le particolari assunzioni fatte, coincide formalmente con la $f_Z(y-x)$. Possiamo allora scrivere:

$$E(X|Y)=\int_R x.\frac{f_X(x).f_Z(Y-x)}{\int_R f_X(x).f_Z(Y-x)dx}dx \ .$$

Abbandonando il modello precedente, ma volendo ancora determinare l’approssimatore non lineare dei minimi quadrati per un n.a. X in base all’osservabilità di Y si supponga di conoscere la densità marginale $f_X(x)$ e la famiglia delle densità condizionate { $f_{Y|X}(y|x); x\in R$ }. In questo caso è:

$$E(X|Y=y)=\int_R x.\frac{f_X(x).f_{Y|X}(y/x)}{\int_R f_X(x).f_{Y|X}(y/x)dx}dx$$

e quindi
$$E(X|Y)=\int_R x.\frac{f_X(x).f_{Y|X}(Y/x)}{\int_R f_X(x).f_{Y|X}(Y/x)dx}dx \ .$$

Si osservi che l’ultima espressione può anche essere scritta come rapporto di funzioni di regressione rispetto a Y:

$$E(X|Y)=\int_R x.\frac{f_X(x).f_{Y|X}(Y/x)}{\int_R f_X(x).f_{Y|X}(Y/x)dx}dx=\frac{E\left\{X.f_{Y|X}(Y/X)\middle|Y\right\}}{E\left\{f_{Y|X}(Y/X)\middle|Y\right\}} \ ;$$

ritroveremo una rappresentazione analoga nella formula di Kallianpur - Striebel.

Il problema di stima non lineare riguarderà ora processi stocastici a parametro continuo e non singoli numeri aleatori; considereremo il modello costituito dalle due seguenti equazioni differenziali stocastiche definite nell’intervallo di tempo limitato $0\le t\le T$:

$$dX(t)=b(X_t)dt+dW(t) \quad e \quad dY(t)=h(X_t)dt+dV(t),$$

ove $X(t)$ è supposto non osservabile, mentre risulta osservabile la trasformazione di $X(t)$ costituita dal processo $Y(t)$; i processi $V(t)$ e $W(t)$ sono processi di Wiener standard tra loro indipendenti e indipendenti da X(0). Si assume infine che i processi stocastici $b(X_t)$ e $h(X_t)$ soddisfino opportune condizioni di integrabilità.

Data la complessità del modello si richiedono alcune precisazioni generali. Tutti i numeri aleatori che intervengono nel modello sono definiti nello spazio di probabilità (Ω,F,P) nel quale dovremo introdurre una seconda misura di probabilità P*. Per farlo, fissato un numero aleatorio $L(\omega)\ge 0$ e tale che $E_P(L)=1$, definiamo per ogni sottoinsieme A di F la probabilità $P^*(A)=\int_A L(\omega)dP(\omega)$; evidentemente è $P^* << P$. $L(\omega)=\dfrac{dP^*(\omega)}{dP(\omega)}$ è detta "derivata di Radon – Nikodym di P* rispetto a P". Se $L(\omega)>0$ allora è anche;

$$P << P^* \text{ e } \frac{dP(\omega)}{dP^*(\omega)}=\frac{1}{L(\omega)}.$$

Nel modello sopra descritto, indicata con $\{F_t^Y; t\in[0,T]\}$ la filtrazione generata da $Y(t)$ e contenuta nella $\sigma-$algebra F, il nostro obiettivo è la determinazione dello stimatore non lineare $E\left(X_t / F_t^Y\right)$ che risulterà espresso dalla formula di Kallianpur - Striebel

$$E\left(X_t / F_t^Y\right)=\frac{E^*\left[X_t \dfrac{dP_t}{dP_t^*} / F_t^Y\right]}{E^*\left[\dfrac{dP_t}{dP_t^*} / F_t^Y\right]}.$$

Introduciamo dunque il processo stocastico $L_1(t)=\exp\left\{-\int_0^t h(X_s)dV(s)-\frac{1}{2}\int_0^t h^2(X_s)ds\right\}$ e, nell'ipotesi che sia $E[L_1(t)]=1$ per ogni $t\le T$, definiamo la misura di probabilità P^* mediante la

$$dP^*(\omega)=L_1(T)dP(\omega).$$

E' $P^* << P$ e risulta anche $P_t^* << P_t$ per le restrizioni P_t^* e P_t su ogni $\sigma-$algebra F_t^Y delle due misure P^* *e* P; inoltre si dimostra che $L_1(t)=\dfrac{dP_t^*}{dP_t}$ è una martingala rispetto alla misura P. Risulta anche $dP_t=L_1^{-1}(t)dP_t^*$ per ogni $t\le T$, per la positività di $L_1(t)$.

Per un importante teorema di I.V. Girsanov (per il quale si vedano per esempio i riferimenti bibliografici 3 o 11) si ha che rispetto alla nuova misura di probabilità P^*

1) Il processo $Y(t)$ ha le proprietà di un processo di Wiener,
2) I processi $Y(t)$ e $X(t)$ sono indipendenti,
3) Sussiste la relazione seguente $E\left[X(t)/F_t^Y\right]=\dfrac{E^*\left[X(t).L_1^{-1}(t)/F_t^Y\right]}{E^*\left[L_1^{-1}(t)/F_t^Y\right]}$ che costituisce una versione della formula di Kallianpur – Striebel. Naturalmente gli operatori $E^*[...]$ nel rapporto a secondo membro sono relativi alla misura di probabilità P^*.

Supponiamo ora che il problema di stima non lineare riguardi le seguenti due equazioni differenziali stocastiche

$$dX(t)=b(X_t)dt+dW(t) \quad e \quad dZ(t)=\lambda(X_t)dt+dM(t),$$

ove $Z(t)$ è un processo di Poisson con intensità aleatoria $\lambda(X_t)$ ed $M(t)$ un processo martingala. Il cambiamento della misura P nella nuova misura P* è realizzato dalla derivata di Radon – Nikodym

$$\frac{dP_t^*}{dP_t} = L_2(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \ln\left[\lambda(X_s)\right] dZ(s) - \int_0^t \left[1 - \lambda(X_s\right] ds \right\}.$$

Si dimostra che sussiste la

$$L_2^{-1}(t) = \frac{dP_t}{dP_t^*} = \left[\prod_{j=1}^{Z(t)} \lambda(S_{\tau_j}) \right] . \exp\left\{ \int_0^t \left[1 - \lambda(S_s)\right] ds \right\}$$

e infine che

$$\hat{S}(t) = E_P\left[S(t) / F_t^Z\right] = \frac{E*\left[S(t).L_2^{-1}(t) / F_t^Z\right]}{E*\left[L_2^{-1}(t) / F_t^Z\right]}.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1) Applebaum D. (2009), Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge University Press
2) Bremaud P. (1981), Point processes and queues. Springer – Verlag
3) Chigansky P. (2007), "Nonlinear filtering." Lecture Notes. On line.
4) Davis M.H.A. (1977), Linear Estimation and Stochastic Control. Chapman and Hall
5) Kailath T. (1968), "Innovation approach to least squares estimation, part I." IEEE Trans. Automatic Control, 13, 646 – 654.
6) Kalman R.E. and Bucy R.S. (1961), "New results in linear filtering and prediction theory." Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg. 83, 95 – 108.
7) Krishnan V. (1984), Nonlinear Filtering and Smoothing. Dover Publication, Inc.
8) Jazwinski A.H. (1970), Stochastic processes and filtering theory. Academic Press
9) Liptser R.S. and Shiryaev A.N. (1978), Statistics of random processes. Springer – Verlag
10) Merton R. (1976), "Option Pricing When the Underlying Stock Returns are Discontinuous." Journal of Financial Economics 3, 125 – 144. North Holland P.
11) Oksendal B. (1998), Stochastic Differential Equations: an introduction with applications. Springer
12) Plienpanich T. (2007), "On some problems of stochastic filtering applied to finance" PhD thesis. On line.
13) Runggaldier W.J. (2002), "Jump – Diffusion Models" . Dipartimento di Matematica Pura e Applicata. Università di Padova.
14) Rupnik Poklukar D. (2006), "Nonlinear filtering for jump – diffusions". J. of Computational and Applied Mathematics 197, 558 – 567.
15) Wedlin A. (2013), "Processi stocastici Jump – Diffusion: aspetti probabilistici." Working Paper n. 13/2. Dipartimento di discipline matematiche, finanza matematica ed econometria dell'Università Cattolica di Milano.