

454434

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

DIPARTIMENTO DI ASTRONOMIA

CORSO DI DOTTORATO IN FISICA - ^{VIII}~~IX~~ CICLO

TESI DI DOTTORATO

LA FUNZIONE DI MASSA COSMOLOGICA

Dottorando:

Pierluigi Monaco '69

en

Pierluigi Monaco

Tutore:

Prof. Fabio Mardirossian

Fabio Mardirossian

Coordinatore:

Prof. Paolo Schiavon

Paolo Schiavon

DR066)11

A mio padre e mia madre

Ringraziamenti

Questa tesi giunge alla sua forma finale grazie ai continui stimoli che ho ricevuto durante il mio corso di dottorato, ed alle continue interazioni che ho avuto con i ricercatori con cui sono entrato in contatto. Questi continui scambi, sia umani che scientifici, sono stati possibili grazie alla vivacità dell'ambiente scientifico di Trieste.

Vorrei ringraziare e nominare tutti i professori, ricercatori, ed i colleghi dottorandi che mi hanno aiutato. Spero di non aver dimenticato qualcuno, e se dovesse essere successo, me ne scuso. In particolare, vorrei ringraziare il mio supervisore Fabio Mardirossian, per il suo continuo appoggio, la sua guida ed i suoi suggerimenti. Dennis Sciama e Luigi Danese mi hanno, fin dalla mia tesi di laurea e per tutto il corso del dottorato, ospitato all'interno del settore di Astrofisica della SISSA di Trieste. Molto ho imparato, sia come nozioni che come atteggiamento scientifico, grazie alla mia lunga e fruttuosa collaborazione con Giuliano Giuricin, e Marino Mezzetti.

Il mio interesse per il problema della funzione di massa cosmologica è nato parlando con Sabino Matarrese, il quale è stato per un anno il mio riferimento per tutte le complesse questioni tecniche che riguardano la cosmologia teorica. Hanno portato molti frutti le mie discussioni soprattutto con Alfonso Cavaliere, con il quale abbiamo a lungo ed in più riprese discusso sul problema della funzione di massa, e con Sergei Shandarin, Stefano Borgani, Marco Bruni, Thomas Buchert, Paolo Catelan, Vahe Gurzadyan, Nicola Menci, Massimo Persic, Manolis Plionis, Paolo Salucci, Paolo Tozzi, Riccardo Valdarnini. Francesca Matteucci mi ha stimolato ed incoraggiato a sottomettere questa tesi alla rivista *Fundamentals of Cosmic Physics*. Debbo anche ringraziare Cristiano Porciani per i suoi commenti sulla prima versione della tesi.

L'ambiente della SISSA e del dipartimento di Astronomia di Trieste mi ha profondamente arricchito, al di là delle competenze tecniche che ho acquisito: non posso quindi non rivolgere un pensiero ai miei colleghi Dario Fadda, Marco Cavaglià, Luca Zampieri, Alejandro Gangui, Luciano Rezzolla, Marisa Girardi, Andrea Biviano, Armando Pisani, Enzo Branchini, Valentina D'Ondorico, Laura Silva, Stefano Liberati, Emanuela Pompei, Christian Marinoni, Barbara Costantini, Walter Boschin, e tutti gli altri numerosi studenti e non della SISSA.

Non posso infine dimenticare coloro i quali, dall'esterno del mondo accademico, mi hanno appoggiato in questa avventura: la mia famiglia, Giulia, i miei amici, e gli amici della Comunità S. Martino al Campo, con i quali ho passato un anno indimenticabile durante il mio servizio civile.

Indice

0	Introduzione	7
1	Dinamica nei modelli cosmologici	13
1.1	Modelli cosmologici	14
1.2	Cosmologia teorica: un sommario	21
1.2.1	Cosmologia di background	21
1.2.2	Perturbazioni	24
1.2.3	Teoria Euleriana lineare	25
1.2.4	Collasso sferico	27
1.2.5	Formulazione Lagrangiana	28
1.2.6	Perturbazioni Lagrangiane ed altre approssimazioni	32
1.2.7	Statistica	35
1.3	La formazione delle strutture collassate	38
2	La teoria della funzione di massa	45
2.1	La funzione di massa di Press & Schechter	45
2.2	Simulazioni ad N corpi	49
2.3	Approccio degli insiemi di escursione	51
2.3.1	Estensioni del formalismo di PS	51
2.3.2	Il problema CIC	52
2.3.3	Storie di accrescimento	55
2.3.4	Correlazioni spaziali	56
2.4	Il formalismo dei picchi	57
2.4.1	La massa di picchi	58
2.4.2	Il problema picco-nel-picco	59
2.5	Modelli dinamici	61
2.5.1	Approcci del tipo PS	61
2.5.2	Tempi scala	62
2.5.3	Approccio cinetico	63
2.5.4	Il modello dell'adesione	65
2.5.5	Perturbazioni Lagrangiane	66

3	Dinamica e la funzione di massa	67
3.1	Approssimazione di Zel'dovich	68
3.1.1	Il ruolo delle maree	68
3.1.2	Tempi di collasso con Zel'dovich	69
3.2	Collasso ellissoidale	73
3.2.1	L'ellissoide omogeneo da un Universo perturbato	75
3.2.2	Tempi di collasso	76
3.3	Perturbazioni Lagrangiane	79
3.3.1	Perturbazioni Lagrangiane e collasso ellissoidale	80
3.3.2	Campi Gaussiani	86
3.4	Tempi di collasso inversi	92
3.5	Discussione	97
4	Statistica e la funzione di massa	101
4.1	Approcci del tipo PS	102
4.2	Il formalismo della diffusione: filtri SKS	107
4.2.1	Un'equazione di Fokker-Planck per F	107
4.2.2	Il problema della barriera mobile	110
4.3	Filtri Gaussiani	119
4.4	Dalla risoluzione alla massa	126
4.5	Discussione	129
5	Il mondo della funzione di massa	131
5.1	Galassie	132
5.1.1	La funzione di massa galattica	132
5.1.2	Formazione galattica e cosmologia	134
5.2	Gruppi ed ammassi di galassie	138
5.2.1	Stime di massa	138
5.2.2	Ammassi e cosmologia	144
5.2.3	Discussione	147
5.3	Oggetti ad alti redshift	148
5.3.1	Formazione di QSO in ambito cosmologico	149
5.3.2	Nubi Lyman α	154
6	Prospettive	157
6.1	Il confronto con le simulazioni	160
7	Bibliografia	163

A	Altri lavori	173
A.1	Effetti d'ambiente	173
A.2	Emissione galattica nel medio infrarosso	176
A.3	La relazione di Gurzadyan-Kocharyan	177
A.4	Referenze	178

Capitolo 0

Introduzione

I modelli cosmologici sono costruiti per predire le caratteristiche essenziali delle strutture cosmologiche osservate. Tali modelli devono quindi predire la formazione di strutture caratterizzate da densità molto più alte della densità media cosmologica; queste strutture possono di volta in volta corrispondere agli ambienti che ospitano i QSO, alle nubi Lyman α , alle galassie, ai gruppi ed agli ammassi di galassie. Le strutture ad alta densità sono più o meno isolate nella maggiorparte se non in tutti i casi, per cui è possibile definire una massa associata ad esse (non è questo il caso della rete a grande scala di muri e filamenti di galassie, strutture caratterizzate da bassi contrasti di densità). La distribuzione delle masse di tali oggetti è comunemente chiamata funzione di massa, o funzione di molteplicità; essa è l'argomento principale di questa tesi.

La determinazione della funzione di massa è un problema complicato e non ancora risolto, sia dal punto di vista teorico che da quello osservativo. La determinazione analitica esatta della funzione di massa è ostacolata, anche negli scenari cosmologici più semplici, dal fatto che la formazione degli oggetti di alta densità è regolata dalla dinamica gravitazionale altamente non lineare; è ben noto come il problema del collasso gravitazionale, anche nel semplice caso di un fluido Newtoniano senza pressione, non sia mai stato risolto, se non nel caso di semplici simmetrie (sferica, planare). Si possono usare grandi simulazioni ad N corpi per determinare numericamente la funzione di massa; tuttavia tali simulazioni, oltre ad essere costose in termini di tempo macchina e limitate nella risoluzione, forniscono approssimazioni numeriche della soluzione finale, senza però aiutare immediatamente nella comprensione del difficile problema del collasso gravitazionale. Argomenti analitici approssimati, pur essendo di validità limitata, possono fornire utili soluzioni pienamente comprese, da confrontare successivamente con le simulazioni.

Dal punto di vista osservativo, la principale quantità immediatamente os-

servabile delle strutture è la loro luminosità; questa è sicuramente connessa con la massa della struttura, ma in maniera complicata, dipendente da eventi astrofisici come il riscaldamento ed il raffreddamento del gas, la formazione stellare, la reazione di ritorno dovuta alle supernove e così via. La teoria della funzione di massa è il primo passo per la determinazione teorica della funzione di luminosità. D'altra parte, si possono oggi stimare osservativamente le masse delle strutture con un certo numero di metodi indiretti: per esempio, le masse delle galassie possono essere determinate, fino ad alcuni raggi ottici, per mezzo dei campi di velocità delle stelle componenti, o per mezzo del moto delle piccole galassie satelliti, mentre la massa degli ammassi di galassie può essere stimata tramite la dispersione delle velocità delle galassie, l'emissione nella banda X del gas caldo in essi contenuto, o tramite l'effetto di lente gravitazionale sulle galassie di sfondo. Tali metodi hanno portato o porteranno nel vicino futuro ad una determinazione osservativa della funzione di massa di tali strutture.

La prima determinazione teorica della funzione di massa fu fatta da Press & Schechter (1974). La procedura da loro proposta è basata su un'estrapolazione del regime lineare della crescita delle perturbazioni cosmologiche fino al regime di collasso. Tale procedura è sicuramente insoddisfacente dal punto di vista teorico: essa ignora completamente molte delle difficoltà del collasso gravitazionale, come il ruolo delle maree e la complicata geometria del collasso, ed inoltre predice che soltanto metà della massa è destinata a finire nelle strutture collassate, mentre ci si aspetta che tutta la massa collassi su qualche scala. Malgrado tutti i suoi difetti, la funzione di massa di Press e Schechter ha due importanti meriti: è molto semplice da ricavare, e, come mostrerò nel seguito, funziona, nel senso che riesce a predire il giusto numero di strutture che si formano nelle simulazioni ad N corpi.

Dopo il successo dei primi confronti tra la formula di Press e Schechter e le simulazioni ad N corpi, tra il 1988 ed il 1992 la teoria della funzione di massa conobbe una vera e propria esplosione di interesse da parte di molti autori, i quali proposero diverse procedure per superare i problemi della suddetta teoria. Dal 1995, la teoria della funzione di massa sta conoscendo una nuova ondata di interesse. Come detto prima, il problema non è stato ancora "risolto", ma sono stati sviluppati molti approcci promettenti. D'altra parte, la formula di Press e Schechter fornisce ancora, secondo molti autori (ma non tutti!), una maniera molto semplice ed efficace per predire la funzione di massa in molti casi pratici.

Il motivo di questa attenzione nei riguardi della teoria della funzione di massa è che essa è ancora colpita da un numero di incertezze. La dinamica gravitazionale viene spesso trattata in modo irrealistico, basandosi sulla teoria lineare o sul collasso sferico. Spesso la massa totale degli oggetti è una

quantità non ben definita, specialmente quando vengono considerate strutture “giovani”, come gli ammassi di galassie, che sono ancora in una fase transiente. Le numerose procedure statistiche che sono state sviluppate per contare il numero di oggetti collassati, malgrado siano state ampiamente analizzate, presentano ancora molti importanti problemi tecnici. Anche la funzione di massa osservativa risente delle difficoltà nella definizione stessa di massa totale di una struttura, oltre che di grandi incertezze nelle misure osservative oggi disponibili.

Vale dunque la pena di approfondire il problema della funzione di massa. Infatti, grazie a tali approfondimenti sarà possibile nel vicino futuro porre forti vincoli ai modelli cosmologici. Inoltre, la teoria della funzione di massa, fornendo le abbondanze e le principali proprietà delle strutture di materia oscura, costituisce il primo passo per la modellistica di quegli oggetti all'interno dei quali il gas evolve e diventa osservabile. Contemporaneamente, lo studio della teoria della funzione di massa potrà portare ad un approfondimento del problema della dinamica gravitazionale nel regime altamente non lineare, ed il confronto delle predizioni teoriche con le simulazioni ad N corpi potrà fornire utili suggerimenti su come analizzare le simulazioni stesse.

Questa tesi è organizzata come segue. Il capitolo 1 contiene un'introduzione cosmologica; esso è focalizzato sul problema della dinamica gravitazionale in cosmologia, il quale è affrontato sia in maniera qualitativa (§1.1), attraverso una discussione generale, che in maniera quantitativa (§1.2), attraverso l'introduzione di tutti gli strumenti matematici che saranno sfruttati nei capitoli seguenti. Il problema della formazione delle strutture cosmologiche è schematicamente discusso nella §1.3.

Il capitolo 2 contiene una rassegna non breve della teoria della funzione di massa. La procedura di Press e Schechter è spiegata nella §2.1, dove si discutono i suoi meriti e problemi principali. Nella §2.2 si descrivono i confronti tra la teoria e le simulazioni numeriche. Le rimanenti sezioni descrivono tutti i lavori teorici in cui è stata estesa la validità del lavoro originale di Press e Schechter, o in cui sono state proposte procedure alternative.

I capitoli 3 e 4 descrivono la costruzione di una teoria della funzione di massa che sia completamente basata su una descrizione realistica della dinamica gravitazionale. Il capitolo 3 discute come ottenere stime realistiche per il tempo di collasso di un elemento di massa, utilizzando approssimazioni basate sulla formulazione Lagrangiana della dinamica dei fluidi. In particolare, la §3.1 analizza l'approssimazione di Zel'dovich (1970), la §3.2 il modello del collasso di un ellissoide omogeneo, e la §3.3 la teoria delle perturbazioni Lagrangiane. Nella §3.4 viene trovata la funzione distribuzione di probabilità dei tempi inversi di collasso, una quantità che è necessaria per la costruzione della funzione di massa, mentre la §3.5 presenta alcune considerazioni finali.

Le procedure statistiche necessarie per la costruzione della funzione di massa sono descritte nel capitolo 4. Si può ottenere una prima determinazione della funzione di massa per mezzo di una procedura simile a quella originale di Press e Schechter, come discusso nella §4.1. Un approccio più evoluto, che eviti il problema della sottonormalizzazione, richiede un'accurata analisi per poter essere introdotto (§4.2); si dimostra che i risultati dipendono molto da un particolare tecnico, cioè dalla procedura di filtraggio utilizzata, come discusso nella §4.3. La §4.4 descrive le ulteriori complicazioni a cui si va incontro quando si passa dalla variabile risoluzione alla variabile massa. Infine, la §4.5 presenta le conclusioni principali sulla teoria dinamica della funzione di massa.

Il capitolo 5 descrive il mondo della funzione di massa. Il capitolo si focalizza su tre aspetti principali: la determinazione osservativa delle masse delle strutture cosmologiche, le applicazioni della teoria della funzione di massa e le possibili applicazioni della teoria dinamica descritta nei capitoli precedenti. La §5.1 tratta le galassie, la §5.2 i gruppi ed ammassi di galassie, e la §5.3 gli oggetti ad alti redshift, come QSO e nubi Lyman α .

Infine, il capitolo 6 presenta le prospettive future della teoria dinamica della funzione di massa, dal confronto con le simulazioni numeriche alle applicazioni future che sono in progetto.

La tesi si conclude con una discussione, contenuta in un'appendice, sugli altri lavori sviluppati durante il mio corso di dottorato. La discussione verte soprattutto sullo studio sistematico degli effetti esercitati dall'ambiente sulle galassie vicine. Abbiamo analizzato un catalogo completo di galassie con redshift inferiore a 3000 km/s; per tutte le galassie è nota una distanza, calcolata sulla base del redshift, correggendo per i moti peculiari su grande scala tramite un modello di caduta sull'ammasso della Vergine. Per tutte queste galassie è stato calcolato un parametro di densità ambientale, uguale alla densità locale di galassie attorno all'oggetto considerato; tale parametro risulta naturalmente definito in dipendenza della scala considerata: le densità a scale diverse danno informazioni diverse.

Sono quindi state analizzate le correlazioni della densità ambientale con varie proprietà delle galassie. In particolare, la presenza di una barra risulta influenzata dall'ambiente solo per le galassie di tipo morfologico Sa ed Sab, la morfologia delle braccia a spirali risulta correlata alla densità in maniera diversa a seconda che siano considerate galassie più o meno luminose, l'attività nucleare non stellare risulta fortemente influenzata dall'ambiente, mentre non si riesce a rilevare alcuna correlazione tra la densità ed il rapporto tra la luminosità del bulbo galattico e quella del disco, a parità di tipo morfologico.

Infine, sono brevemente descritti altri due lavori, il primo sull'emissione delle galassie a spirale nel medio infrarosso e sulla sua correlazione con altre proprietà galattiche, dalle peculiarità morfologiche alla presenza di un nucleo attivo, ed il secondo sulla funzione di correlazione a due punti per le galassie in ammassi, la quale appare più piatta di quella relativa alle galassie di campo, il che è in accordo con le predizioni di un particolare modello matematico.

Alla tesi sono allegate le principali pubblicazioni delle quali sono stato (co)autore durante il mio corso di dottorato.

Capitolo 1

Dinamica gravitazionale nei modelli cosmologici

È oggi ampiamente accettato il paradigma secondo cui le strutture cosmologiche che osserviamo sono nate dalla crescita di piccole perturbazioni in un Universo quasi-omogeneo. L'origine di tali fluttuazioni è generalmente associata a fluttuazioni quantistiche sorte durante un'era inflazionaria, la quale avrebbe avuto luogo poco dopo il Big Bang. Molte evidenze osservative suggeriscono la presenza di una componente di materia oscura, gravitazionalmente dominante (che può essere composta da più specie), responsabile per le fluttuazioni della materia. Malgrado molti sforzi siano stati compiuti, il problema dell'evoluzione gravitazionale di tali perturbazioni rimane un problema non risolto dal punto di vista analitico, eccetto in casi speciali come le teorie perturbative (le quali danno una descrizione accurata finché le perturbazioni non sono troppo grandi), o le soluzioni esatte in simmetrie speciali, come quella planare o sferica. Tali soluzioni, anche se non hanno validità generale, possono essere d'aiuto per capire alcune proprietà delle strutture collassate.

Questo capitolo descrive in un certo dettaglio i modelli cosmologici entro i quali la teoria della funzione di massa è stata sviluppata, ed i processi di formazione delle strutture cosmologiche secondo questi modelli. La §1.1. descrive lo scenario di instabilità gravitazionale, le principali famiglie di modelli proposti che non siano ancora stati esclusi dalle osservazioni, ed i vari strumenti analitici che possono fornire valide predizioni sull'evoluzione di una configurazione iniziale quasi omogenea nel regime altamente non lineare. La §1.2 presenta il formalismo matematico usato in cosmologia e nel presente lavoro. La §1.3 presenta il processo di formazione delle strutture, descrivendo le complicazioni del processo reale ed alcune (super)semplificazioni che possono rendere il problema trattabile.

Lo scopo di questo capitolo è quello di dare un sommario dei principali

argomenti della cosmologia teorica, definire la notazione usata e dare alcuni commenti su punti rilevanti per le analisi future. Gli argomenti trattati in questo capitolo sono standard nella cosmologia (eccetto dove esplicitamente detto); presentazioni complete possono essere trovate in molti libri di testo, tra cui Weinberg (1972), Peebles (1980), Kolb & Turner (1989), Lucchin (1990; in italiano), Padmanabhan (1993), Peebles (1993), Coles & Lucchin (1995).

1.1 Modelli cosmologici

Secondo lo scenario “standard” della teoria di formazione delle strutture cosmologiche, l’Universo, subito dopo il Big Bang (quando la temperatura era attorno ai 10^{15} GeV), subì una fase di espansione accelerata, causata da una transizione di fase di un campo (chiamato *inflatone*) la cui energia di vuoto venne a dominare. Quando l’energia di vuoto domina, la pressione diventa negativa e quindi attrattiva; questo effetto è analogo all’effetto Casimir, dove due lamelle di metallo nel vuoto sono attratte a causa delle fluttuazioni quantistiche del campo elettromagnetico. In relatività generale, una pressione negativa causa un’espansione accelerata della metrica, chiamata inflazione. L’inflazione è stata invocata come meccanismo capace di risolvere contemporaneamente molti problemi, cioè (a) il problema della piattezza dell’Universo, (b) l’uniformità del fondo cosmico nelle microonde (*cosmic microwave background*, CMB), (c) la scomparsa di eventuali difetti topologici, come i monopoli, creati in precedenti transizioni di fase, (d) l’origine delle fluttuazioni primordiali. I primi tre problemi non sono del tutto rilevanti per la discussione futura; il lettore interessato può ad esempio consultare i libri di testo di Kolb & Turner (1989) e Coles & Lucchin (1995). Ciò che è rilevante è che le fluttuazioni primordiali possono avere origine durante l’era inflazionaria come fluttuazioni quantistiche; la dilatazione causata dall’espansione accelerata può rendere tali fluttuazioni “classiche” (decoerenza quantistica).

Non esiste una sola teoria dell’inflazione: tali teorie si basano sulle teorie delle particelle alle alte energie, molte delle quali sono state proposte. Comunque, molte teorie inflazionarie sono in accordo nel predire proprietà molto semplici del campo di perturbazioni. Le predizioni principali sono le seguenti:

- L’universo tipico alla fine dell’inflazione è localmente del tipo (quasi) Einstein-de Sitter (vedi §1.2), qualsiasi sia la geometria iniziale (che può persino essere caotica); ciò implica che la densità del background cosmologico sia oggi quasi uguale a quella critica: $\Omega = 1$. D’altro canto,

sono stati sviluppati molti scenari particolari che predicono $\Omega < 1$; la piattezza del modello di background è spesso preservata grazie ad un termine di costante cosmologica.

- Il campo delle perturbazioni è di solito assunto Gaussiano; il teorema del limite centrale assicura che, nel momento in cui la situazione sia abbastanza “complicata”, la statistica Gaussiana è inevitabile. D'altronde, alcuni scenari particolari predicono specifiche, deboli caratteristiche non Gaussiane.
- Lo spettro di potenza delle fluttuazioni della materia è tipicamente $P(k) \propto k$ (vedi la §1.2.7 per una definizione precisa). Tale spettro era già stato proposto da Harrison (1970) e Zel'dovich (1972): viene prodotto quando le fluttuazioni del potenziale gravitazionale entrano nell'orizzonte tutte con la stessa ampiezza. In pratica, le teorie di inflazione predicono spettri di potenza *tilted*, del tipo $P(k) \propto k^n$, con n leggermente diverso da uno (è da notare che le misure delle fluttuazioni del CMB su grande scala vincolano l'indice spettrale n ad essere non molto diverso da uno).
- L'inflazione predice la presenza di un fondo stocastico di onde gravitazionali (*modi tensoriali*), che può essere trascurabile o consistente. Tali onde non hanno influenza sulla susseguente evoluzione delle perturbazioni, poiché i modi tensoriali non possono collassare, ma vengono osservate sul CMB a grandi scale.
- L'inflazione non predice l'ampiezza delle fluttuazioni primordiali; tale ampiezza va determinata attraverso un confronto con i dati osservativi. Quando non erano ancora state osservate le fluttuazioni del CMB, lo spettro veniva normalizzato utilizzando la distribuzione spaziale delle galassie. Dopo le osservazioni del satellite COBE, la normalizzazione dello spettro viene fatta attraverso le fluttuazioni del CMB sulle scale più grandi; in questa normalizzazione entra in gioco l'eventuale presenza di onde gravitazionali.

Una volta conosciute le proprietà statistiche delle fluttuazioni primordiali, il campo di fluttuazioni può essere evoluto fino alla ricombinazione, quando la temperatura raggiunge valori abbastanza bassi da permettere al gas ionizzato di ricombinarsi, disaccoppiandosi così dalla radiazione; questo è l'istante nel quale il CMB diventa osservabile. L'evoluzione delle perturbazioni fino alla ricombinazione è relativamente facile da seguire, poiché queste rimangono sempre piccole, così che la teoria lineare può sempre essere applicata (vedi

la §1.2.3). D'altro canto, tale evoluzione dipende dal numero e dal tipo di particelle presenti nel fluido cosmologico. Qui la natura della materia oscura (calda, fredda, tiepida, mista) diventa importante: le grandi dispersioni di velocità in una componente di materia calda (HDM), cioè in moto relativistico quando si disaccoppia dal resto dell'Universo, cancellano le fluttuazioni su piccole scale, mentre la materia oscura fredda (CDM), caratterizzata da trascurabili dispersioni di velocità, preserva le fluttuazioni su tutte le scale cosmologicamente rilevanti. Dato che l'evoluzione è lineare, lo spettro di potenza alla ricombinazione è connesso a quello primordiale per mezzo di una funzione di trasferimento $T(k)$:

$$P_{rec}(k) = P_{prim}(k)T^2(k). \quad (1.1)$$

Funzioni di trasferimento per molti diversi scenari sono a disposizione in letteratura.

Non è stato possibile decidere, dal punto di vista cosmologico, quale tipo di materia domini il nostro universo. In ogni caso, due conclusioni sembrano trovare ampio consenso: i modelli puramente barionici sono quasi del tutto esclusi dal vincolo del CMB, della nucleosintesi e della struttura a grande scala, specialmente se si crede che l'universo sia piatto ($\Omega = 1$, vedi la §1.2.1). Secondo, i modelli di pura HDM, non avendo potenza su piccola scala, non riescono a predire la formazione di oggetti come le galassie. Il modello CDM è stato sicuramente il più discusso negli ultimi dieci anni. La CDM standard si basa sull'ipotesi che (a) l'universo sia piatto e senza costante cosmologica, (b) la costante di Hubble sia $H_0=50$ km/s/Mpc, (c) le fluttuazioni primordiali siano Gaussiane, con spettro del tipo Harrison-Zel'dovich. Prima delle osservazioni di COBE, lo spettro veniva normalizzato imponendo che la varianza di massa sulla scala di $8h^{-1}$ Mpc, σ_8 , fosse uguale ad uno, come suggerito dalle osservazioni (Davis & Peebles 1983); tuttavia, tali osservazioni sono relative alla varianza del numero di galassie, che può essere diversa da quella della massa per un fattore $b = 1/\sigma_8$ (*fattore di bias*; vedi Kaiser 1984, o Dekel & Rees 1987). I modelli di *biased CDM* supponevano un certo valore per il parametro di bias. Dopo COBE, tutti i modelli vengono normalizzati sul CMB (trascurando tipicamente il contributo delle onde gravitazionali); in tal caso, il modello CDM standard produce troppa potenza sulle piccole scale, ed è quindi escluso dalle osservazioni. Tuttavia, tale modello rimane un utile riferimento per le famiglie successive di modelli cosmologici, che sono spesso variazioni della CDM.

I principali modelli oggi in voga sono i seguenti:

- **open CDM:** modello CDM in un Universo aperto;

- Λ CDM: modello CDM in un Universo piatto con costante cosmologica;
- tilted CDM: modello CDM con spettro primordiale con n diverso da uno;
- C+HDM: modello con materia oscura mista, sia calda che fredda.

Prima di proseguire, è necessario sottolineare che lo scenario cosmologico appena presentato non è l'unico proposto. Una classe importante di scenari alternativi è quella dei difetti topologici (vedi, ad esempio, Kolb & Turner 1989 per una discussione dettagliata). Questi oggetti possono formarsi durante particolari transizioni di fase che hanno luogo durante l'era inflazionaria: a causa di una rottura spontanea di simmetria, punti diversi dello spazio-tempo raggiungono diversi equivalenti stati di vuoto; i difetti topologici si formano all'interfaccia di zone dominate dai diversi stati di vuoto. La loro topologia può spaziare da quella dei muri di dominio a quella delle stringhe, monopoli e *global textures*; mentre i muri di dominio e i monopoli sono esclusi dalle osservazioni, la validità degli scenari di stringhe cosmiche e di textures potrà essere controllata tramite le future osservazioni del CMB, specialmente quelle dei futuri satelliti MAP e COBRAS/SAMBA. Tali difetti topologici agiscono come semi della formazione di strutture su grande scala; per esempio, essi possono dare struttura a piccola scala allo scenario HDM.

Dopo la ricombinazione, le fluttuazioni continuano a crescere, finché diventano non lineari. A questo punto ha luogo la formazione delle strutture: si formano dei blocchi collassati di materia, i quali alla fine raggiungono una configurazione di equilibrio (virializzazione), passando attraverso complicate configurazioni transienti. Di fatto, le strutture cosmologiche più grandi, come gli ammassi di galassie, sono dominate da configurazioni transienti, mentre le strutture più piccole, come le galassie, hanno probabilmente raggiunto uno stato di equilibrio dinamico, almeno nelle loro parti interne. L'evoluzione gravitazionale non lineare delle perturbazioni può essere descritta tramite l'approssimazione Newtoniana, poiché queste perturbazioni sono molto più piccole dell'orizzonte cosmologico, le velocità ad esse associate sono non relativistiche, e le scale considerate sono più grandi dell'orizzonte degli eventi di qualsiasi oggetto compatto presente. La gravità Newtoniana è a carattere non locale (*azione a distanza*), nel senso che ogni particella è significativamente influenzata nel suo moto da tutte le altre particelle dell'Universo. È la non località a rendere il problema Newtoniano così difficile da trattare: per esempio, non è possibile in una simulazione numerica ad N corpi seguire il moto di una particella senza seguire contemporaneamente il moto di tutte le altre particelle.

Cionondimeno, sono stati sviluppati diversi metodi per seguire l'evoluzione delle perturbazioni nel regime non lineare, e quindi per descrivere la formazione delle strutture cosmologiche. Questi metodi sono qui descritti; la prossima sezione ne presenterà il formalismo matematico.

- **Simulazioni ad N corpi:** un metodo diretto per seguire le perturbazioni nel regime non lineare è quello di risolvere numericamente le equazioni del moto per condizioni iniziali e al contorno date. Questo viene fatto per mezzo di estese simulazioni ad N corpi, dove un reticolo perturbato di particelle approssima il continuo di materia (vedi, ad esempio, Klypin 1996). Le simulazioni ad N corpi hanno il grande merito di fornire una buona approssimazione numerica della soluzione esatta, ma hanno tre problemi principali: sono costose in termini di tempo macchina, limitate nella risoluzione (da rumore Poissoniano a piccole scale e dalla limitatezza della simulazione a grandi scale), e danno una soluzione “alla cieca”, che non illumina sui vari effetti dinamici responsabili per il comportamento del sistema. In ogni caso, una profonda comprensione del collasso gravitazionale può venire dal confronto delle varie approssimazioni analitiche con le simulazioni numeriche; di fatto, le simulazioni ad N corpi si sono rivelate uno strumento di inestimabile valore per descrivere l'evoluzione non lineare delle perturbazioni.
- **Teoria lineare:** su scale molto più grandi della scala di correlazione del campo di materia le perturbazioni sono ancora piccole. È quindi una buona approssimazione descriverle come se fossero in regime lineare, cioè trascurando il trasferimento non lineare di potenza dalle piccole alle grandi scale. La teoria lineare è presentata in dettaglio in Peebles (1980). Si potrebbe tentare di predire l'instaurarsi della non linearità estrapolando la teoria lineare fino a contrasti di densità dell'ordine di uno; questo è stato verificato dare una descrizione molto approssimativa della vera evoluzione non lineare delle strutture (vedi ad esempio Coles, Melott & Shandarin 1993).
- **Colasso sferico:** è uno dei pochi casi in cui si possono trovare soluzioni analitiche (Gunn & Gott 1972; Peebles 1980). In particolare, il collasso di una perturbazione sferica *top-hat* (densità costante all'interno di una sfera) è stato spesso usato per descrivere il collasso di strutture isolate, come galassie o ammassi di galassie. È da notare che il collasso sferico è locale: la sovradensità iniziale è l'unica informazione necessaria per evolvere il sistema. Matematicamente, il collasso corrisponde alla formazione di una singolarità (densità infinita). In pratica, le perturbazioni realistiche non sono perfettamente omogenee, per cui

non si raggiunge una singolarità; si assume di solito che a tale singolarità corrisponda il raggiungimento della virializzazione. Queste idee verranno commentate nella §1.3.

- **Collasso ellissoidale:** il collasso di un ellissoide omogeneo è descritto da un set di equazioni differenziali ordinarie accoppiate; non è stata trovata alcuna soluzione analitica, ma il sistema può facilmente essere integrato numericamente (White & Silk 1979; Peebles 1980; Monaco 1995; Bond & Myers 1996a). A differenza del modello sferico (che è contenuto come caso limite), il collasso ellissoidale tiene in parte conto dell'Universo circostante, per mezzo di una forza mareale globale. Il modello ellissoidale è stato talvolta usato per descrivere il collasso di strutture cosmologiche; esso sarà descritto in dettaglio nella §3.2.
- **Picchi:** un'idea in embrione in Doroshkevich (1970), quindi sviluppata da Kaiser (1984), Peacock & Heavens (1985), Bardeen et al. (1986) ed altri autori, è che le strutture si formino nei picchi del campo iniziale di densità, smussato su una scala rilevante. Quindi gli oggetti possono essere modellati per mezzo dell'evoluzione dei corrispondenti picchi, le cui proprietà statistiche sono note. Tuttavia, il paradigma dei picchi è stato recentemente criticato sia dal punto di vista teorico (vedi, ad esempio, Shandarin & Zel'dovich 1989) che dal punto di vista numerico (Katz, Quinn & Gelb 1993, van de Weigaert & Babul 1994; ma vedi Bond & Myers 1996b per un'opinione differente). La critica principale è che il paradigma dei picchi trascura il ruolo importante delle forze mareali, che possono frammentare il picco o farlo fondere con altri picchi.
- **Teoria delle perturbazioni Euleriane:** la teoria lineare è il primo ordine di una soluzione perturbativa delle equazioni di evoluzione del campo di materia. Termini di ordine superiore danno informazioni sull'evoluzione non lineare, per esempio sulla *skewness* e *kurtosis*¹ della distribuzione del contrasto di densità (vedi, ad esempio, Bouchet 1996). Sfortunatamente, la teoria delle perturbazioni Euleriane può descrivere solamente deboli deviazioni dalla linearità; non è più valida (tutti i contributi sono dello stesso ordine di grandezza) non appena il contrasto di densità diventa confrontabile con l'unità.

¹La *skewness* e la *kurtosis* di una distribuzione sono misure, opportunamente normalizzate, del terzo e quarto momento della distribuzione; la *skewness* indica il grado di asimmetria della distribuzione, la *kurtosis* il suo schiacciamento o allungamento rispetto alla Gaussiana.

- **Approssimazione di Zel'dovich:** nel 1970 Zel'dovich propose un modello molto semplice per l'evoluzione non lineare delle perturbazioni, in cui le particelle mantengono le loro velocità peculiari immutate (in coordinate comoventi!). Quindi, la formazione di strutture su grande scala diventa un processo simile a quello della formazione di caustiche in ottica geometrica. Le caratteristiche principali dell'approssimazione di Zel'dovich verranno descritte nelle §1.2.6 e §3.1; qui è sufficiente notare che essa si è rivelata uno strumento molto semplice e potente per descrivere e comprendere l'evoluzione gravitazionale quando i contrasti di densità sono dell'ordine dell'unità, il cosiddetto *regime debolmente non lineare*.
- **Teoria delle perturbazioni Lagrangiane:** l'approssimazione di Zel'dovich è il primo termine di un'altra soluzione perturbativa; la quantità perturbata non è più il contrasto di densità, come nel caso Euleriano, ma lo spostamento della particella dalla posizione iniziale. Questo cambiamento ha profonde conseguenze: la teoria delle perturbazioni Lagrangiane continua ad essere valida nel regime debolmente non lineare, in alcuni casi rilevanti fino al primo collasso. Questa teoria sarà analizzata in profondità nelle §1.2.6 e §3.3.
- **Altre approssimazioni:** sono stati proposti molte altre procedure analitiche o semi-analitiche per la descrizione approssimata dell'evoluzione delle perturbazioni nel regime debolmente non lineare; esse sono descritte, tra l'altro, nella rassegna di Sahni & Coles (1996). Tra loro, il modello di adesione (Gurbatov, Saichev & Shandarin 1986) si basa sull'idea di incollare tra loro le particelle quando le loro traiettorie cercano di intersecarsi, questo per mimare la formazione di strutture gravitazionalmente legate. L'approssimazione di flusso congelato (*frozen flow*; Materrese et al. 1992) consiste nel mantenere costanti la velocità peculiare in ogni punto dello spazio, come se le particelle si muovessero senza inerzia. L'approssimazione del potenziale lineare (*linear potential*; Bagla & Padmanaban 1994, Brainerd, Scherrer & Villumsen 1994) consiste nel far muovere le particelle in un potenziale gravitazionale costante.
- **Gerarchia BBGKY:** tutte le approssimazioni ora elencate tentano di descrivere il regime lineare o debolmente non lineare dell'evoluzione gravitazionale delle perturbazioni. Il regime altamente non lineare, che descrive l'evoluzione delle strutture verso uno stato di equilibrio, è molto più difficile da descrivere. Un tentativo in questo senso è stato compiuto per mezzo della cosiddetta gerarchia di equazioni BBGKY (vedi ad

esempio Peebles 1980), un approccio statistico che si è rivelato efficace in fisica dei plasmi. Tuttavia, a causa del carattere di azione a distanza della forza gravitazionale Newtoniana, l'infinita gerarchia BBGKY non si chiude mai; in letteratura sono stati usati alcuni *ansatze* di chiusura di tale gerarchia, ma la cosa è ancora materia di dibattito. In ogni caso, tali *ansatze* si applicano al regime di ammassamento forte, caratterizzato da una funzione di correlazione a due punti molto maggiore di uno; ciò ha luogo nelle parti interne delle strutture, per cui tali teorie non sono rilevanti per la descrizione delle proprietà globali delle strutture stesse.

1.2 Cosmologia teorica: un sommario

In questa sezione viene riportato un sommario delle principali equazioni cosmologiche rilevanti per la futura discussione, per definire la notazione e la terminologia adottata (che spesso varia da autore ad autore), e per dare dei commenti su alcuni punti rilevanti. Una presentazione più completa può essere trovata nei libri citati all'inizio del capitolo.

1.2.1 Cosmologia di background

Si assume che il nostro Universo osservabile sia un Universo di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (con un possibile termine di costante cosmologica) perturbato; si assume che le perturbazioni siano piccole fino alla ricombinazione, avvenuta ad un redshift $z \sim 1500$.

Le cosmologie di background FRW sono giustificate dall'osservazione che l'Universo è isotropo su grande scala; se la metrica è analitica, questa assunzione, insieme al principio cosmologico, secondo il quale non esistono osservatori cosmologici privilegiati, è sufficiente a dimostrare che l'Universo è omogeneo (Weinberg 1972). Un punto di vista diverso può essere trovato in Pietronero, Montuori e Sylos-Labini (1996): se la distribuzione di materia è non analitica, come un frattale o un multifrattale, allora l'isotropia osservata non implica l'omogeneità. Molte osservazioni, specialmente quelle del CMB, sembrano confermare l'omogeneità su grande scala, anche se la dimostrazione osservativa finale è ancora materia di dibattito (vedi, ad esempio, Peebles 1993; Davis 1996; Pietronero et al. 1996).

La metrica di FRW si ottiene dalle equazioni di Einstein assumendo il grado più alto di simmetria spaziale (invarianza per traslazioni e rotazioni). Una quantità rilevante è il fattore di scala $a(t)$, il quale descrive come le distanze scalino col tempo per effetto dell'espansione di Hubble. Esso è connesso con il redshift cosmologico tramite la seguente relazione:

$$1 + z(t) = a(t_0)/a(t), \quad (1.2)$$

dove t_0 è il tempo attuale ed i redshift z è misurato per un oggetto al tempo cosmologico t . Se $\bar{\rho}$ è la densità di energia del background e Λ è un termine di costante cosmologica, l'equazione di evoluzione per il fattore di scala è la seguente:

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho}a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - R^{-2} \quad (1.3)$$

(equazione di Friedmann), dove R è la curvatura dell'Universo (essa è nulla se l'Universo è piatto, positiva se è chiuso, immaginaria se è aperto), ed il punto denota la derivata rispetto al tempo. La normalizzazione del fattore di scala è arbitraria; si utilizza quindi:

$$a(t_0) = 1 \quad (1.4)$$

Per determinare l'evoluzione di $a(t)$, è necessario stabilire un'equazione di stato per la materia o radiazione presente nell'Universo. Dopo la ricombinazione, l'Universo è sicuramente dominato da materia non relativistica, per cui:

$$\bar{\rho}(t) \propto a^{-3}. \quad (1.5)$$

Il parametro di Hubble si definisce come:

$$H(t) = \dot{a}/a. \quad (1.6)$$

La costante di Hubble è quindi $H(t_0) = H_0$. Se $\Lambda = R = 0$, l'Universo è piatto, ed è detto di Einstein-de Sitter; la densità di background in questo caso è chiamata densità critica:

$$\bar{\rho}_{cr} = \frac{3H_0}{8\pi G}. \quad (1.7)$$

È quindi conveniente definire, per ogni modello di FRW, il seguente parametro di densità:

$$\Omega(t) = \bar{\rho}/\bar{\rho}_{cr}. \quad (1.8)$$

$\Omega = 1$ denota la cosmologia di Einstein-de Sitter; in questo caso esso rimane costante nel tempo. Se $\Omega < 1$, e la costante cosmologica è nulla o non è sufficientemente grande, l'Universo è aperto; se $\Omega > 1$ (e la costante cosmologica non è negativa), l'Universo è chiuso. Si definisce il parametro Ω_0 semplicemente come:

$$\Omega_0 = \Omega(t_0). \quad (1.9)$$

Le tre costanti H_0 , Ω_0 and Λ , insieme con la normalizzazione del fattore di scala, definiscono unicamente il modello FRW di background. Il valore della costante di Hubble è parametrizzato come al solito:

$$H_0 = h \, 100 \, \text{km sec}^{-1} \, \text{Mpc}^{-1}, \quad (1.10)$$

dove h contiene la nostra ignoranza sul valore esatto di H_0 ($0.5 \leq h \leq 0.8$).

Nel seguito, solo le seguenti tre famiglie di modelli Friedmann saranno considerate (le altre non sono di interesse cosmologico rilevante):

1. modelli piatti senza costante cosmologica: $\Omega = 1$, $\Lambda = 0$;
2. modelli aperti senza costante cosmologica: $\Omega < 1$, $\Lambda = 0$;
3. modelli piatti con costante cosmologica: $\Omega < 1$, $\Lambda \neq 0$, $\Omega + \Lambda/3H_0^2 = 1$.

Nei modelli di tipo (1) l'equazione di FRW diventa:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho}, \quad (1.11)$$

la cui soluzione è:

$$a(t) = (t/t_0)^{2/3}. \quad (1.12)$$

Nei modelli di tipo (2):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho} \left(1 + (\Omega_0^{-1} - 1) a\right). \quad (1.13)$$

La soluzione per $a(t)$ può essere espressa parametricamente come segue:

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (\cosh\eta - 1) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega_0}{2H_0(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh\eta - \eta). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nei modelli di tipo (3):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho} \left(1 + (\Omega_0^{-1} - 1) a^3\right), \quad (1.15)$$

$$a(t) = (\Omega_0^{-1} - 1)^{-1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right). \quad (1.16)$$

1.2.2 Perturbazioni

L'evoluzione delle perturbazioni sarà descritta approssimando l'insieme delle particelle come un fluido perfetto. Questa scelta è ragionevole se si considerano scale molto più grandi del cammino libero medio delle particelle (vedi ad esempio Peebles 1980). Se si considerano perturbazioni nella materia oscura, il limite di fluido si applica se questa è fredda (CDM), nel qual caso la pressione risulta trascurabile; nei casi di HDM, le stesse ipotesi sono ragionevolmente soddisfatte almeno sulla scala dei gruppi e ammassi di galassie, dove la residua velocità di libero scorrimento (free streaming) è trascurabile. Infine, come accennato sopra, si userà la teoria della gravità Newtoniana.

È conveniente sottrarre l'effetto dell'espansione di Hubble dall'evoluzione delle perturbazioni. Se \mathbf{r} è la coordinata fisica, la coordinata comovente \mathbf{x} si definisce come:

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x}. \quad (1.17)$$

In questo modo, un punto comovente con il background ha coordinata \mathbf{x} costante. Si definisce velocità peculiare la quantità:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} - H\mathbf{r} = a\dot{\mathbf{x}}. \quad (1.18)$$

Si definisce inoltre contrasto di densità la quantità:

$$\delta(\mathbf{x}) = (\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho})/\bar{\rho}. \quad (1.19)$$

Questa quantità adimensionale è vincolata ad essere maggiore di -1 , ma può crescere fino a valori positivi infiniti (molto grandi).

In cosmologia Newtoniana non è possibile costruire un potenziale gravitazionale sensato il cui Laplaciano dia la densità del background: la gravità Newtoniana non dà modelli cosmologici autoconsistenti. Cionondimeno, è possibile costruire un potenziale gravitazionale peculiare sensato per le fluttuazioni di materia:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \Phi = 4\pi G(\rho - \bar{\rho})a^2. \quad (1.20)$$

Questa equazione di Poisson, che connette il potenziale peculiare con il campo di materia, è la prima delle equazioni del moto per le perturbazioni di materia fredda. Il pedice \mathbf{x} nell'operatore ∇ indica che la derivazione è fatta rispetto alla coordinata comovente.

Il gradiente del potenziale peculiare dà la forza gravitazionale che agisce sugli elementi di fluido. L'equazione di Eulero del moto di un generico elemento di fluido senza pressione è:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{v} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} \Phi}{a}. \quad (1.21)$$

Questa è la seconda equazione del moto. La terza ed ultima è data dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (1 + \delta) \mathbf{v} = 0. \quad (1.22)$$

1.2.3 Teoria Euleriana lineare

Quando il contrasto di densità è molto più piccolo di uno, $\delta \ll 1$, e le velocità peculiari sono abbastanza piccole da soddisfare la disuguaglianza $(vt/d)^2 \ll \delta$, dove t è il tempo cosmologico e d è la lunghezza di coerenza del campo di materia, il sistema di equazioni (1.20 - 1.22) può essere linearizzato; si ottiene così la seguente equazione per il contrasto di densità:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta \quad (1.23)$$

Questa equazione del secondo ordine dà due soluzioni, le quali rappresentano un modo crescente ed un modo smorzato. Il modo crescente, che si denota con $b(t)$, è quello di interesse cosmologico, in quanto è il responsabile della crescita delle piccole perturbazioni; assumeremo sempre che il modo smorzato sia già scomparso. In questo caso, il campo di velocità è determinato dal campo di densità come segue:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = -a \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad (1.24)$$

nel senso che ogni differenza da questa relazione decade con il modo smorzato. Un'interessante conseguenza di ciò è che qualsiasi vorticosità primordiale è eliminata dall'evoluzione lineare.

Nel seguito diamo le soluzioni dell'Eq. (1.23) per i modi crescenti relativi alle tre classi di background di cui sopra.

$\Omega = 1$:

$$b(t) = a(t) \quad (1.25)$$

$\Omega \neq 1, \Lambda = 0$: è utile utilizzare la variabile temporale

$$\tau = (1 - \Omega(t))^{-1/2} = \sqrt{(a(\Omega_0^{-1} - 1))^{-1} + 1}. \quad (1.26)$$

Quindi:

$$b(\tau) = \frac{5}{2} \left(1 + 3(\tau^2 - 1) \left(1 + \frac{\tau}{2} \ln \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right) \right) \right). \quad (1.27)$$

È da notare che la funzione $b(t)$ in questo caso satura al valore $5/2$ per grandi tempi ($\tau \sim 1$).

$\Omega = 1$, $\Lambda \neq 0$, piatto: è utile utilizzare la variabile temporale

$$h = \coth \left(3t \sqrt{\Lambda/3/2} \right). \quad (1.28)$$

Si ha quindi:

$$b(h) = h \int_h^\infty (x^2(x^2 - 1)^{1/3})^{-1} dx. \quad (1.29)$$

La normalizzazione dei modi crescenti è tale da dare $b(t) \simeq a(t)$ a tempi piccoli.

Nella teoria della funzione di massa, le stime dei tempi di collasso sono spesso basate su estrapolazioni del regime lineare a contrasti di densità di ordine uno. È conveniente definire la quantità:

$$\delta_l \equiv \delta(t_i)/b(t_i). \quad (1.30)$$

Questo è il contrasto iniziale di densità, linearmente estrapolato all'istante in cui $b(t) = 1$, che è il tempo presente nel caso Einstein-de Sitter (Eq. 1.4, 1.25). Nelle altre cosmologie, poiché ad alti redshift il background evolve in maniera molto simile ad Einstein-de Sitter, si ha ancora $\delta(t_i)/b(t_i) \simeq \delta(t_i)/a(t_i)$. La quantità δ_l , che verrà chiamata contrasto lineare, risulterà utile nella futura analisi.

Utilizzando il modo crescente $b(t)$ come variabile temporale, è possibile scrivere le equazioni del moto per il fluido in una maniera più compatta: definendo la velocità peculiare \mathbf{u} come

$$\mathbf{u} = \partial \mathbf{x} / \partial b = \mathbf{v} / a \dot{b}, \quad (1.31)$$

la derivata Lagrangiana (convettiva) d/db come

$$\frac{d}{db} = \frac{\partial}{\partial b} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (1.32)$$

ed il potenziale gravitazionale peculiare riscaldato φ come

$$\varphi = 2a\Phi/3bH_0^2\Omega_0, \quad (1.33)$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{d\mathbf{u}}{db} + 4\pi G\bar{\rho}\frac{b}{b^2}\mathbf{u} = -4\pi G\bar{\rho}\frac{b}{b^2}\nabla_{\mathbf{x}}\varphi \quad (1.34)$$

$$\frac{d\delta}{db} + (1 + \delta)\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.35)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2\varphi = \frac{\delta}{b}. \quad (1.36)$$

Il fattore $4\pi G\bar{\rho}b/\dot{b}^2$ va espresso in termini di $b(t)$; nel caso Einstein-de Sitter questo si riduce semplicemente a $3/2a$.

1.2.4 Collasso sferico

La simmetria sferica è uno dei pochi casi in cui il collasso gravitazionale pu' essere risolto esattamente (Gunn & Gott 1972; Peebles 1980). Infatti, come conseguenza del teorema di Birkhoff, una perturbazione sferica evolve come un universo di FRW con densità uguale alla densità media all'interno della perturbazione.

La perturbazione sferica più semplice è quella top-hat, cioè una sovradensità costante δ all'interno di una sfera di raggio R ; per evitare una reazione di ritorno sul background, tale sovradensità deve essere circondata da una sottodensità che renda la perturbazione totale nulla. L'evoluzione del raggio della perturbazione è data quindi dalle equazioni di Friedmann.

L'evoluzione di una perturbazione sferica dipende solo dalla sua sovradensità iniziale. In un'Universo di Einstein-de Sitter ogni sovradensità sferica $\delta(t_i) > 0$ raggiunge una singolarità (collasso) al tempo finale:

$$t_c = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{5}{3}\delta(t_i) \right)^{-3/2} t_i. \quad (1.37)$$

A quel punto il suo contrasto lineare ha raggiunto il valore:

$$\delta_l(t_c) = \delta_c = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{3/2} \simeq 1.69. \quad (1.38)$$

In un Universo aperto non tutte le sovradensità possono collassare: il contrasto iniziale di densità deve essere tale da avere una densità media per la perturbazione superiore a quella critica. Questo può essere quantificato, non esattamente ma con ottima approssimazione, come segue: visto che il modo lineare satura al valore $b(t) = 5/2$, la perturbazione deve avere un contrasto lineare $\delta_l > 1.69 \cdot 2/5$ per poter collassare.

Il collasso in una singolarità non è naturalmente ciò che accade in realtà. Si suppone tipicamente che in corrispondenza del collasso la struttura raggiunga lo stato di virializzazione. In questo caso, argomenti basati sul teorema del viriale e sulla conservazione dell'energia mostrano che la perturbazione raggiunge una dimensione pari a metà del suo raggio di massima espansione, ed un contrasto di densità pari a circa 178. Nell'evoluzione susseguente, la densità rimane costante, per cui il contrasto di densità cresce col tempo, dato che diminuisce la densità del background; inoltre, a parità di contrasto finale, strutture che collassano prima sono più dense di quelle che collassano dopo.

Il collasso sferico non dà una descrizione realistica del collasso di strutture reali; tuttavia, i picchi più alti del campo di densità iniziale seguono un collasso approssimativamente sferico, almeno nelle prime fasi del loro collasso (questo è stato rigorosamente provato da Bernardeau 1994b). Tuttavia, mostrerò nei capitoli 3 e 4 che uno scostamento sistematico dei collassi di strutture quasi sferiche dai valori sferici influenza in maniera significativa la statistica dei tempi di collasso.

Il collasso sferico può descrivere il comportamento delle sottodensità. Una sottodensità sferica non può mai collassare (almeno che l'Universo non sia chiuso!), ma si comporta come un Universo aperto, espandendosi indefinitamente, almeno finché i suoi bordi non urtano contro le regioni vicine. Contrariamente al caso della sovradensità, le sottodensità tendono sempre a sfericizzarsi, ed il modello sferico risulta una buona approssimazione.

1.2.5 Formulazione Lagrangiana

Le equazioni del fluido, descritte nella §1.2.2, sono basate sulla cosiddetta formulazione *Euleriana*: le variabili dinamiche sono definite nello spazio reale (comovente) \mathbf{x} . In altre parole, le variabili dinamiche sono misurate da osservatori fissi nello spazio comovente (col background). Alternativamente, si può decidere di descrivere il sistema per mezzo di osservatori comoventi con la materia perturbata; questa è la formulazione Lagrangiana della fluidodinamica (vedi ad esempio Shandarin & Zel'dovich 1989). È da notare che la libertà di scegliere tra diverse formulazioni equivalenti corrisponde alla libertà (molto più vasta) che si ha in relatività generale si scegliere la gauge.

Sia $\mathbf{q} = \mathbf{x}(t_i)$ la posizione di un elemento di massa (contenuto in un elemento di volume infinitesimo centrato sul punto \mathbf{q}) al tempo iniziale t_i ; questa è definita come *coordinata Lagrangiana*. La coordinata Lagrangiana può essere vista come un'etichetta che identifica in maniera univoca l'elemento di massa. La traiettoria $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$ dell'elemento \mathbf{q} può essere scritta in termini di uno spostamento \mathbf{S} dalla posizione iniziale:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, t). \quad (1.39)$$

Il problema dell'evoluzione di un fluido autogravitante pu' essere riformulato in termini di equazioni per il campo di spostamento $\mathbf{S}(\mathbf{q}, t)$.

Un limite naturale della formulazione Lagrangiana (almeno nell'ambito di un approccio analitico) sta nel seguente fatto. L'Eq. (1.39) è una mappa dallo spazio \mathbf{q} allo spazio \mathbf{x} . Nell'evoluzione dinamica di materia fredda, può accadere che due elementi di massa arrivino allo stesso punto. Questo evento è chiamato *attraversamento di orbite* (orbit crossing, OC), oppure *attraversamento di strati* (shell crossing; quest'ultima espressione è mutuata dal collasso sferico). L'OC implica un numero di conseguenze:

- La mappa $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$ non è più biunivoca dall'OC in poi, poiché diversi elementi di massa \mathbf{q} (almeno tre) arrivano allo stesso punto \mathbf{x} . La situazione dopo l'OC è chiamata *multi flusso* (multi-streaming), ed i luoghi dove ciò ha luogo sono chiamati regioni di multi flusso.
- L'istante di OC può essere definito matematicamente come l'istante in cui il determinante Jacobiano della trasformazione $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$ si annulla:

$$J(\mathbf{q}, t) = \det \left(\frac{\partial x_a}{\partial q_b} \right) = 0. \quad (1.40)$$

- A causa dell'equazione di continuità, all'OC la densità formalmente va all'infinito; questa è chiamata *formazione di caustiche*. Una descrizione completa della geometria e della topologia delle caustiche gravitazionali, insieme ad una classificazione mutuata dalla teoria delle catastrofi di Arnol'd ed ad interessanti connessioni con l'ottica geometrica, può essere trovata in Shandarin & Zeldovich (1989).
- Mentre prima dell'OC la formulazione Lagrangiana può essere usata per ottenere potenti approssimazioni del regime debolmente non lineare, dopo l'OC tali approssimazioni cessano di essere valide.
- Se è presente una componente dissipativa (subdominante) fredda, per esempio una componente barionica, all'OC in essa si formeranno onde d'urto; ciò è dovuto al fatto che subito prima dell'OC la velocità del suono è molto bassa, dato che i barioni sono freddi.
- Se il campo iniziale è perturbato a scale molto piccole, allora l'OC avverrà subito dopo la ricombinazione, e le regioni di multi-flusso domineranno molto presto.

L'ultima osservazione suggerirebbe che l'approccio Lagrangiano non è molto utile, almeno così come è stato presentato. Tuttavia, così come si suppone di poter applicare la teoria lineare alle scale molto grandi, nell'ipotesi di poter trascurare l'effetto delle non linearità presenti su scale molto più piccole, l'approccio Lagrangiano può essere applicato a versioni smussate della configurazione iniziale, nell'ipotesi in cui le regioni multi-flusso presenti a scale piccole non influenzino apprezzabilmente la dinamica su scale più grandi. Questa è probabilmente l'ipotesi più forte che sta alla base delle approssimazioni dinamiche basate sulla formulazione Lagrangiana.

Le equazioni per i campi di spostamento \mathbf{S} sono state trovate da diversi autori: Buchert (1989), Lachièze-Rey (1993a), Bouchet et al. (1995) e Catelan (1995). In pratica, questi autori danno versioni equivalenti ma formalmente molto diverse dello stesso sistema di equazioni; io riporto le equazioni di Catelan (1995):

$$[(1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S})\delta_{bd} - S_{b,d} + S_{b,d}^C] \frac{d^2 S_{c,d}}{d\tau^2} = \alpha(\tau)[J - 1] \quad (1.41)$$

$$\varepsilon_{abc}[(1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S})\delta_{bd} - S_{b,d} + S_{b,d}^C] \frac{dS_{c,d}}{d\tau} = 0, \quad (1.42)$$

In queste equazioni è stata utilizzata la variabile temporale τ definita nell'Eq. (1.26); la funzione $\alpha(\tau)$ è uguale a $6/(\tau^2 + k)$ ($k = -1, 0$ o 1 per modelli aperti, piatti o chiusi). Le quantità δ_{ab} e ε_{abc} sono, rispettivamente, il tensore di Kronecker e lo pseudo tensore antisimmetrico di Levi-Civita. J è sempre il determinante Jacobiano definito nell'Eq. (1.40), e $S_{a,b}^C$ è la matrice dei cofattori di $S_{a,b}$; la virgola indica la derivata parziale rispetto alla coordinata Lagrangiana q_a .

In questo formalismo, il campo di spostamenti \mathbf{S} è la sola variabile dinamica. Tutte le quantità definite nella §1.2.2 possono essere espresse in funzione di \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{q}, t) &= a(t)d\mathbf{S}/dt(\mathbf{q}, t) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}, t) &= a(t)d^2\mathbf{S}/dt^2(\mathbf{q}, t) + 2H\mathbf{v}(\mathbf{q}, t) \\ 1 + \delta(\mathbf{q}, t) &= J(\mathbf{q}, t)^{-1}[1 + \delta(\mathbf{q}, t_i)]; \end{aligned} \quad (1.43)$$

t_i denota come prima un tempo iniziale.

Un difetto di questo sistema di equazioni sta nel fatto che è molto difficile capirne il comportamento qualitativo, data la sua struttura complessa. Una formulazione alternativa, "mista" di elementi sia Lagrangiani che Euleriani, può essere trovata per mezzo del sistema di equazioni (1.34–1.36). In questo

sistema, le derivate temporali sono Lagrangiane (totali), nel senso che l'operatore differenziale segue il moto dell'elemento di massa considerato. Sono però presenti le derivate spaziali, Euleriane. Per eliminarle, si possono considerare le derivate del campo di velocità u come variabili dinamiche a sé stanti:

$$u_{a,b} = \theta \delta_{ab}/3 + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \quad (1.44)$$

L'espansione θ è la divergenza del campo di velocità, e dà l'espansione globale dell'elemento di massa considerato; lo shear σ_{ab} ne è la parte simmetrica e senza traccia, e dà le deformazioni relative degli assi principali; la vorticità ω infine ne è la parte antisimmetrica, e dà la rotazione globale dell'elemento di massa. Differenziando l'equazione di Eulero (1.34) rispetto alla coordinata spaziale Euleriana, si possono ottenere equazioni "Lagrangiane" per l'evoluzione del contrasto di densità (l'equazione di continuità), per l'espansione (l'equazione di Raychaduri), lo shear e la vorticità. Verrà mostrato nella §3.2 che l'equazione per lo shear (Eq. 3.2) risulta accoppiata con il cosiddetto tensore delle maree:

$$E_{ab} = \varphi_{,ab} - \nabla_{\mathbf{x}}^2 \varphi/3 \quad (1.45)$$

La procedura appena delineata è stata presa in prestito dalla relatività generale; una descrizione completa è contenuta nella rassegna di Ellis (1971), sia per la parte relativistica che per quella Newtoniana. Nel caso relativistico, il ruolo del tensore mareale è assunto dalla cosiddetta parte elettrica del tensore di Weil, la quale è a sua volta accoppiata alla cosiddetta parte magnetica; il sistema può essere chiuso attraverso queste quantità, ma le derivate spaziali Euleriane rimangono presenti. Nella gravità Newtoniana, non è possibile trovare un analogo della parte magnetica del tensore di Weil (vedi ad esempio Matarrese 1996), cosicché non è possibile chiudere quel sistema. È stato proposto di prendere in prestito l'equazione di evoluzione per il tensore mareale dalla relatività generale, trascurando il ruolo della parte magnetica del tensore di Weil, ma quest'approccio ha ricevuto parecchie critiche (vedi Matarrese, Pantano & Saez 1993, 1994; Bertschinger & Jain 1994; Kofman & Pogosyan 1995; Matarrese 1996). In conclusione, tale formulazione mista Euleriana-Lagrangiana è utile per capire molte caratteristiche del problema gravitazionale, ma non è utilizzabile per costruire una formulazione autoconsistente del problema gravitazionale.

1.2.6 Perturbazioni Lagrangiane ed altre approssimazioni

Il sistema Lagrangiano, Eq. (1.41–1.42), può essere risolto perturbativamente per piccoli spostamenti \mathbf{S} . Questo è stato fatto da Buchert (1989), Moutarde et al. (1991), Bouchet et al. (1992), Buchert (1992), Buchert & Ehlers (1993), Lachièze-Rey (1993a,b), Buchert (1994), Bouchet et al. (1995) e Catelan (1995): vedi anche Bouchet (1996) e Buchert (1996) per delle rassegne. La soluzione al primo ordine è la ben nota approssimazione di Zel'dovich (1970):

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} - b(t)\nabla_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{q}). \quad (1.46)$$

Questa approssimazione è equivalente ad assumere che le “velocità” \mathbf{u} delle particelle rimangono costanti nel “tempo” $b(t)$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{db} = 0. \quad (1.47)$$

Non è questo il luogo per elencare tutte le caratteristiche, meriti e limiti dell'approssimazione di Zel'dovich; la rassegna di Shandarin & Zel'dovich (1989) ne dà un ampio resoconto. È sufficiente ricordare che la versione “troncata” di questa approssimazione, cioè quella ottenuta applicando l'approssimazione al campo iniziale smussato, è molto efficiente nel descrivere il comportamento delle simulazioni ad N corpi nel regime debolmente non lineare (vedi ad esempio Coles, Melott & Shandarin 1993). Dopo l'OC, l'approssimazione di Zel'dovich cessa di essere valida: le particelle mantengono la loro velocità, cosicché le strutture collassate, tipicamente a forma di “frittella” (localmente a simmetria planare), sono velocemente spazzate via dal moto delle particelle, mentre nel problema reale tali strutture rimangono legate. Va notato infine che l'approssimazione di Zel'dovich è la soluzione esatta del problema planare (unidimensionale) fino all'OC. Altri particolari tecnici saranno presentati nella §3.1.

La serie perturbativa è stata calcolata fino al terzo ordine; nella discussione che segue supporremo che il campo iniziale è irrotazionale, che i modi smorzati non sono presenti e che velocità ed accelerazione peculiare sono paralleli nella configurazione iniziale (vedi Buchert 1989; 1992; Buchert & Ehlers 1993 per una discussione su questi punti). Risulta che, almeno fino al terzo ordine (e forse ad ogni ordine), i termini perturbativi sono separabili in prodotti di funzioni con dipendenza solo spaziale o temporale. Al terzo ordine, per essere più precisi, è possibile dividere il contributo in tre modi differenti, tutti separabili. Quindi:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, t) = b_1(t)\mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{q}) + b_2(t)\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{q}) + b_{3a}(t)\mathbf{S}^{(3a)}(\mathbf{q}) \quad (1.48)$$

$$+b_{3b}(t)\mathbf{S}^{(3b)}(\mathbf{q}) + b_{3c}(t)\mathbf{S}^{(3c)}(\mathbf{q}) + \dots \quad (1.49)$$

Al primo e secondo ordine, le soluzioni sono irrotazionali nello spazio Lagrangiano, ovvero le matrici $S_{a,b}^{(1)}$ e $S_{a,b}^{(2)}$ sono simmetriche. Del contributo al terzo ordine, i modi 3a e 3b sono irrotazionali, mentre il modo 3c è puramente irrotazionale, ovvero la matrice $S_{a,b}^{(3c)}$ è antisimmetrica (il motivo di ciò è che la trasformazione $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$ è non Galileiana, e quindi dà origine a forze inerziali fittizie; vedi la discussione in Buchert 1994 e Catelan 1995).

Le soluzioni delle equazioni temporali, che saranno chiamate funzioni temporali, risultano essere accuratamente descritte dalle seguenti espressioni (valide per i modi crescenti):

$$\begin{aligned} b_1 &= -b(t) \\ b_2 &= -\frac{3}{14}b_1^2 \\ b_{3a} &= \frac{1}{9}b_1^3 \\ b_{3b} &= -\frac{5}{42}b_1^3 \\ b_{3c} &= \frac{1}{14}b_1^3. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Queste espressioni sono esatte per un Universo di Einstein-de Sitter, e molto accurate per Universi con $\Omega \sim 1$ come i nostri (vedi Bouchet et al. 1995). È dunque evidente come l'uso del modo crescente come variabile temporale possa eliminare la dipendenza esplicita del formalismo dalla cosmologia di background.

Convienne esprimere le correzioni $\mathbf{S}^{(i)}$ in termini di potenziali scalari o vettoriali:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(i)} &= \nabla\varphi^{(i)}, \quad n = 1, 2, 3a, 3b \\ \mathbf{S}^{(3c)} &= \nabla \times \vec{\varphi}^{(3c)}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Definendo gli invarianti principali e misti di uno o due tensori come segue:

$$\begin{aligned} \mu_1(A_{ab}) &= \text{tr}(A_{ab}) = A_{aa} \\ \mu_2(A_{ab}, B_{ab}) &= \frac{1}{2}(A_{aa}B_{bb} - A_{ab}B_{ab}) \\ \mu_2(A_{ab}) &= \mu_2(A_{ab}, A_{ab}) \\ \mu_3(A_{ab}) &= \det(A_{ab}), \end{aligned} \quad (1.52)$$

le equazioni per i potenziali perturbativi possono essere scritte come equazioni di Poisson:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(1)} &= \varphi \\
 \nabla^2 \varphi^{(2)} &= 2\mu_2(\varphi_{,ab}^{(1)}) \\
 \nabla^2 \varphi^{(3a)} &= 3\mu_3(\varphi_{,ab}^{(1)}) \\
 \nabla^2 \varphi^{(3b)} &= 2\mu_2(\varphi_{,ab}^{(1)}, \varphi_{,ab}^{(2)}) \\
 \nabla^2 \varphi_a^{(3c)} &= \varepsilon_{abc} \varphi_{,cd}^{(1)} \varphi_{,db}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

La prima uguaglianza è solamente una conseguenza delle condizioni iniziali. Si può riconoscere l'approssimazione di Zel'dovich, Eq. (1.46), nel primo termine perturbativo.

È stato dimostrato che il secondo termine perturbativo Lagrangiano aumenta la bontà dell'approssimazione di Zel'dovich nel descrivere l'evoluzione debolmente non lineare di un campo, mentre il terzo ordine non è sembrato migliorare la descrizione in maniera significativa (Melott, Buchert & Weiß 1994; Buchert, Melott & Weiß 1994).

Il maggior problema delle approssimazioni perturbative Lagrangiane è che cessano di essere valide dopo l'OC. Diversi autori hanno sviluppato altre approssimazioni che evitino l'OC, oppure facciano oscillare le particelle attorno al minimo del potenziale, invece di farle scappare via. Le principali sono le seguenti (vedi anche la rassegna di Sahni & Coles 1996):

- **Modello dell'adesione** (Gurbatov, Saichev & Shandarin 1986; vedi anche Shandarin & Zel'dovich 1989): nell'equazione del moto per l'approssimazione di Zel'dovich, Eq. (1.47), si aggiunge un termine molto piccolo di viscosità artificiale,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nu \nabla_x^2 \mathbf{u}. \tag{1.54}$$

Di conseguenza, le particelle si muovono come nell'approssimazione di Zel'dovich fino alla formazione di caustiche, ma rimangono incollate quando tentano di intersecarsi. Il modello di adesione riesce a descrivere lo scheletro della struttura su grande scala. È da notare che essa non richiede alcun troncamento, poiché non si formano regioni di multi nflusso a piccole scale. L'evoluzione del campo di velocità è governata dall'equazione di Burgers, un'equazione ben nota nella fisica matematica, ed è possibile trovare per essa soluzioni analitiche.

- **Approssimazione del flusso congelato** (Matarrese et al. 1992): si impone che il campo di velocità nello spazio Euleriano sia costante nel tempo,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} = 0; \quad (1.55)$$

questo a differenza di quanto avveniva per l'approssimazione di Zel'dovich, dove era la derivata Lagrangiana del campo di velocità ad essere nulla. In pratica, le particelle si muovono come se fossero senza inerzia, tracciando un campo di velocità costante. Una conseguenza di questa approssimazione è che l'OC non avviene mai: le particelle rallentano avvicinandosi alle caustiche, raggiungendole solo asintoticamente.

- **Approssimazione del potenziale lineare** (o congelato; Bagla & Padmanabhan 1994; Brainerd, Scherrer & Villumsen 1994): il potenziale gravitazionale peculiare, nello spazio Euleriano, si mantiene costante, come in teoria lineare,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0. \quad (1.56)$$

Le orbite delle particelle quindi si attraversano, ma, invece di tirare dritto ed allontanarsi dalla caustica, vi oscillano attorno. Sfortunatamente, non è possibile trovare soluzioni analitiche per questa approssimazione; essa è utile per costruire codici numerici molto più veloci delle comuni simulazioni ad N corpi, poiché il potenziale non deve essere ricalcolato ad ogni passo.

1.2.7 Statistica

La configurazione iniziale del campo di materia è usualmente assegnata alla ricombinazione; negli scenari cosmologici standard le perturbazioni non possono diventare non lineari prima di quel momento. Il campo di perturbazioni primordiali è rappresentato da un campo aleatorio, le cui proprietà statistiche dipendono dall'inflazione e dal tipo (dai tipi) di materia oscura presente. Come menzionato nella §1.1, di solito si assume che la statistica del campo sia Gaussiana.

Per una rigorosa definizione di campo aleatorio si può consultare, ad esempio, il libro di Adler (1981). Diamo qui una definizione qualitativa: un campo (o processo) aleatorio può assumere in ogni punto valori casuali; sono assegnate la funzione distribuzione di probabilità (PDF) per il valore del campo in

ogni punto e la PDF congiunta per tutte le N -uple di punti. I campi aleatori qui considerati sono omogenei (la PDF ad un punto è uguale in tutti i punti), isotropici, ergodici (le medie sull'insieme sono equivalenti alle medie spaziali su volumi abbastanza grandi; Adler (1981) dà una definizione più rigorosa); inoltre, considereremo campi le cui realizzazioni hanno comportamenti sufficientemente buoni (sono continue, differenziabili molte volte). Un campo aleatorio è Gaussiano se tutte le sue PDF sono Gaussiane multivariate.

Le proprietà statistiche di un campo Gaussiano sono descritte in maniera completa dalla funzione di correlazione a due punti, o dalla sua trasformata di Fourier, lo spettro di potenza. Se $\delta(\mathbf{x})$ è un campo aleatorio Gaussiano, e

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.57)$$

ne è la trasformata di Fourier, lo spettro di potenza è definito come:

$$P(k) = \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (1.58)$$

(è da notare che, poiché $\delta(\mathbf{x})$ è reale, $\delta(-\mathbf{k}) = \delta^*(\mathbf{k})$, dove $*$ denota la coniugazione complessa); δ_D è la funzione delta di Dirac. Lo spettro di potenza dà informazioni solamente sulla statistica dei moduli della trasformata del contrasto di densità; in statistica Gaussiana, le fasi hanno una distribuzione casuale tra 0 e 2π . Specificare una distribuzione non Gaussiana equivale a specificare la distribuzione (non piatta) delle fasi della trasformata del processo.

In conclusione, se le condizioni iniziali sono Gaussiane, lo spettro di potenza primordiale e la funzione di trasferimento sono sufficienti a specificare l'evoluzione dinamica che segue. Tuttavia, la statistica del contrasto di densità evoluto non è Gaussiana: basti notare che il contrasto di densità è vincolato ad essere maggiore di -1 , ma può crescere fino a valori positivi infiniti. È stato notato che la PDF ad 1 punto del campo evoluto è molto simile ad una distribuzione lognormale (il cui logaritmo è una Gaussiana), almeno per certe condizioni iniziali (Coles & Jones 1991; Bernardeau & Kofman 1995).

Le funzioni di trasferimento per diversi scenari sono state pubblicate da molti autori; ad esempio, Bardeen et al. (1986) danno espressioni analitiche approssimate per la funzione di trasferimento della CDM e della HDM. Tuttavia, quando si analizza il comportamento di particolari procedure dinamiche, risulta spesso utile considerare semplici spettri di potenza, come quelli rappresentati da leggi di potenza:

$$P(k) \propto k^n. \quad (1.59)$$

n è chiamato indice spettrale (non è necessariamente collegato all'indice primordiale). Dato che la maggiorparte degli spettri "realistici" sono curvi in

maniera molto graduale (in uno spazio $\log k - \log P(k)$), tali leggi di potenza possono approssimare parti limitate dello spettro. Un indice spettrale efficace può quindi essere definito come la derivata logaritmica di $P(k)$ in un punto. Per esempio, l'indice spettrale efficace degli spettri CDM o simili è -3 alle scale più piccole, sale a -2 sulle scale rilevanti per la formazione galattica, e arriva fino a -1 o più sulla scala degli ammassi di galassie, riducendosi all'indice primordiale, che non è mai molto diverso da 1 , sulle scale più grandi. È da notare che se $n > -3$ l'ammassamento gravitazionale procede dalle scale piccole a quelle grandi (ammassamento gerarchico, dal fondo a su), mentre se lo spettro è più ripido, come quello della HDM a scale piccole, si forma prima la struttura su grande scala, e poi quella su piccola scala per frammentazione (scenario a frittella, dalla cima a giù).

Come accennato prima, la funzione di correlazione a due punti per il campo di materia, $\xi(x)$, è semplicemente la trasformata di Fourier dello spettro di potenza:

$$\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk P(k) e^{ik \cdot x}. \quad (1.60)$$

Un'altra quantità statistica importante, la varianza del contrasto di densità (chiamata anche varianza di massa), è collegata allo spettro di potenza. Per spettri di potenza realistici, che abbiano potenza su tutte le scale, la varianza di massa è di solito infinita; tuttavia, se il campo è smussato per mezzo di una funzione finestra $W(\mathbf{x}; R)$, che filtra tutte le fluttuazioni su scale più piccole di R , allora la varianza di massa, che verrà chiamata Λ , si può scrivere come:

$$\Lambda \equiv \sigma_\delta^2 = \int dk P(k) \tilde{W}^2(\mathbf{k}; R); \quad (1.61)$$

$\tilde{W}(\mathbf{k}; R)$ denota la trasformata di Fourier della funzione filtro. La PDF ad un punto del contrasto di densità diventa quindi:

$$P_\delta(\delta; \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\Lambda}\right) d\delta \quad (1.62)$$

Un ultimo commento: le condizioni iniziali possono anche essere date in termini del potenziale gravitazionale peculiare riscaldato, definito nell'Eq. (1.33), il quale, essendo connesso alla densità per mezzo di un'equazione di Poisson (Eq. 1.36), ne condivide le proprietà statistiche. In questo caso, l'indice spettrale effettivo per il potenziale è connesso a quello della densità tramite la relazione $n_\Phi = n_\delta - 4$.

1.3 La formazione delle strutture collassate

Una volta fissata la cosmologia del background, i tipi di particelle cosmologicamente rilevanti, e le proprietà statistiche (spettro di potenza, tipo di statistica) del campo di materia alla ricombinazione, l'evoluzione del campo di materia è in principio determinata. In pratica, il comportamento esatto degli oggetti che si formano durante il collasso, come ad esempio le galassie, è così complicato che non è facile ottenere predizioni precise. La necessaria introduzione della dinamica del gas barionico complica ulteriormente il problema, tramite una catena di eventi molto difficili da comprendere e da modellare, che vanno dalla formazione stellare alle interazioni di ritorno dovute alle esplosioni di supernove o alla formazione di buchi neri supermassivi. Quando tali eventi hanno luogo, si instaura un'interazione diretta o indiretta tra scale molto piccole (frazioni di pc) e scale molto grandi (diversi Mpc), per cui, per potere ottenere predizioni affidabili sugli oggetti astrofisici, bisogna tenere conto di qualcosa come 10 ordini di grandezza in scala lineare.

Presenterò adesso schematicamente le varie fasi di formazione delle strutture. Di fatto, la formazione di strutture è un complicato intrigo di ammassamento gerarchico, dal fondo a su, e di collasso e frammentazione a frittella, dalla cima in giù. Infatti, è stato recentemente mostrato che, mentre lo scenario di ammassamento gerarchico è sicuramente lo scenario cosmologico più promettente, la struttura a grande scala evolve approssimativamente dalla cima in giù, formando frittelle che si frammentano dando luogo a strutture piccole.

- **Evoluzione lineare:** a scale molto grandi, o subito dopo la ricombinazione, le perturbazioni sono molto piccole. Esse evolvono tranquillamente seguendo la teoria lineare, anche se le correzioni dovute agli ordini superiori della teoria perturbativa Euleriana diventano significative abbastanza presto.
- **Regime debolmente non lineare:** quando le perturbazioni raggiungono un contrasto di densità dell'ordine di uno, la loro evoluzione è caratterizzata dalla formazione di strutture planari di basso contrasto di densità, comunemente chiamate frittelle o muri; tali strutture originano filamenti e nodi alle loro intersezioni. Si forma così una struttura reticolare che riempie tutto lo spazio, e che presenta una topologia "a spugna" (detta anche "a formaggio svizzero"). Questa topologia è riconoscibile negli odierni campioni di galassie con redshift: grandi vuoti sono circondati da strutture come la grande muraglia di galassie, caratterizzate da un contrasto di densità dell'ordine di uno; gli ammassi ricchi di galassie corrisponderebbero ai nodi già collassati.

- **Primo collasso:** è stato osservato nella §1.2.5 che l'evoluzione debolmente non lineare termina con la formazione di caustiche. La geometria locale di questo tipo di collasso è tipicamente planare; tuttavia, gli oggetti più massivi, che più o meno corrispondono ai nodi oppure ai picchi del campo di densità iniziale, presto collassano su tutte le direzioni, dando origine a strutture sferoidali. La geometria globale delle regioni collassate è più complicata: frittelle e filamenti possono essere ancora in fase di collasso quando i nodi hanno già completato il loro collasso lungo tutte le direzioni. Nondimeno, la topologia a spugna è solamente un transiente: la materia scorre lungo i muri verso i filamenti, e da questi confluisce verso i nodi, che sono le uniche strutture stabili.
- **Rilassamento violento:** quando un blocco di materia collassa fino a formare una struttura legata, gli elementi di massa in esso confluiti perdono presto memoria del loro stato dinamico precedente e tendono a qualche tipo di equipartizione con il resto della massa presente. Ciò può accadere come conseguenza di un'interazione collettiva dell'elemento di massa che entra nella struttura con tutto il potenziale della struttura che si sta formando. Questo evento, che avviene in tempi scala relativamente brevi, viene chiamato rilassamento violento (Lynden-Bell 1967), ed è probabilmente responsabile dello stato rilassato degli ammassi di galassie. Esso porta all'equipartizione delle velocità, non dell'energia.
- **Eliminazione delle sottostrutture, virializzazione:** i blocchi rilassati di materia che cadono in una struttura collassata e (violentemente) rilassata possono mantenere la loro identità per un certo tempo. Questo transiente termina nel momento in cui la struttura raggiunge un equilibrio (termo)dinamico globale, che corrisponde alla virializzazione. Ciò può avere luogo a causa delle interazioni particella-particella (o galassia-galassia; rilassamento a due corpi); questo tipo di rilassamento, che produce l'equipartizione delle energie, avviene su tempi scala più lunghi del rilassamento violento. È da notare anche che blocchi di materia non virializzata continuano a cadere nella struttura che sta cercando di rilassarsi del tutto, almeno finché la rete di filamenti è ancora presente. Le strutture ad alto contrasto di densità, come i gruppi e gli ammassi di galassie, hanno probabilmente sperimentato il rilassamento violento (i gruppi aperti potrebbero non avere ancora sperimentato il loro primo collasso!), e stare evolvendo verso uno stato virializzato, che non è stato ancora raggiunto in molti se non in tutti i casi.
- **Riscaldamento e raffreddamento del gas:** il gas non è determinante nell'evoluzione e nel collasso della materia oscura, a patto che la

sua densità sia molto più piccola di quella della materia oscura. Al primo OC, il gas viene riscaldato dalle onde d'urto ad una temperatura molto alta, che successivamente diminuisce a causa di diversi meccanismi di raffreddamento radiativo. Nelle strutture, il gas caldo (10^8 K) può essere osservabile nei raggi X. Perché questo gas formi stelle o altri oggetti compatti e luminosi, esso, o almeno una sua componente, deve raffreddarsi fino a temperature molto basse. Questo avviene se la nuvola di gas è abbastanza compatta da permettere ai meccanismi di raffreddamento (interazione Compton con il CMB, bremsstrahlung, presenza di idrogeno molecolare etc.) di essere efficienti. I tempi scala di raffreddamento possono spiegare perché le galassie hanno una luminosità massima: il gas non riesce a raffreddarsi efficacemente in strutture più grandi. Infine, sui meccanismi di riscaldamento e raffreddamento del gas ha moltissima importanza l'interazione con oggetti come le supernove e gli oggetti quasi stellari (*quasi stellar objects*, QSO), che possono spazzare via il gas dagli aloni di materia oscura più piccoli, e produrre un fondo di radiazione ultravioletta capace di mantenere il gas ionizzato. Ulteriori particolari di questi processi sono descritti nelle §5.1.2 e §5.3.1.

- **Formazione stellare, reazione di ritorno delle supernove:** se il gas riesce a raffreddarsi fino a temperature abbastanza basse, esso forma idrogeno molecolare, che si frammenta e dà origine a stelle. Dipendentemente dalla forma della funzione di massa iniziale delle stelle, si possono formare diverse stelle di tipo OB, che presto diventano supernove di tipo II. Come detto prima, questi oggetti esplosivi interagiscono fortemente con l'ambiente circostante. Queste interazioni potrebbe spiegare il meccanismo di formazione galattica con bias: solamente negli aloni più grandi e con le buche di potenziale più profonde il gas riesce a rimanere dopo l'esplosione delle supernove. Probabilmente questo passaggio della formazione di galassie è il più difficile da modellare.
- **Attività QSO:** un'altro importante evento, che può accoppiare le scale molto piccole con quelle molto grandi, è la formazione di buchi neri supermassivi (*supermassive black hole*, SBH), e la relativa attività di tipo QSO. Questo avviene laddove il gas riesca a perdere efficacemente momento angolare, acquisito insieme con la materia oscura durante l'evoluzione debolmente non lineare, e collassare in una configurazione compatta, che poi evolve in buco nero di massa dell'ordine $10^6 - 10^9 M_{\odot}$. Il successivo accrescimento di gas da luogo ad un'attività radiativa molto intensa a tutte le frequenze misurabili. Tale radiazione può interagire

fortemente con il gas che circonda il buco nero, influenzando le proprietà sia dell'oggetto che lo ospita che dell'ambiente a grande scala. Anche la formazione di SBH è un passo molto difficile da modellare.

- **Ulteriore evoluzione dinamica e chimica delle galassie:** una volta che le galassie si sono formate, il loro stato dinamico ne determina la morfologia: se si forma un disco di stelle e gas, la galassia sarà osservata come spirale o lenticolare, mentre se la rotazione coerente si perde e si forma uno sferoide, la galassia sarà osservata come ellittica. Le interazioni con l'ambiente circostante possono ulteriormente influenzare la dinamica interna delle galassie (vedi ad esempio Giuricin et al. 1993). Contemporaneamente, le abbondanze chimiche di stelle e gas evolvono a causa dell'esplosione di supernove, che arricchiscono il mezzo galattico ed intergalattico di elementi pesanti; anche i venti stellari possono avere un ruolo. Il prodotto finale di tutti questi eventi sono le galassie così come le osserviamo oggi.

I modelli cosmologici stanno cercando di attraversare questa catena di eventi, per predire infine le proprietà delle galassie, dei gruppi ed ammassi di galassie e delle altre strutture osservabili. Sfortunatamente, molti di questi passaggi non sono ancora stati ben compresi; le generazioni future di modelli cosmologici potranno sperabilmente produrre predizioni precise per gli oggetti astrofisici.

Cionondimeno, come accennato prima, nel momento in cui si voglia risolvere un problema che riguarda la materia oscura, come il problema della funzione di massa, gli eventi relativi alla dinamica del gas possono essere trascurati. Come mostrato nella §1.1, anche limitandosi alla materia oscura il problema, pur drasticamente semplificato, rimane difficile da risolvere. Nei prossimi capitoli saranno presentati gli approcci che sono stati proposti per risolvere il problema della funzione di massa; tali approcci si basano su qualche approssimazione dinamica, del tipo elencato nella §1.2. L'approssimazione più semplice e più utilizzata in questo contesto è una combinazione di teoria lineare e collasso sferico: una perturbazione la quale, linearmente estrapolata, raggiunga contrasti di densità dell'ordine di uno, viene considerata collassata; ciò è corretto nel caso del collasso sferico di un top-hat, nel cui caso il contrasto lineare critico risulta 1.69.

Con questo modello, la storia di formazione di un oggetto appare molto più semplice di come non sia; in particolare:

- visto che la perturbazione top-hat collassa in un punto ad un certo istante, il collasso è ben definito; tutte le complicazioni geometriche del collasso reale possono essere trascurate;

- la virializzazione ha luogo subito dopo il collasso; tutti i transienti collegati al rilassamento ed alla cancellazione di sottostrutture sono trascurati;
- l'ulteriore accrescimento di materia viene supposto sferico, malgrado questo avvenga preferenzialmente lungo i filamenti.

Dopo un certo numero di transienti, i blocchi collassati diventano più o meno sferoidali; ciò avviene quando si raggiunge uno stato di equilibrio gravitazionale (rilassamento violento, virializzazione) e l'ulteriore accrescimento di materia è trascurabile, per lo meno per i suoi effetti sulle parti interne dell'oggetto. In questa situazione, un'approssimazione sferica è del tutto ragionevole; ma questa sfericità non è causata da una sfericità globale del collasso, ma è il risultato dell'equilibrio gravitazionale. In conclusione, la simmetria sferica può essere utile per descrivere oggetti evoluti come le galassie, o come le parti interne di alcuni ammassi di galassie; se calibrato su simulazioni ad N corpi, il modello sferico riesce a riprodurre le abbondanze e le storie di accrescimento degli aloni virializzati di materia oscura, ma in questo caso può non aiutare a comprendere il problema gravitazionale della loro formazione, come sarà mostrato nel seguito.

Quando si considera il collasso di un campo realistico di materia, senza imporre simmetrie speciali, vengono alla luce numerose difficoltà. La definizione di collasso non è immediata come nel caso sferico; una scelta ragionevole è quella di definire il collasso come l'OC: in quell'istante si formano regioni di densità formalmente infinita e la dinamica diventa "complicata" e "interessante". Si potrebbe tuttavia obiettare che la formazione di caustiche corrisponde al collasso su un asse, mentre sarebbe opportuno attendere il collasso su tutti e tre gli assi. Questa apparentemente ragionevole obiezione confonde due cose diverse, come la geometria locale e globale di un collasso. Infatti, la geometria planare del collasso è relativa al collasso locale di un elemento infinitesimo di massa, che può essere completamente diversa dalla geometria globale del collasso di un blocco esteso di materia. Come esempio, un elemento di massa che collassa su un picco perfettamente sferico (ma non un top-hat) subisce un collasso con simmetria assiale (chiamato collasso a *fuso*, in inglese *spindle*), nel quale i due assi perpendicolari all'asse di simmetria (che è ovviamente quello che punta verso il centro della perturbazione) collassano, mentre l'asse di simmetria si allunga indefinitamente; cionondimeno, la materia accresce con perfetta simmetria sferica sul picco.

D'altra parte, l'OC è una condizione necessaria affinché molti eventi abbiano luogo: sicuramente si ottengono densità infinita, così come espansione (indefinitamente negativa) e shear infiniti (questo è mostrato nella §3.1), mentre

rilassamento violento, virializzazione, riscaldamento e raffreddamento del gas e gli altri eventi astrofisici prima elencati hanno bisogno dell'OC per essere innescati. Infine, mentre la dinamica prima dell'OC può essere seguita con mezzi analitici o semianalitici, la dinamica dopo l'OC è difficilissima da seguire, almeno allo stato attuale di conoscenza. Si può quindi definire il collasso come l'OC, sicuri di descrivere comunque degli oggetti interessanti i quali, se non corrispondono con quelle che comunemente si chiamano "strutture", forniscono quegli *ambienti di alta densità* all'interno dei quali si formano le strutture astrofisiche.

Capitolo 2

La teoria della funzione di massa

Sono un po' tutti d'accordo nel considerare il 1974 come la data di nascita della teoria della funzione di massa; in quell'anno fu pubblicato il fondamentale articolo di Press & Schechter, che chiameremo PS nel seguito. Quel lavoro proponeva una procedura euristica, basata sulla teoria lineare, per ottenere la distribuzione delle masse degli oggetti collassati. Il risultato ispirò la forma del fit analitico della funzione di luminosità proposto da Schechter (1976), ma ricevette un'attenzione piuttosto limitata per più di un decennio. Nel 1988, quando, con le prime simulazioni ad N corpi con un numero significativo di particelle, si cominciò a trovare un sorprendente accordo tra queste e la teoria di PS, la teoria della funzione di massa ricevette una vera e propria esplosione di interesse; molti autori estesero la procedura di PS in molte direzioni, o proposero procedure diverse, alternative o complementari. In questi ultimi anni stiamo assistendo ad una nuova ondata di interesse, che non è ancora terminata.

Il capitolo è organizzato come segue: la procedura di PS è descritta e commentata nella §2.1. I confronti con le simulazioni numeriche sono descritti e commentati nella §2.2. La §2.3 contiene una sintesi dei lavori sulla teoria della funzione di massa basati sul formalismo degli insiemi di escursione, la §2.4 una sintesi dei lavori basati sul formalismo dei picchi e la §2.5 una sintesi dei lavori basati su una descrizione dinamica più realistica.

Nel seguito, la funzione di massa sarà abbreviata con MF (dall'inglese *mass function*).

2.1 La funzione di massa di Press & Schechter

È sorprendente, nel leggere l'articolo originale di PS, scoprire come la loro procedura fosse stata proposta per uno scenario cosmologico esplicitamente

diverso da quello “standard” descritto nel primo capitolo. Nel 1974 l’inflazione non era ancora stata escogitata, e lo spettro di perturbazioni appariva ancora come un elemento *ad hoc* nella teoria. Press & Schechter volevano analizzare il caso in cui le strutture nascono da semi di piccola massa, distribuiti con statistica Poissoniana. Di fatto la loro analisi, che si basa sull’evoluzione lineare delle perturbazioni (vedi la §1.2.3), è applicabile (allo stesso livello euristico) allo scenario cosmologico standard; il loro caso di distribuzione di Poisson corrisponderebbe ad uno spettro di rumore bianco ($P(k) \propto k^0$), mentre il loro caso di “varianza minima” (semi su un reticolo perturbato) corrisponderebbe a $P(k) \propto k$. Efstathiou, Fall & Hogan (1979) furono i primi a generalizzare la procedura di PS allo scenario cosmologico standard, limitandosi al caso di spettri invarianti di scala (leggi di potenze) e a modelli di Einstein-de Sitter. La procedura di PS verrà qui presentata con la stessa notazione usata in tutto il testo.

Consideriamo per semplicità un Universo di Einstein-de Sitter riempito di materia fredda e senza pressione, con perturbazioni iniziali Gaussiane; il caso di cosmologie diverse verrà analizzato nei capitoli 3 e 4. In questo caso, il contrasto di densità cresce in regime lineare proporzionalmente al fattore di scala $a(t) \propto t^{2/3}$. Il contrasto lineare, definito come nella §1.2.3 (Eq. 1.30), risulta in questo caso $\delta_l = \delta_i/a_i$, dove il pedice i indica un tempo iniziale. Sia δ_l smussato ad una scala R per mezzo di un filtro $W(\mathbf{x}, R)$. Mostriamo nel seguito che la forma del filtro ha molta importanza; per il momento supporremo che il filtro sia un top-hat nello spazio reale:

$$W(\mathbf{x}, R) \propto \theta(1 - x/R), \quad (2.1)$$

dove θ è la funzione gradino di Heavyside. Sia $\Lambda(R) \equiv \sigma_{\delta_l}^2(R)$ la varianza del campo δ_l , smussato sulla scala R . Entrambe le variabili Λ ed R possono essere usate come variabili di *risoluzione*; nel seguito utilizzeremo la variabile Λ per questo scopo.

Si assume che si formi una struttura collassata ogni qual volta δ_l raggiunga o superi un certo valore soglia δ_c , di ordine 1. Nella §1.2.4 abbiamo mostrato che il collasso sferico dà $\delta_c \simeq 1.69$; si suppone che questo corrisponda alla formazione di un alone virializzato di materia oscura. La frazione di massa collassata può essere calcolata come la probabilità che δ_l superi la soglia δ_c :

$$\Omega(> \Lambda) = \int_{\delta_c}^{\infty} P_{\delta_l}(\delta_l; \Lambda) d\delta_l. \quad (2.2)$$

Per esprimere l’Eq. (2.2) nella variabile massa M , è necessario determinare la massa associata alla scala R , ovvero alla risoluzione Λ . Nel caso di smussamento top-hat, è ragionevole imporre:

$$M = 4\pi\bar{\rho}R^3/3. \quad (2.3)$$

Un punto collassato sulla scala R può essere parte di una struttura di dimensione R o, più generalmente, di una struttura più grande. La densità numerica di strutture di massa compresa tra M ed $M + dM$ — la MF $n(M)$ — è collegata alla derivata della MF integrale $\Omega(> \Lambda)$ tramite la seguente “regola d’oro” (così chiamata da Cavaliere, Colafrancesco & Scaramella 1991):

$$Mn(M)dM = \bar{\rho} \left| \frac{d\Omega}{dM} \right| dM = n(\Lambda) \left| \frac{d\Lambda}{dM} \right| dM. \quad (2.4)$$

L’equazione (2.4) è la formula di PS per la MF. È possibile riconoscere due termini importanti nel lato destro di tale equazione: un termine sia “dinamico” che “statistico”, $n(\Lambda) = d\Omega/d\Lambda$,

$$n(\Lambda) = \frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\Lambda^3} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\Lambda}\right), \quad (2.5)$$

il quale contiene l’informazione sulla dinamica del collasso (tramite il parametro δ_c) e sulla statistica (Gaussiana) del campo iniziale, e un termine “cosmologico”, $d\Lambda/dM$, il quale contiene l’informazione sullo spettro di potenza. Se questo è una legge di potenza, $P(k) \propto k^n$, la MF di PS può essere espressa analiticamente come segue:

$$n(M) = \frac{\bar{\rho}}{M_*^2} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}} \right) \left(\frac{n+3}{3} \right) \left(\frac{M}{M_*} \right)^{\frac{n+3}{6}-2} \exp\left(-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{\frac{n+3}{3}}\right), \quad (2.6)$$

dove M_* è la massa corrispondente alla scala a cui Λ è uguale a δ_c^2 . L’Eq. (2.6) ha la seguente forma caratteristica, mostrata anche in Fig. 2.1 (per spettri senza scala con $n = -2$ o 1): una legge di potenza a piccole masse, di pendenza $(n+3)/6 - 2$ (che è ~ 2 se $n \sim -2 \div -1$), e un taglio esponenziale modificato a masse più grandi della massa tipica M_* . Nella Fig. 2.1 è mostrato anche l’effetto dovuto al cambiamento del parametro δ_c da 1.69 ad 1.5: la parte a grandi masse viene spostata in avanti, mentre la parte a piccole masse viene leggermente abbassata. Se lo spettro non è una legge di potenza, come avviene in casi realistici, si può usare l’Eq. (2.4) per calcolare esplicitamente la MF. Tuttavia, gli spettri tipici hanno curvature logaritmiche molto modeste, e possono essere ben approssimati da una legge di potenza in intervalli di scala ristretti; in questo caso, l’espressione data prima per la legge di potenza può ancora essere usata.

La teoria di PS presenta molti problemi:

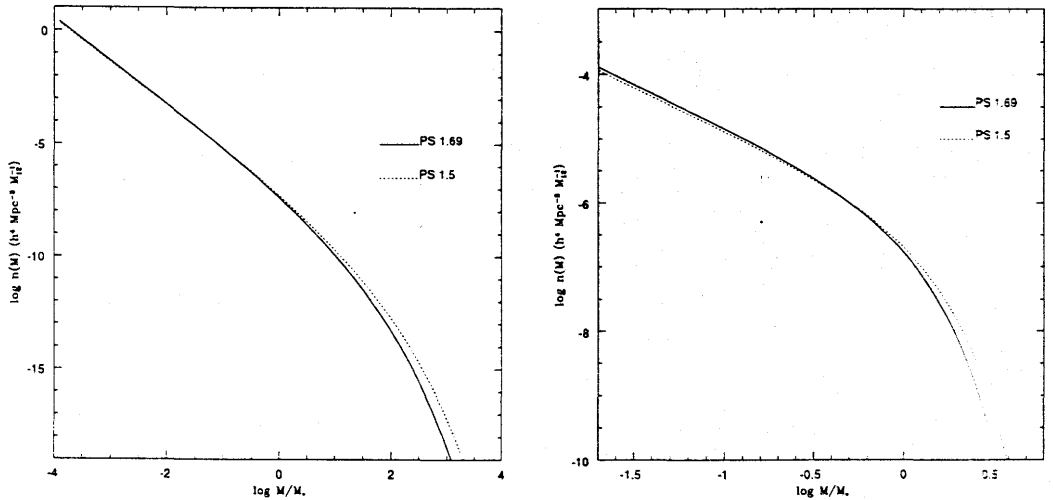


Figura 2.1: Funzione di massa di PS: (a) $n = -2$, (b) $n = 1$.

- Problemi statistici:** nel limite di piccoli raggi di smoothing, o di grandi varianze di massa, la frazione di massa collassata, data dall'Eq. (2.2), raggiunge il valore asintotico di $1/2$. Questo è un marchio della teoria lineare: soltanto le zone inizialmente sovradense, che costituiscono la metà della massa, possono collassare. Però, le regioni sottodense possono essere incluse in regioni sovradense più grandi, o, più generalmente, le regioni non collassate hanno una probabilità finita di essere incluse in regioni collassate più grandi; questo è comunemente chiamato *problema della nuvola-nella-nuvola* (CIC, dall'inglese *cloud-in-cloud*). Press e Schechter ritenevano che la massa mancante sarebbe andata ad accrescere sulle strutture già formate, raddoppiandone così la massa senza cambiare la forma della MF; tuttavia essi non diedero una vera e propria dimostrazione di questo. Essi semplicemente moltiplicarono la loro MF per il "fattore sciocchezza" 2. Altri autori (vedi la rassegna di Lucchin 1989) moltiplicarono la loro MF per un fattore $(1 + f)$, dove f indica la frazione di massa che accresce sulle strutture già formate.
- Problemi dinamici:** la derivazione euristica della MF permette di evitare tutte le complicazioni collegate alla dinamica altamente non lineare del collasso gravitazionale. Il collasso sferico aiuta a determinare il parametro δ_c e ad identificare le strutture formate con degli aloni virializzati. Tuttavia, la procedura di PS ignora completamente eventi dinamici importanti, come il ruolo delle maree e dei transienti geometrici filamentari delle strutture collassate. Inoltre, supporre che ogni

struttura si virializzi subito dopo il collasso è un'approssimazione rozza, che ignora alcuni degli eventi elencati nella §1.3. In particolare, quando una regione collassa, si suppone che tutta la sua sottostruttura scompaia immediatamente; in effetti, il cancellamento della sottostruttura è connesso con le interazioni a due corpi che avvengono tra oggetti già collassati, un importante pezzo di dinamica gravitazionale completamente ignorato dalla procedura di PS.

- **Problemi geometrici:** per stimare la MF $n(M)$ dalla frazione di massa collassata ad una certa scala, $\Omega(> \Lambda)$, bisogna dare una relazione tra la massa M delle strutture formate e la risoluzione Λ . La ragionevole relazione data nell'Eq. (2.3) può essere considerata solo come una stima di ordine di grandezza. In pratica, la reale geometria delle regioni collassate, nello spazio Lagrangiano (cioè riportate alla configurazione iniziale), può essere alquanto complicata, specialmente a masse intermedie e piccole, per le quali andrebbe sviluppata una relazione massa-risoluzione più evoluta, che tenga opportunamente conto della geometria. Per esempio, se si suppone che le strutture si formino nei picchi del campo iniziale, una maniera migliore, più "geometrica" di contare le strutture collassate potrebbe essere basata sulla statistica dei picchi.

Malgrado tutti i suoi limiti e problemi, la teoria proposta da PS si è rivelata un successo, secondo il confronto con le simulazioni ad N corpi, ed un buon punto di partenza per quasi tutti i lavori seguenti sull'argomento.

2.2 Simulazioni ad N corpi

Press & Schechter furono i primi a controllare la validità della loro teoria per mezzo di simulazioni numeriche ad N corpi. Essi trovarono qualche incoraggiante segno di accordo, ma le loro simulazioni erano limitate ad un piccolo numero di punti massa, 1000 per l'esattezza, troppo pochi per ottenere conclusioni certe. Efstathiou, Fall & Hogan (1979) fecero simili simulazioni con 1000 corpi, ottenendo risultati simili a quelli di PS.

Più tardi, Efstathiou et al. (1988) confrontarono i risultati di simulazioni più estese (codice P3M con 32^3 particelle, spettri di potenza senza scala) con la formula di PS; la loro gamma dinamica era abbastanza grande da controllare il ginocchio della MF. Il risultato sorprendente fu che la formula di PS risultava molto simile alla distribuzione di molteplicità dei loro aloni simulati, trovati per mezzo di un algoritmo di percolazione del tipo amici-degli-amici. Ulteriori confronti con le simulazioni ad N corpi vennero fatti da

Efstathiou & Rees (1988), Narayan & White (1988), Carlberg & Couchman (1989), Carlberg (1990), Bond et al. (1991), Brainerd & Villumsen (1992), White, Efstathiou & Frenk (1993), Ma & Bertschinger (1994), Jain & Bertschinger, Gelb & Bertschinger (1994), (1994), Katz, Quinn, Bertschinger & Gelb (1994), Lacey & Cole (1994), Klypin & Rhee (1994), Efstathiou (1995), Klypin et al. (1995), Bond & Myers (1996b).

Quasi tutti gli autori hanno trovato che la formula di PS si adatta bene ai risultati delle loro simulazioni; nondimeno, tutti gli autori sono d'accordo nel riconoscere che la validità della formula di PS è solamente statistica, cioè che l'esistenza dei singoli aloni di materia oscura non è ben predetta dal criterio di PS, basato su teoria lineare ed una soglia fissa. Fanno eccezione i lavori di Brainerd & Villumsen (1992), che hanno trovato che la PS non riproduce bene la MF a masse piccole, e i lavori di Jain & Bertschinger (1994), Ma & Bertschinger (1995) e Gelb & Bertschinger (1995), che hanno trovato che la MF di PS si adatta alla loro MF numerica solo a patto di cambiare il parametro δ_c al variare del tempo.

Infine, Bond et al. (1991) e, specialmente, Lacey & Cole (1994) (vedi la §2.3) hanno confrontato in maniera approfondita le storie di accrescimento degli aloni di materia oscura, date da un'estensione della teoria di PS, con i risultati delle loro simulazioni, trovando nuovamente un soddisfacente accordo.

Due importanti punti tecnici vanno notati:

- Il parametro δ_c usato dai diversi autori per ottenere un'aderenza della PS con le simulazioni varia dall'1.33 di Efstathiou & Rees (1988) all'1.9 di Lacey & Cole (1994) (i quali però lasciavano libera di variare anche la massa associata ad ogni scala). Il valore preciso del parametro δ_c è di fatto influenzato da un numero di cause, dalla forma esatta del filtro (i filtri Gaussiani richiedono di solito δ_c più bassi) all'algoritmo di identificazione degli aloni, come chiarirò adesso.
- La MF numerica dipende drasticamente dalla maniera con cui si riconoscono gli aloni nella simulazione. Gli algoritmi tipicamente usati, come quello amici-degli-amici, basato sulla percolazione, o il DENMAX, basato su un criterio di sovradensità, sono parametrici, ovvero il loro risultato dipende da un parametro libero. Per esempio, il famoso algoritmo amici-degli-amici definisce alone un insieme di particelle tali che ognuna di loro è separata da almeno un'altra da una distanza inferiore ad un parametro b moltiplicato per la distanza interparticellare media. Tramite un argomento euristico, basato sul collasso sferico, si può stimare che il valore ideale del parametro è 0.2, (si seleziona così un

alone con contrasto medio di densità 180, come suggerito dal modello sferico). Tuttavia, l'uso di parametri b diversi porta a diverse MF numeriche. Questo introduce un altro parametro nascosto nel confronto tra PS e MF numerica, il quale si unisce al parametro δ_c (e, nel caso di Lacey & Cole (1994), alla proporzionalità tra massa e risoluzione), per cui il confronto diventa un adattamento (fit) parametrico, piuttosto che un vero confronto tra teoria ed "esperimento numerico".

2.3 Approccio degli insiemi di escursione

La terminologia *approccio degli insiemi di escursione* fu introdotta da Bond et al. (1991) per indicare che la determinazione della MF è basata sulla statistica di quelle regioni il cui contrasto lineare δ_l è più grande della soglia δ_c ; tali regioni sono chiamate insiemi di escursione nel linguaggio dei processi stocastici, vedi ad esempio Adler (1981). La procedura di PS è chiaramente inclusa in questa classe di approcci. Questa sezione presenta i lavori basati sugli insiemi di escursione.

2.3.1 Estensioni del formalismo di PS

Come accennato prima, l'articolo originale di PS trattava modelli in cui le strutture a grande scala crescono da semi di piccola massa, con distribuzione Poissoniana o posti su un reticolo perturbato. Tale formalismo fu esteso al caso di cosmologie "standard" da Efstathiou, Fall & Hogan (1979); tuttavia, la loro analisi era limitata ad Universi di Einstein-de Sitter e a spettri senza scala. La prima applicazione della teoria di PS al modello CDM standard fu operata da Schaeffer & Silk (1985); questi autori in pratica riscoprono la PS, completa del "fattore sciocchezza" 2 (nel senso che descrissero un procedimento assolutamente analogo senza però citare Press e Schechter), e fecero alcune critiche interessanti sulla sua validità; in particolare, tentarono di modellare, su basi puramente geometriche, la formazione di oggetti che non collassano sfericamente, come le frittelle ed i filamenti.

A partire dal 1988, molti autori tentarono di estendere l'approccio di PS, e di capire come mai questo funzionasse, malgrado la sua derivazione euristica e poco soddisfacente. La situazione agli inizi di questo periodo è riportata in Lucchin (1989). Solo un anno prima, Kashlinsky (1987) tentò di determinare la funzione di correlazione a due punti delle strutture collassate secondo la prescrizione di PS. Martinez-Gonzalez & Sanz (1988a) fecero calcoli simili con un metodo differente, mentre Martinez-Gonzalez & Sanz (1988b) tentarono una determinazione della funzione di luminosità delle galassie di diversi

tipi morfologici per mezzo di un approccio intermedio tra quello degli insiemi di escursione e quello dei picchi, descritto in seguito (§2.4). Lucchin & Matarrese (1988) estesero il formalismo di PS al caso di perturbazioni non Gaussiane. È da notare che tali perturbazioni non Gaussiane possono essere sia primordiali che originate dalla dinamica: i risultati di Lucchin & Matarrese (1988) possono indirettamente introdurre della dinamica nella teoria della MF. Lilje (1992) and Lahav et al. (1991) estesero i risultati di PS a cosmologie aperte o con costante cosmologica. Schaeffer & Silk (1988a) usarono la procedura di PS per giustificare la presenza di un po' di potenza su piccola scala nella cosmologia HDM: l'uso di filtri Gaussiani può infatti fare sfumare potenza dalle grandi alle piccole scale. Un commento tecnico: gli stessi autori mostrarono che, sempre nel caso di filtri Gaussiani, il problema CIC non influenza molto la MF a grandi masse; questa conclusione è stata poi confermata dalle analisi successive, come mostreremo in dettaglio nella §3.3. Ancora Schaeffer & Silk (1988a,b), e Occhionero & Scaramella (1988), applicarono la teoria della MF per ottenere diverse predizioni cosmologiche sulle strutture collassate. Successivamente, la teoria di PS, con le sue estensioni, divenne uno strumento standard per la predizione delle proprietà delle strutture collassate; alcune applicazioni saranno descritte nel capitolo 5.

Non sono a conoscenza di lavori che abbiano analizzato il problema della funzione di massa in tali scenari; una maniera approssimativa di tenere conto di tali complicati eventi è attraverso la non Gaussianità della configurazione primordiale del campo di materia.

2.3.2 Il problema CIC

Come messo in evidenza nella §2.1, regioni di cui non si predice il collasso possono essere incluse in regioni più grandi che stanno collassando; la formula di PS non tiene conto di questo fatto. Questo problema fu chiamato nuvolanella-nuvola (CIC) da Bardeen et al. (1986), ma in effetti tale problema era già stato affrontato e risolto da Epstein (1983; 1984), per modelli cosmologici simili a quelli originariamente analizzati da PS. Come già accennato, Schaeffer & Silk (1988a) avevano correttamente trovato che il problema CIC non è grave a masse grandi, se si usa il filtro Gaussiano. Il problema CIC fu nuovamente affrontato e risolto indipendentemente da Peacock & Heavens (1990) e Bond et al. (1991) (i quali non erano a conoscenza dei lavori di Epstein); una discussione è contenuta anche in Efstathiou (1989).

Il problema CIC ha origine dalla seguente inconsistenza nella procedura di PS. Ad ogni punto dello spazio (Lagrangiano) è assegnata una predizione di collasso *per ogni risoluzione* Λ ; in altre parole, ad ogni punto è assegnata un'intera traiettoria nel piano $\delta_l-\Lambda$; questa situazione è rappresentata in Fig.

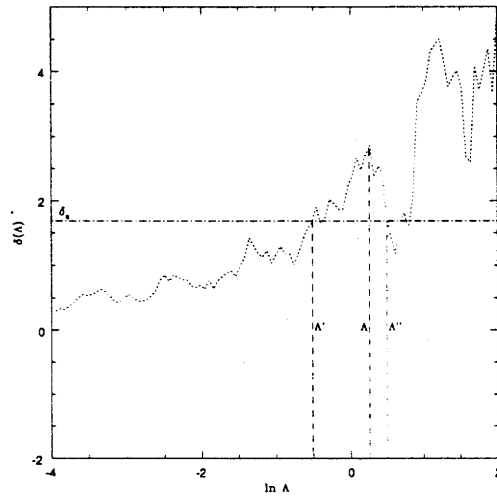


Figura 2.2: Il problema della barriera assorbente.

2.2. Tali traiettorie partono dall'origine (se non ci sono perturbazioni, non c'è collasso), quindi vagano per il piano, attraversando infine la linea di soglia $\delta_l = \delta_c$, in salita o in discesa. Quando una traiettoria sta, alla risoluzione Λ , al di sopra della linea di soglia, si assume che il punto sia parte di una regione collassata di raggio $R' \geq R(\Lambda)$; è chiaro che il raggio $R'(\Lambda')$ è connesso al punto Λ' di primo attraversamento della linea di soglia. D'altra parte, quando una traiettoria riattraversa la soglia ad una risoluzione Λ'' , e si ritrova al di sotto della linea, si deve concludere che il punto non appartiene ad alcuna regione di raggio $> R''(\Lambda'')$, il che è palesemente in contraddizione con quanto detto prima.

Per risolvere il problema CIC, un punto la cui traiettoria ha attraversato la soglia per la prima volta deve essere considerato collassato a tutte le risoluzioni successive, a prescindere dai suoi riattraversamenti. Questo può essere fatto come segue: una barriera assorbente è messa in corrispondenza della linea di soglia, così da eliminare ogni evento di riattraversamento (Bond et al. 1991). Alternativamente, si può formulare una condizione di non collasso come segue: un punto non appartiene ad alcuna struttura collassata di raggio $> R(\Lambda)$ se il suo contrasto lineare è inferiore alla soglia *per ogni* $\Lambda' < \Lambda$ (Peacock & Heavens 1990).

La natura matematica del problema, e la risultante MF, dipende molto dalla forma del filtro. Nel caso di filtri generici, le traiettorie sono molto correlate in Λ , e quindi per risolvere il problema è necessario conoscere tutte le correlazioni ad N punti del processo in funzione della risoluzione. Tuttavia, se la finestra di smussamento è tale da tagliare in maniera netta il campo

nello spazio di Fourier, allora, quando varia la risoluzione, vengono aggiunti al processo $\delta_l(\Lambda)$ dei modi indipendenti, e le corrispondenti traiettorie sono cammini casuali (*random walks*) Gaussiani. Un tale filtro è comunemente chiamato filtro netto nello spazio k ; sarà chiamato filtro SKS, dall'inglese *sharp k-space*.

Nel caso SKS, il problema CIC è opportunamente risolto per mezzo del formalismo di diffusione proposto da Bond et al. (1990). I cammini casuali, che sono tipi particolari di processi di Markov (nel linguaggio stocastico vengono chiamati processi di Wiener), sono caratterizzati da incrementi indipendenti: se $d\delta_l(\Lambda)$ è l'incremento del processo nel punto Λ , allora

$$\langle d\delta_l(\Lambda) d\delta_l(\Lambda') \rangle = \delta_D(\Lambda - \Lambda'), \quad (2.7)$$

dove δ_D è la funzione delta di Dirac. La PDF dei valori di δ_l può essere trovata come soluzione di un'equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} P_{\delta_l}(\delta_l; \Lambda) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial F^2} P_{\delta_l}(\delta_l; \Lambda). \quad (2.8)$$

Se si inserisce a $\delta_l = \delta_c$ una barriera assorbente, l'equazione di Fokker-Planck va risolta con il vincolo che la soluzione $P_{\delta}^{\text{noup}}(\delta; \Lambda)$ si annulli sempre a δ_c . Questa soluzione sarà trovata e commentata nella §4.2. La MF integrale può quindi essere scritta come:

$$\Omega(> \Lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\delta_c} P_{\delta}^{\text{noup}}(\delta; \Lambda). \quad (2.9)$$

Questa risulta essere uguale alla formula di PS, Eq. (2.2), compreso il fattore sciocchezza 2. È da notare che Epstein (1983) era arrivato esattamente allo stesso risultato, con considerazioni formalmente molto diverse ma equivalenti a quelle del formalismo di diffusione con filtraggio SKS.

I risultati cambiano considerevolmente se si usano filtri diversi da quello SKS; in Fig. 4.10 (capitolo 4) è mostrata la profonda differenza tra le traiettorie SKS e quelle trovate utilizzando un filtro Gaussiano. Per trovare $P_{\delta}^{\text{noup}}(\delta; \Lambda)$, bisogna conoscere tutte le funzioni di correlazione ad N punti del processo $\delta_l(\Lambda)$ ed il problema diventa matematicamente intrattabile. Dal punto di vista qualitativo, i filtri non SKS danno traiettorie molto più stabili, e questo ha come conseguenza che una traiettoria subito sotto la barriera non può facilmente saltare al di sopra di essa al passo successivo. Come conseguenza, si ottiene a grandi masse la formula di PS *senza* il fattore 2 (come già intuito da Schaeffer & Silk 1988a), mentre la parte a basse masse mostra una pendenza diversa da quella di PS, dipendente dalla forma precisa del filtro. Peacock & Heavens (1990), sfruttando la stabilità delle traiettorie,

hanno proposto un'approssimazione ragionevole ed accurata per il problema della barriera assorbente; questa sarà descritta in dettaglio nella §4.3. Bond et al. (1991) hanno proposto altri metodi approssimati per ottenere la MF per filtri non SKS; loro stessi affermano che i loro metodi sono equivalenti o forse un po' peggiori di quello di Peacock e Heavens.

Recentemente, Jedamzik (1996) ha affermato che la soluzione del problema CIC, data da Bond et al. (1991) nel caso SKS, è sbagliata. L'autore ha analizzato il problema per mezzo di un formalismo differente, che è in pratica molto simile a quello usato da Peacock & Heavens (1990). Tuttavia il suo risultato è sbagliato, a causa di un errore di calcolo, come hanno mostrato Yano, Nagashima & Gouda (1996), ribadendo la validità del risultato di Bond et al. (1991).

Una possibile inconsistenza del modello di diffusione è la seguente: il contrasto lineare δ_l , che assume valori dell'ordine uno, può facilmente assumere valori più piccoli di -1 , il che implicherebbe densità negative. Per evitare questo problema, Porciani et al. (1996) hanno posto una seconda barriera a $\delta_l = -1$, riflettente o assorbente; questo causa un incremento del numero di oggetti a masse grandi ed intermedie, ed un vistoso taglio degli oggetti al di sotto di una seconda massa scala, diversa da M_* .

Un'altra maniera diretta di risolvere il problema CIC è quella di costruire realizzazioni Monte Carlo del campo di densità iniziale, e quindi applicare qualche algoritmo multiscala per identificare le strutture collassate. Due modelli di questo tipo sono stati proposti: il modello a blocchi di Cole & Kaiser (1988), e quello di Rodriguez & Thomas (1996). Tali modelli hanno il vantaggio di trattare in maniera soddisfacente la geometria delle regioni collassate nello spazio Lagrangiano, ma sono in qualche modo limitati in risoluzione e non producono formule analitiche per la MF. In tutti casi, tali metodi sono enormemente più veloci delle simulazioni ad N corpi. Infine, Sheth (1995; 1996) ha recentemente riconsiderato il problema della funzione di massa di un insieme di particelle distribuite con statistica di Poisson, utilizzando strumenti matematici avanzati, presi in prestito dalla teoria dei processi stocastici.

2.3.3 Storie di accrescimento

Le storie di accrescimento costituiscono un importante elemento nelle teorie di formazione degli aloni di materia oscura. Esse sono un prodotto delle teorie della MF: un elemento di massa, che si trova in una struttura di massa R , può essere trovato dopo un certo tempo in un'altra struttura più grande; le probabilità condizionali connesse con tali eventi possono essere utilizzate per trovare le storie di accrescimento delle strutture collassate. Il primo a tentare

questa strada fu Carlberg (1990), i cui risultati sono però in contraddizione con i lavori più recenti che saranno ora elencati. Bower (1991) costruì le storie di merging per mezzo del formalismo di PS, ottenendo gli stessi risultati che saranno poi ottenuti con il formalismo della diffusione.

Bond et al. (1991) proposero per primi di usare il formalismo della diffusione per ottenere le storie di accrescimento: le probabilità congiunte di appartenenza a strutture diverse a tempi diversi si possono calcolare come soluzioni di un problema di diffusione con due barriere assorbenti. Come è stato visto prima, tale formalismo non è del tutto giustificato, visto che vale solo nel caso speciale e piuttosto innaturale del filtraggio SKS; però i suoi due grandi vantaggi, la semplicità e l'aderenza con i risultati delle simulazioni, lo rendono uno strumento prezioso per la teoria delle storie di accrescimento. Tali storie furono calcolate da Lacey & Cole (1993) sulla base dei suggerimenti di Bond et al. (1991). Come detto prima, ottennero risultati identici a quelli di Bower (1991), ma in contrasto con quelli di Carlberg (1990). Essi trovarono anche un'inconsistenza nel procedimento analitico, giudicata non grave (una distribuzione di probabilità diventava leggermente negativa), probabilmente causata dalla semplicistica relazione massa - risoluzione (Eq. 2.3), ovvero dal trattamento semplicistico della geometria delle regioni collassate nello spazio Lagrangiano.

Lacey & Cole (1993) proposero anche un approccio Monte Carlo per generare storie di accrescimento tramite la simulazione di traiettorie di cammino casuale. In un successivo lavoro (Lacey & Cole 1994) gli stessi autori confrontarono i loro risultati con simulazioni ad N corpi, trovando globalmente un accordo soddisfacente. Il loro metodo Monte Carlo per generare le storie di accrescimento degli aloni di materia oscura è oggi comunemente usato per modellare la formazione degli aloni galattici virializzati, nei quali inserire "a mano" la fisica del gas; tali modelli saranno discussi nella §5.1.

2.3.4 Correlazioni spaziali

Se si considera il collasso sferico, e si usa consistentemente il filtraggio top-hat, allora il contrasto di densità in un punto rappresenta il contrasto medio su una sfera, e la predizione del collasso non va assegnata solamente al punto in considerazione ma a tutta la materia contenuta nella regione sferica. Quindi, la condizione del collasso di un punto non è semplicemente quella di avere un contrasto di densità più grande della soglia, o, in altri termini, di essere *al centro* di una regione che collassa, ma è quella di essere a distanza minore del raggio di smussamento da un punto il cui contrasto superi la soglia, ovvero di essere *inclusi* in una regione che collassa. In Monaco (1996a,b) ho chiamato tale ragionamento *interpretazione globale* del tempo di collasso.

Questa osservazione era in pratica contenuta nel sorprendente lavoro di Epstein (1983), in cui erano stati presi in considerazione punti generalmente contenuti in regioni sia sferiche che non-sferiche. Più recentemente, Blanchard, Valls-Gabaud & Mamon (1992) e Yano et al. (1996) riproposero lo stesso argomento. I primi conclusero che la funzione di massa risultante cambia alle grandi masse, ma alle piccole masse subisce solo un modesto appiattimento rispetto all'PS. I secondi affrontarono l'argomento introducendo esplicitamente la funzione di correlazione a due punti nella condizione di collasso (data tramite il formalismo proposto da Jedamzik 1996; vedi §2.3.2), la quale è necessaria per calcolare la probabilità che un punto sia vicino ad un altro punto capace di coinvolgerlo nel proprio collasso. Essi conclusero, analogamente a Blanchard et al. (1992), che il nuovo elemento introdotto influenza la MF a grandi masse, ma solo debolmente a piccole masse.

2.4 Il formalismo dei picchi

Fin da Doroshkevich (1970), i picchi del campo iniziale di densità sono stati considerati come dei luoghi naturali per la formazione delle strutture collassate. Tale idea divenne quasi un paradigma nell'ambito della formazione galattica con bias, discussa in §1.1; fu Kaiser (1984) a mostrare che i picchi alti del campo di densità iniziale mostrano un aumento di correlazione rispetto al campo di materia sottostante, il che permette di spiegare in maniera naturale la causa della grande lunghezza di correlazione trovata per gli ammassi di galassie. Peacock & Heavens (1985) e Bardeen et al. (1986) calcolarono i valori di aspettazione del numero medio dei picchi di un campo Gaussiano e di molte altre quantità collegate. A prima vista, il numero dei picchi di una certa altezza potrebbe essere facilmente tradotto in una MF, ma una serie di difficoltà, già individuate da Bardeen et al. (1986) (i quali evitarono esplicitamente di calcolare la MF), ostacolano tale procedimento: (a) non è chiaro quale massa va assegnata ad un picco; (b) il numero dei picchi è determinato sulla base del campo smussato su una singola scala, per cui la MF calcolata coi picchi risente del problema CIC, che in questo caso può essere chiamato problema del picco-nel-picco.

Gli approcci degli insiemi di escursione e dei picchi sono in qualche modo complementari: gli insiemi di escursione sono efficaci nel determinare la frazione di massa collassata, e quindi la normalizzazione globale della MF, ma non sono accurati nel decidere come la massa collassata si suddivide in strutture, cioè nel contare il numero di oggetti che si formano. Al contrario, l'approccio dei picchi è molto chiaro nel determinare il numero esatto di strut-

ture che si formano, ma non è efficace nel determinare la massa da associare alle strutture, e quindi la normalizzazione globale della MF.

Si può determinare una MF dei picchi come segue: sia $n_{\text{pk}}(\delta_l; \Lambda)$ la densità numerica dei picchi con contrasto lineare δ_l ; il campo iniziale si assume smussato alla risoluzione Λ . Se $M_{\text{pk}}(\delta_l, \Lambda)$ è la massa associata ad un picco, e se si usa la variabile massa M al posto della risoluzione Λ (in questo caso l'indeterminazione nella relazione $\Lambda \rightarrow M$ può essere assorbito dalla definizione di M_{pk}), la MF integrale può essere scritta come:

$$\Omega(> M) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta_l n_{\text{pk}}(\delta_l, M) M_{\text{pk}}(\delta_l, M), \quad (2.10)$$

dove δ_c è una soglia di densità dei picchi. Utilizzando la stessa "regola d'oro" dell'approccio PS (Eq. 2.4), si ottiene:

$$n(M)dM = \left| \frac{d[n_{\text{pk}}(\delta_c; M) M_{\text{pk}}(\delta_c, M)]}{dM} \right| dM. \quad (2.11)$$

Di fatto, non c'è accordo generale sulla validità del paradigma dei picchi. Dal punto di vista teorico, si può mostrare che le strutture *non* si formano nei picchi del campo iniziale; per esempio, secondo l'approssimazione di Zel'dovich le strutture si formano nei picchi del più grande autovalore λ_1 del tensore di deformazione (vedi ad esempio Shandarin & Zel'dovich 1989; vedi anche la §3.1). Quindi il paradigma dei picchi non è valido in generale, tranne che per i picchi più alti, dove vale con buona approssimazione (vedi ad esempio Bernardeau 1994b). Alcuni studi basati su simulazioni ad N corpi (Katz, Quinn & Gelb 1993; van de Weygaert & Babul 1994) hanno mostrato che i picchi di dimensioni galattiche possono essere distrutti, o fatti fondere con altri picchi, per effetto dell'interazione mareale con le strutture esterne. Manrique & Salvador-Solé (1995) sospettano che tali risultati siano dovuti alla mancanza di correzione per il problema picco-nel-picco. D'altro canto, Bond & Myers (1996) hanno mostrato che le strutture trovate con il metodo picco-chiazza (peak-patch, descritto nella §2.4.2), che tiene conto del problema picco-nel-picco, riproducono bene le strutture trovate nelle simulazioni ad N corpi.

2.4.1 La massa di picchi

I primi ad usare la MF data dai picchi, con M_{pk} dato dalla massa contenuta nel picco (ed indipendente da δ_c), furono Efstathiou & Rees (1988) e Carlberg & Couchman (1989), i quali confrontarono tale MF con quella simulata, trovando un buon accordo; tale MF non è infatti molto diversa da quella di

PS, almeno nella gamma dinamica coperta dalle simulazioni. Contemporaneamente, Bond (1989) proponeva una formula analoga per rappresentare la MF negli scenari CDM con bias.

Molti autori hanno proposto espressioni alternative, più motivate, per la massa da associare ad un picco. Peacock & Heavens (1985) rappresentarono il picco come un ellissoide triassiale, e stimarono la sua massa come quella contenuta dall'ellissoide fino al livello $\delta_l=0$. Seguendo i suggerimenti di Bardeen et al. (1986), Hoffman (1988) e Ryden (1988) determinarono la massa del picco come quella contenuta entro il raggio in cui il profilo medio di densità è uguale alla sua dispersione. Anche Colafrancesco, Lucchin & Matarrese (1989) rappresentarono il picco come un ellissoide triassiale, e ne stimarono la massa come quella contenuta dall'ellissoide entro una certa soglia di densità. Infine, Peacock & Heavens (1990) stimarono la massa di un picco (con filtraggio Gaussiano) come quella contenuta dalla sfera che produce la stessa varianza di massa di quella che si otterrebbe da un filtraggio top-hat. Gli stessi autori notarono che la massa dei picchi dovrebbe soddisfare il vincolo della normalizzazione globale della MF.

Tutte queste diverse definizioni di massa del picco, ugualmente ragionevoli, danno origine a MF significativamente diverse. Per capire quale tra esse è da preferire, bisognerebbe (a) risolvere il problema picco-nel-picco, e quindi (b) confrontare le varie definizioni con le simulazioni ad N corpi.

2.4.2 Il problema picco-nel-picco

Un punto che ad una data scala non è incluso in alcun picco di altezza sufficiente per collassare entro un dato tempo, può essere incluso in un picco collassante ad una scala più grande. Come nell'approccio degli insiemi di escursione, una struttura reale deve essere connessa con quei picchi che attraversano una certa soglia ad una data scala o risoluzione, e che non sono inclusi in picchi collassanti più grandi. Una prima soluzione euristica del problema picco-nel-picco fu data da Peacock & Heavens (1990), i quali utilizzarono un metodo simile a quello da loro sviluppato per risolvere il problema CIC con i filtri non SKS. Appel & Jones (1990) determinarono la MF calcolando il numero di picchi la cui altezza diventa minore della soglia quando si aumenta la risoluzione; questo evento è analogo all'attraversamento verso su della linea di soglia nel caso degli insiemi di escursione, ma può avere luogo anche dopo che c'è stato il primo attraversamento. Con questa procedura il problema picco-nel-picco risultava quasi risolto, anche se qualche picco piccolo poteva essere trovato dentro un picco di grande massa. Questo può essere spiegato come segue: Appel & Jones usavano filtri Gaussiani, per cui le traiettorie $\delta_l(\Lambda)$ corrispondenti ai punti di picco sono molto stabili (vedi la

§4.3); di conseguenza, gli eventi di riattraversamento della soglia sono rari e possono avere luogo solamente dopo grandi intervalli di scala. Gli autori su menzionati assegnarono ad ogni picco la massa contenuta dal filtro alla scala in cui tale picco scompariva; è da notare come questa definizione implichi l'interpretazione globale del collasso, descritta nella §2.3.4. Infine, essi non controllarono la normalizzazione globale della loro MF.

Seguendo ed estendendo i suggerimenti di Appel & Jones (1990), Manrique & Salvador-Solé (1995,1996) costruirono il formalismo del *sistema confluyente*, che descrive le storie di accrescimento dei picchi. Analogamente ad Appel e Jones, essi focalizzarono la loro attenzione sui picchi che vanno al di sotto della soglia quando si diminuisce la risoluzione, ma aggiunsero la condizione che tali picchi non siano inclusi in picchi di scala più grande. Essi assegnarono ai picchi una massa proporzionale a quella di Appel e Jones, ma lasciarono libera la costante di proporzionalità per garantire la normalizzazione globale della MF. Con il loro formalismo si costruiscono le traiettorie dei punti di picco nel piano $\delta_l-\Lambda$ (tenendo conto del fatto che il punto di picco si muove al variare della risoluzione); queste traiettorie possono essere interpretate come storie di accrescimento dei picchi. Un punto importante è che nel loro formalismo vengono chiaramente distinti gli eventi di accrescimento continuo di materia (il picco rimane ben definito) dagli eventi di fusione (picchi piccoli scompaiono, si forma un picco più grande); questo a differenza delle storie di accrescimento di Lacey & Cole (1993), in cui si può solo distinguere (arbitrariamente) tra fusioni di aloni di massa molto diversa dalle fusioni di aloni di massa comparabile. A mio parere, tale differenza è dovuta, più che a differenze nel formalismo usato, al fatto che Manrique e Salvador-Solé usano il filtro Gaussiano, mentre Lacey e Cole quello SKS. Inoltre, come gli stessi Manrique e Salvador-Solé riconoscono, l'accrescimento è in pratica una fusione con degli aloni collassati di massa molto piccola, per cui, da questo punto di vista, la differenza fisica tra i due tipi di eventi è piuttosto arbitraria; d'altra parte, un alone subisce uno sconvolgimento della propria dinamica interna solo quando si fonde con un altro alone di massa simile. Infine, Manrique & Salvador-Solé (1995) trovarono che la loro MF, scelti gli opportuni parametri (ovvero δ_c e la costante di proporzionalità per la massa del picco), è molto simile ad una curva di PS.

Infine, Bond & Myers (1996a,b,c) svilupparono un'estensione Monte Carlo del formalismo dei picchi, chiamata formalismo picco-chiazza. Il loro formalismo consiste nell'identificare le strutture per mezzo dei picchi del campo iniziale, filtrati su una gerarchia di scale, ed identificare quindi la chiazza che collasserà col picco come la materia contenuta in un ellissoide omogeneo capace di collassare su tutti e tre gli assi; le strutture così identificate vengono poi spostate dalla loro posizione iniziale tramite l'approssimazione di Zel'dovich.

Questo formalismo ha molti meriti, dato che tiene opportunamente conto di molti importanti eventi dinamici, come l'effetto delle maree nel collasso gravitazionale (tramite il collasso ellissoidale; vedi la §3.2); inoltre, è in grado di riprodurre in maniera soddisfacente le strutture presenti nelle simulazioni ad N corpi (non solo da un punto di vista statistico; Bond & Myers 1996b). Si possono quindi generare con questo metodo dei cataloghi di oggetti molto più velocemente che con le simulazioni; tuttavia con questo metodo non sono stati prodotti approfondimenti analitici sul problema della MF.

2.5 Modelli dinamici

Sia l'approccio degli insiemi di escursione che quello dei picchi identificano le strutture collassate come quelle regioni il cui contrasto lineare supera un certo valore. Ma la teoria lineare non è adatta a seguire il comportamento complicato della materia che collassa gravitazionalmente; il collasso sferico dall'altra parte trascura elementi fondamentali come il ruolo delle maree. Tali approcci semplicistici, come è stato mostrato nella §1.3, portano ad una supersemplificazione che può essere perfino fuorviante. Per esempio, la MF di PS suppone che tutte le strutture siano virializzate, mentre strutture giovani reali, come gruppi ed ammassi di galassie, non hanno ancora avuto tempo di raggiungere l'equilibrio viriale completo. Alcuni autori hanno quindi inserito elementi di dinamica realistica nella teoria della MF; questi lavori sono presentati nel seguito.

2.5.1 Approcci del tipo PS

Alcuni autori hanno inserito elementi di dinamica nella teoria della MF, estendendo l'approccio originale di PS o il formalismo di diffusione. Il già citato articolo di Lucchin & Matarrese (1988) può essere considerato un tentativo in questa direzione: essi introdussero nel formalismo PS la non Gaussianità, che poteva essere anche di origine dinamica, col risultato di muovere il taglio esponenziale della MF verso masse grandi. In maniera simile, Porciani et al. (1996) giustificarono l'introduzione di una barriera riflettente (o assorbente) a $\delta_l = -1$ come un trucco per introdurre nel formalismo di diffusione un certo grado di non Gaussianità; infatti, se il campo di densità fosse evoluto in maniera opportuna, tenendo conto della sua non Gaussianità, il problema delle densità negative non si porrebbe. Anche loro trovarono un aumento di oggetti a grande massa, oltre ad un secondo taglio a piccole masse, come già accennato.

Anche l'approccio picco-chiazza di Bond & Myers (1996a), appena descritto, si caratterizza per un più realistico trattamento della dinamica, sebbene le strutture siano identificate tramite i picchi del campo iniziale. Infine, Monaco (1995) costruì una MF basata su stime realistiche dei tempi di collasso, trovate per mezzo di estensioni dell'approssimazione di Zel'dovich o per mezzo del modello di collasso ellissoidale; la conclusione è ancora una volta che la dinamica porta alla predizione di un maggior numero di oggetti di grande massa. Questo lavoro sarà descritto in dettaglio nei capitoli 3 e 4.

2.5.2 Tempi scala

Uno dei problemi dell'approccio di PS, rilevato per la prima volta da Cavaliere, Colafrancesco & Menci (1991b), è che si suppone che le strutture passino istantaneamente dal non collasso al collasso, ed inoltre che le strutture abbiano un tempo di sopravvivenza nullo, in quanto sono istantaneamente incorporate in strutture più grandi. In altre parole, la teoria di PS sembra implicare tempi scala infinitesimi per la formazione e la distruzione delle strutture. Di fatto, la teoria di PS semplicemente non contiene informazioni su tali tempi scala: la variazione della MF di PS al passare del tempo è data dalla combinazione degli effetti della creazione di nuove strutture, della distruzione di strutture vecchie e dell'accrescimento da parte delle strutture esistenti (vale a tale proposito il commento riportato nella §2.4.2: l'accrescimento non è altro che una fusione con aloni molto più piccoli). Tali termini non possono essere separati per mezzo del solo approccio di PS, senza assunzioni ulteriori; per esempio, la procedura "statica" di Lacey & Cole (1993), che ha basi solo statistiche, non riesce a dare una definizione precisa del tempo scala della formazione di una struttura; tale quantità si definisce arbitrariamente come il tempo necessario ad assemblare metà della propria massa, e questa definizione porta, come detto prima, a qualche modesta incosistenza.

Cavaliere, Colafrancesco & Scaramella (1991) proposero una procedura *dinamica*, basata sui tempi scala di creazione e distruzione delle strutture, per dare un modello della MF. L'equazione di evoluzione della $n(M, t)$ (senza il termine di accrescimento) è la seguente:

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = \frac{n(M, t)}{\tau_+} - \frac{n(M, t)}{\tau_-}. \quad (2.12)$$

A differenza degli approcci elencati prima (con l'eccezione del formalismo proposto da Jedamzik 1996 ed usato da Yano et al. 1996), la definizione della MF è implicita, e viene data la sua equazione di evoluzione in t . È da notare anche che tale equazione di evoluzione è un'equazione di non conservazione:

$\partial n/\partial t = S(n(M))$, dove S è un termine di sorgente. Gli autori suddetti proposero le seguenti espressioni per i tempi scala:

$$\begin{aligned}\tau_+ &= 2t_c(M/M_c)^{-\Theta}/\Theta \\ \tau_- &= 2t_c/\Theta.\end{aligned}\quad (2.13)$$

In queste equazioni $t_c = t_c(z)$ è un tempo di collasso tipico e $M_c = M_c(z)$ è una massa collassata tipica; entrambe le quantità dipendono dal redshift ed entrambe possono essere stimate, a meno di costanti dell'ordine di uno, a partire dalla teoria lineare (a causa dell'autosimilarità, nel caso in cui lo spettro sia privo di scala o moderatamente curvo). Il tempo scala di formazione ha un taglio a masse molto più grandi della massa tipica, mentre il tempo scala per la distruzione non dipende dalla massa. La forma di tale MF è una legge di potenza a piccole masse, con pendenza $-2 + \Theta/2$, ed un taglio esponenziale modificato a grandi masse, $n(M) \propto \exp(-(M/M_c)^\Theta)$. La scelta $\Theta = (n + 3)/3$ porta la MF a riprodurre lo stesso comportamento della PS. Infine, l'accrescimento di massa al tasso \dot{M} può essere inserito nell'equazione di evoluzione aggiungendo un termine del tipo $\partial(\dot{M}n(M,t))/\partial M$ nel lato sinistro dell'Eq. (2.12).

Blain & Longair (1993a,b) e Sasaki (1994) adottarono un approccio simile, ottenendo risultati simili. Essi supposero che il tempo scala di distruzione non ha un tempo caratteristico, e da questo dimostrarono che il tempo scala deve essere indipendente dalla massa; quindi derivarono esplicitamente il tempo scala di formazione, imponendo che un'equazione del tutto analoga alla (2.12) dia la MF di PS come soluzione. In particolare, Blain & Longair (1993a,b) calcolarono numericamente i tempi scala di formazione, mentre Sasaki (1994) trovò la soluzione analitica.

2.5.3 Approccio cinetico

Un approccio completamente diverso per la MF fu proposto da Silk (1978) e Silk & White (1978). L'aggregazione (e la frammentazione) di blocchi già collassati di massa simile può essere descritta tramite un'equazione cinetica di aggregazione (Smoluchowski 1916; Ernst 1986), del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(M,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^M K(M, M' - M, t) n(M', t) n(M - M', t) dM' \\ &\quad - n(M, t) \int_0^\infty K(M, M', t) n(M', t) dM',\end{aligned}\quad (2.14)$$

dove $K(M, M', t)$ è la probabilità che due blocchi di massa M ed M' coagulino in un unico blocco singolo di massa $M + M'$. Il primo termine a destra dà il numero di oggetti di massa M formati per coagulazione di due blocchi di massa M' ed $M - M'$, mentre il secondo termine dà il numero di oggetti persi. Un'equazione simile descrive la frammentazione di blocchi. Vi è un'apparente somiglianza tra questa equazione e l'Eq. (2.12): entrambe regolano direttamente l'evoluzione della MF, ed in entrambi i casi la definizione degli oggetti è implicita; un'importante differenza è che l'equazione di Smoluchowsky è non lineare in $n(M, t)$.

Il comportamento della MF data dall'equazione di Smoluchowsky è stato riassunto in diversi articoli (ad esempio, Lucchin 1989; Cavaliere, Colafrancesco & Menci 1991b; Cavaliere, Menci & Tozzi 1994); ne riporterò nel seguito solo le caratteristiche principali. Un commento generale è che tale MF può perdere velocemente la memoria delle condizioni iniziali, e la configurazione finale può dipendere solo dalla probabilità di aggregazione K . Le aggregazioni binarie possono causare due tipi di evoluzione, una dominata dalle *collisioni geometriche*, l'altra dalle *interazioni risonanti*. Il primo tipo di evoluzione ha luogo negli ambienti di densità moderata, e può causare un appiattimento della funzione di massa, dovuto alla coagulazione di oggetti piccoli in oggetti grandi (Cavaliere, Colafrancesco & Menci 1992; Cavaliere & Menci 1993); si vedrà nella §5.1 che questo può spiegare l'aumento osservato di galassie blu ad alti redshift.

Il secondo tipo di evoluzione entra in gioco in ambienti ad alta densità e dispersione di velocità dell'ordine della dispersione interna degli oggetti, e causa un'aggregazione divergente (*merging runaway*), cioè porta alla formazione di un singolo grosso blocco, di massa comparabile a quella dell'intero sistema; questo potrebbe corrispondere alla formazione di galassie cD per cannibalismo di galassie più piccole, o alla cancellazione delle sottostrutture in un ammasso di galassie (Cavaliere, Colafrancesco & Menci 1991a; Menci, Colafrancesco & Biferale 1993). Menci & Valdarnini (1994) hanno verificato, per mezzo di simulazioni numeriche, che questi meccanismi di aggregazione possono essere efficaci nei filamenti a grande scala.

Recentemente, Shaviv & Shaviv (1993, 1995) hanno analizzato il comportamento della MF data dall'equazione di Smoluchowsky in una maniera diversa: a differenza di Cavaliere e collaboratori, essi hanno trovato che la loro MF dipende dalle condizioni iniziali. Un'altra applicazione dell'equazione di Smoluchowsky in contesto cosmologico è stata proposta da Edge et al. (1990) per spiegare l'evoluzione della funzione di luminosità degli ammassi di galassie negli X.

Come commento generale, l'approccio cinetico può descrivere quegli eventi di aggregazione che hanno luogo tra oggetti già collassati. Il collasso gerarchi-

co diretto delle strutture cosmologiche rimane ben descritto dal formalismo di diffusione di Bond et al. (1991). Cavaliere & Menci (1994) hanno proposto un formalismo, basato sui cosiddetti alberi di Cayley, per unificare il collasso gerarchico diretto e le aggregazioni. In breve, gli eventi di aggregazione possono essere inseriti all'interno di un formalismo di diffusione tramite degli eventi di *biforcazione* (*branching*), grazie ai quali una traiettoria può separarsi in due (il che, letto nel verso opposto, corrisponde a due oggetti che si fondono in uno); tali eventi di biforcazione sono controllati da un'equazione del tipo di Smoluchowsky. Questa formulazione della coagulazione per mezzo di eventi di biforcazione ha interessanti connessioni con i lavori, già citati, di Sheth (1995; 1996).

2.5.4 Il modello dell'adesione

La prima determinazione analitica di una MF, basata su un modello dinamico realistico ed autoconsistente, è probabilmente dovuta ai lavori sul modello dell'adesione. Questa approssimazione presenta un grosso vantaggio, e cioè che le strutture collassate possono essere chiaramente identificate come le caustiche del mezzo collassato; ulteriori restrizioni sulla geometria (locale!) del collasso permettono di selezionare sottoclassi di regioni collassate, per esempio i nodi, nel caso si voglia evitare di considerare le strutture filamentari. Alcuni autori hanno confrontato le predizioni del modello di adesione con simulazioni ad N corpi, in 1D (Doroshkevich & Kotok 1990; Williams et al. 1991) e 2D (Nusser & Dekel 1990; Kofman et al. 1992), trovando che l'adesione riproduce bene sia lo scheletro della struttura su grande scala che la MF.

Vergassola et al. (1994) hanno affrontato il problema della determinazione analitica della MF con il modello dell'adesione, usando ed estendendo un certo numero di teoremi matematici dimostrati da Sinai (vedi le referenze nel loro articolo). Essi hanno trovato i comportamenti asintotici della MF: si comporta come la PS a grandi masse (l'esatta posizione della massa tipica rimane indeterminata), ma ha una pendenza diversa a piccole masse. Cavaliere, Menci & Tozzi (1996) hanno applicato il loro formalismo degli alberi di Cayley al modello dell'adesione, trovando che un certo grado di biforcamento è presente in questo modello; inoltre gli stessi autori hanno trovato che la MF ha la stessa pendenza della PS a piccole masse se si considerano solamente le caustiche isotrope (i nodi).

2.5.5 Perturbazioni Lagrangiane

Il potente formalismo delle perturbazioni Lagrangiane è stato introdotto nella §1.2.6. Questo formalismo può essere usato per ottenere predizioni dinamiche affidabili fino all'OC; di conseguenza, può essere usato per ottenere predizioni realistiche dell'OC, ovvero del tempo di collasso, secondo la definizione data alla fine del precedente capitolo. Di conseguenza, le perturbazioni Lagrangiane possono essere utilizzate per costruire una MF completamente basata su dinamica realistica. A differenza dalla teoria dell'adesione, tale approssimazione dinamica è del tipo troncato, cioè bisogna con un opportuno filtraggio eliminare la potenza su piccola scala per evitare le zone a multi flusso a piccola scala. Inoltre, le perturbazioni Lagrangiane rivelano interessanti connessioni con il collasso di un ellissoide omogeneo, che può essere a sua volta utilizzato per ottenere stime realistiche del tempo di collasso, come già suggerito da Monaco (1995). Tutti questi argomenti, sviluppati in Monaco (1996a,b), saranno alla base delle discussioni riportate nei prossimi due capitoli.

Capitolo 3

Dinamica e la funzione di massa

Nel capitolo 1 sono state presentate alcune approssimazioni e modelli semplificati di dinamica gravitazionale. Tali modelli si basano su una delle due formulazioni equivalenti dell'evoluzione di un fluido autogravitante, cioè la formulazione Euleriana o Lagrangiana. Risulta chiaro che le approssimazioni di tipo Euleriano, come la teoria delle perturbazioni Euleriane, o le approssimazioni di flusso congelato o di potenziale lineare, sono adatte a descrivere l'evoluzione di un campo di materia nello spazio reale (Euleriano), ignorando da dove venga la massa che si trova in un dato punto. Al contrario, le approssimazioni basate sulla formulazione Lagrangiana, come la teoria delle perturbazioni Lagrangiane o il modello dell'adesione, sono capaci di descrivere l'evoluzione di un elemento di massa che parte da una certa posizione (nello spazio Lagrangiano), seguendo sia la sua traiettoria che la sua deformazione. La formulazione Lagrangiana appare quindi adatta per costruire una teoria della MF, dove bisogna conoscere la deformazione (e quindi il collasso) di un elemento di massa, ovunque vada esso a finire. In questo senso, la MF è una teoria intrinsecamente Lagrangiana.

In questo capitolo e nel prossimo verrà costruita una nuova teoria sulla MF, completamente basata sulla dinamica Lagrangiana. Questo capitolo affronta il problema, puramente di natura dinamica, della determinazione del tempo di collasso di un generico elemento di massa di un campo di densità continuo e derivabile (smooth). La §3.1 presenta alcuni tentativi di stima del tempo di collasso tramite l'approssimazione di Zel'dovich; viene discusso il ruolo determinante delle maree. La §3.2 introduce il modello del collasso di un ellissoide omogeneo. La §3.3 presenta le stime del tempo di collasso basate sulla teoria delle perturbazioni Lagrangiane fino al terzo ordine. Si analizzerà la connessione tra questa teoria ed il collasso ellissoidale, quindi si calcoleranno i tempi di collasso per generici elementi di massa di campi Gaussiani. Nella §3.4 si determinerà la distribuzione statistica degli inversi

dei tempi di collasso; questa quantità costituisce il prodotto principale del capitolo, e sarà utilizzata nel prossimo capitolo per determinare la MF. Infine, nella §3.5 verranno discussi alcuni punti importanti, come la natura “locale” o “non locale” delle approssimazioni dinamiche utilizzate, e l’interpretazione “puntuale” dei tempi di collasso. Tutti gli argomenti discussi in questo capitolo sono riportati negli articoli di Monaco (1995; 1996a), e discussi in Monaco (1994; 1996c-f).

3.1 Approssimazione di Zel’dovich

3.1.1 Il ruolo delle maree

È stato mostrato nel capitolo 2 che la maggiorparte delle teorie della MF proposte nella letteratura sono al massimo basate sul collasso sferico. È quindi interessante capire quali tipi di interazione dinamica vengono trascurati da quel modello di collasso, e qual’è la maniera più semplice per tenerli in conto.

Il collasso sferico è un’approssimazione dinamica puramente locale: il fatto di una perturbazione sferica è determinato solamente dalla sovradensità iniziale. In altre parole, il ruolo dinamico dell’intero Universo al di fuori della perturbazione è, per virtù del teorema di Birkhoff, ritenuto trascurabile. Questo si può mettere in evidenza nella seguente maniera: come riportato nella §1.2.5, si può costruire un interessante sistema di equazioni “Lagrangiane” dalle equazioni di evoluzione del fluido, Eq. (1.34 – 1.36), decomponendo il tensore delle derivate spaziali (Euleriane) della velocità u nello scalare di espansione θ , il tensore di shear σ_{ab} ed lo pseudotensore di vorticità ω_{ab} (Eq. 1.44). In questa maniera, è possibile ottenere la seguente equazione di evoluzione per la densità (vedi ad esempio Bertschinger & Jain 1994; il modo crescente $b(t)$ è utilizzato come tempo):

$$\frac{d^2\delta}{db^2} + 4\pi G\bar{\rho} \frac{b}{b^2} \frac{d\delta}{db} = \frac{4}{3} \left(\frac{d\delta}{db} \right)^2 \frac{1}{(1+\delta)} + (1+\delta) \left(4\pi G\bar{\rho} \frac{b}{b^2} \delta + 2\sigma^2 - 2\omega^2 \right) \quad (3.1)$$

In questa equazione, $\sigma^2 = \sigma_{ab}\sigma_{ab}/2$ e $\omega^2 = \omega_{ab}\omega_{ab}/2$ (è da notare che, in questo contesto, σ^2 non è la varianza di massa). Il fatto che shear e vorticità entrino nell’equazione attraverso delle quantità definite positive, ma con un segno differente, ha due conseguenze importanti: (a) lo shear accelera sempre il collasso di un elemento di massa, e (b) la vorticità lo frena sempre. Secondo la teoria lineare, qualsiasi modo vorticoso è drasticamente smorzato prima della ricombinazione (questa è una conseguenza del teorema di circolazione di Kelvin), è ciò continua a valere fino all’OC, dove il modo vorticoso si

accoppia con il modo crescente della densità (Buchert 1992). È quindi ragionevole assumere che la vorticità sia trascurabile fino all'OC. D'altra parte, lo shear non è generalmente nullo: esso collega l'elemento di massa con il resto dell'Universo.

L'equazione di evoluzione per lo shear è la seguente:

$$\frac{\sigma_{ab}}{b} + \frac{2}{3}\vartheta\sigma_{ab} + \sigma_{ac}\sigma_{cb} + 4\pi G\bar{\rho}\frac{b}{b^2}\sigma_{ab} - \frac{2}{3}\sigma^2\delta_{ab} = -4\pi G\bar{\rho}\frac{b}{b^2}E_{ab}. \quad (3.2)$$

Il tensore E_{ab} , già definito nell'Eq. (1.45), rappresenta l'interazione mareale tra l'elemento di massa ed il resto dell'Universo. L'interazione mareale è quindi l'elemento dinamico rilevante trascurato dal collasso sferico.

Bisogna a questo punto fare un importante commento. L'equazione appena presentata descrive il comportamento di un elemento di massa infinitesimo in un campo di densità smussato (interpretazione *puntuale*). D'altra parte, il collasso sferico è spesso interpretato come la descrizione del comportamento di una regione estesa (interpretazione *globale*). Nel caso di una perturbazione sferica top-hat le due interpretazioni non producono differenze pratiche: le forze mareali sono nulle per tutti gli elementi di massa, i quali evolvono in maniera identica. La situazione è già diversa se si prende in considerazione il più realistico collasso sferico di una regione con profilo di densità non piatto; in questo caso, come già accennato nella §1.3, gli elementi di massa non al centro della perturbazione (cioè tutti tranne uno!) collassano in simmetria cilindrica; essi risentono dell'interazione mareale con il resto della perturbazione, e il loro collasso finale è a fuso (due assi collassano ed uno si allunga all'infinito). In conclusione, il ruolo delle maree è determinante, per il collasso locale, in tutti i casi più complessi del collasso sferico top-hat.

3.1.2 Tempi di collasso con Zel'dovich

È utile chiedersi quale sia la maniera più semplice di inserire le forze mareali nell'evoluzione degli elementi di massa. È stato mostrato nel capitolo 1 che l'approssimazione realistica più semplice per l'evoluzione gravitazionale nel regime (debolmente) non lineare è l'approssimazione di Zel'dovich, presentata nella §1.2.6; nel seguito sarà abbreviata con ZEL. La trasformazione dallo spazio Lagrangiano a quello Euleriano può essere scritta come segue:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} - b(t)\nabla_{\mathbf{q}}\varphi(\mathbf{q}). \quad (3.3)$$

Si può trovare l'evoluzione di tutte le quantità cinematiche e dinamiche dell'elemento di massa a partire dal cosiddetto *tensore di deformazione* di ZEL,

$S_{a,b}^{(1)} = \varphi_{,ab}$, e dalle Eq. (1.44). Il tensore di deformazione di ZEL è ovviamente simmetrico, e quindi diagonalizzabile. Se i suoi autovalori sono λ_1 , λ_2 e λ_3 , ordinati nella seguente maniera:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad (3.4)$$

(è da notare che $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \delta_I$), allora il determinante Jacobiano J della mappa $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$, il contrasto di densità δ , l'espansione θ e lo shear σ_{ab} evolvono come segue:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}, t) &= (1 - b(t)\lambda_1)(1 - b(t)\lambda_2)(1 - b(t)\lambda_3) \\ \theta(\mathbf{q}, t) &= -\frac{\lambda_1}{1 - b(t)\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{1 - b(t)\lambda_2} - \frac{\lambda_3}{1 - b(t)\lambda_3} \\ \sigma_{ab} &= \text{diag} \left(\frac{\lambda_1}{1 - b(t)\lambda_1} - \frac{\theta}{3}, \frac{\lambda_2}{1 - b(t)\lambda_2} - \frac{\theta}{3}, \frac{\lambda_3}{1 - b(t)\lambda_3} - \frac{\theta}{3} \right) \\ \delta &= ((1 - b(t)\lambda_1)(1 - b(t)\lambda_2)(1 - b(t)\lambda_3))^{-1} - 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nell'equazione per δ è stato trascurato il contrasto iniziale rispetto ad uno. È inoltre da notare che la densità qui riportata è data dall'equazione di continuità. Di fatto, è possibile trovare un'altra espressione per la densità a volte chiamata *densità dinamica* per distinguerla dalla *densità di continuità* data sopra. La densità dinamica si ottiene combinando l'equazione di Poisson con l'equazione per ZEL, $\mathbf{u} = -\nabla_{\mathbf{q}}\varphi$; si ottiene $\delta_d = -b(t)\theta$ (Shandarin, Doroshkevich & Zeldovich 1983). Questo è un sintomo del fatto che ZEL non è una soluzione consistente del problema dinamico; d'altra parte, le due densità sono molto simili a tempi piccoli, e la loro differenza rimane comunque finita all'OC, per cui non è importante per i nostri scopi determinare quale delle due densità vada utilizzata.

Quando $b(t) = 1/\lambda_1$, ha luogo l'OC e la formazione di caustiche: il determinante Jacobiano si annulla, e tutte le altre quantità su elencate diventano infinite. È quindi ragionevole, dal punto di vista dell'elemento di massa, definire tale evento come collasso, definizione già introdotta nella §1.3 che manterremo per tutto il testo. Quindi il tempo di collasso può essere determinato come l'istante a cui avviene l'OC. È da notare anche che l'ulteriore evoluzione lungo gli altri due assi, come descritta da ZEL, non è significativa, perché ZEL non dà predizioni sensate oltre l'OC.

Siamo quindi in grado di determinare il tempo di collasso per ogni elemento di massa. Le condizioni iniziali sono date "localmente" dai tre autovalori λ , ma l'evoluzione non è fisicamente locale, dato che le condizioni iniziali contengono informazione non locale sulle maree. È utile definire le seguenti variabili:

$$\begin{aligned}x &= \lambda_1 - \lambda_2 \\y &= \lambda_2 - \lambda_3,\end{aligned}\tag{3.6}$$

ed utilizzare il modo crescente $b(t)$ come variabile tempo. Inoltre è possibile considerare regioni con contrasto lineare iniziale $\delta_l = 1$ or -1 , dato che tutti gli altri casi si possono ottenere semplicemente riscaldando il tempo b . Il collasso secondo ZEL è dato da:

$$b_c^Z = \frac{3}{\delta_l + 2x + y}\tag{3.7}$$

La Fig. 3.1 mostra le curve dei tempi di collasso $b_c(x, y)$ per $\delta_l = 1$ e -1 . Appare subito un problema: nel caso sferico, dove $x = y = 0$, il tempo di collasso è dato da $3/\delta_l$, invece del valore esatto $1.69/\delta_l$. È facile capire da dove venga questa discrepanza di quasi un fattore 2: si sa che ZEL è una soluzione esatta (prima dell'OC) in una dimensione, ed è quindi capace di descrivere bene il collasso planare; non è quindi sorprendente trovare che essa sottostimi significativamente la velocità del collasso in simmetria sferica.

Una maniera per ovviare a questo problema è quella di provare qualche semplice *ansatz* per la "vera" forma delle curve dei tempi di collasso $b_c(x, y)$. In pratica, un tempo di collasso veramente realistico non dipenderà solamente dagli autovalori λ , ma dal valore della densità (o del potenziale) in tutti i punti dello spazio (Lagrangiano). Tuttavia, se ZEL dà una buona descrizione al primo ordine del collasso gravitazionale, dovrebbe essere possibile trovare una curva di tempi di collasso, valida al primo ordine, che dipende solamente dagli autovalori λ , ma si riduce al corretto valore sferico nel limite rilevante. Nella prossima sezione mostreremo che il collasso di un ellissoide omogeneo ha esattamente le caratteristiche appena elencate; nel frattempo è utile considerare semplici variazioni del tempo di collasso di ZEL.

Secondo l'Eq. (3.1), il collasso sferico (senza shear) è il più lento, per cui una prima maniera di variare la predizione di ZEL è quella di forzarla a non assumere valori più grandi di quello sferico:

$$b_c = \min\{b_c^Z, 1.69/\delta_l\}.\tag{3.8}$$

Questa curva b_c è mostrata nella Fig. 3.2a per $\delta_l = 1$; essa è caratterizzata da una zona piatta, ad altezza 1.69, per piccoli valori di x e y . D'altra parte è improbabile che i collassi quasi sferici abbiano un tempo di collasso esattamente uguale a quello sferico; è più realistico pensare ad un discostamento sistematico verso valori di b_c più piccoli ad x ed y diversi da zero. Tale curva

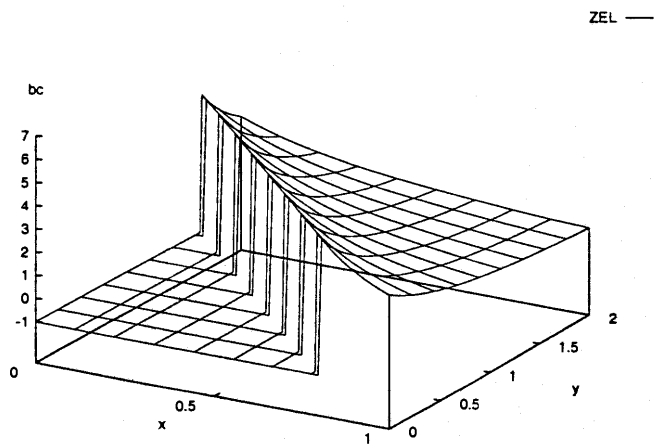
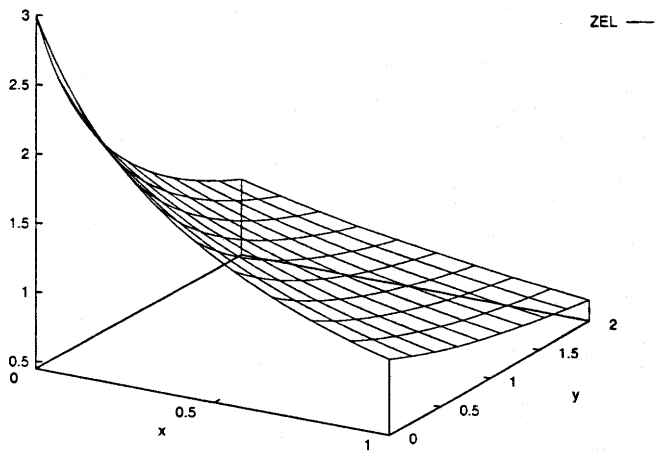


Figura 3.1: Tempi di collasso per ZEL.

b_c può essere ottenuta tramite l'intersezione della predizione di ZEL ed un piano leggermente inclinato che raggiunga 1.69 all'origine:

$$\min\{b_c^Z, 1.69/\delta_l - \epsilon(2x + y)\}. \quad (3.9)$$

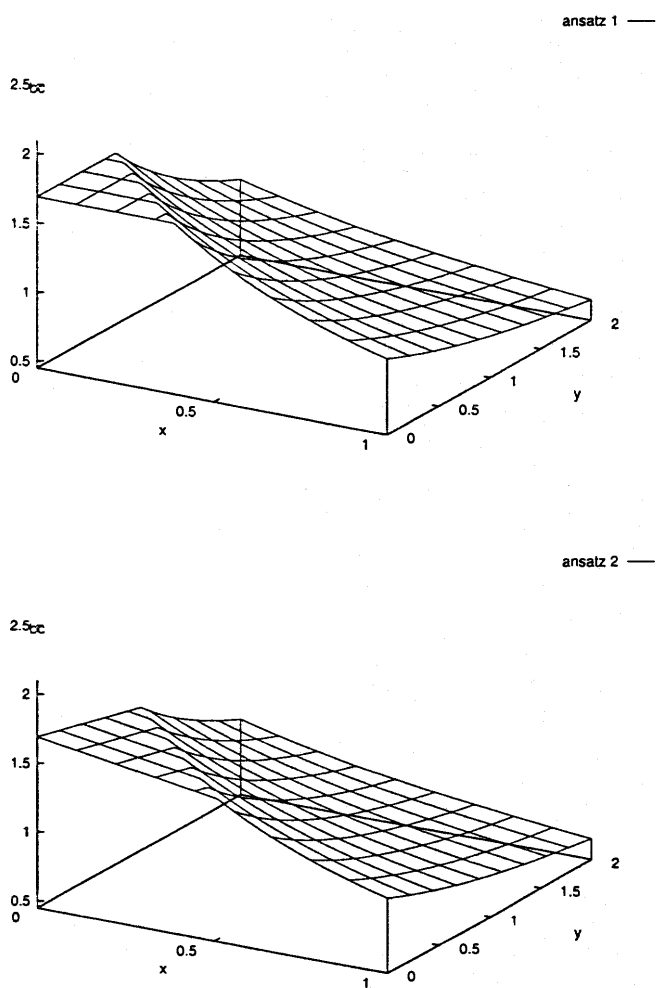
Questa curva, con $\epsilon = 0.2$, è mostrata in Fig. 3.2b. Monaco (1995) discute in maniera più completa questi ansatze.

Un'ulteriore possibilità, sempre analizzata in Monaco (1995), è quella di inserire "a mano" lo shear σ da ZEL (Eq. 3.5) nell'equazione per l'evoluzione della densità (Eq. 3.1), per poi risolverla numericamente; la curva del tempo di collasso è molto simile alla Fig. 3.2a, solo che la transizione tra i due regimi avviene in maniera dolce.

Un'interessante conclusione, che verrà trovata nella §4.1, è che il ragionevole discostamento sistematico riportato nella Fig. 3.2b influenza la parte a grandi masse della MF, muovendola verso masse più grandi, malgrado il collasso sferico sia asintoticamente ritrovato per sovradensità grandi, caratterizzate da bassi shear e quindi da piccoli valori di x ed y . In altre parole, il fatto che le fluttuazioni rare seguano asintoticamente il collasso sferico non garantisce che la MF "sferica" di PS (con $\delta_c=1.69$) venga ritrovata a grandi masse.

3.2 Collasso ellissoide

La convenienza del modello del collasso di un ellissoide omogeneo sta nel fatto che tale problema può facilmente essere risolto tramite l'integrazione numerica di un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Uno dei vantaggi della simmetria sferica è che, in virtù del teorema di Birkhoff, è possibile introdurre perturbazioni senza influenzare il resto dell'Universo, a patto che ogni perturbazione positive sia compensata da una perturbazione negativa (esterna) tale da annullare la perturbazione totale. Ciò è necessario per assicurare l'autoconsistenza del problema (il background deve continuare ad evolvere come se fosse imperturbato). Questo ragionamento non vale quando si introduce una perturbazione triassiale in un background imperturbato: la perturbazione è in grado di esercitare sul background una significativa azione non lineare di ritorno. La corretta strategia per utilizzare il collasso ellissoide in un contesto cosmologico non è quella di inserire un ellissoide in un Universo imperturbato, ma quella di estrarre un ellissoide da un Universo perturbato.

Figura 3.2: Tempi di collasso con i due *ansatze*.

3.2.1 L'ellissoide omogeneo da un Universo perturbato

Un ellissoide triassiale omogeneo è caratterizzato dalla sua sovradensità media e dai suoi rapporti assiali; può subire un'espansione globale, una deformazione dei rapporti assiali o una rotazione globale. Si può facilmente notare un'analogia tra queste proprietà e quelle di un elemento di massa. Di fatto, è possibile scrivere per l'evoluzione Newtoniana di un ellissoide omogeneo (Peebles 1980, §20) equazioni formalmente identiche a quelle di un elemento di massa; per esempio, si possono riprodurre l'equazione di Raychaduri, così come l'Eq. (3.1) e (3.2). La ragione per cui questo accade può essere compresa nella seguente maniera: un ellissoide omogeneo possiede quella complessità geometrica "minima" che fa sì che la sua struttura sia analoga a quella di un elemento di massa. La differenza fondamentale tra un ellissoide e un elemento di massa sta nel ruolo del potenziale gravitazionale, una forma quadratica nel primo caso ed un intero campo aleatorio (Gaussiano) nel secondo.

Seguendo Bond & Myers (1996a), per estrarre un ellissoide da un punto \mathbf{q}_0 di un campo di potenziale perturbato, bisogna espandere il potenziale attorno a quel punto in serie di Taylor:

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}(\mathbf{q}_0)q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial q_j}(\mathbf{q}_0)q_i q_j + \dots \quad (3.10)$$

Il primo termine dell'espansione è una costante irrilevante; il secondo termine produce un moto globale dell'elemento di massa, ma non ne influenza le proprietà interne. Il terzo termine, quadratico, è il primo termine importante per la dinamica interna; si può quindi approssimare il potenziale come una forma quadratica. Il passo successivo consiste nel dividere il potenziale in un termine interno ed uno esterno:

$$\varphi = \varphi_{int} + \varphi_{ext} \quad (3.11)$$

(questo corrisponde all'"estrazione" dell'ellissoide). Il secondo termine, a divergenza nulla, dà le maree esterne. Esso può essere tenuto costante durante l'evoluzione dell'ellissoide: è costante con buona approssimazione durante il regime lineare e debolmente non lineare, e diventa trascurabile rispetto all'altro termine durante le fasi di collasso (vedi Bond & Myers 1996a). Il primo termine, che rappresenta il potenziale interno, viene considerato come il potenziale di un ellissoide omogeneo.

È da notare che le condizioni iniziali sono date solamente dalle derivate seconde del potenziale iniziale; nel sistema principale dell'ellissoide, queste si riducono ai tre autovalori λ . Quindi, come anticipato prima, il modello del collasso di un ellissoide omogeneo permette di determinare il tempo di

collasso di un elemento di massa richiedendo le stesse condizioni iniziali di ZEL e riducendosi al collasso sferico nel limite rilevante.

3.2.2 Tempi di collasso

Le variabili dinamiche del collasso ellissoidale sono i tre assi $a_i(t)$ dell'ellissoide; essi sono normalizzati come il fattore di scala: $a_i(t) = a(t)$ se l'ellissoide è una sfera con contrasto di densità nullo (e quindi $a_i(t) \simeq a(t)$ all'inizio). Le equazioni di evoluzione sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_i}{da^2} - (2a(1 + (\Omega_0^{-1} - 1)a))^{-1} \frac{da_i}{da} + (2a^2(1 + (\Omega_0^{-1} - 1)a))^{-1} a_i \\ \times \left[\frac{1}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{b'_i}{2} \delta + \lambda'_{vi} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

nel caso aperto (il caso Einstein-de Sitter si può ottenere imponendo $\Omega_0 = 1$), mentre nel caso piatto con costante cosmologica, esse sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_i}{da^2} - \frac{1 - 2(\Omega_0^{-1} - 1)a^3}{2a(1 + (\Omega_0^{-1} - 1)a)} \frac{da_i}{da} + (2a^2(1 + (\Omega_0^{-1} - 1)a))^{-1} a_i \\ \times \left[\frac{1}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{b'_i}{2} \delta + \lambda'_{vi} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

È da notare che il fattore di scala è stato usato per comodità come variabile tempo. Il contrasto di densità δ è:

$$\delta = \frac{a^3}{a_1 a_2 a_3} - 1, \quad (3.14)$$

mentre le quantità b'_i e λ'_{vi} sono definite come:

$$b'_i = \frac{2}{3} [a_i a_j a_k R_D(a_i^2, a_j^2, a_k^2) - 1] \quad i \neq j \neq k \quad (3.15)$$

(dove R_D è l'integrale ellittico di Carlson,

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau + x)^{1/2} (\tau + y)^{1/2} (\tau + z)^{3/2}}, \quad (3.16)$$

il quale può essere calcolato velocemente per mezzo del programma dato da Press & Teukolsky (1990)) e

$$\lambda'_{vi} = -\frac{a}{a_0} \left(\frac{\delta}{3} - a_0 \lambda_i \right). \quad (3.17)$$

Le condizioni iniziali si ottengono imponendo che gli a_i evolvano seguendo ZEL a tempi piccoli:

$$a_i \simeq a(1 - a\lambda_i) \quad (3.18)$$

$$\frac{da_i}{da} \simeq \frac{1}{a}(a_i(a) - a^2\lambda_i). \quad (3.19)$$

Le tre equazioni differenziali ordinarie accoppiate del secondo ordine, Eq. (3.12) o (3.13), possono essere integrate per mezzo di algoritmi standard, come il metodo di Runge-Kutta dato da Press et al. (1992). L'integrazione numerica deve essere spinta fino alla singolarità, dove almeno uno dei tre assi si annulla e la densità diverge. Per far questo, conviene utilizzare variabili logaritmiche, per avere variazioni più limitate dalla quasi omogeneità al collasso. Inoltre, l'integrale può essere diviso in due parti: la prima si ferma al disaccoppiamento, definito come l'istante al quale la densità inizia a crescere, mentre nella seconda parte si usa la densità come variabile temporale, e l'integrazione è spinta fino a grandi valori della densità. La precisione dell'integrazione numerica è migliore dell'1% per il collasso sferico, ma diventa dell'8% per i collassi a frittella. Va notato che in tutte le integrazioni numeriche il primo asse a collassare è sempre quello del più grande autovalore λ_1 , come previsto da ZEL.

La Fig. 3.3 mostra i "tempi" di collasso $b_c(x, y)$ di ellissoidi inizialmente sovradensi ($\delta_l=1$) o sottodensi ($\delta_l=-1$) in un Universo di Einstein-de Sitter (nel qual caso $b_c = a_c$). Il collasso sferico è naturalmente riprodotto ad $x = y = 0$, mentre i collassi quasi sferici mostrano il ragionevole scostamento sistematico dal collasso sferico, come in Fig. 3.2a. Il comportamento a grandi shear è simile ma non identico a quello predetto da ZEL; a differenza con quanto accade con i collassi quasi sferici, ZEL tende in questa zona a sottostimare i tempi di collasso. La Fig. 3.4 mostra la curva b_c per ellissoidi in un Universo aperto; stavolta è stato scelto $\delta_l=3$ per permettere a tutti gli ellissoidi di collassare. Questa curva è praticamente indistinguibile da quella mostrata in Fig. 3.3a, a parte l'ovvio riscaldamento dei tempi. È da notare che il calcolo numerico dell'istante di collasso degli ellissoidi in universi aperti ha errori un po' più grandi di quelli dati prima, perché gli ellissoidi ci mettono molto tempo fisico per collassare.

Il collasso di un ellissoide omogeneo è stato utilizzato nel contesto cosmologico, oltre che da Bond & Myers (1996a,b,c), da White & Silk (1979), Peebles (1980), Barrow & Silk (1981), Hoffman (1986), e, più recentemente, da Bartlemann, Ehlers & Schneider (1993), che lo usarono per stimare i tempi di collasso, da Eisenstein & Loeb (1995a), che modellarono le strutture collassanti come ellissoidi omogenei, per calcolarne il momento angolare acquisito

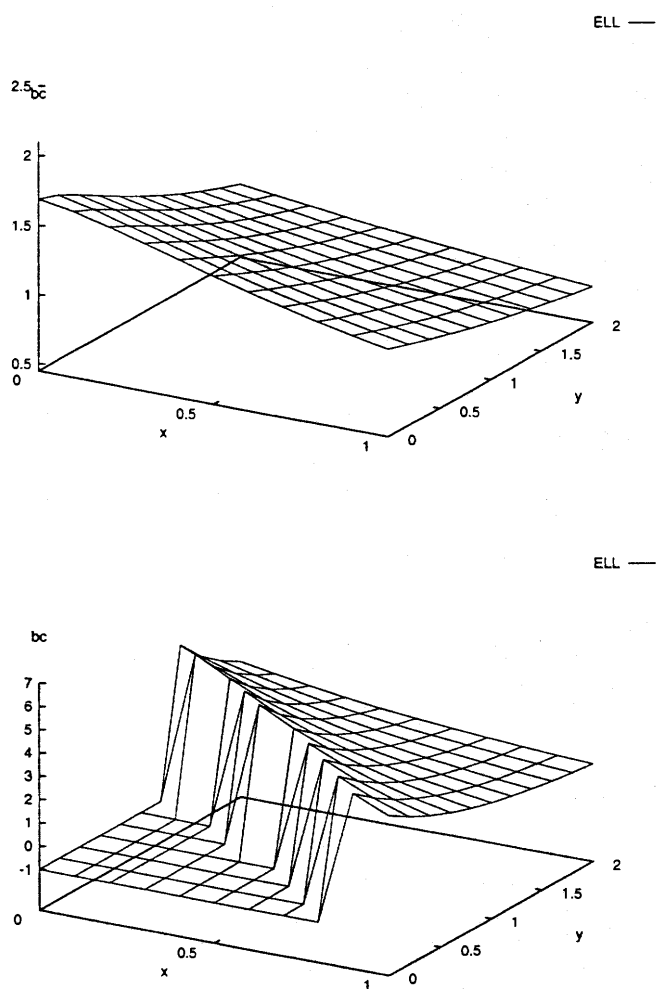


Figura 3.3: Tempi di collasso per ELL.

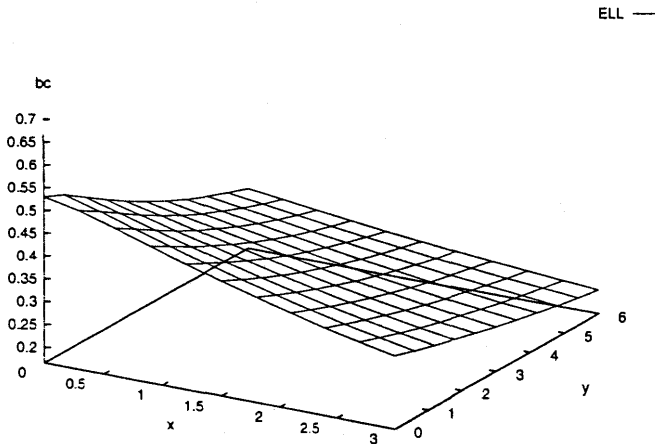


Figura 3.4: Tempi di collasso per ZEL, Universo aperto.

durante il collasso, e da Audit & Alimi (1996). Una differenza importante tra questi lavori (con l'eccezione dell'ultimo citato) e quanto qui proposto è che l'ellissoide omogeneo è di solito introdotto per descrivere distribuzioni estese di massa, e non elementi infinitesimi di massa. Una conseguenza di ciò è che l'evoluzione dell'ellissoide può essere seguita fin dopo il primo collasso: per tenere conto di una parziale virializzazione, il collasso di ogni asse è "congelato" quando l'asse diventa più piccolo di una frazione fissata del fattore di scala, e l'evoluzione degli altri assi viene seguita fino al collasso del terzo asse (se avviene), che è definito come istante di collasso. Con questa definizione di collasso, lo shear ha l'effetto di *rallentare* il collasso rispetto a quello sferico (vedi anche Peebles 1990).

3.3 Perturbazioni Lagrangiane

Il potente formalismo delle perturbazioni Lagrangiane (con troncamento), presentato nella §1.2.6, è uno strumento prezioso per il calcolo dei tempi di collasso di elementi di massa generici. Il termine al primo ordine, l'approssimazione di Zel'dovich, è già stato analizzato nella §3.1; esso dà una prima determinazione del tempo di collasso, ma contiene una quantità limitata di informazione, cioè gli autovalori λ ; da un lato, questo è un vantaggio pratico, come sarà chiaro nella §4.1, ma d'altro canto è una limitazione fisica, perché i veri tempi di collasso dipendono dal valore della densità (o del potenziale) in tutti i punti. I termini perturbativi di ordine superiore aggiungono sia

precisione dinamica che informazione non locale, a spese di un aumento di complessità dei calcoli.

Una differenza importante tra le attuali applicazioni dello schema perturbativo Lagrangiano e quella qui proposta è che le perturbazioni Lagrangiane sono di solito utilizzate per predire l'evoluzione del campo di densità nel regime debolmente non lineare, fino a contrasti di densità leggermente maggiori di uno, mentre le perturbazioni Lagrangiane verranno qui usate per predire l'istante di OC. A quell'istante, i vari contributi perturbativi sono tutti dello stesso ordine di grandezza, per cui la convergenza della serie perturbativa non è garantita per costruzione. Conviene quindi controllare la convergenza della serie in un caso semplice, come il collasso di un ellissoide omogeneo: questo controllo rivelerà alcune interessanti connessioni tra perturbazioni Lagrangiane e collasso ellissoidale.

3.3.1 Perturbazioni Lagrangiane e collasso ellissoidale

Consideriamo il seguente potenziale quadratico:

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \lambda_3 q_3^2). \quad (3.20)$$

I coefficienti λ sono ovviamente gli autovalori del tensore delle derivate seconde del potenziale; essi sono ordinati come nell'Eq. (3.4). Per trovare il campo di spostamenti fino al terzo ordine, bisogna risolvere le equazioni di Poisson (1.53). Questo non è difficile, visto che il potenziale φ ha una forma molto semplice, ma i potenziali perturbativi possono essere direttamente trovati usando le cosiddette *forme locali* date da Buchert & Ehlers (1993), Buchert (1994) e Catelan (1995).

Le forme locali sono soluzioni delle equazioni di Poisson, valide però solamente per classi ristrette di condizioni iniziali; esse hanno l'interessante proprietà di dipendere solo dal valore del potenziale e delle sue derivate *nel punto considerato*. Per esempio, il contributo del secondo ordine allo spostamento è:

$$\mathbf{S}^{(2)} = [\nabla\varphi(\nabla^2\varphi) - (\nabla\varphi \cdot \nabla)\nabla\varphi] + \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2L)} + \mathbf{R}^{(2)}. \quad (3.21)$$

Il vettore $\mathbf{S}^{(2L)}$ è la forma locale di $\mathbf{S}^{(2)}$; esso ha la giusta divergenza, ma non è generalmente irrotazionale, per cui bisogna ad esso aggiungere un vettore $\mathbf{R}^{(2)}$ senza divergenza, puramente rotazionale, per ottenere la soluzione; questo vettore contiene l'informazione non locale che non è presente nella forma locale. Espressioni analoghe possono essere trovate per le parti locali al terzo

ordine (vedi le referenze prima citate). Se le condizioni iniziali soddisfano particolari vincoli, dati in Buchert & Ehlers (1993) e Buchert (1994), le forme locali sono irrotazionali; in questo caso sono soluzioni delle equazioni di Poisson (1.53).

Nel semplice caso dell'ellissoide, è facile vedere che le forme locali sono irrotazionali (appendice B di Monaco 1996a). Questo ha una ragione molto semplice: il collasso ellissoidale vuole solamente gli autovalori λ come condizioni iniziali, non ha ulteriori dipendenze non locali da parte della materia circostante. Mentre le forme locali contengono generalmente derivate del potenziale iniziale di ordine pari all'ordine perturbativo più uno, il tensore di deformazione ellissoidale può contenere solamente derivate fino alla seconda. Quindi, i contributi al tensore di deformazione di un ellissoide sono:

$$\begin{aligned}
 S_{a,b}^{(2E)} &= \varphi_{,ab}\varphi_{,cc} - \varphi_{,ac}\varphi_{,bc} \\
 S_{a,b}^{(3aE)} &= \varphi_{,ac}\varphi_{,bc}^C \\
 S_{a,b}^{(3bE)} &= \frac{1}{2}[S_{ab}^{(2E)}\varphi_{,cc} - S_{bc}^{(2E)}\varphi_{,ac} + \varphi_{,ab}S_{c,c}^{(2E)} - \varphi_{,bc}S_{a,c}^{(2E)}] \\
 S_{a,b}^{(3cE)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$\varphi_{,ab}^C$ è la matrice dei cofattori di $\varphi_{,ab}$. Tali termini ellissoidali possono essere visti come particolari troncamenti delle forme locali, ottenuti trascurando tutte le derivate del potenziale di ordine maggiore di due. In altre parole, il collasso ellissoidale può essere visto come un troncamento della serie perturbativa Lagrangiana, tale da far dipendere l'evoluzione dell'elemento di massa solamente dagli autovalori λ .

È quindi possibile trovare i tempi di collasso risolvendo l'equazione $J(\mathbf{q}, b_c) = 0$; come variabile tempo conviene usare il modo crescente $b(t)$, in modo da eliminare la dipendenza esplicita alla cosmologia di background. È facile vedere che tutti i contributi al tensore di deformazione sono diagonali nello stesso sistema di riferimento, e che le componenti diagonali sono:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{,11} &= \lambda_1 \\
 \varphi_{,11}^{(2)} &= \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) \\
 \varphi_{,11}^{(3a)} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 \varphi_{,11}^{(3b)} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\delta_l(\lambda_2 + \lambda_3)/2.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le altre componenti diagonali si ottengono con una rotazione degli indici. L'equazione $J = 0$ diventa:

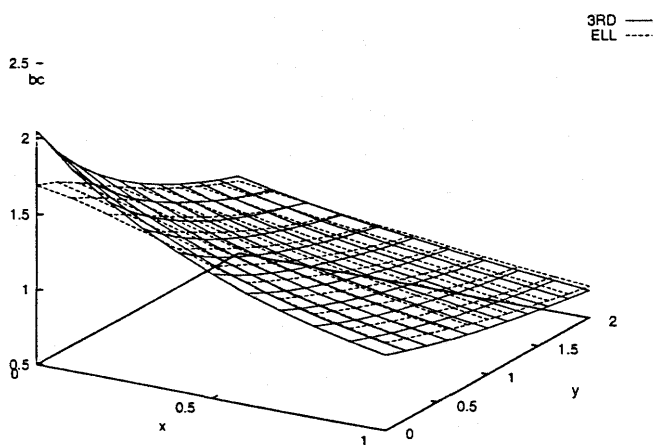
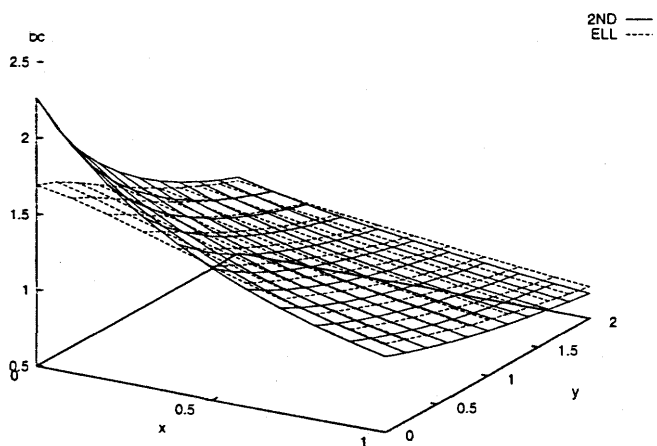
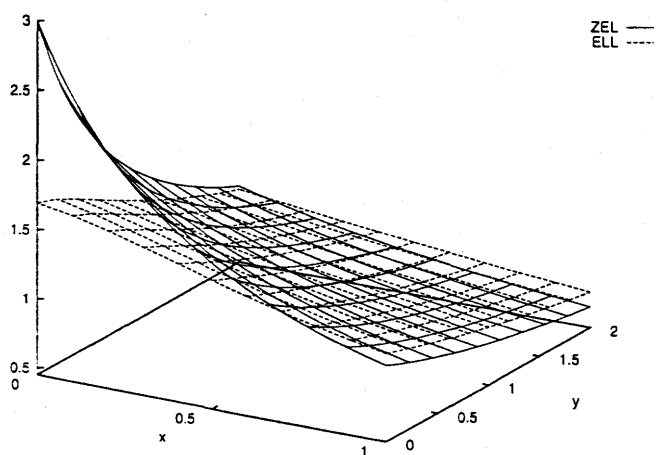


Figura 3.5: Tempi di collasso per ellissoidi sovradensi.

PERTURBAZIONI LAGRANGIANE

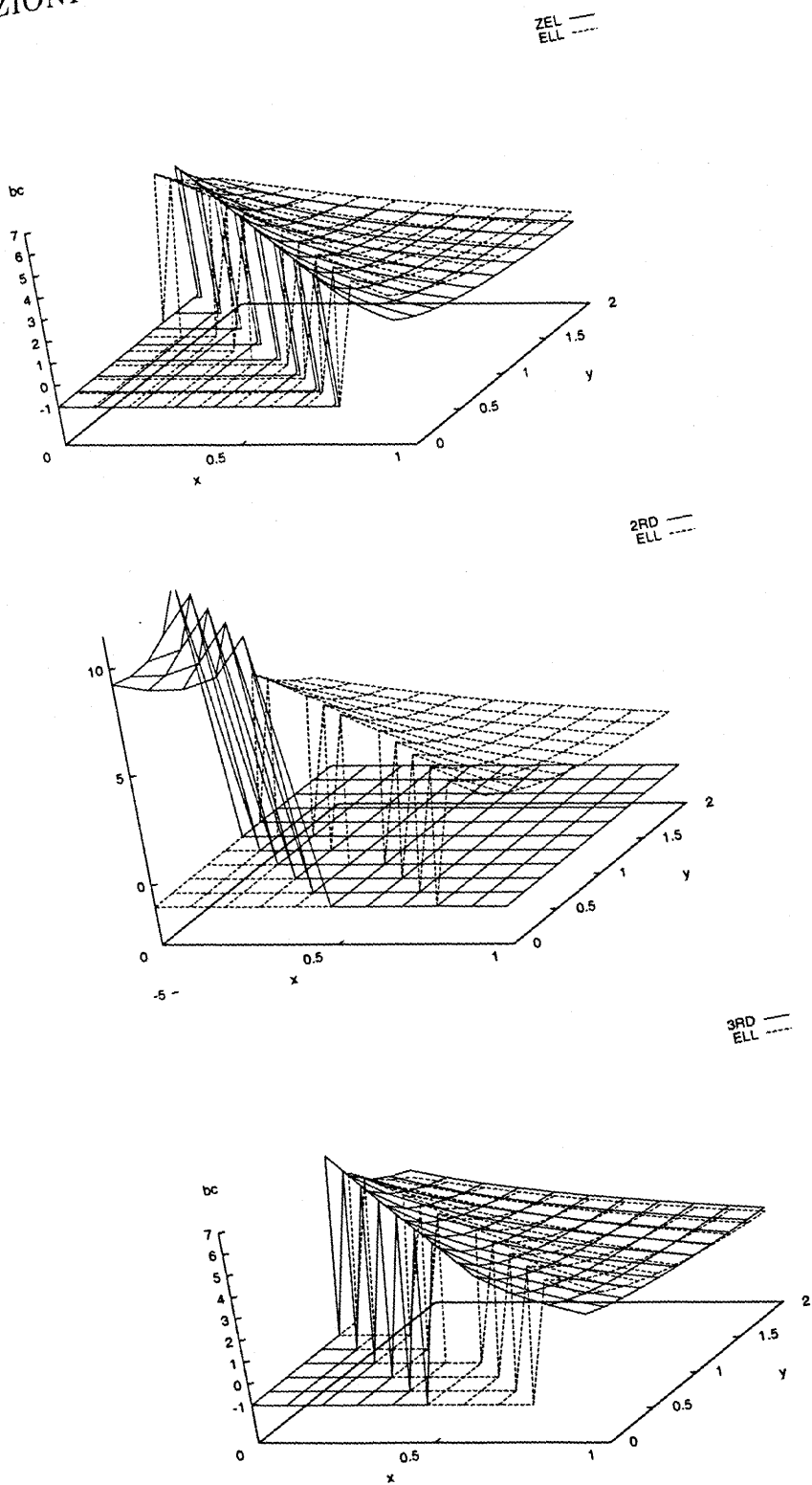


Figura 3.6: Tempi di collasso per ellissoidi sottodensi.

$$1 - \lambda_i b_c - \frac{3}{14} \lambda_i (\delta_0 - \lambda_i) b_c^2 - \left(\frac{\mu_3}{126} + \frac{5}{84} \lambda_i \delta_0 (\delta_0 - \lambda_i) \right) b_c^3 = 0. \quad (3.24)$$

dove μ_3 (dato nell'Eq. 1.52) è uguale a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

È interessante analizzare il caso sferico, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, per capire se le perturbazioni Lagrangiane aiutino a migliorare la discrepanza di quasi un fattore due tra il tempo di collasso di ZEL e la soluzione esatta. Se si risolve l'Eq. (3.24) nel caso sferico, si ottiene ai vari ordini:

$$\begin{aligned} b_c^{(1)} &= 3/\delta_l \\ b_c^{(2)} &= 2.27/\delta_l \\ b_c^{(3)} &= 2.05/\delta_l. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Per $\delta_l = 1$ la differenza da 1.69 si riduce da 1.31 di ZEL a .36 del terzo ordine. Quindi, le perturbazioni Lagrangiane mostrano, nel caso sferico, una (non molto veloce) convergenza verso la soluzione esatta; questo è incoraggiante, visto che la simmetria sferica è la più difficile da trattare per tali schemi approssimati.

La soluzione al primo ordine dell'Eq. (3.24) è semplicemente il tempo di collasso di ZEL già discusso, $b_c^{(1)} = 1/\lambda_1$. La parte al secondo ordine dell'Eq. (3.24) dà due soluzioni, una delle quali risulta essere quella corretta:

$$b_c^{(2)} = \frac{7\lambda_1 - \sqrt{7\lambda_1(\lambda_1 + 6\delta_0)}}{3\lambda_1(\lambda_1 - \delta_0)}. \quad (3.26)$$

Questa soluzione è reale per $\delta_l \geq -\lambda_1/6$, cioè solo per iniziali sovradensità o piccole sottodensità. L'altra soluzione (che ha un + di fronte alla radice quadrata) o dà valori di b_c più grandi oppure negativi, o dà soluzioni false, che fanno collassare perfino un vuoto sferico. Questo cattivo comportamento della soluzione al secondo ordine in sottodensità iniziali era già stato notato da Sahni & Shandarin (1996).

È quindi necessario usare le perturbazioni al terzo ordine per trattare adeguatamente le sottodensità. Il collasso al terzo ordine è dato dalla più piccola radice non negativa dell'Eq. (3.24). Le radici dell'equazione sono riportate nell'appendice B di Monaco (1996a). In pratica, è del tutto possibile ma non banale scegliere quale sia la radice giusta; la maniera migliore per ottenere la soluzione è lasciarla scegliere ad un computer.

Una caratteristica in comune delle soluzioni al secondo e terzo ordine è che esse predicono che il primo asse (associato all'autovalore λ_1 più grande)

collassi per primo, in accordo con i risultati delle integrazioni numeriche presentate nella §3.1. Questo può essere verificato esplicitamente per il collasso al secondo ordine, derivando l'Eq. (3.26) rispetto ad λ_1 , e verificando che tale derivata è definita negativa, per cui al più grande λ è sempre associato il tempo di collasso più piccolo. Una verifica analoga può essere fatta per il terzo ordine nei casi quasi sferici (vedi l'appendice B di Monaco 1996a). Questo fatto dà un'indicazione di convergenza, visto che la predizione al primo ordine riesce a dare il contributo più importante alla dinamica del collasso.

La Fig. 3.5 mostra il confronto tra la soluzione numerica del collasso ellissoidale, già data nella Fig. 3.3, ed i vari ordini Lagrangiani, per $\delta_l=1$; la Fig. 3.6 mostra lo stesso per $\delta_l=-1$. Tali calcoli sono basati su un Universo Einstein-de Sitter. Dalle figure si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. nel caso di sovradensità iniziale, le predizioni ad ordini Lagrangiani crescenti convergono alla soluzione numerica, entro gli errori riportati nella §3.2.2;
2. nel caso di sottodensità iniziale, solo gli ordini Lagrangiani dispari mostrano una convergenza verso la soluzione numerica, mentre la predizione al secondo ordine dà soluzioni completamente senza senso (la Fig. 3.6 mostra la falsa soluzione che fa collassare anche i vuoti sferici);
3. la convergenza è molto veloce per grandi shear; in questo caso, per gli ellissoidi sovradensi, la soluzione al terzo ordine è molto diversa da quella al secondo ordine;
4. come è noto, gli ellissoidi inizialmente sottodensi possono collassare se lo shear è abbastanza grande; in questo caso la predizione al terzo ordine è sempre abbastanza accurata.

Gli stessi calcoli, fatti con diverse cosmologie di background, confermano pienamente le conclusioni appena date, come atteso.

Per shear grandi, le perturbazioni Lagrangiane sono probabilmente più precise dell'integrazione numerica, ma i tempi di collasso nei casi quasi sferici sono sistematicamente sovrastimati. La seguente formula corregge questa sovrastima:

$$b_c^{(nC)} = b_c^{(n)} - \Delta \exp(-ax - by), \quad (3.27)$$

dove $n=2,3$, ed i tre coefficienti assumono i seguenti valori:

$$\begin{array}{rcl}
 & 2\text{ND} & 3\text{RD} \\
 \Delta = & 0.580 & \text{o } 0.364 \\
 a = & 5.4 & \text{o } 6.5 \\
 b = & 2.3 & \text{o } 2.8 .
 \end{array} \tag{3.28}$$

Questa correzione è applicata solo quando $\delta_0 > 0$; non si applica nessuna correzione (al terzo ordine) quando $\delta_0 \leq 0$.

In conclusione, la connessione tra perturbazioni Lagrangiane e collasso ellissoidale può essere così sintetizzata:

- il collasso ellissoidale può essere considerato come un particolare troncamento della serie Lagrangiana, quando si trascurano nelle forme locali del tensore di deformazione tutte le derivate del potenziale iniziale maggiori della seconda;
- con una piccola correzione per i collassi quasi sferici, le perturbazioni Lagrangiane possono essere utilizzate per seguire il collasso ellissoidale in maniera veloce ed accurata.

3.3.2 Campi Gaussiani

Quando si considera la teoria delle perturbazioni Lagrangiane in tutta la sua complessità, risulta proibitiva già al secondo ordine ogni determinazione puramente analitica del tempo di collasso b_c di un generico elemento di massa di un campo Gaussiano. Infatti, b_c è la più piccola radice non negativa dell'equazione $J = \det(\delta_{ab} + S_{a,b}) = 0$. Le matrici $S_{a,b}^{(1)}$ e $S_{a,b}^{(2)}$ sono simmetriche, ma in generale non diagonali nello stesso sistema di riferimento. Inoltre, mentre è possibile ottenere valori medi per gli elementi della matrice $S_{a,b}^{(2)}$, risulta comunque proibitiva la determinazione analitica della PDF congiunta di tutti gli elementi dei contributi perturbativi al tensore di deformazione (sia al primo che al secondo ordine), quantità necessaria per la determinazione delle proprietà statistiche del tempo di collasso.

È sicuramente più conveniente trovare i tempi di collasso simulando realizzazioni Monte Carlo di campi Gaussiani, con spettro di potenza dato, in griglie cubiche, con condizioni periodiche al contorno. Tali simulazioni non devono necessariamente essere molto estese: anche una piccola griglia di 8^3 punti può dare un grado di non località sufficiente da permettere una determinazione soddisfacente della statistica dei tempi di collasso, almeno al livello della PDF ad un punto. Infatti, i calcoli basati su griglie di 16^3 e 32^3 punti

hanno dato risultati indistinguibili. L'uso di griglie cubiche, con lati multipli di due, permette l'uso delle trasformate di Fourier veloci (FFT, *Fast Fourier Transform*) per risolvere le equazioni di Poisson per i potenziali perturbativi (Eq. 1.53).

Invece dei campi di densità, sono stati simulati dei campi di potenziale φ ; nello spazio di Fourier, i due campi sono collegati semplicemente da un termine moltiplicativo k^2 . Sono stati usati spettri di potenza senza scala, del tipo $P_\varphi(k) \propto k^{n-4}$, con n tra -2 e 1 (n è l'indice spettrale del contrasto di densità, come definito in §1.2.7). I campi sono stati normalizzati in maniera tale da avere una varianza di massa $\Lambda = \sigma_\delta^2 = 1$. Analogamente a quanto viene di solito fatto per le condizioni iniziali delle simulazioni ad N corpi, i campi di potenziale sono stati simulati direttamente nello spazio di Fourier, assegnando ad ogni modo della griglia un modulo con distribuzione di Raileigh ed una fase casuale (vedi ad esempio Klypin 1996). I potenziali perturbativi sono stati trovati risolvendo le corrispondenti equazioni di Poisson nello spazio di Fourier, cioè dividendo la trasformata del termine sorgente per k^2 . Ho notato che i termini al terzo ordine sono abbastanza sensibili agli errori numerici, un fatto già notato da Buchert, Melott & Weiß (1994); di conseguenza, non ci si aspetta che i calcoli al terzo ordine siano molto accurati. Questo è vero in special modo per il contributo rotazionale $3c$; tuttavia, ho verificato che questo termine può tranquillamente essere trascurato nei calcoli; ciò conferma ancora quanto trovato da Buchert et al. (1994). Questo fatto può essere facilmente interpretato: il termine $3c$, essendo puramente rotazionale, non influenza molto la densità dell'elemento di massa.

Sono stati calcolati i tempi di collasso b_c in ogni punto delle realizzazioni per le seguenti approssimazioni: sferica (SPH), Zel'dovich (ZEL), secondo ordine (2ND), terzo ordine (3RD), ellissoidale (ELL). I tempi di collasso con SPH, ZEL ed ELL sono stati calcolati analiticamente: SPH è semplicemente $1.69/\delta_l$, ZEL è $1/\lambda_1$, mentre ELL è stato calcolato trovando la più piccola radice non negativa dell'Eq. (3.24), e correggendo per i collassi quasi sferici come nell'Eq. (3.27). I tempi di collasso con 2ND e 3RD sono stati trovati cercando il primo istante a cui $J < 0$, usando quindi un algoritmo convenzionale per la ricerca ottimale della radice. Di fatto, è possibile che il determinante Jacobiano ridiventi positivo subito dopo essere diventato negativo; l'algoritmo utilizzato per la ricerca della radice perde un numero molto piccolo di tali eventi, con un'incidenza di pochi casi ogni 10^5 .

Per ogni spettro sono state calcolate dieci realizzazioni diverse, per eliminare il "rumore cosmico" dovuto agli effetti di volume finito. Da ogni insieme di dieci realizzazioni sono stati estratti circa 10^5 punti. Il comportamento dei vari tempi di collasso può essere compreso analizzando i loro grafici di sparpagliamento; questi sono riportati nelle Fig. 3.7a-j per il caso $n = -2$

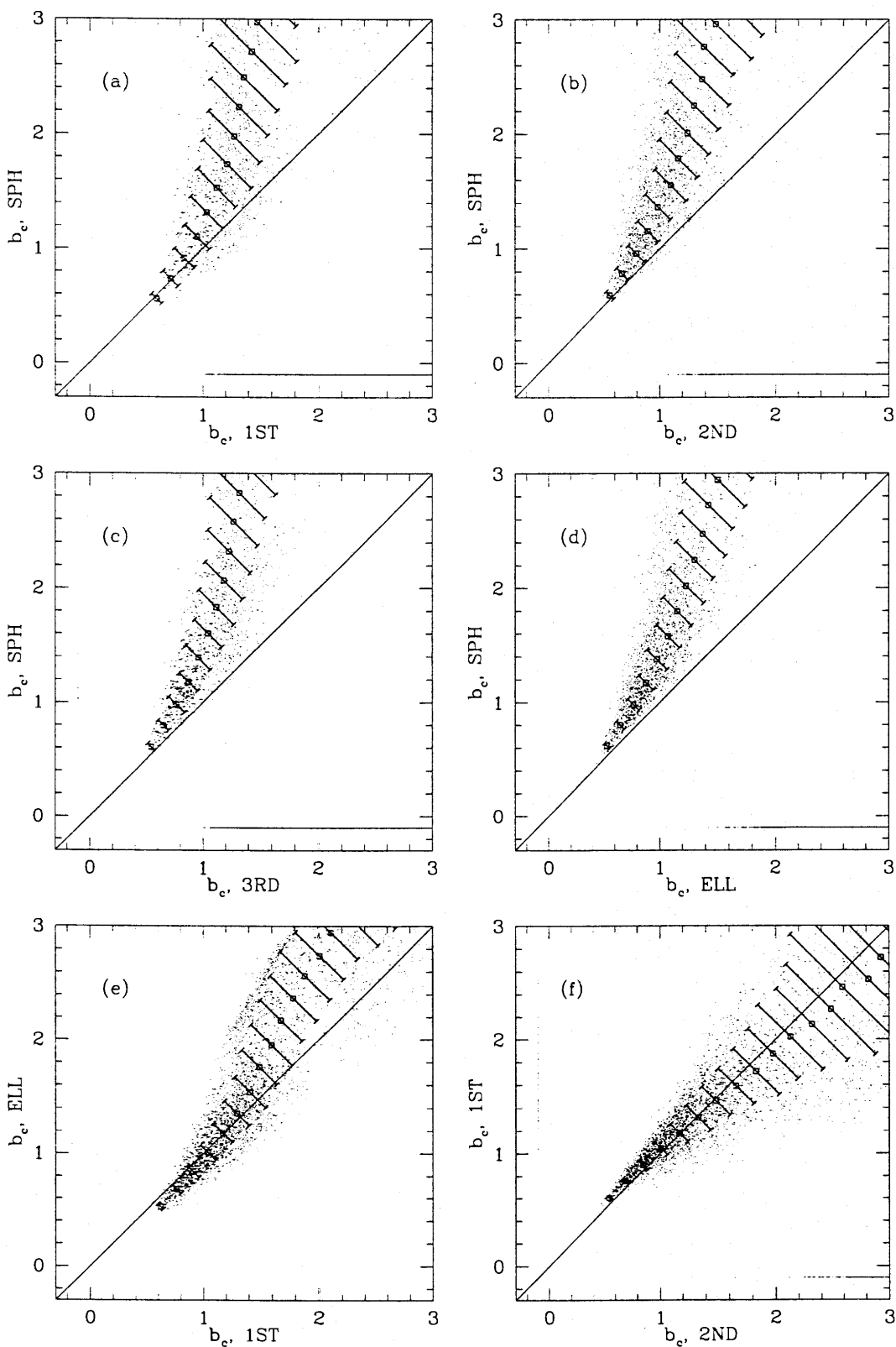


Figura 3.7: Grafici di sparpagliamento dei vari tempi di collasso.

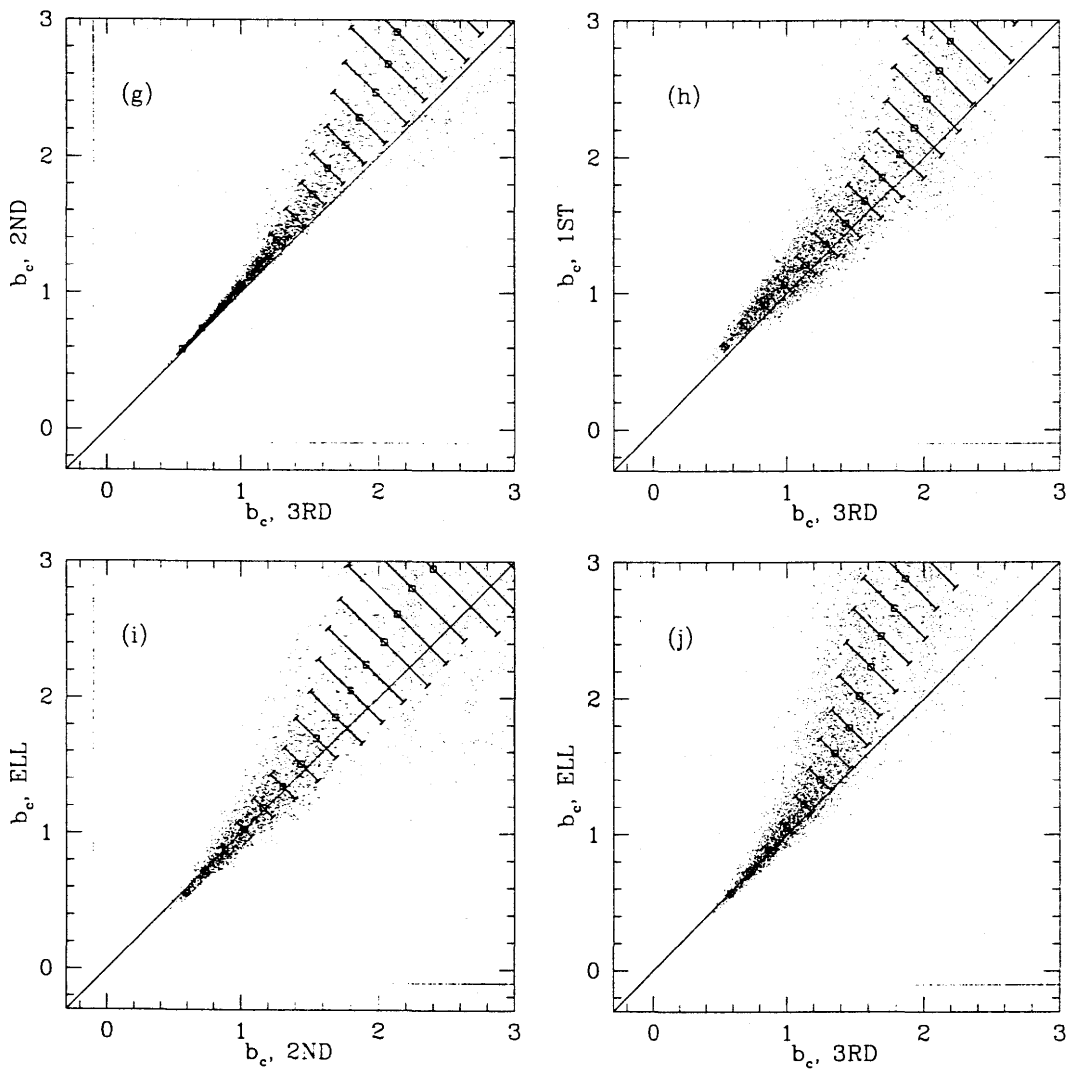


Figura 3.7: (continua)

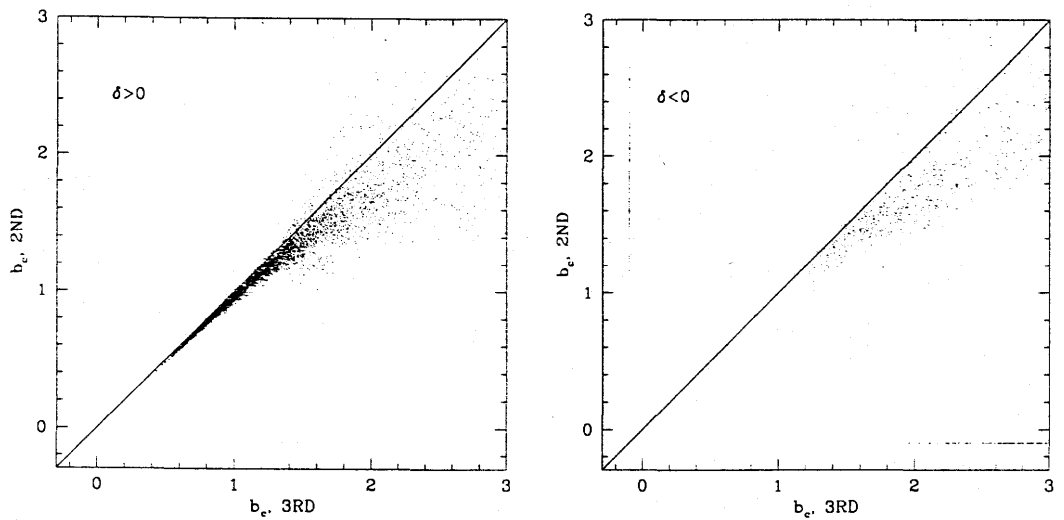


Figura 3.8: 2ND-3RD, separazione delle zone sovradense e sottodense.

(le figure focalizzano la parte più interessante del grafico di sparpagliamento, quella con $b_c < 3$). Ai punti non collassanti è stato assegnato il valore $b_c = -0.1$, per poterli visualizzare con gli altri punti. In questa maniera, i punti che collassano secondo le due predizioni dinamiche riportate nel grafico stanno nell'angolo vicino all'origine, mentre i punti che collassano secondo una predizione ma non secondo l'altra sono visibili come righe orizzontali o verticali di punti; tali punti verranno chiamati *discordanti* nel seguito. La Fig. 3.7 riporta, sovrapposti al grafico di sparpagliamento, anche i valori medi e le dispersioni attorno alla bisettrice dei punti non discordanti.

Dalle Fig. 3.7a-j si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. Tutti i risultati dati nel seguito sono essenzialmente indipendenti dall'indice spettrale n ; questo è esattamente vero per SPH, ZEL ed ELL (la distribuzione degli autovalori λ dipende solo dalla varianza di massa; vedi l'Eq. 4.1). Alcune piccole differenze nella distribuzione di 2ND e 3RD al variare di n verranno quantificate nella prossima sezione. Per questo motivo viene qui mostrato il solo caso $n = -2$; Monaco (1996a) mostra anche il caso $n = 1$.
2. Come previsto, SPH correla con le altre predizioni soltanto per i punti che collassano velocemente (in accordo con Bernardeau 1994a), e sovrastimano abbondantemente i tempi di collasso nel caso generale; inoltre, si predice non correttamente il non collasso molti punti (quelli con $\delta_0 < 0!$). Come detto prima, il collasso realistico (puntuale) è sempre più veloce di quello sferico. In conclusione, il collasso sferico non è

adatto, neanche dal punto di vista statistico, per descrivere il collasso gravitazionale.

3. Le correlazioni ZEL - 2ND e 2ND - 3RD a tempi di collasso piccoli ($b_c \leq 1$) sono via via migliori; la prima mostra una certa dispersione, la seconda è molto stretta. Questo dimostra la convergenza della serie Lagrangiana nella predizione del tempo di collasso per i punti che collassano velocemente. La correlazione ZEL - 3RD è simile a quella ZEL - 2ND.
4. I punti discordanti nel grafico 2ND - 3RD sono o punti inizialmente sottodensi, per i quali 2ND non trova soluzioni come nel caso ellissoidale (e quindi $b_c^{(2ND)}=0$), o vuoti per i quali 2ND predice il collasso (e quindi $b_c^{(3RD)}=0$). Per maggior chiarezza, la Fig. 3.8 mostra lo stesso grafico separatamente per i punti inizialmente sovradensi e sottodensi. La stessa cosa avviene negli altri grafici relativi a 2ND.
5. Questo mette in evidenza la necessità del terzo ordine perturbativo per ottenere tempi di collasso affidabili.
6. 3RD predice tempi di collasso più brevi di tutte le altre predizioni per $b_c > 1$. Date le incertezze connesse al calcolo al terzo ordine, questo comportamento non viene considerato particolarmente robusto.
7. Sia 2ND che 3RD predicono il collasso finale di un numero di punti maggiore di ZEL. Non è chiaro se abbia senso tale comportamento, che riguarda punti completamente al di fuori della zona di convergenza della serie Lagrangiana. Probabilmente le perturbazioni Lagrangiane non sono un buon strumento per calcolare la frazione totale di massa collassata in un Universo smussato.
8. ELL mostra una correlazione incoraggiante con 2ND ed una ancora migliore con 3RD, quando b_c è piccolo. In altre parole, ZEL, 2ND e 3RD convergono per piccoli b_c ad una soluzione molto simile al collasso ellissoidale. Questo ha due implicazioni, cioè che la serie Lagrangiana probabilmente converge alla soluzione vera, e che ELL può essere usato come stima realistica dei tempi di collasso. Infine, ELL tende a sottostimare i tempi di collasso per $b_c > 1$, leggermente rispetto a 2ND e parecchio rispetto a 3RD. Questo implica che la non località non contenuta in ELL accelera il collasso.

Le conclusioni appena elencate, strettamente valide per un Universo di Einstein-de Sitter, mantengono con ottima approssimazione la loro validità

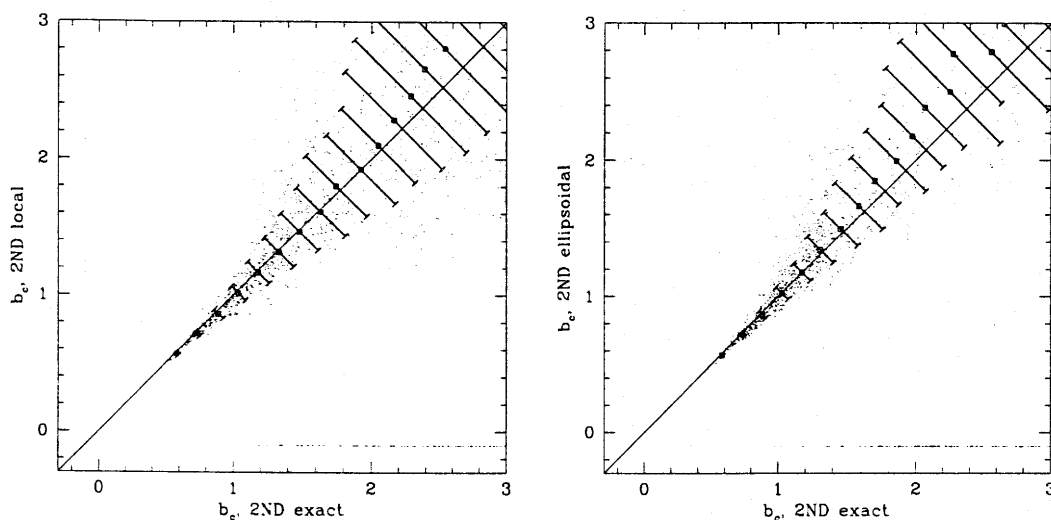


Figura 3.9: Controllo delle forme locali.

per cosmologie più generali, dato che la mancanza di proporzionalità tra le funzioni temporali $b_n(t)$ e $b(t)^n$ è in genere trascurabile. Tuttavia bisogna ricordarsi che, nel caso di Universi aperti, tempi di collasso maggiori di $5/2$ implicano che il collasso non avviene, dal momento in cui il modo crescente satura a quel valore.

Infine, i calcoli appena presentati possono essere utilizzati per controllare l'efficienza dei troncamenti locali della serie Lagrangiana discussi nella §3.3.1. In particolare, possono essere utilizzati per decidere se le forme locali date da Buchert & Ehlers (1993), Buchert (1994) e Catelan (1995) riproducano i tempi di collasso meglio del troncamento ellissoidale introdotto sopra. Questo controllo è stato fatto per le perturbazioni al secondo ordine: la Fig. 3.9 mostra i grafici di sparpagliamento delle predizioni di collasso 2ND confrontate con quelle ricavate dalla forma locale al secondo ordine e il troncamento ellissoidale (a cui non è stata applicata la correzione per i collassi non sferici). Si può notare come il considerare l'intera forma locale causi solo un modesto aumento di precisione rispetto al troncamento ellissoidale; quest'ultimo può quindi essere preferito, in quanto permette una notevole semplificazione dei calcoli, al solo costo di una modesta perdita di accuratezza.

3.4 Tempi di collasso inversi

I tempi di collasso presentano lo svantaggio di passare dal collasso al non collasso attraverso infinito. È più conveniente definire la quantità $F(\mathbf{q}; \Lambda)$

come l'inverso del tempo di collasso del punto \mathbf{q} di un potenziale iniziale smussato alla risoluzione (varianza di massa) Λ :

$$F(\mathbf{q}; \Lambda) = \frac{1}{b_c(\mathbf{q}; \Lambda)}. \quad (3.29)$$

F è la quantità dinamica che sta alla base della costruzione della funzione di massa. Nel caso SPH, F è semplicemente proporzionale al contrasto lineare, $F = \delta_l/1.69$; nel caso di Zel'dovich (ZEL), F è uguale a λ_1 .

La quantità F è naturalmente un processo non Gaussiano (eccetto che nel caso SPH), e non è una semplice funzione non lineare di un processo Gaussiano (come, ad esempio, la distribuzione lognormale): il tempo di collasso inverso è un complicato funzionale non lineare e non locale dell'intero campo Gaussiano delle perturbazioni iniziali. Analogamente a quanto visto nel capitolo 2, la PDF ad un punto del processo F è la minima informazione statistica di cui abbiamo bisogno per costruire la MF; questo punto sarà ulteriormente discusso nella §4.4.

Tramite le realizzazioni Monte Carlo descritte nella scorsa sezione, è possibile determinare le PDF ad un punto per i vari processi F relativi alle differenti predizioni dinamiche. La Fig. 3.10 mostra tali PDFs per i due diversi indici spettrali $n = -2$ e 1 ; sono riportate sia le distribuzioni cumulative che quelle differenziali (in scala logaritmica): le curve cumulative sono ovviamente meno rumorose, e mostrano direttamente la frazione totale di massa che sta in un dato intervallo di F , mentre le curve differenziali mostrano meglio il comportamento delle varie PDFs, specialmente a grandi valori di F . Si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. La curva SPH è del tutto diversa dalle altre, anche nella coda ad alti F , che corrisponde ai punti che collassano più velocemente. Vedremo nel prossimo capitolo che una deviazione sistematica dei tempi di collasso da quello sferico influenza in maniera determinante la statistica della coda degli eventi rari, malgrado il collasso sferico sia asintoticamente raggiunto.
2. Nel range $F \geq 1$ le curve relative a ZEL, 2ND e 3RD mostrano uno spostamento monotonicamente verso valori grandi di F ; questo spostamento è più grande quando si passa da ZEL a 2ND piuttosto che da 2ND a 3RD; questo fatto indica convergenza verso una soluzione. Questo non è vero per $F < 1$, probabilmente a causa del comportamento di 2ND nelle sottodensità.
3. ELL e 3RD quasi coincidono oltre $F = 1.2$, che corrisponde a $b_c = 0.83$, ed hanno globalmente un comportamento simile; ELL prevede proba-

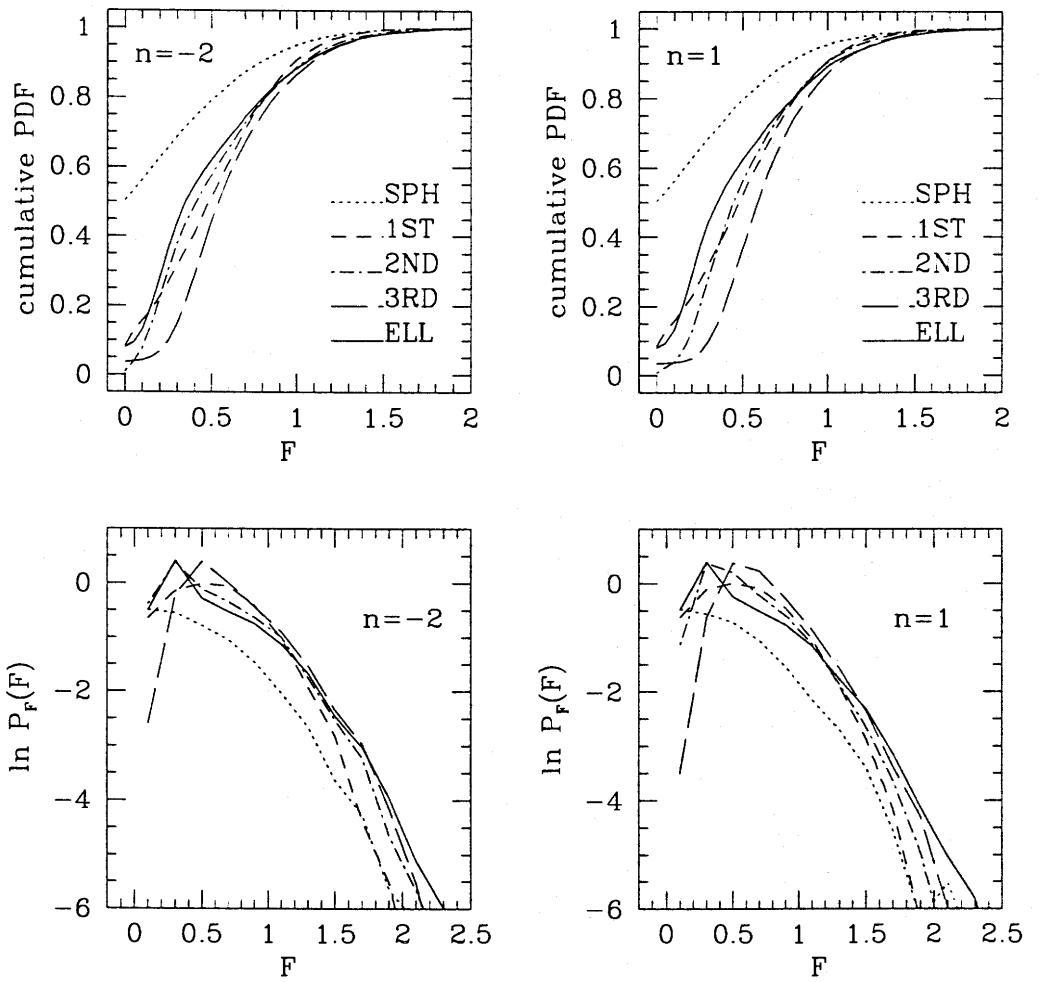


Figura 3.10: PDF cumulative e differenziali dei vari F.

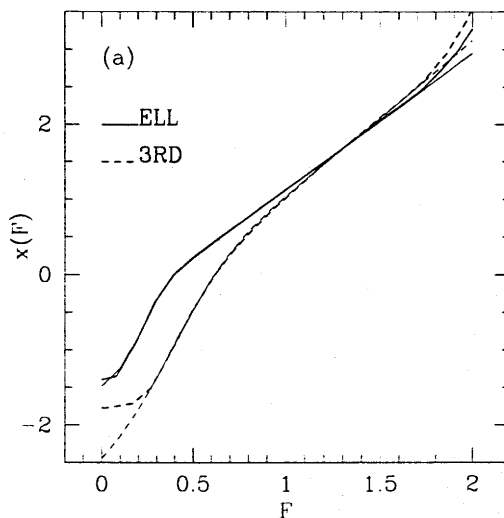
bilità di collasso un po' maggiori di 3RD a grandi F , e questo a causa del fatto che 3RD sottostima i collassi quasi sferici. La differenza principale tra le due distribuzioni viene fuori quando la convergenza della serie Lagrangiana non è garantita; in questo caso sia ZEL che 2ND e 3RD mostrano mediane più grandi di ELL, che quindi probabilmente sovrastima i tempi di collasso attorno a $F = 0.5$. È ancora da sottolineare che il comportamento delle predizioni dinamiche Lagrangiane in questo caso non è considerato robusto.

4. La dipendenza da n è mostrata nella Fig. 3.10. Come visto prima, SPH, ZEL ed ELL sono indipendenti da n , mentre la dipendenza è debole per 2ND e 3RD. È da notare che differenza tra ELL e 3RD diminuisce al diminuire dell'indice spettrale, cioè quando è presente più potenza a grandi scale. nel seguito, tale debole dipendenza dall'indice spettrale sarà trascurata.
5. L'intervallo $F > 1$, dove la serie Lagrangiana converge ed è in accordo con ELL, include più del 10% della massa totale. Il 20% di massa ha $F > 0.8$, dove ELL e 3RD non sono ancora molto diversi, mentre 50% della massa è inclusa entro $F \sim 0.5$, valore al di sotto del quale le varie PDF sono diverse sia qualitativamente che quantitativamente. Quindi, la convergenza della serie Lagrangiana ed il suo accordo con ELL interessa una quantità significativa di massa, corrispondente alla parte a masse grandi ed intermedie della MF, mentre la mancanza di robustezza delle predizioni dinamiche a piccoli F va ad influenzare la parte a basse masse della MF.

Nel seguito, verranno considerate solamente le predizioni ELL e 3RD; le PDF dei relativi processi F sono determinate mediando tra gli indici spettrali considerati, cioè $n = -2, -1, 0$ e 1 . Per ottenere un'espressione analitica approssimata per le PDFs, è utile trovare una trasformazione che renda le distribuzioni Gaussiane, cioè:

$$P_F(F; \Lambda) dF = P_G(x(F); \Lambda) dx(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda}} e^{-x(F)^2/2\Lambda} dx(F). \quad (3.30)$$

In pratica, la quantità trasformata x è tale da avere una PDF ad un punto uguale a quella del contrasto lineare. (Questo non implica che x sia un processo Gaussiano: le sue correlazioni spaziali non saranno quelle di δ_l). La trasformazione $x(F)$, relativa al caso $\Lambda=1$ mostrato in Fig. 3.10, può essere trovata risolvendo la seguente equazione differenziale ordinaria:

Figura 3.11: Trasformazione $F \rightarrow x$.

$$\frac{dx(F)}{dF} = \sqrt{2\pi} P_F(F) \exp\left(\frac{x(F)^2}{2}\right). \quad (3.31)$$

Questa equazione può essere risolta tramite un ordinario algoritmo Runge-Kutta. La condizione iniziale per l'integrazione è stata imposta ponendo $x = 0$ per la mediana della PDF di F , integrando quindi verso valori di x positivi e negativi. Le soluzioni per ELL e 3RD sono mostrate in Fig. 3.11. A grandi valori di F le curve di trasformazione sono semplici rette, il che implica che le curve $P_F(F)$ sono Gaussiane (è da notare che il modesto incurvamento verso l'alto verso $F \sim 2$ è un artefatto dell'integrazione numerica). Tali curve sono rappresentate dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} x(F)_{ELL} &= -0.69 + 1.82F - 0.4(\operatorname{erf}(-7.5F + 1.75) + 1) \\ x(F)_{3RD} &= -1.02 + 2.07F - 0.75(\operatorname{erf}(-3F + 1.18) + 1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Queste espressioni analitiche sono mostrate in Fig. 3.11; la poco interessante parte $F < 0.3$ non è ben riprodotta. I primi due termini riproducono accuratamente la parte lineare delle curve $x(F)$, mentre le funzioni di errore riproducono l'abbassamento della curva a piccoli valori di F .

La Fig. 3.12 mostra le PDF di ELL e 3RD, insieme alle loro approssimazioni analitiche basate sulle trasformazioni lineari e complete. Le curve lineari riproducono bene le PDF a grandi masse, che sono quindi Gaussiane con ottima approssimazione, ma non riproducono l'evidente picco presente a

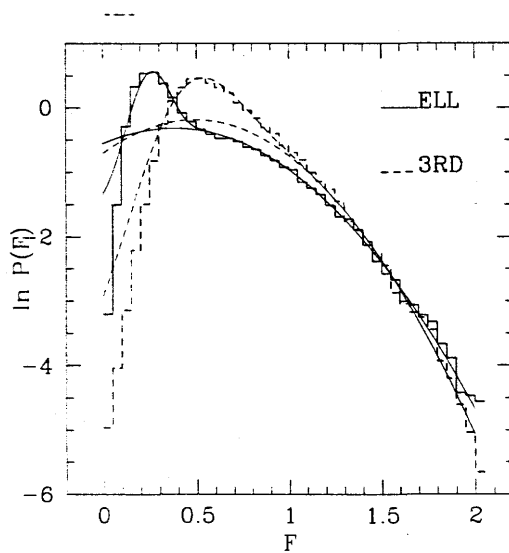


Figura 3.12: PDF per ELL e 3RD, con curve Gaussianhe e complete.

$F \sim 0.5$. Tale picco è ben riprodotto dalle espressioni complete. È da notare inoltre che la PDF di ELL è accuratamente Gaussianhe fino a $F = 0.5$, mentre la PDF di 3RD inizia a deviare dalla Gaussianhe ad $F = 1$.

Le curve $x(F)$ e $P_F(F; \Lambda)$ appena date sono relative ad una risoluzione $\Lambda=1$. Le loro espressioni per ogni Λ si possono ottenere tramite le seguenti relazioni di riscaldamento:

$$\begin{aligned} P_F(F, \Lambda) &= \sqrt{\Lambda} P_F(F/\sqrt{\Lambda}, 1) \\ x(F, \Lambda) &= \sqrt{\Lambda} x(F/\sqrt{\Lambda}, 1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Un dettaglio tecnico finale: Bernardeau (1994b) ha mostrato che la forma del filtro non influenza la distribuzione statistica del processo filtrato, a patto che il filtraggio sia fatto nello spazio Lagrangiano.

3.5 Discussione

Il problema della MF può essere formulato in termini del processo non Gaussiano F , che rappresenta il tempo di collasso inverso di un elemento di massa. Se si considera il collasso sferico, F è proporzionale al contrasto lineare di densità, ed è quindi Gaussiano; stime più realistiche dei tempi di collasso portano a processi F che hanno un comportamento statistico diverso, anche per gli eventi rari.

Di fatto, il processo F è una funzione della risoluzione; questo implica che, analogamente a quanto accadeva nel caso di PS (vedi la §2.3.2), ad ogni punto è associata un'intera traiettoria $F(\Lambda)$. È quindi naturale pensare di estendere il formalismo della barriera assorbente, o quello della diffusione, descritti nel capitolo 2, al processo F . Tuttavia, la complicata natura non Gaussiana del processo può rendere i calcoli notevolmente più complicati di quanto lo fossero nell'ambito delle teorie basate sulla dinamica lineare. In particolare, un approccio analitico basato sui picchi del processo F (come il formalismo confluyente di Manrique & Salvador-Solé (1995), o l'approccio picco-chiazza di Bond & Myers (1996a)) è fuori discussione: una descrizione analitica dei picchi è fattibile solo se il campo è Gaussiano, o una sua semplice funzione (Adler 1981). D'altra parte, l'approccio degli insiemi di escursione, più semplice di quello dei picchi, richiede solamente la conoscenza della PDF ad un punto del processo F , quantità già ottenuta nella scorsa sezione. Sarà dimostrato nel prossimo capitolo che il formalismo degli insiemi di escursione, nel caso di filtraggio SKS, può essere esteso a generici processi F , per qualsiasi ragionevole predizione dinamica.

D'altra parte, l'uso del formalismo di diffusione (della barriera assorbente) deve essere giustificato con cura nel presente contesto dinamico. Di fatto, le predizioni dinamiche appena descritte prevedono il collasso di una gran parte della massa (vedi la Fig. 3.10), cioè il 92% secondo ZEL ed ELL, ed ancora di più secondo 2ND e 3RD, anche se il numero esatto non è considerato una predizione robusta; questo a differenza della teoria lineare o del collasso sferico, che predicono il collasso finale del 50% della massa. Di conseguenza, se si calcola una MF basata su argomenti del tipo PS, tale MF risulta quasi normalizzata; il "fattore sciocchezza" sarebbe solamente $1/0.92 \simeq 1.09$ per ZEL ed ELL, o ancora più simile ad 1 negli altri casi. D'altra parte, rimane l'inconsistenza connessa con l'interpretazione dei riattraversamenti della barriera: quando una traiettoria $F(\Lambda)$ attraversa la barriera per la prima volta, il punto viene interpretato come appartenente ad una regione di multi flusso a quella risoluzione; se la traiettoria riattraversa la barriera, tornandone sotto, il punto è interpretato come in regime di flusso laminare ad una risoluzione maggiore, cioè ad una scala più piccola. Questo è assurdo, e quindi questi eventi di riattraversamento non sono considerati fisici; per evitarli, bisogna assorbire le traiettorie al primo attraversamento della barriera. In altre parole, le predizioni di collasso sono solo approssimate, per cui, quando diverse predizioni sono in contraddizione, è ragionevole credere a quella relativa alla risoluzione più grande, in quanto è la più affidabile.

Un altro punto importante riguarda la natura puntuale delle predizioni dinamiche. Le predizioni di collasso, anche se dipendenti dalla risoluzione, sono comunque relative ad un elemento di massa e volume infinitesimi, non

ad una regione di dimensioni simili a quelle del filtro. Di conseguenza, non c'è bisogno di introdurre le correlazioni spaziali nel problema di diffusione, come accadeva nel caso dell'interpretazione globale del tempo di collasso (vedi la §2.3.4). D'altra parte, se il campo di potenziale sottostante è smussato ad una scala R , gli insiemi di escursione avranno una dimensione tipica di ordine R , poiché questa è l'unica scala caratteristica, ma l'esatta relazione tra R e la dimensione delle regioni collassate (nello spazio Lagrangiano) sarà determinata dalle stesse correlazioni spaziali che prima erano state evitate. In altre parole, l'interpretazione puntuale permette di trascurare le correlazioni spaziali nel problema di diffusione, ma le stesse correlazioni vengono ritrovate nell'ambito del problema, di natura geometrica, della stima dei volumi, e quindi delle masse delle regioni collassate. Questo punto verrà ripreso nella §4.4.

Due ulteriori argomenti piuttosto tecnici; essendo F l'inverso di un tempo, la posizione della barriera assorbente ha un significato preciso: indica (l'inverso de) il tempo a cui si vuole la MF. In altre parole, non ci sono parametri liberi in questa teoria, come il δ_c di PS; questo è dovuto al miglioramento della descrizione dinamica del collasso. Secondo, la forma del filtro di smussamento deve essere scelta in modo tale da ottimizzare la predizione dinamica; da questo punto di vista si preferiscono di solito i filtri Gaussiani (Melott, Pellman & Shandarin 1994; Weiß, Gottlöber & Buchert 1996), ma tale preferenza è stata determinata analizzando il comportamento dei campi nel regime debolmente non lineare, mentre in principio la predizione del collasso potrebbe essere ottimizzata da un filtro di forma diversa.

Voglio infine dare qualche commento sul concetto di non località della dinamica gravitazionale, recentemente ribadito da Kofman & Pogosyan (1995). Dal punto di vista matematico, si può dire che un sistema evolve in maniera locale se le equazioni di evoluzione sono equazioni differenziali ordinarie. Infatti, l'assenza di derivate parziali (spaziali) nel sistema di equazioni fa sì che ogni punto evolva in maniera indipendente da tutti gli altri una volta che siano state assegnate le condizioni iniziali ed al contorno. Dal punto di vista fisico, un sistema evolve localmente se gli elementi di massa non vengono influenzati nella loro evoluzione dalla materia che li circonda. La teoria lineare ed il collasso sferico predicono evoluzione locale, dato che l'evoluzione di ogni elemento di massa è determinata solamente dal contrasto di densità iniziale. Con l'approssimazione di Zel'dovich, una volta fissati gli autovalori λ del tensore di deformazione, si possono predire la traiettoria e la deformazione dell'elemento di massa, per cui l'evoluzione è locale dal punto di vista matematico; d'altra parte, gli autovalori λ contengono informazione non locale sulle maree, per cui l'evoluzione secondo Zel'dovich è fisicamente non locale. Tale non località è dovuta essenzialmente al fatto che densità e potenziale

gravitazionale sono connessi da un'equazione di Poisson, che è profondamente non locale.

È interessante notare che si possono applicare gli stessi ragionamenti alla teoria delle perturbazioni Lagrangiane ad ogni ordine (conosciuto): le condizioni iniziali contengono informazione non locale attraverso i potenziali perturbativi, i quali sono connessi al potenziale iniziale attraverso equazioni di Poisson con sorgenti non lineari, ma una volta che i potenziali perturbativi siano noti in un punto, l'evoluzione di quel punto può essere seguita localmente, senza contemporaneamente seguire tutti gli altri punti. Quindi, la teoria delle perturbazioni Lagrangiane descrive un'evoluzione dinamica non locale (e quindi più realistica di quella lineare o sferica) dal punto di vista fisico, ma locale, e quindi più facile da maneggiare, dal punto di vista matematico. Un ulteriore esempio è fornito dalle simulazioni ad N corpi, le quali seguono il problema dinamico in tutta la sua non località; di conseguenza, è necessario seguire tutte le particelle contemporaneamente, il che rende tali simulazioni enormemente più lente dell'implementazione della teoria "locale" delle perturbazioni Lagrangiane.

Capitolo 4

Statistica e la funzione di massa

Il capitolo 3 era dedicato al problema di trovare stime realistiche dei tempi di collasso di generici elementi di massa. Trasformare tale informazione in un'espressione per la funzione di massa è un problema di natura prettamente statistica. Abbiamo visto nel capitolo 2 come questo problema statistico, nel semplice caso in cui il tempo di collasso inverso F sia proporzionale al contrasto di densità, abbia ricevuto molta attenzione nella letteratura scientifica. Avevamo identificato due approcci principali, cioè quello degli insiemi di escursione e quello dei picchi; avevamo anche visto che il primo approccio è più semplice da utilizzare del secondo, al costo di una semplificazione nel trattamento della geometria delle regioni collassate nello spazio Lagrangiano, mentre l'approccio dei picchi, la cui validità si basa sull'ipotesi che le strutture cosmologiche si formino nei picchi del campo iniziale, tiene meglio conto della geometria, al costo di un'aumento della complessità del formalismo, specialmente quando si tenti di risolvere il problema del picco-nel-picco.

Non è banale estendere tali approcci al caso in cui F sia un complicato processo non Gaussiano. In particolare, l'approccio dei picchi sembra essere di gran lunga troppo complicato per essere utilizzato in questo contesto; anche nel caso Gaussiano, non è semplice calcolare semplici valori medi, come il numero medio di picchi di una certa altezza, o la loro forma media, e tali quantità non sono mai state calcolate per campi non Gaussiani, eccetto quelli che sono semplici funzioni di campi Gaussiani (vedi Adler 1981), o nel caso di picchi asintoticamente alti (Catelan, Lucchin & Matarrese 1988). La ragione di ciò sta nel fatto che il vincolo di picco (la condizione che un punto deve soddisfare per essere un picco) richiede la conoscenza delle correlazioni spaziali. D'altra parte, l'approccio degli insiemi di escursione richiede la conoscenza solamente della PDF ad un punto del processo considerato, a patto che si assuma l'interpretazione puntuale dei tempi di collasso. Ad ogni modo, l'estensione del formalismo degli insiemi di escursione a predizioni ge-

neriche del tempo di collasso richiede un'accurata dimostrazione per essere rigorosamente introdotto.

Nella §4.1 la MF sarà determinata per mezzo di un semplice approccio a scala singola, del tipo PS, che consiste nello stimare la probabilità di avere condizioni iniziali tali da far collassare un elemento di massa. Nella §4.2 dimostrerò che, usando il filtraggio SKS, è possibile estendere il formalismo della diffusione, di Bond et al. (1991), ad un generico processo F . Per far questo, bisognerà utilizzare alcuni concetti del calcolo stocastico. Mostrerò quindi che il problema di diffusione può essere riformulato in termini di un processo di Wiener (un cammino casuale) assorbito da una barriera mobile; tale problema sarà risolto numericamente, e saranno date alcune formule analitiche che accuratamente approssimano la funzione di massa a grandi masse. La §4.3 sarà dedicata al problema della barriera assorbente nel caso di filtri Gaussiani: in questo caso si può utilizzare l'approssimazione analitica proposta da Peacock & Heavens (1990). La geometria delle regioni collassate nello spazio Lagrangiano ha un ruolo rilevante nel passaggio dalla variabile risoluzione alla variabile massa, come sarà mostrato nella §4.4. La §4.5 contiene i commenti finali. Tutti gli argomenti presentati in questo capitolo sono contenuti in Monaco (1995) e Monaco (1996b), e discussi in Monaco (1994; 1996c-f).

4.1 Approcci del tipo PS

Si può ottenere una prima determinazione della MF applicando un approccio analogo a quello originale di PS: si ottiene la frazione di massa collassata integrando, a scala fissata, su tutte le condizioni iniziali che permettono all'elemento di massa di collassare. Tale procedura, come quella di PS, non affronta il problema CIC; tuttavia, come notato nella §3.5, le approssimazioni dinamiche usate predicono il collasso della maggior parte della massa, per cui la MF determinata alla PS è quasi normalizzata, a meno del 10%. È quindi naturale sospettare che una MF ottenuta per mezzo del formalismo della barriera assorbente possa non essere molto diversa da quella alla PS, dal momento in cui soltanto una piccola parte della massa, che si trova nelle sottodensità più forti, deve essere redistribuita; tale massa non dovrebbe influenzare la MF in alcun intervallo di masse rilevante. Mostrerò nelle §4.2 e §4.3 sotto quali condizioni l'approccio alla PS e quello della barriera assorbente danno risultati simili; qui anticipo solamente che l'approccio alla PS è sufficiente ad identificare le principali caratteristiche della MF dinamica.

L'integrazione sulle condizioni iniziali richiede che tali condizioni siano specificate, e che sia nota la loro PDF. Nel caso della teoria lineare, la con-

dizione iniziale consiste semplicemente nel contrasto lineare di densità, la cui distribuzione è nota. Nel caso più generale, le condizioni iniziali consistono nel valore iniziale della densità (o, equivalentemente, del potenziale gravitazionale) in ogni punto, per cui è molto difficile fare l'integrazione diretta. Un caso intermedio è dato dall'approssimazione di Zel'dovich (ZEL) e dalle altre approssimazioni che richiedono le stesse condizioni iniziali, come gli ansätze proposti nella §3.1 o il collasso ellissoidale (ELL). In questo caso, è nota la distribuzione delle condizioni iniziali, cioè dei tre autovalori λ (Doroshkevich 1970):

$$P_\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = \frac{675\sqrt{5}}{8\pi\Lambda^3} \exp\left(-\frac{3}{\Lambda}\mu_1^2 + \frac{15}{2\Lambda^2}\mu_2\right) \\ \times (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (4.1)$$

dove Λ è ancora la varianza di massa, mentre $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ e $\mu_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ sono due invarianti principali del tensore di deformazione, definiti come nell'Eq. (1.52). Convienne esprimere tale PDF in termini del contrasto lineare δ_l e delle variabili x ed y definite nella §3.1, Eq. (3.6): in questo caso la PDF congiunta risulta fattorizzata in una Gaussiana per δ_l e una PDF congiunta per x ed y :

$$P(\delta_l, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \exp\left(-\frac{\delta_l^2}{2\Lambda}\right) \times \frac{225}{4} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} \frac{1}{\Lambda^{5/2}} \exp\left(-\frac{5}{2\Lambda}(x^2 + xy + y^2)\right) \\ \times xy(x+y) = P_{\delta_l}(\delta_l; \Lambda) \times P_{x,y}(x, y; \Lambda). \quad (4.2)$$

Si può quindi procedere all'integrazione:

$$\Omega(> \Lambda) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy P_{x,y}(x, y; \Lambda) \int_{\delta_c(x,y)}^\infty d\delta P_{\delta_l}(\delta_l; \Lambda), \quad (4.3)$$

dove la *funzione* $\delta_c(x, y)$, che sostituisce il parametro δ_c della procedura PS, è definita come la soluzione dell'equazione:

$$b_c(\delta_c, x, y) = b(t_0), \quad (4.4)$$

dove $b(t_0)$ è l'istante a cui si calcola la MF (verrà generalmente posto ad uno). Scrivendo la funzione $\delta_c(x, y)$ come $\delta_0 - f(x, y)$, dove δ_0 è il valore sferico 1.69 e la funzione positiva $f(x, y)$, che si annulla all'origine, dà l'effetto delle maree esterne sul tempo di collasso, è possibile scrivere la funzione $n(\Lambda)$ come:

$$n(\Lambda) = n_{PS}(\Lambda) \times \mathcal{I}(\Lambda), \quad (4.5)$$

dove $n_{PS}(\Lambda)$ è la MF di PS, Eq. (2.5), e $\mathcal{I}(\Lambda)$ è un termine di correzione:

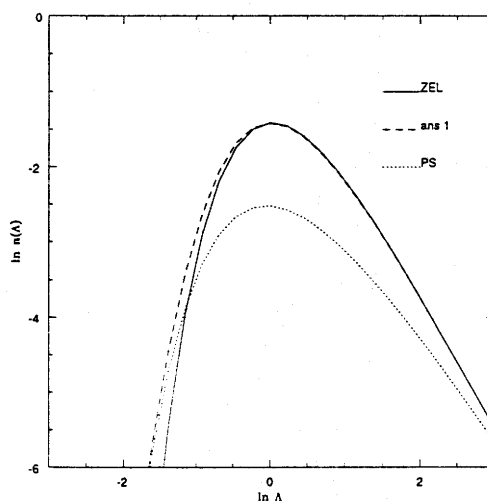


Figura 4.1: Curve $n(\Lambda)$ alla PS per ZEL e per l'ansatz 1, insieme alla PS.

$$\mathcal{I}(\Lambda) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy P_{x,y}(x,y) \exp\left(-\frac{1}{2\Lambda} f^2(x,y) + \frac{\delta_0}{\Lambda} f(x,y)\right) \times \left(1 - \frac{1}{\delta_0} \left(f - x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right). \quad (4.6)$$

Le curve $n(\Lambda)$ sono state calcolate per le approssimazioni ZEL, ELL, e per i due ansatze presentati nella §3.1; i dettagli del calcolo sono riportati da Monaco (1995). La Fig. 4.1 presenta tali curve per ZEL e per il primo ansatz, riportato in Eq. (3.8), grazie al quale ci si riconduce al collasso sferico ogni volta che ZEL predice un collasso più lento. Viene mostrata in figura anche la curva $n_{PS}(\Lambda)$ per confronto; in questo caso, tale curva non è stata moltiplicata per il fattore sciocchezza 2, perché si vuole confrontare il risultato del procedimento alla PS nei vari casi, senza ulteriori manipolazioni (e quindi senza garanzia di ottenere MF normalizzate; in Monaco (1995) tutte le curve erano moltiplicate per 2). Si può notare come la curva ZEL sottostimi il numero di oggetti a grande massa¹ e dia più oggetti di massa intermedia e piccola, grazie anche alla sua migliore normalizzazione. La curva relativa all'ansatz riproduce quella PS a grandi masse e si riduce a quella ZEL a piccole masse, come previsto.

¹Uso liberamente la parola massa in questo contesto per indicare la parte a grandi masse (piccoli Λ) e piccole masse (grandi Λ) della MF

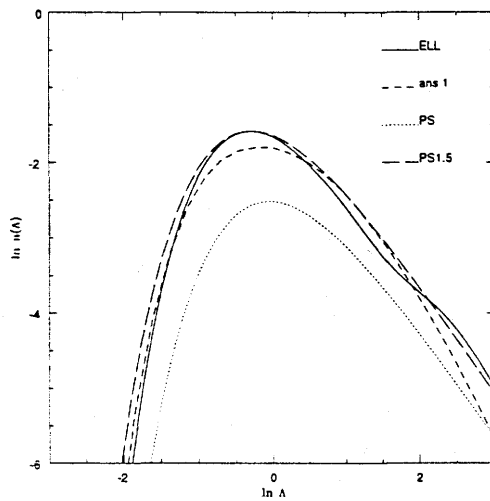


Figura 4.2: Curve $n(\Lambda)$ alla PS per ELL e per l'ansatz 2, insieme alla PS ed ad una curva PS con $\delta_c=1.5$ (con il fattore 2; vedi il testo).

La Fig. 4.2 mostra la MF di ELL, confrontata con il secondo ansatz, Eq. (3.9) (con $\epsilon = 0.2$). la curva di PS (senza il fattore 2), ed una curva di PS con $\delta_c=1.5$, intesa come rappresentativa dei risultati delle simulazioni ad N corpi (e quindi con il fattore 2; vedi anche la §2.2). Sia la curva relativa all'ansatz che quella ELL predice una sovrabbondanza di oggetti di grande massa rispetto alla PS canonica. Si dimostra ancora che un discostamento sistematico del tempo di collasso dal valore sferico influenza significativamente la MF a grandi masse, anche se il collasso sferico è asintoticamente recuperato. In particolare, la curva ELL è simile a quella di PS con $\delta_c=1.5$. Bisogna però sottolineare che la somiglianza, benché incoraggiante, va presa con cura, dato che non è chiaro in che modo gli oggetti predetti da questa teoria siano in relazione con quelli trovati nelle simulazioni. Come commento tecnico, la curva ELL qui presentata è stata calcolata considerando tutta la curva $b_c(x, y)$ trovata nella §3.2; in Monaco (1995), era stata presa in considerazione solo la parte sovradensa. ed il comportamento a grandi shear era stato assunto essere quello di ZEL.

Si possono trarre le seguenti conclusioni, che verranno poi confermate nel seguito:

1. predizioni realistiche del tempo di collasso causano un'aumento della produzione di strutture grandi; la MF risultante è simile a quella di PS con $\delta_c = 1.5$;

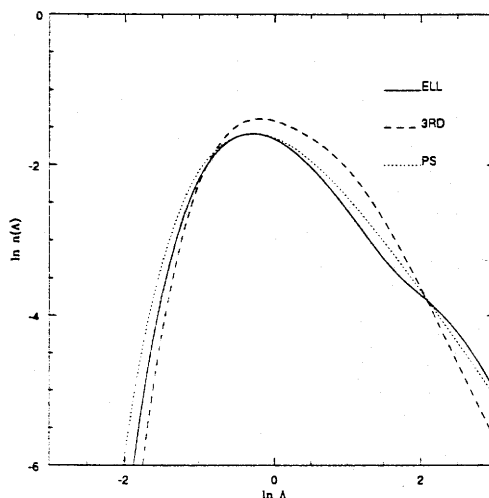


Figura 4.3: Curve $n(\Lambda)$ alla PS per ELL e 3RD, insieme ad una curva PS con $\delta_c=1.5$ (con il fattore 2; vedi il testo).

2. il fatto che il collasso sferico sia asintoticamente recuperato per le sovradensità più forti non garantisce che la MF “canonica” di PS sia recuperata a grandi masse.

La procedura appena descritta si applica difficilmente agli ordini superiori della teoria delle perturbazioni Lagrangiane, questo a causa della difficoltà di determinare la PDF delle condizioni iniziali rilevanti, cioè degli elementi di matrice dei potenziali perturbativi. D'altra parte, la determinazione della PDF ad un punto dei tempi di collasso (inversi) implica un'integrazione su tutte le condizioni iniziali rilevanti, per cui, una volta che tale PDF è nota (grazie ai calcoli Monte Carlo presentati nella §3.3), è facile determinare la MF alla PS:

$$\Omega(> \Lambda) = \int_{F_c}^{\infty} dF P_F(F; \Lambda), \quad (4.7)$$

dove F_c è l'inverso del tempo a cui si vuole la MF (nuovamente posto ad uno per semplicità). La Fig. 4.3 mostra le curve ELL e 3RD calcolate alla PS, ancora confrontate con una curva PS con $\delta_c=1.5$ ed il fattore 2. Come ci si aspettava, le curve 3RD ed ELL sono molto simili a masse grandi ed intermedie, ma hanno una pendenza diversa a piccole masse, dove le predizioni dinamiche non sono robuste. È anche chiaro come ELL predica un po' più oggetti di grande massa di 3RD, a causa del fatto che 3RD sovrastima leggermente i tempi di collasso quasi sferici, come visto nella §3.3. Infine, sia

ELL che 3RD risultano abbastanza simili, a masse grandi ed intermedie, alla curva PS con $\delta_c=1.5$.

4.2 Il formalismo della diffusione: filtri SKS

Nell'approccio degli insiemi di escursione, data l'interpretazione puntuale dei tempi di collasso, si può calcolare la frazione di massa collassata, risolvendo il problema CIC, utilizzando il formalismo della barriera assorbente, proposto da Bond et al. (1991) (ed implicitamente da Epstein 1983 e Peacock & Heavens 1990). Come già detto nella §2.3.2, questi autori hanno dimostrato che, se si usa un filtraggio che tagli in maniera netta il campo nello spazio di Fourier (filtraggio *sharp k-space*, SKS), le traiettorie $\delta_i(\Lambda)$ sono cammini casuali, e il calcolo della MF si riduce ad un problema di diffusione con una barriera assorbente posta a $\delta_i=\delta_c$. Non è banale capire se questo procedimento si possa estendere al caso del complicato processo non Gaussiano $F(\Lambda)$, cioè se il processo $F(\Lambda)$ sia un processo di diffusione, nel qual caso la PDF di F potrebbe essere trovata come soluzione di un'equazione di Fokker-Planck. Che questo sia in pratica possibile verrà dimostrato nella seguente sottosezione.

4.2.1 Un'equazione di Fokker-Planck per F

È necessario introdurre, per lo meno ad un livello qualitativo, alcuni concetti di calcolo stocastico, alcuni dei quali già accenati nella §2.3.2. Tutte le definizioni ed i teoremi presentati in questa sezione possono essere trovati in molti libri di testo; io ho fatto riferimento ad Arnold (1973), un libro introduttorio sul calcolo stocastico, e Risken (1989), un libro interamente dedicato all'equazione di Fokker-Planck. Si dice che un processo generico $\xi(\Lambda)$ possieda la *proprietà di Markov* se la sua storia ad ogni risoluzione $\Lambda' > \Lambda$ è determinata solamente dal valore del processo a Λ . In termini più precisi, se i suoi incrementi a risoluzioni differenti non correlano:

$$\langle d\xi(\Lambda)d\xi(\Lambda') \rangle \propto \delta_D(\Lambda - \Lambda'). \quad (4.8)$$

È da notare che questa definizione, insieme a tutte le altre date nel seguito, si applica anche al caso in cui $\xi(\Lambda)$ sia un processo vettoriale; in questo caso, la costante di proporzionalità può includere le correlazioni tra le varie componenti del processo a Λ fissata. Un processo si chiama *processo di Wiener* se è Gaussiano e se la costante di proporzionalità nell'Eq. (4.8) è 1, come nell'Eq. (2.7). Le traiettorie di un processo di Wiener sono cammini casuali; questa definizione segue l'uso di Bond et al. (1991), anche se in Risken (1989) questo nome è riservato ad un processo di Wiener con viscosità. La PDF di

un processo di Markov, $P_\xi(\xi, \Lambda)$, obbedisce ad un'equazione di Fokker-Planck (FP), a patto che siano soddisfatte alcune condizioni di regolarità (vedi Arnold 1973). In questo caso il processo è chiamato *di diffusione*; è da notare che alcuni autori riservano tale nome ai soli processi di Wiener. Un'equazione di FP ha la seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} P_\xi(\xi, \Lambda) = \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} D^{(1)}(\xi, \Lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} D^{(2)}(\xi, \Lambda) \right] P_\xi(\xi, \Lambda). \quad (4.9)$$

Le funzioni D sono chiamate coefficienti di deriva e diffusione: nel caso del processo di Wiener, $D^{(1)} = 0$ and $D^{(2)} = 1$.

Il processo $F_q(\Lambda)$ (il pedice q indica il punto di cui si calcola il tempo di collasso) è un funzionale non lineare e non locale del potenziale Gaussiano iniziale $\varphi(q; \Lambda)$:

$$F(q, \Lambda) = \mathcal{F}_q[\varphi(q', \Lambda)]. \quad (4.10)$$

È importante notare che il funzionale \mathcal{F} è deterministico e non agisce direttamente sulla variabile Λ , ma solo sul campo φ a *risoluzione fissata*. Il potenziale φ può essere considerato come un processo di Wiener ad infinite dimensioni, una per ogni valore del potenziale in un punto. È utile considerare spazi discreti composti da N punti $\{q_i\}$, come per esempio nelle simulazioni ad N corpi; tutte le considerazioni che seguono saranno valide nel limite continuo. In questo caso, il processo φ è un processo di Wiener vettoriale di dimensione finita, benché molto grande, ed il funzionale diventa una funzione ordinaria dell'intero vettore:

$$\begin{aligned} F(q, \Lambda) &\rightarrow F(q_i, \Lambda) = F_i(\Lambda) \\ \varphi(q, \Lambda) &\rightarrow \varphi(q_i, \Lambda) = \varphi_i(\Lambda) \\ \mathcal{F}_q[\varphi(q', \Lambda)] &\rightarrow \mathcal{F}_{q_i}(\{\varphi(q_j, \Lambda)\}) = \mathcal{F}_i(\{\varphi_j(\Lambda)\}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Di conseguenza, la determinazione della MF può essere riformulata in termini di un processo di diffusione multidimensionale: infatti, all'aumentare di Λ , il punto $\{\varphi_i\}$, rappresentante la configurazione di potenziale, percorre un cammino casuale a molte dimensioni. È quindi sufficiente assorbire tale processo con una barriera definita dall'equazione:

$$\mathcal{F}_i(\{\varphi_j(\Lambda)\}) = F_c. \quad (4.12)$$

Questa formulazione non sembra essere facilmente manipolabile, ma mette in evidenza la natura Markoviana del problema. Nel caso dell'approssimazione

di Zel'dovich, la situazione è più semplice: le condizioni iniziali sono date dai sei elementi di matrice indipendenti del tensore di deformazione al primo ordine, $S_{a,b}^{(1)} = \varphi_{,ab}$; tali elementi di matrice sono naturalmente sei processi di Wiener, con mutue correlazioni. Il processo di diffusione è quindi un cammino casuale in sei dimensioni, assorbito da una barriera definita da (notare che in questo caso $F = \lambda_1$):

$$\lambda_1(S_{1,1}^{(1)}(\Lambda), \dots, S_{3,3}^{(1)}(\Lambda)) = F_c. \quad (4.13)$$

D'altra parte, il cammino casuale multidimensionale, che sia in sei o in un numero grandissimo di dimensioni, può essere trasformato in una traiettoria $F(\Lambda)$; è facile capire che, se il funzionale \mathcal{F} è abbastanza regolare, ci sarà una corrispondenza biunivoca tra ogni attraversamento del processo φ oltre la complicata barriera nello spazio multidimensionale, ed ogni attraversamento del complicato processo unidimensionale F attraverso la semplice barriera F_c . Se il processo F possedesse la proprietà di Markov, ovvero se fosse un processo di diffusione, il problema potrebbe equivalentemente essere formulato in termini del processo unidimensionale F , con gran guadagno in termini di semplicità matematica.

L'equazione di evoluzione per il processo F si può ottenere da una semplice differenziazione a catena:

$$\begin{aligned} dF_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \varphi_j}(\{\varphi\}) d\varphi_j \\ d\varphi_i &= f_{ij}(\Lambda) dW_j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

dW_j sono N processi di Wiener indipendenti, ed i coefficienti f_{ij} nell'equazione per i φ_i sono tali da riprodurre le giuste varianze e correlazioni. Questo è un sistema di Langevin non lineare, il che, insieme ad alcune condizioni di regolarità (devono essere definibili i coefficienti di deriva e di diffusione come opportune medie della probabilità di transizione; vedi Arnold 1973), è sufficiente per dimostrare che l'intero sistema $\{F_i, \varphi_j\}$ è un processo di diffusione, e quindi ammette un'equazione di FP. Questo permette di riformulare il problema in termini della diffusione di un processo multidimensionale più complesso, assorbito dalla semplice barriera $F = F_c$.

Il fatto che ogni processo F_i sia una componente di un processo di diffusione non garantisce che esso stesso sia un processo di diffusione. Contemporaneamente, non è possibile trovare un'equazione di FP per F_i solamente integrando l'equazione per l'intero sistema in tutte le altre variabili, in quanto i coefficienti di deriva e di diffusione non sono costanti, e quindi non possono essere portati fuori dall'integrale. Di conseguenza, non ci si aspetta a

priori che la soluzione del problema unidimensionale del processo F , trattato come un processo di diffusione, dia la giusta statistica dei suoi primi attraversamenti. Cionondimeno, tale soluzione del problema unidimensionale può essere considerata come un utile tentativo di soluzione, da confrontare poi, a posteriori, con la soluzione “vera”, trovata per mezzo di calcoli numerici che saranno descritti in seguito. Mostrerò, nella §4.2.2, che tale tentativo di soluzione riproduce perfettamente i risultati dei calcoli numerici; il formalismo di diffusione può quindi essere esteso al caso di generici processi F .

Per risolvere il problema unidimensionale, è necessario costruire un'equazione di FP la cui soluzione sia $P_F(F; \Lambda)$. Per mezzo dell'Eq. (3.32) data nello scorso capitolo, è possibile trasformare il processo F in un processo x la cui PDF è una Gaussiana di media nulla e varianza Λ ; l'equazione di FP per x è quindi quella per un processo di Wiener:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} P_x(x, \Lambda) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_x(x, \Lambda). \quad (4.15)$$

È possibile da questa equazione e dalla trasformazione $x(F)$ ottenere l'equazione di FP per F ; questo è fatto in Monaco (1996b). Tuttavia, è molto più conveniente lavorare in termini del processo di Wiener x . In questo caso, è possibile vedere dalle Eq. (3.32) e (3.33) che la barriera fissa ad F_c si trasforma in una barriera $x_c(\Lambda)$ mobile per il processo x .

In conclusione, se si usa il filtraggio SKS, la frazione di massa collassata può essere calcolata assumendo che il tempo di collasso inverso F sia un processo di diffusione, e il problema può essere riformulato in termini della diffusione di un processo di Wiener con una barriera assorbente mobile.

4.2.2 Il problema della barriera mobile

La soluzione del problema della diffusione con una barriera assorbente fissa fu trovato da Chandrasekar (1943): l'Eq. (4.15) va risolta con il vincolo $P_x(x_c; \Lambda) = 0$ ad ogni Λ , e con la condizione iniziale $P_x(x, 0) = \delta_D(x)$. Se si mette un'immagine negativa in una posizione simmetrica rispetto alla barriera, ovvero se si pone come condizione iniziale $P_x(x, 0) = \delta_D(x) - \delta_D(2x_c - x)$, la soluzione $P_x^{\text{fb}}(x; \Lambda)$ dell'equazione di FP è semplicemente (il suffisso “fb” denota la soluzione per la barriera fissa):

$$P_x^{\text{fb}}(x; \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2\Lambda}\right) - \exp\left(-\frac{(x-x_c)^2}{2\Lambda}\right) \right]. \quad (4.16)$$

Questa soluzione soddisfa palesemente il vincolo ad ogni Λ ; inoltre ha senso solo per $x < x_c$ e diventa negativa oltre la barriera. Infine, va notato che

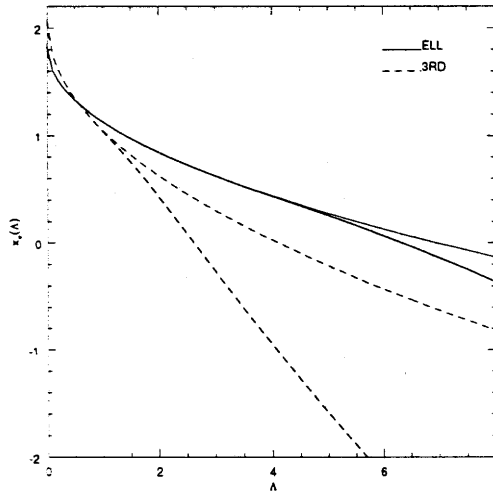


Figura 4.4: Barriere mobili, lineari e complete.

non esistono soluzioni sensate se $x_c < 0$, dato che in questo caso tutte le traiettorie sono assorbite fin dall'inizio.

Tale procedura non si applica al caso della barriera mobile. Per capire perché, è utile considerare il problema nella variabile F : la barriera è quindi fissa, ma il processo ha un coefficiente di deriva non nullo, e possibilmente non costante, per cui il valore medio del processo cambia con Λ . In questo caso, ogni immagine negativa, posta specularmente rispetto alla barriera, per soddisfare il vincolo ad ogni risoluzione, dovrebbe muoversi in maniera speculare rispetto alla soluzione positiva, cioè con una deriva di segno opposto. Quindi, l'immagine non obbedirebbe alla stessa equazione di FP, ma ad un'altra con deriva di segno opposto.

Per questa equazione non sono state trovate soluzioni analitiche; alcuni tentativi sono riportati nell'appendice B di Monaco (1996b). È comunque possibile integrare numericamente l'equazione di FP con un metodo standard, come ad esempio quello di Crank-Nicholson descritto in Press et al. (1992). Tale metodo consiste in un'integrazione agli intervalli finiti; gli intervalli sono stati scelti come segue: $\Delta x = 7.5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta \Lambda = 5 \cdot 10^{-5}$, in maniera da far assumere al parametro critico $\alpha = \Delta \Lambda / 2(\Delta x)^2$, che determina la stabilità numerica del risultato, il valore 0.444, abbastanza piccolo da garantire la bontà del risultato. Le condizioni iniziali sono state imposte assumendo che a piccoli Λ , quando le traiettorie non hanno ancora avuto il tempo di oltrepassare la barriera, la distribuzione è una Gaussiana ancora imperturbata. Denoteremo con $P_x^{\text{noup}}(x; \Lambda)$ la soluzione numerica del problema della barriera mobile.

L'espressione per la barriera assorbente $x_c(\Lambda)$ si trova ponendo $F = F_c$

nella trasformazione (3.32), generalizzata ad ogni Λ tramite le relazioni di riscaldamento (3.33). Per le predizioni ELL e 3RD si ha:

$$\begin{aligned} x_c(\Lambda) &= 1.82F_c - 0.69\sqrt{\Lambda} - & (4.17) \\ & 0.4\sqrt{\Lambda}(\operatorname{erf}(-7.5F_c/\sqrt{\Lambda} + 1.75) + 1) \quad (\text{ELL}) \\ x_c(\Lambda) &= 2.07F_c - 1.82\sqrt{\Lambda} - \\ & 0.75\sqrt{\Lambda}(\operatorname{erf}(-3F_c/\sqrt{\Lambda} + 1.18) + 1) \quad (\text{3RD}). \end{aligned}$$

Era stato visto nella §3.4 che la trasformazione $x(F)$ è accuratamente lineare per valori moderati e grandi di F . In questo caso, si ottengono i termini contenuti nelle prime linee dell'Eq. (4.17). Tali barriere verranno chiamate nel seguito *barriere lineari*; è da notare che esse non sono comunque lineari in Λ ! La Fig. 4.4 mostra le barriere $x_c(\Lambda)$: per la predizione ELL, la barriera lineare e quella completa rimangono indistinguibili fino a risoluzioni abbastanza grandi, mentre nel caso 3RD esse diventano significativamente diverse dopo $\Lambda=1.5$. Quindi, le barriere lineari forniscono una buona approssimazione della MF a masse grandi ed intermedie.

Nel caso della barriera lineare si trova che la soluzione numerica è in semplice relazione con la soluzione a barriera fissa, trovata inserendo la barriera mobile $x_c(\Lambda)$ nell'Eq. (4.16):

$$P_x^{\text{nop}}(x; \Lambda) / P_x^{\text{fb}}(x; \Lambda) = \mathcal{J}(x, \Lambda) = 1 + \exp(f(\Lambda)x + g(\Lambda)). \quad (4.18)$$

Le Fig. 4.5a e 4.6a mostrano, per ELL e 3RD, la soluzione numerica e quella a barriera fissa per $\Lambda=1$. Le Fig. 4.5b e 4.6b mostrano la quantità $\ln(P_x^{\text{nop}}(x; \Lambda) / P_x^{\text{fb}}(x; \Lambda) - 1)$, che è, con ottima approssimazione, lineare entro gli errori dovuti alla precisione numerica. Per trovare le funzioni $f(\Lambda)$ e $g(\Lambda)$, bisogna notare che la soluzione corretta, $\mathcal{J}P_x^{\text{fb}}$, deve essere abbastanza precisa da riprodurre correttamente non solo la curva numerica, ma anche la sua derivata seconda in x e la sua derivata prima in Λ , così da soddisfare l'equazione di FP. Ponendo tale vincolo, sono state trovate le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(\Lambda) &= -0.5 + 2.41\Lambda^{-1.08} \\ g(\Lambda) &= 2.23 - 4.90\Lambda^{-1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

per la trasformazione ELL lineare, e

$$\begin{aligned} f(\Lambda) &= -0.3 + 2.05\Lambda^{-1.13} \\ g(\Lambda) &= 1.15 - 4.25\Lambda^{-1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

per la trasformazione 3RD lineare. Le Fig. 4.5c e 4.6c mostrano le funzioni numeriche \mathcal{J} e quelle analitiche proposte, che appaiono del tutto soddisfacenti.

La MF integrale è:

$$\Omega(> \Lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{x_c(\Lambda)} P_x^{\text{nop}}(x; \Lambda) dx. \quad (4.21)$$

È facile mostrare che la curva $n(\Lambda)$ può ancora una volta essere scritta come:

$$n(\Lambda) = n_{PS}(\Lambda) \times \mathcal{I}(\Lambda), \quad (4.22)$$

dove la funzione di correzione \mathcal{I} è:

$$\mathcal{I}(\Lambda) = \frac{x_c(\Lambda)}{\delta_c} \exp\left(-\frac{2(x_c(\Lambda) - \delta_c) + (x_c(\Lambda)/\delta_c - 1)^2}{2\Lambda}\right) \mathcal{J}(\Lambda). \quad (4.23)$$

Le Fig. 4.5d e 4.6d mostrano le curve numeriche e le approssimazioni analitiche, che appaiono del tutto soddisfacenti a masse grandi ed intermedie. Le approssimazioni analitiche si annullano improvvisamente a risoluzioni moderatamente grandi, e ciò è causato dal fatto che la barriera assume valori negativi, e quindi la soluzione a barriera fissa non è più utilizzabile. È comunque da notare che questo fatto non ha alcun significato particolare.

Le curve numeriche $n(\Lambda)$ ottenute utilizzando le barriere complete sono mostrate in Fig. 4.7 (ELL) e 4.8 (3RD), in confronto con le soluzioni (numeriche) relative alle barriere lineari, e con le curve trovate con il metodo alla PS nella §4.1. Nel caso ELL, le curve relative alla barriera lineare e completa cominciano a diventare diverse solamente a piccole masse, mentre nel caso 3RD le curve iniziano a discostarsi a masse intermedie. In entrambi i casi le curve SKS danno, a grandi masse, più oggetti delle curve alla PS per un fattore 2, proprio come nel caso della PS canonica analizzato da Bond et al. (1991), anche se il "fattore sciocchezza" nel caso presente è molto vicino ad uno. Quindi, la giustificazione del fattore sciocchezza 2 data dal formalismo di diffusione appare come una fortunata coincidenza.

La Fig. 4.9 mostra infine le curve (numeriche complete) ELL e 3RD nel caso SKS, confrontate con la soluzione canonica del problema di diffusione, cioè con la PS completa di fattore 2. Si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. sia ELL che 3RD predicono più oggetti di massa grande della PS;

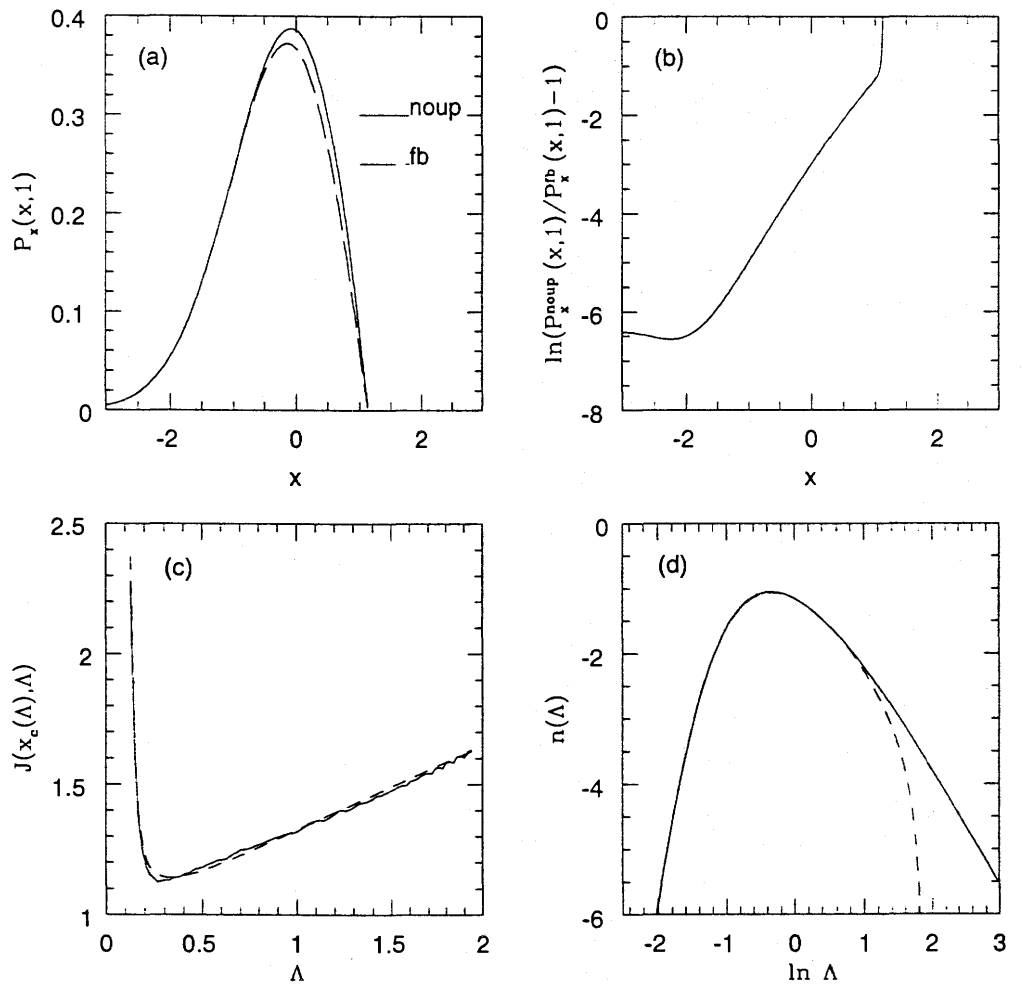


Figura 4.5: Problema della barriera mobile: predizione ELL, barriera lineare.

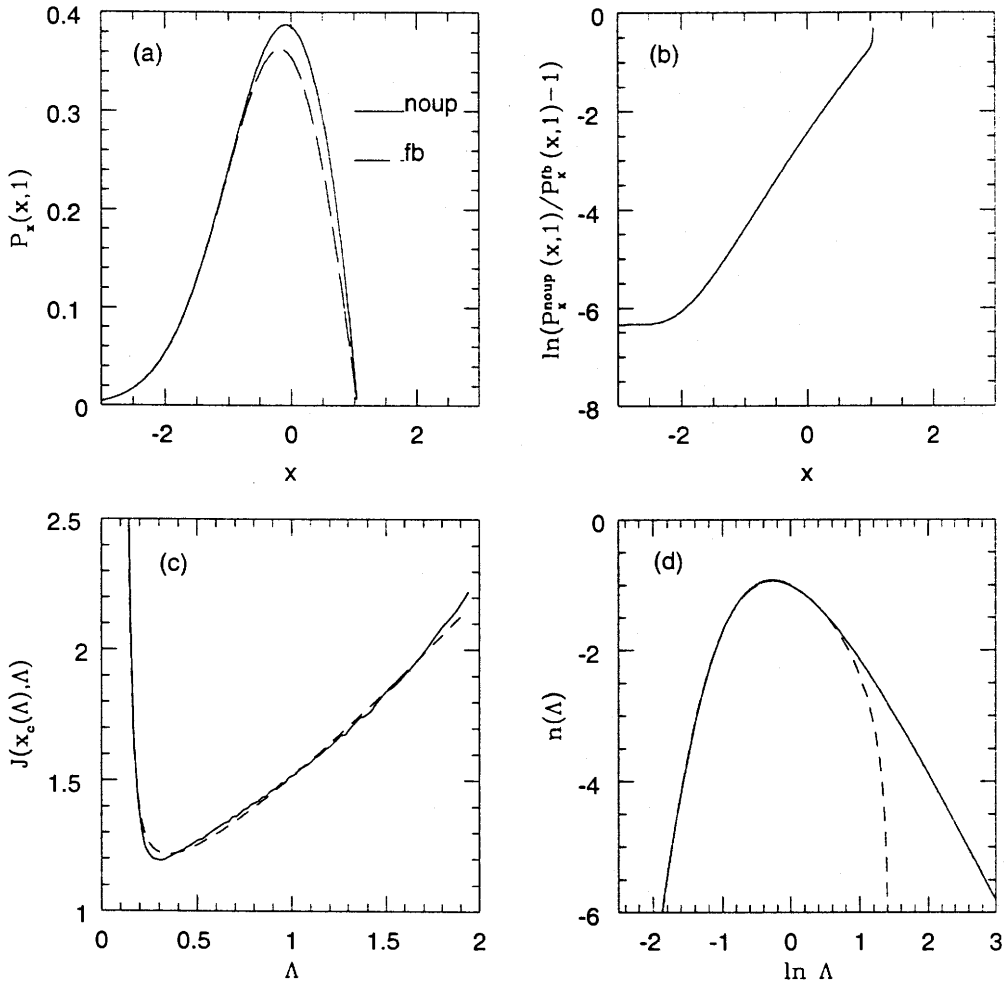
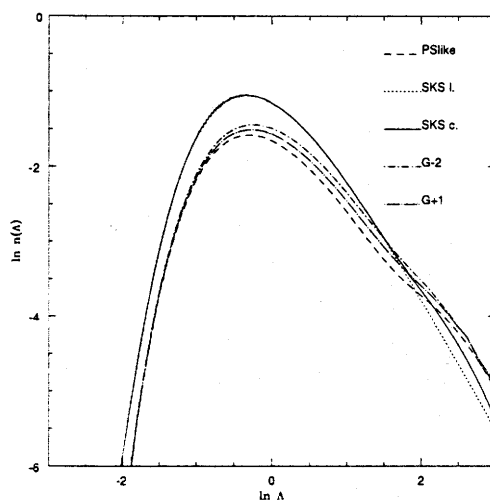
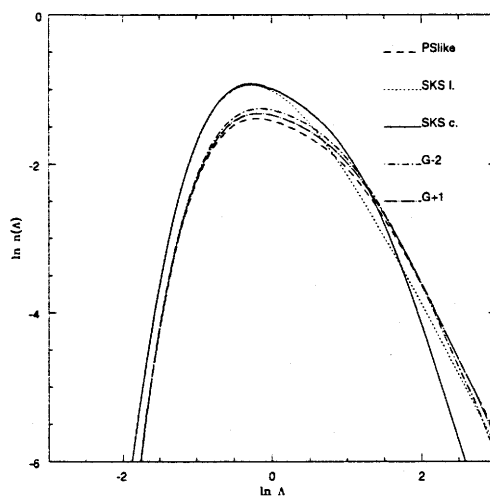


Figura 4.6: Problema della barriera mobile: predizione 3RD, barriera lineare.

Figura 4.7: Curve $n(\Delta)$ per la predizione ELL.Figura 4.8: Curve $n(\Delta)$ per la predizione 3RD.

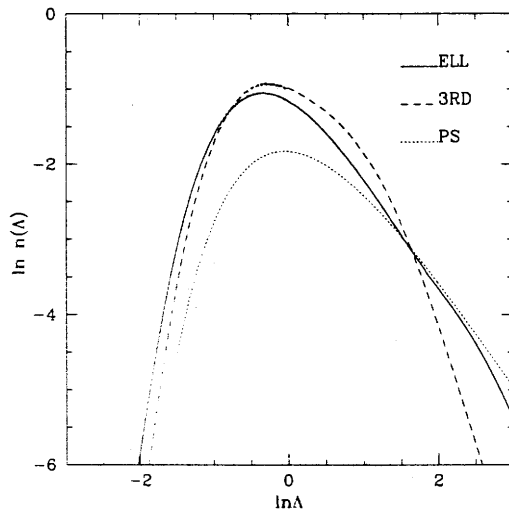


Figura 4.9: Curve $n(\Lambda)$ con filtri SKS.

-
- 2. sia ELL che 3RD predicono più oggetti di massa intermedia della PS per circa un fattore 3;
- 3. sia ELL che, soprattutto, 3RD predicono una maggiore pendenza della curva $n(\Lambda)$ a piccole masse (che si traduce poi in una maggiore *piattezza* della vera e propria MF a piccole masse); la pendenza esatta dipende molto dai particolari incerti della PDF di F a piccoli valori di F .

La prima conclusione è in accordo con quanto trovato nella §4.1; la seconda è un po' preoccupante, visto che la curva di PS riproduce discretamente la MF delle simulazioni in quell'intervallo di masse; questo problema sarà risolto nella prossima sezione. Infine, la terza conclusione mostra come la parte a piccole masse sia sensibile agli incerti particolari della dinamica degli elementi di massa che collassano lentamente. Ad ogni modo, la tendenza di avere meno oggetti di piccola massa, con un corrispondente aumento del numero di oggetti a grande massa, va nella stessa direzione di quanto trovato da Porciani et al. (1996), cioè di un tagli a piccole masse causato dalla non Gaussianità della distribuzione. Malgrado il loro effetto sia molto più evidente, si conferma che la non Gaussianità della distribuzione di F può in qualche modo introdurre una nuova scala caratteristica a piccole masse, che interviene quando molta massa è già collassata, e causa una diminuzione della formazione di oggetti di piccola massa.

Rimane da verificare se tali soluzioni del problema unidimensionale siano o meno soluzioni del problema multidimensionale descritto nella §4.2.1. Per

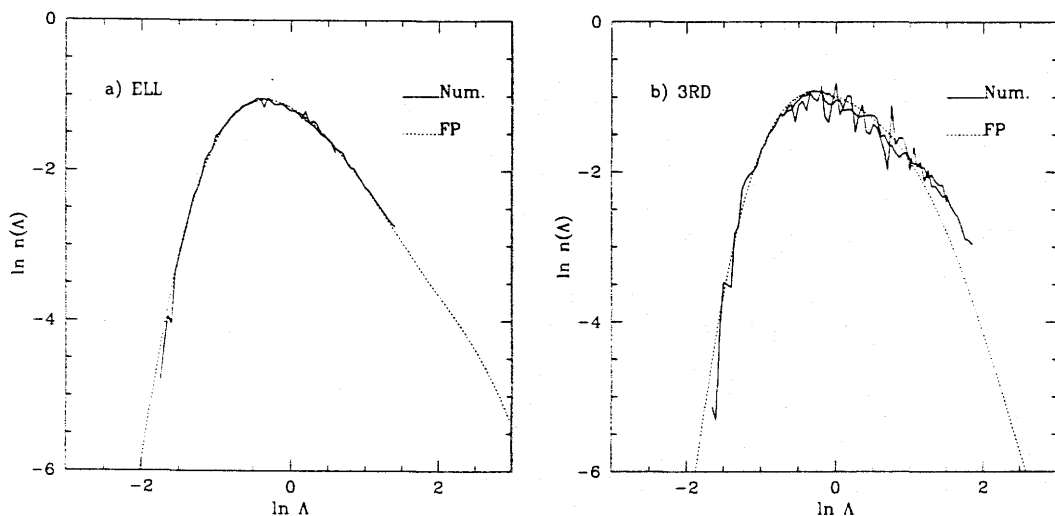


Figura 4.10: Curve $n(\Lambda)$ FP e numeriche, con filtri SKS.

far questo, ho utilizzato le simulazioni Monte Carlo di configurazioni iniziali, già descritte nella §3.3.2. Ogni realizzazione è stata filtrata da una gerarchia di filtri SKS, avendo cura di seguire esattamente la spaziatura dei moduli dei vettori d'onda della griglia cubica; per far ciò sono stati operati 116 filtraggi delle griglie 16^3 , e 464 delle griglie 32^3 . Per ogni filtraggio, è stato calcolato il tempo di collasso in ogni punto non collassato a risoluzioni più piccole, ed è stata direttamente calcolata la frequenza dei primi collassi in funzione della risoluzione. Data la limitata gamma dinamica dei modi delle griglie, sono state realizzate simulazioni con diverse varianze di massa totali, in modo da coprire un intervallo dinamico significativo. Per 3RD sono stati utilizzati tre insiemi di 30 realizzazioni 32^3 , con spettro di pendenza -2 e varianze di massa 0.8, 2 e 5. Per 3RD, caso più impegnativo in termini di tempo di calcolo, sono stati utilizzati tre insiemi di 60 simulazioni 16^3 , con spettro e varianze di massa come sopra. La Fig. 4.10 mostra il confronto di tali calcoli numerici con le curve ottenute con l'equazione di FP: l'accordo è perfetto nel caso ELL; nel caso 3RD la curva numerica è più rumorosa, ma l'accordo è ancora soddisfacente a masse grandi ed intermedie, mentre l'apparente disaccordo a masse piccole è presumibilmente causato da un'imperfezione dell'approssimazione analitica della $P_F(F; \Lambda)$ trovata nella §3.4. (È Da notare che le differenze tra le varie curve negli intervalli di sovrapposizione danno un'idea dell'errore numerico dovuto alla statistica e agli effetti di limitatezza delle realizzazioni).

In conclusione, la soluzione del problema unidimensionale riproduce per-

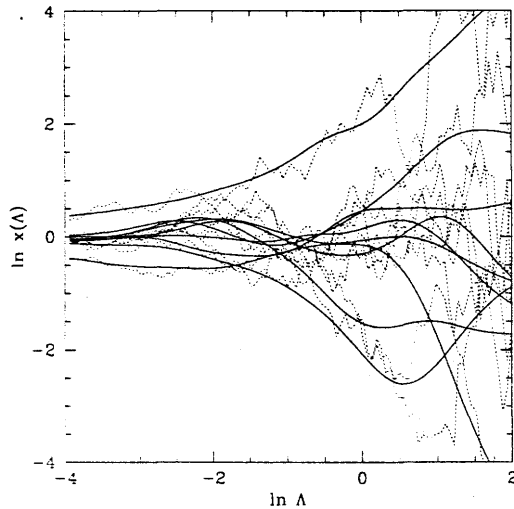


Figura 4.11: Traiettorie SKS e Gaussiani.

fettamente la frequenza degli assorbimenti del processo F nel caso di filtraggio SKS. Questo permette da una parte di risolvere il problema della funzione di massa semplicemente estendendo il formalismo della diffusione al caso del processo F , dall'altra parte ci dà preziose informazioni sul possibile carattere Markoviano del processo F stesso, anche se la dimostrazione esplicita di tale carattere Markoviano rimane aperta.

4.3 Filtri Gaussiani

L'uso del filtro SKS è motivato solamente dal fatto che esso giustifica l'elegante formalismo della diffusione, che permette di trovare soluzioni (semi)analitiche anche nel caso di processi F non Gaussiani. Dal punto di vista dinamico, l'uso del filtro Gaussiano è meglio motivato di quello SKS, visto che ottimizza le predizioni dinamiche, come commentato nella §3.5. Non è però possibile trovare soluzioni analitiche del problema della barriera assorbente, nel caso in cui si usino filtri Gaussiani, neanche se F è proporzionale a δ_l . Infatti, se si usa il filtraggio Gaussiano, il campo nello spazio k non viene tagliato in maniera netta ad una certa lunghezza d'onda, per cui i processi $\varphi_i(\Lambda)$ contengono informazioni su quello che sta per accadere a risoluzioni più grandi. Di conseguenza, i processi $\varphi_i(\Lambda)$ non sono più Markoviani, e di riflesso anche il processo F non può più possedere la proprietà di Markov. Ciò implica che né la PDF di φ né la PDF di F obbediscono ad un'equazione di FP.

Questo fatto può essere compreso ancora meglio guardando alcune traiettorie SKS e Gaussiane del processo di Wiener x , mostrate in Fig. 4.11. Le traiettorie SKS sono molto "rumorose", mentre le traiettorie Gaussiane sono molto più stabili. La stabilità di tali traiettorie può essere mostrata come segue; la funzione di correlazione normalizzata del processo F con filtro Gaussiano è approssimativamente costante per piccoli incrementi:

$$\frac{\langle x(\Lambda)x(\Lambda + \Delta\Lambda) \rangle}{\sqrt{\langle x(\Lambda)^2 \rangle \langle x(\Lambda + \Delta\Lambda)^2 \rangle}} \simeq \Lambda \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda_c} \right)^2 \right), \quad (4.24)$$

dove Λ_c è una lunghezza di coerenza uguale a:

$$\Lambda_c = 2\Lambda\gamma(1 - \gamma^2)^{-1/2}. \quad (4.25)$$

γ è una misura spettrale standard (vedi Bardeen et al. 1986), uguale a $((n + 3)/(n + 5))^{1/2}$ per spettri senza scala, nel qual caso $\Lambda_c = \Lambda\sqrt{2(3 + n)}$. Questa scala di coerenza è molto grande, specialmente per indici spettrali grandi. Nel caso SKS, la scala di coerenza si annulla, e la funzione di correlazione normalizzata decresce linearmente con $\Delta\Lambda$: le traiettorie sono molto meno correlate.

È da notare che tale stabilità, pur essendo un problema dal punto di vista matematico, può essere considerata una caratteristica positiva dal punto di vista dinamico, poiché le traiettorie rumorose corrispondono a predizioni dinamiche instabili, che possono cambiare molto quando la risoluzione cambia di poco.

Si possono prevedere immediatamente alcune conseguenze della stabilità delle traiettorie Gaussiane:

1. Le traiettorie Gaussiane non possono facilmente riattraversare la barriera una volta che l'abbiano attraversata, dato che hanno bisogno di un intervallo in risoluzione dell'ordine di Λ_c per invertire la loro direzione; di conseguenza, la MF con filtraggio Gaussiano a grandi masse deve essere simile a quella calcolata alla PS, come nella §4.1, visto che poche traiettorie avranno avuto il tempo di riattraversare la barriera (è da notare che tale conclusione era già stata raggiunta da Schaeffer & Silk 1988a). Questo a differenza di ciò che accade nel caso del filtraggio SKS, dove ogni traiettoria ha una probabilità molto alta di riattraversare la barriera (un mezzo!) subito dopo il primo attraversamento, e ciò causa la predizione di un fattore due di oggetti in più.
2. È noto che la MF integrale calcolata alla PS dà un limite inferiore alla vera MF integrale (Bond et al. 1991), dato che l'approccio alla

PS conta tutte le traiettorie che stanno sopra la barriera ad una certa risoluzione, e che sono quindi sicuramente state assorbite, ma non conta tutte le traiettorie che hanno riattraversato la barriera. Dato che la MF Gaussiana si riduce a quella calcolata alla PS a grandi masse, e deve ridistribuire meno del 10% della massa per ottenere la corretta normalizzazione, le due MF non potranno essere molto diverse; questa conclusione è diversa da quella ottenuta da Peacock & Heavens (1990) e Bond et al. (1991) nel caso canonico della teoria lineare, in cui le curve alla PS e con filtri Gaussiani differiscono molto, visto che metà della massa deve essere redistribuita.

3. Dato che la lunghezza di correlazione Λ_c è maggiore per indici spettrali più grandi, la MF Gaussiana sarà più simile a quella alla PS per indici spettrali più grandi.

Per risolvere rigorosamente il problema della barriera assorbente con filtraggio Gaussiano, bisognerebbe prendere in considerazione tutte le correlazioni ad N punti del processo $F(\Lambda)$ al variare della risoluzione; questo rende il calcolo proibitivo anche nel caso della dinamica lineare. Tuttavia, sia Peacock & Heavens (1990) che Bond et al. (1991) hanno proposto delle approssimazioni utili e motivate; entrambi i gruppi di autori sono d'accordo nel riferire che l'approssimazione proposta dai primi è leggermente più efficace delle altre. Questa (che sarà chiamata approssimazione PH) si ottiene approssimando le traiettorie Gaussiane con un processo aleatorio a gradini, costante su un intervallo $\pi\Lambda_c \ln 2$, la cui probabilità di transizione può essere scritta come:

$$P(F, \Lambda; F', \Lambda') = \delta(F - F') \text{ if } \Lambda/\Lambda' < \Lambda_c \quad (4.26)$$

$$= P(F, \Lambda) \text{ if } \Lambda/\Lambda' \geq \Lambda_c, \quad (4.27)$$

La probabilità che una traiettoria non abbia mai attraversato la barriera si può quindi calcolare moltiplicando su un numero discreto di probabilità indipendenti:

$$\int_0^{F_c} P_F^{\text{noup}}(F; \Lambda) dF = \prod_i \int_0^{F_c} P_F(F, \Lambda_i) dF. \quad (4.28)$$

Prendendo il logaritmo del prodotto del lato destro dell'equazione, e cambiando la sommatoria così ottenuta in un integrale, tramite un limite al continuo, si ottiene la seguente MF integrale (vedi Peacock & Heavens 1990, Bond et al. 1991, Monaco 1996b per i dettagli):

$$\Omega(> \Lambda) = 1 - \int_0^{F_c} P_F(F, \Lambda) dF \quad (4.29)$$

$$\times \exp \left(\int_0^\Lambda \ln \left(\int_0^{F_c} P_F(F, \Lambda') \right) \frac{d\Lambda'}{\pi \Lambda_c(\Lambda') \ln 2} \right).$$

È da notare che si ottiene l'espressione alla PS se si pone uguale ad uno il termine esponenziale. L'approssimazione PH era stata proposta per risolvere il problema della barriera assorbente nel caso canonico $F \propto \delta_l$. Tuttavia, essendo l'approssimazione basata su una visione molto semplificata del processo F , essa può essere applicata così com'è al caso in cui F sia un processo non Gaussiano. Esprimendo gli integrali in F in termini della variabile x , si ottiene la seguente espressione per la curva $n(\Lambda)$:

$$n(\Lambda) = \left[\frac{\exp(-x_c^2/2\Lambda)}{\sqrt{2\pi\Lambda}} \left(\frac{x_c}{2\Lambda} - \frac{dx_c}{d\Lambda} \right) + P(x < x_c, \Lambda) \right. \\ \left. \frac{1}{\pi \Lambda_c \ln 2} \ln \left(\int_0^{x_c(\Lambda)} P_F(F, \Lambda') d\Lambda' \right) \right] \exp \left[\int_0^\Lambda \ln \left(\int_0^{x_c(\Lambda')} P_F(F, \Lambda'') d\Lambda'' \right) \frac{d\Lambda'}{\pi \Lambda_c \ln 2} \right] \quad (4.30)$$

Per controllare la bontà dell'approssimazione PH nel caso in cui F sia dato dalle approssimazioni ELL o 3RD, bisogna risolvere numericamente il problema della barriera assorbente con filtraggio Gaussiano, simulando un grande numero di traiettorie Gaussiane e contando la frequenza di assorbimenti in funzione della risoluzione. Tali simulazioni possono essere fatte in almeno due maniere. La prima è analoga a quella utilizzata da Bond et al. (1991; vedi anche Risken 1989): si simula un grande numero di traiettorie SKS del processo di Wiener x , smussandole quindi con un filtro Gaussiano, facendole infine assorbire da una barriera mobile posta ad $x_c(\Lambda)$. Tale procedura è valida a patto che le vere traiettorie Gaussiane, basate sul potenziale iniziale smussato con un filtro Gaussiano, siano equivalenti alle traiettorie SKS smussate da una Gaussiana. In altre parole, tale calcolo è valido a patto che filtraggio e dinamica commutino:

$$\mathcal{F}[\varphi * W(\Lambda)] \equiv W(\Lambda) * \mathcal{F}[\varphi]; \quad (4.31)$$

dove l'operatore $*$ denota la convoluzione, e W è la funzione finestra Gaussiana di ampiezza Λ . Questo è rigorosamente valido solo nel caso in cui il funzionale \mathcal{F} sia lineare, cioè nel caso della teoria lineare (collasso sferico).

Bond et al. (1991) avevano confrontato i risultati di tali calcoli con la predizione di PH, trovando globalmente un buon accordo, specialmente nei regimi asintotici, mentre a masse intermedie la formula di PH sovrastimava leggermente l'altezza del picco principale. Nel caso presente, sono state simulate 50000 traiettorie SKS (cammini casuali), in un intervallo di risoluzione tra $\exp(-4)$ to $\exp(4)$, diviso in 2000 passi. Tali traiettorie sono state smussate per 100 o 150 valori di Λ , a seconda dell'indice spettrale; non è conveniente

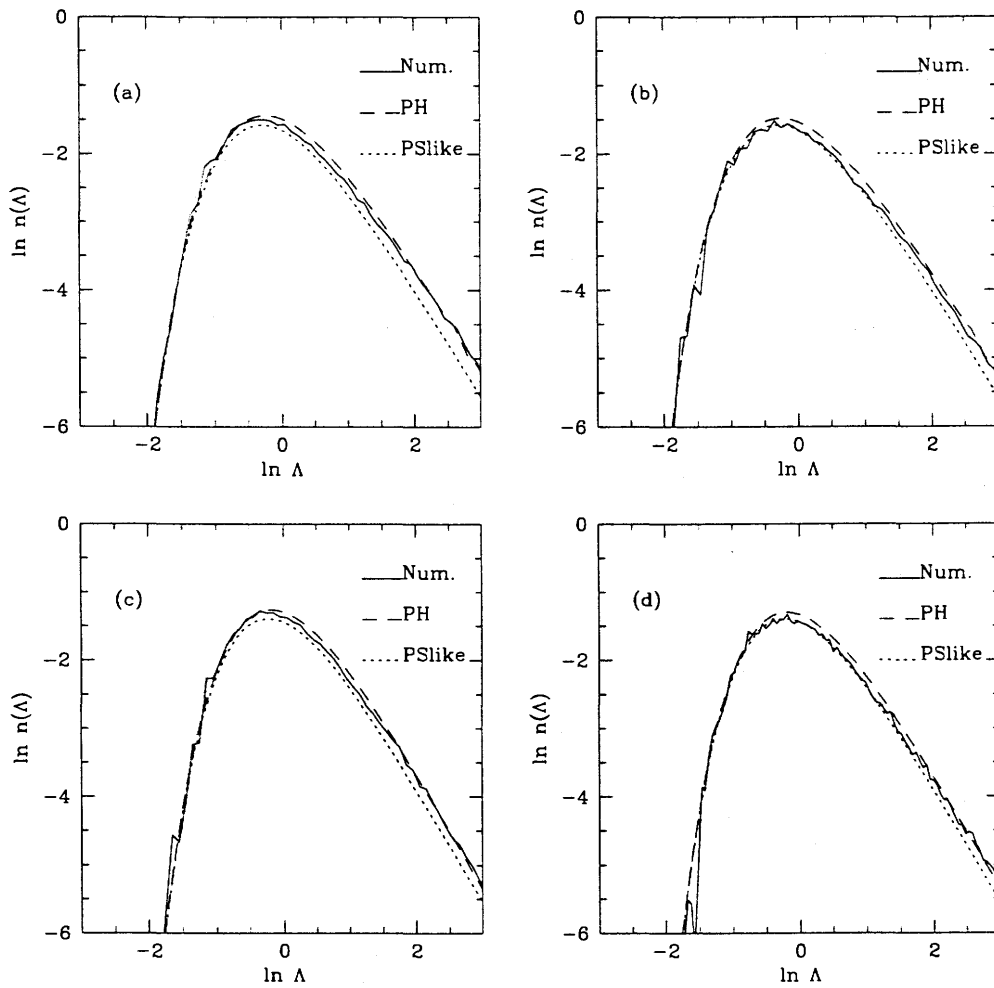


Figura 4.12: Confronto tra l'approssimazione di PH e la simulazione di traiettorie di Langevin. (a): ELL, $n = -2$; (b): ELL, $n = -1$; (c): 3RD, $n = -2$; (d): 3RD, $n = -1$.

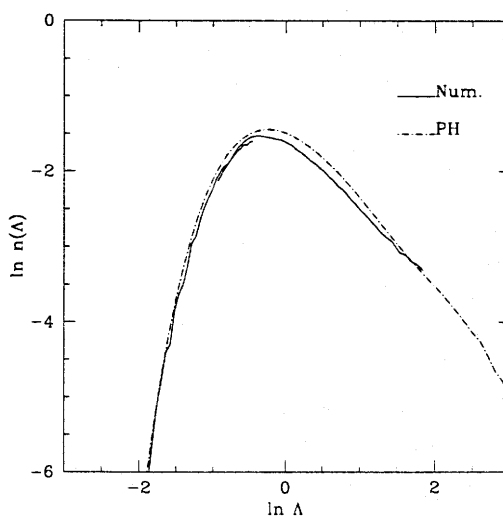


Figura 4.13: Confronto tra l'approssimazione di PH e i risultati ottenuti dalle simulazioni Monte Carlo; ELL, $n = -2$.

campionare la traiettoria in maniera più fine, visto che essa è molto stabile. I calcoli sono stati fatti per indici spettrali $n = -2$ e -1 . Le simulazioni diventano più difficili per indici spettrali più grandi, a causa della grande lunghezza di coerenza Λ_c ; in questi casi, le curve $n(\Lambda)$ calcolate con l'approssimazione PH ed alla PS (l'integrale della seconda essendo, come detto prima, un limite superiore per l'integrale della prima) sono così simili a masse grandi ed intermedie che non è molto interessante cercare di distinguere tra le due. La Fig. 4.12 mostra i risultati per ELL e 3RD: esattamente come trovato da Bond et al. (1991), l'approssimazione di PH riproduce correttamente le curve numeriche, sovraestimandole molto poco attorno a $\Lambda=1$; i regimi asintotici sono sempre ben riprodotti. Inoltre, le curve numeriche sono abbastanza accurate da far preferire la curva Gaussiana a quella calcolata alla PS, soprattutto a piccole masse.

La seconda maniera di generare traiettorie Gaussiane, analoga a quella utilizzata da Peacock & Heavens (1990), è quella già utilizzata prima, nella §4.2.2, per i filtri SKS: si smussano le realizzazioni Monte Carlo del potenziale iniziale con una gerarchia di filtri Gaussiani, calcolando quindi direttamente gli istanti di collasso. Tale tipo di calcolo presenta il vantaggio di non assumere la commutazione tra filtraggio e dinamica, ma è abbastanza lento e limitato nella gamma dinamica; può essere utilizzato per controllare che l'ipotesi di commutazione fatta prima non infici il risultato già trovato. Rispetto ai calcoli SKS, i calcoli col filtraggio Gaussiano presentano il vantaggio di non dovere campionare la traiettoria in maniera estremamente fine, data la

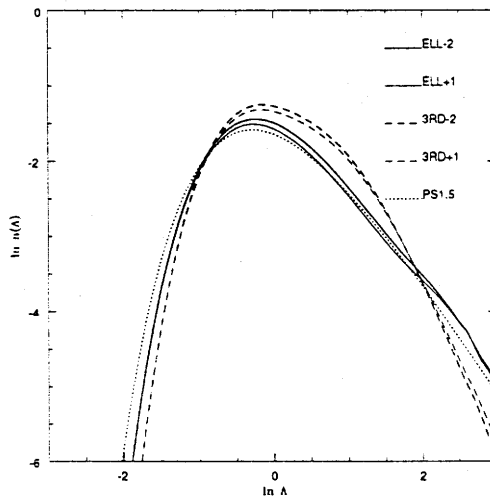


Figura 4.14: Curve $n(\Lambda)$ Gaussian per ELL e 3RD, insieme ad una curva PS con $\delta_c=1.5$.

stabilità della stessa. È stato considerato solamente il caso ELL con spettro $n = -2$. Per coprire una gamma dinamica significativa sono stati utilizzati due insiemi di 30 realizzazioni di campi iniziali, differenti nella normalizzazione dello spettro. Le traiettorie $F(\Lambda)$ sono state assorbite come al solito da una barriera posta ad $F_c=1$. Il risultato è mostrato in Fig. 4.13: si conferma la validità dell'approssimazione PH.

Le Fig. 4.7 e 4.8 mostrano le curve $n(\Lambda)$, calcolate per ELL e 3RD con l'approssimazione di PH, con $n = -2$ ed 1, confrontate con quelle alla PS e con filtri SKS; sono sempre state utilizzate le barriere complete. Le conclusioni qualitative date prima sulle curve $n(\Lambda)$ sono pienamente confermate: a grandi masse le curve Gaussian si riducono a quelle calcolate alla PS (dando quindi meno oggetti delle curve SKS per un fattore due), e sono globalmente molto simili ad esse, specialmente per $n = 1$; si conferma quindi che l'approccio alla PS è sufficiente per determinare la MF, se si preferisce il filtro Gaussiano come più "fisico". La Fig. 4.14 mostra le curve Gaussian ($n = -2, 1$) confrontate con una PS con $\delta_c=1.5$. Si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. Le curve Gaussian, come quelle alla PS, danno più oggetti di grande massa della predizione PS canonica (con $\delta_c=1.69$).
2. Le curve Gaussian non superproducono gli oggetti di massa intermedia, come capitava con le curve SKS.

3. La forma della parte a piccole masse dipende in maniera cruciale sui particolari incerti delle predizioni dinamiche a grandi risoluzioni.
4. Come nel caso SKS, si osserva una diminuzione del numero degli oggetti di piccola massa, non appena si introduce la barriera non lineare.
5. Le curve Gaussiane, proprio come quelle alla PS, sono globalmente simili ad una PS con $\delta_c=1.5$; questo è vero specialmente per la predizione ELL.

4.4 Dalla risoluzione alla massa

Un problema generale dell'approccio degli insiemi di escursione, compreso l'approccio originale di PS, è che non si tiene debitamente conto della geometria delle regioni collassate (degli insiemi di escursione) nello spazio Lagrangiano: si ricava la MF per mezzo della ragionevole "regola d'oro" data nell'Eq. (2.4) e qui di nuovo riportata:

$$Mn(M)dM = \bar{\rho} \left| \frac{d\Omega}{dM} \right| dM = n(\Lambda) \left| \frac{d\Lambda}{dM} \right| dM. \quad (4.32)$$

Con questa semplice regola d'oro si assume che ogni punto che collassa sarà parte di una regione collassata il cui volume Lagrangiano, e quindi la cui massa, è deterministicamente connessa con l'ampiezza del filtro di smussamento, e quindi con la risoluzione: $M = M(\Lambda)$. Di solito come volume Lagrangiano si prende quello incluso dal filtro (vedi, ad esempio, Bond et al. 1991; Lacey & Cole 1993), il che è del tutto chiaro solo per il filtro top-hat nello spazio reale, nel cui caso $M = 4\pi\bar{\rho}R^3/3$, (R è il raggio del filtro). Da questo punto di vista, la scelta fatta da Lacey & Cole (1994), di considerare l'esatta costante di proporzionalità tra M ed R^3 come un ulteriore parametro libero, appare del tutto ragionevole. Inoltre gli stessi autori (Lacey & Cole 1993), determinando i tempi di creazione degli aloni, hanno trovato alcune "deboli inconsistenze" (PDF con code a valori negativi) nella procedura, presumibilmente dovute alla semplicistica relazione tra massa e risoluzione.

In pratica, la regola d'oro prima mostrata è una ragionevole prima approssimazione della relazione risoluzione - massa, capace di dare correttamente l'ordine di grandezza della massa media prodotta ad ogni risoluzione. Per ottenere una relazione risoluzione - massa più rigorosa, bisognerebbe tenere opportunamente in conto la geometria degli insiemi di escursione. Questo solleva un problema importante: con il formalismo della barriera assorbente è possibile determinare la frazione di massa collassata ad una data risoluzione, ma non viene data alcuna informazione su come tale massa si frammenti in

blocchi. A piccole risoluzioni, gli insiemi di escursione nello spazio Lagrangiano consistono presumibilmente in regioni isolate, semplicemente connesse, ed ogni regione contiene un singolo picco (vedi ad esempio Adler 1981). E quindi del tutto ragionevole assumere che tali regioni collassino in una singola struttura. A risoluzioni moderate, di ordine uno, gli insiemi di escursione iniziano ad essere molteplici e connessi, e la loro topologia diventa sempre più complicata man mano che la risoluzione cresce. In questo caso, per determinare il numero di strutture che si formano è necessario dare una prescrizione per la frammentazione del mezzo collassato; tale prescrizione sarebbe comunque un nuovo elemento nella teoria qui descritta.

Si potrebbe ad esempio assumere che le strutture si formino attorno ai picchi del processo F (il che è un'ipotesi diversa rispetto a quella usuale, secondo la quale le strutture si formano nei picchi del campo di densità iniziale). Di conseguenza, per frammentare il mezzo collassante si potrebbe utilizzare una procedura del tipo di quelle proposte da Appel & Jones (1990) e da Manrique & Salvador-Solé (1995; 1996). Questa rappresenterebbe un'interessante fusione dell'approccio degli insiemi di escursione con quello dei picchi, nel quale il primo fisserebbe la normalizzazione della MF e la massa esatta da associare ad ogni picco, ed il secondo darebbe un'informazione precisa sul numero di strutture. Tuttavia, il processo F appare troppo complesso per una determinazione puramente analitica del numero dei picchi; tale procedura potrebbe però essere affrontata per mezzo di simulazioni Monte Carlo, del tipo descritto nella §3.3.

Appare chiaro come la relazione risoluzione – massa sia il luogo dove entrano in gioco quelle correlazioni spaziali del processo F che erano state eliminate dal problema della barriera assorbente grazie all'uso dell'interpretazione puntuale del tempo di collasso. Con l'interpretazione globale, come proposto da Yano et al. (1996), le correlazioni spaziali devono essere esplicitamente introdotte nel formalismo diffusivo, ma in questo caso la relazione risoluzione – massa è “esatta”, dal momento in cui si tiene debitamente conto di tutti i punti che collassano nelle regioni sferiche. Tuttavia, questa conclusione è vera solo a patto che i collassi siano veramente sferici (e che si usi il filtraggio top-hat); in pratica, tale assunzione forza la simmetria sferica sugli insiemi di escursione nello spazio Lagrangiano, per cui ci si aspetta che questo approccio sia tanto approssimato quanto quello di PS.

Una relazione risoluzione – massa più realistica prevederebbe che si formi ad ogni risoluzione un'intera distribuzione di masse:

$$\Lambda \rightarrow p(M; \Lambda). \quad (4.33)$$

La funzione $p(M; \Lambda)$ dà la probabilità che si formi una massa M ad ogni

risoluzione Λ ; il suo valore medio è dell'ordine:

$$\int_0^\infty Mp(M; \Lambda) dM \sim \bar{\rho} R(\Lambda)^3, \quad (4.34)$$

dato che il raggio di filtraggio $R(\Lambda)$ è la scala rilevante in questo caso. La MF sarebbe quindi data da:

$$Mn(M) dM = \bar{\rho} \left(\int_0^\infty n(\Lambda) p(M, \Lambda) d\Lambda \right) dM, \quad (4.35)$$

cioè dalla curva $n(\Lambda)$ convoluta con la distribuzione $p(M, \Lambda)$. Alla luce di quanto discusso sopra, ci si aspetta che tale distribuzione p presenti a piccole risoluzioni un picco in corrispondenza del suo valore medio, mentre la sua forma a grandi risoluzioni sarà più complessa, probabilmente influenzata dai dettagli della prescrizione scelta per frammentare il mezzo collassato. In altre parole, ci si aspetta che la distribuzione p non influenzi molto la MF a grandi masse, a parte un possibile spostamento della massa media, mentre essa probabilmente influenzerà la MF a piccole masse; questa si conferma non essere una predizione robusta di questo tipo di teorie di MF. Infine, la distribuzione p dipenderà sicuramente dal tipo di filtraggio; tale differenza potrebbe almeno attenuare la differenza tra le MF trovate con il filtraggio SKS e Gaussiano.

Diamo infine l'espressione della MF nel caso della regola d'oro, e per spettri senza scala. In questo caso, l'esatta proporzionalità tra risoluzione e massa può essere assorbita nella massa tipica M_* che si forma ad un certo istante:

$$\Lambda = (M/M_*)^{-(3+n)/3}. \quad (4.36)$$

M_* è la massa corrispondente ad una varianza unitaria, $\Lambda=1$; è da notare che questa differisce dalla definizione usuale (secondo cui M_* corrisponde ad una varianza $\Lambda=\delta_c^2$) per un fattore $(2/\delta_c)^{3/(3+n)}$. La Fig. 4.15 mostra le MF ottenute utilizzando le predizioni ELL e 3RD ed i filtri Gaussiani, per il caso $n = -2$ e 1 (caso che, pur essendo cosmologicamente irrealistico, è interessante per comprendere il problema dinamico); viene mostrata per confronto anche la MF di PS con $\delta_c=1.5$. Gli spettri sono stati normalizzati assumendo oggi una varianza lineare unitaria su una sfera di raggio $8 h^{-1}$ Mpc. Si può notare come, specialmente nel caso $n = -2$, la MF sia allungata su molti ordini di grandezza, per cui le non molto grandi differenze tra le varie curve non sono molto visibili. Si conferma che la MF di PS con $\delta_c=1.5$ è una buona approssimazione della MF dinamica, calcolata utilizzando sia ELL che 3RD. A piccole masse le MF dinamiche appaiono più piatte, specialmente quella 3RD che prevede meno oggetti a piccole masse della MF di PS.

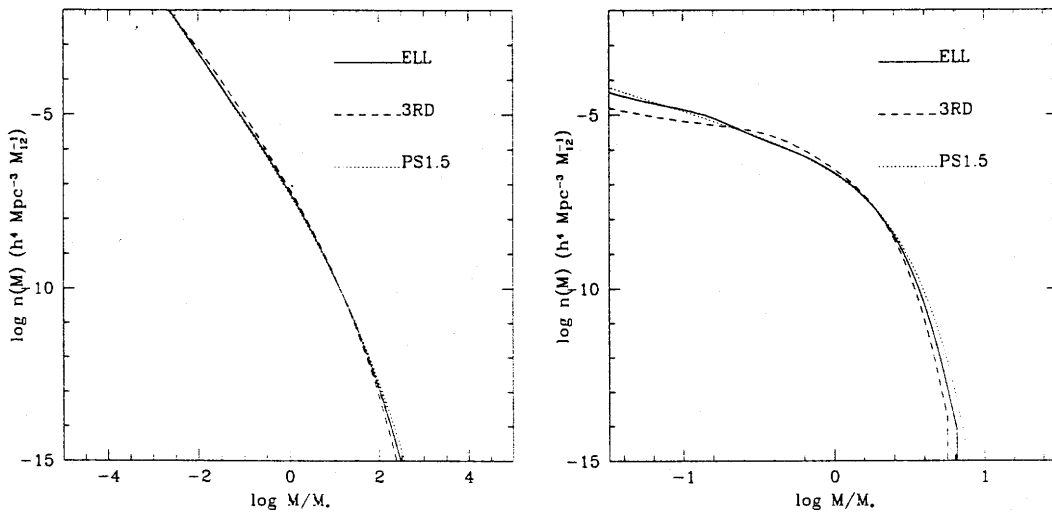


Figura 4.15: Funzioni di massa: (a) $n = -2$. (b) $n = 1$.

4.5 Discussione

È stato mostrato in questo capitolo che il formalismo degli insiemi di escursione può essere esteso al caso in cui si consideri il processo F , un funzionale non lineare e non locale del potenziale iniziale. Una procedura del tipo di quella inizialmente proposta da PS è sufficiente per ottenere le caratteristiche principali della MF dinamica. È stato dimostrato che, se si usa il filtraggio SKS, si può estendere il formalismo della diffusione al processo F . Il problema si può quindi trasformare nella diffusione di un processo di Wiener con una barriera assorbente mobile. Nel caso di filtraggio Gaussiano, è stato mostrato che la semplice approssimazione di Peacock ed Heavens può essere applicata per trovare la MF. La relazione tra risoluzione e massa è stata riconosciuta come un problema aperto della teoria: la nota regola d'oro di PS (Eq. 4.32) è probabilmente sufficiente a grandi masse (a parte un fattore di ordine uno sulla massa tipica M_*), mentre a piccole masse la forma di tale relazione può plausibilmente influenzare la MF in maniera determinante.

Le conclusioni principali riguardanti la MF a masse grandi ed intermedie sono le seguenti:

1. Ci si aspetta che si formino più oggetti di massa grande rispetto alla predizione canonica di PS con $\delta_c = 1.69$.
2. La MF è considerata robusta rispetto alle predizioni dinamiche. La predizione ELL tende a dare più oggetti di 3RD nella coda a grandi

masse, a causa del fatto che 3RD sottostima leggermente i collassi quasi sferici; ELL è quindi considerata più credibile in questo caso.

3. Sono state date soluzioni o approssimazioni analitiche ragionevolmente accurate per le MF nel caso di soluzioni alla PS, di filtraggio SKS o Gaussiano.
4. Sia la MF calcolata alla PS che quella calcolata con filtraggio Gaussiano danno meno oggetti, per circa un fattore due, di quella SKS.
5. Le MF calcolate alla PS e quelle con filtraggio Gaussiano sono molto simili ad una PS con un parametro $\delta_c \simeq 1.5$.

La parte a piccole masse della MF non viene considerata una predizione robusta della teoria, per almeno tre ragioni:

1. La definizione di collasso, che si basa sul concetto di attraversamento delle orbite, non necessariamente riproduce le comuni strutture di piccola massa, come gli aloni virializzati. Le regioni in OC rappresentano piuttosto quei ambienti ad alta densità in cui gli aloni virializzati sono contenuti.
2. Tutte le predizioni dinamiche utilizzate sono affidabili per tempi di collasso non troppo lunghi. La parte a piccole masse della MF, invece, è basata sulla dinamica non robusta degli elementi di massa che collassano lentamente.
3. L'esatta forma della distribuzione p delle masse che si formano ad una risoluzione probabilmente influenza in maniera determinante la MF a piccole masse.

In ogni caso, bisogna notare che le predizioni dinamiche qui analizzate, specialmente la 3RD, tendono a diminuire il numero di oggetti a piccola massa, introducendo così una seconda scala caratteristica nella MF in corrispondenza dell'entrata in gioco della barriera non lineare, e quindi del picco della PDF di F (vedi la Fig. 3.12), la cui reale esistenza è considerata probabile.

Tra il filtraggio SKS e quello Gaussiano si preferisce il secondo, per almeno tre ragioni:

1. ottimizza le predizioni dinamiche (per quanto si conosce vedi la §3.5);
2. stabilizza le traiettorie
3. dà un numero corretto di oggetti a masse grandi ed intermedie.

Capitolo 5

Il mondo della funzione di massa

La teoria della MF è il punto di partenza per i modelli degli oggetti astrofisici nelle cosmologie gerarchiche. Originariamente questa teoria era stata sviluppata per descrivere la formazione delle galassie; Schechter (1976) usò una versione semplificata della forma funzionale della formula di PS per descrivere la funzione di luminosità delle galassie:

$$\phi(L)dL = \phi_*(L/L_*)^\alpha \exp(-L/L_*)dL/L_*. \quad (5.1)$$

Questa formula, molto efficace, è poi divenuta di uso comune.

Un modello di oggetti astrofisici non è completo con la sola conoscenza della MF: per predire l'abbondanza di oggetti come le galassie, gli ammassi X, le nuvole Lyman α o gli oggetti quasi stellari (QSO), bisogna inserire "a mano" il riscaldamento e raffreddamento del gas, la formazione stellare e le reazioni di ritorno delle supernove negli aloni di materia oscura che si formano. Per esempio, il parametro L_* della funzione di Schechter non è collegato alla massa tipica M_* , che oggi è dell'ordine della massa degli ammassi, ma al tempo scala di raffreddamento del gas. Come accennato nella §1.3, tali eventi astrofisici sono molto complessi e non ancora compresi in dettaglio, per cui i modelli di formazione di galassie, ammassi e così via sono ancora limitati da forti incertezze.

D'altra parte, è possibile, per mezzo di metodi indiretti, sondare la profondità della buca di potenziale delle strutture astrofisiche, e quindi determinarne la massa totale. È quindi possibile determinare una MF osservativa, da confrontare direttamente con la teoria.

Questo capitolo vuole dare una rassegna globale del mondo della funzione di massa, che si estende ad includere molte branche della cosmologia. Saranno descritti i risultati principali sulla determinazione osservativa delle masse degli oggetti astrofisici, e delle MF osservative disponibili, insieme ai vincoli che

tali osservazioni impongono sulle teorie cosmologiche. Saranno discusse le principali applicazioni della teoria della MF nei modelli di oggetti astrofisici, con attenzione sia alla metodologia che ai risultati cosmologicamente rilevanti. Sarà infine dato particolare risalto al contributo che la teoria dinamica della MF, presentata nei capitoli 3 e 4, può dare. La §5.1 tratterà le galassie, la §5.2 gli ammassi di galassie, ed infine la §5.3 gli oggetti ad alto redshift.

5.1 Galassie

Il problema della formazione galattica, non ancora pienamente risolto, ha sempre avuto un ruolo speciale in cosmologia. Infatti, fino alla scoperta di una componente di gas caldo negli ammassi di galassie, visibile nei raggi X, tutti gli oggetti osservabili nell'Universo (stelle, gas, AGN etc.) erano collegati alle galassie, con la sola importantissima eccezione della radiazione del CMB. Le galassie sono anche il primo posto dove si è avuta una prova schiacciante dell'esistenza di grandi quantità di materia oscura.

Una delle più importanti (e facilmente misurabili) proprietà delle galassie è la luminosità ottica. La funzione di luminosità delle galassie vicine o meno è stata determinata da molti autori (vedi ad esempio Efstathiou, Ellis & Peterson 1988; Shanks et al. 1996); per ottenerla bisogna conoscere la luminosità apparente e la distanza (o per lo meno il redshift) di un campione completo di galassie. Il risultato tipico di tali studi è che la funzione di luminosità è ben descritta da una funzione di Schechter (Eq. 5.1); a bassi redshift si trova tipicamente $\alpha \simeq -1$ ed L_* corrispondente ad una magnitudine assoluta di $\simeq -19.5 + 5 \log h$. Negli anni '70 ed '80 la MF teorica era a volte direttamente confrontata con la funzione di luminosità osservata, assumendo un rapporto M/L costante (vedi ad esempio l'articolo di rassegna di Lucchin 1989). Questo sollevava il problema del perché la funzione di luminosità apparisse più piatta della MF di PS, la cui pendenza a piccole masse non è molto diversa da -2 . Successivamente, fu dimostrato che il rapporto M/L cambia sistematicamente al variare della luminosità (o della massa) di una galassia; di conseguenza, per confrontare in maniera sensata le teorie di MF con i dati, bisogna determinare la MF direttamente dalle osservazioni, oppure confrontare con la funzione di luminosità le predizioni teoriche sulla luminosità delle galassie stesse.

5.1.1 La funzione di massa galattica

La determinazione delle masse galattiche trae vantaggio dal fatto che la dinamica galattica è tracciata da un numero molto grande di oggetti, le stelle

e le nubi di gas. La procedura esatta per la determinazione delle masse dipende dal particolare stato dinamico delle galassie stesse, ovvero dalla loro morfologia.

Le galassie a disco sono probabilmente le più facili da misurare: si sa che i dischi compiono una rotazione differenziale “fredda”, con velocità di rotazione più grandi ($\sim 100\text{--}300$ km/sec) delle dispersioni di velocità (< 50 km/sec). Le curve di rotazione possono facilmente essere ricostruite per mezzo degli spostamenti doppler delle linee spettrali, osservate in punti diversi del disco galattico. Una volta determinata la curva di rotazione, i profili di massa possono essere stimati risolvendo il problema Newtoniano di un disco autogravitante (più un bulbo sferoidale, che influenza solo le parti interne della galassia). Il profilo di massa così determinato può quindi essere confrontato con la distribuzione di luce, per verificare se la massa luminosa possa essere considerata responsabile del moto osservato.

Rubin, Ford & Thonnard (1980) furono i primi a scoprire che la materia luminosa non può essere ritenuta responsabile della parte esterna della curva di rotazione, dove la densità luminosa si annulla, mentre la curva di rotazione continua più o meno piatta, senza mostrare alcuna caduta Kepleriana dovuta alla mancanza di materia (vedi anche l’articolo di rassegna di Ashman 1992). È ormai accettato che le galassie a spirale siano incluse in aloni di materia oscura, i quali si estendono molto più in là del raggio ottico.

L’analisi più estesa di curve di rotazione è stata condotta da Persic & Salucci (1995) e Persic, Salucci & Stel (1996) (in pratica, a causa di effetti di selezione, il loro campione di galassie non contiene galassie lenticolari e spirali Sa, che sono povere di gas). Essi hanno mostrato che le curve di rotazione sono caratterizzate da un profilo universale, con solamente una piccola dispersione attorno ad esso. Questa relazione, chiamata la curva di rotazione universale (proposta inizialmente da Rubin et al. 1985), connette in maniera univoca la massa, la luminosità, la densità centrale e la pendenza della curva di rotazione di ogni galassia a spirale. È quindi possibile dare una relazione tra massa totale e luminosità; tale relazione, come mostrato dai suddetti autori, risulta essere:

$$M \propto L^{0.4} \quad (5.2)$$

Quindi, le galassie deboli contengono più materia oscura di quelle luminose, mentre la massa totale cambia poco con la luminosità.

Rimane aperto il problema di dove finiscano gli aloni. Le curve di rotazione indicano chiaramente che l’alone si estende oltre il limite del disco ottico. Le osservazioni radio possono spingere questo limite fino a due o tre raggi ottici, poiché del gas neutro è ancora presente nelle parti esterne del disco; a

queste distanze la curva di rotazione non accenna ancora a cadere. L'estensione dell'alone può essere sondata a distanze ancora maggiori considerando il moto delle galassie satellite (Zaritsky et al. 1993), o il moto dei sistemi binari di galassie (Charlton & Salpeter 1991); tali osservazioni sono consistenti con aloni che si estendono fino a circa ~ 5 raggi ottici. Persic et al. (1996) danno i valori totali della massa galattica, ottenuti estrapolando l'andamento osservato nelle parti interne fino al raggio a cui il contrasto medio di densità raggiunge il valore di 200, un valore ispirato dal modello del collasso sferico.

Le galassie ellittiche non ruotano e non contengono grandi quantità di gas. Esse possono essere considerate come un gas di stelle in equilibrio, ed il loro profilo di massa può essere determinato per mezzo dell'equazione di Jeans (vedi ad esempio Binney & Tremaine 1987; questa equazione è riportata più avanti, Eq. 5.3); bisogna comunque tenere conto che la cinematica delle ellittiche non è semplice, visti i numerosi indizi di triassialità. La massa può quindi essere ricavata attraverso la densità luminosa delle stelle e la loro dispersione di velocità, stimata per mezzo della larghezza delle righe galattiche in assorbimento; questo metodo riesce però a sondare soltanto la parte più interna del potenziale gravitazionale, nella quale non c'è forte evidenza di materia oscura. Le parti più esterne possono essere sondate sfruttando la presenza di gas in alcune ellittiche (vedi ad esempio Danziger 1996). Secondo studi recenti (Bertola et al. 1993), le ellittiche contengono materia oscura, e la loro relazione massa - luminosità non è molto diversa da quella valida per le spirali, l'Eq. (5.2), anche se con una diversa normalizzazione.

In questa maniera è possibile trasformare la luminosità in massa, e quindi determinare una MF galattica; nel regime di legge di potenza questa ha una pendenza di ~ 2 , non molto diversa dalla pendenza predetta da PS (Ashman, Salucci & Persic 1993).

5.1.2 Formazione galattica e cosmologia

L'argomento della formazione delle galassie in ambito cosmologico è stato presentato da molti autori; una delle rassegne più recenti è quella di White (1993). Le prime idee si rifanno a Binney (1977), Rees & Ostriker (1977), Silk (1977), White & Rees (1978): se la maggior parte della materia nell'Universo è non barionica, allora gli aloni di materia oscura ed il gas seguono cammini evolutivi diversi. L'evoluzione della materia oscura è gerarchica e quasi autosimile (se lo spettro di potenza è debolmente curvo, come nel caso della CDM), nella maniera descritta dalle teorie di MF presentate nei capitoli precedenti, mentre la dinamica del gas è dominata dai processi dissipativi. Il gas cade negli aloni di materia oscura e, dissipando la propria energia, si sistema nella parte più interna dell'alone, raffreddandosi, frammentandosi e dando

origine a formazione stellare. Questo processo causa l'apparire di una nuova scala caratteristica, cioè la luminosità L_* delle galassie grandi; essa appare più o meno quando il tempo di raffreddamento diventa uguale al tempo di Hubble. In seguito, il gas non riesce più a dare origine a consistente formazione stellare al di fuori degli aloni galattici, e le susseguenti fusioni gerarchiche riguardano solamente la materia oscura. È da notare che il problema della formazione galattica è fortemente collegato al problema "Euleriano" del bias (vedi il capitolo 1): una volta determinati gli aloni all'interno dei quali si formano le galassie, le loro correlazioni spaziali, confrontate con quelle della materia oscura, determinano il parametro di bias.

Per costruire un modello per l'assemblamento di una galassia, c'è bisogno di due elementi principali: un modello per l'evoluzione della materia oscura ed un modello per la dinamica del gas. L'evoluzione degli aloni di materia oscura è di solito descritta tramite le storie di accrescimento di Lacey & Cole (1993), le quali, come detto nella §2.3.3, riproducono le storie evolutive degli aloni delle simulazioni ad N corpi. La struttura finale degli aloni è determinata per mezzo di considerazioni basate sul collasso sferico o, più recentemente, per mezzo dei risultati delle simulazioni (Navarro, Frenk & White 1996; Navarro 1996), secondo cui gli aloni virializzati seguono un semplice profilo universale; quest'ultimo risultato è in sorprendente accordo con l'esistenza di una curva di rotazione universale, anche se le due cose non sono in accordo fin nei dettagli.

Anche se l'evoluzione della materia oscura non è ancora compreso nel dettaglio (come le discussioni nei precedenti capitoli hanno ampiamente dimostrato), il modello degli aloni di materia oscura è probabilmente il passo più sicuro nella formazione galattica. Il gas contenuto nell'alone consiste probabilmente di tre fasi principali, cioè una fase calda, che emette nei raggi X, una fase di gas neutro freddo ed una fase di stelle. I principali eventi astrofisici da descrivere sono il riscaldamento del gas a causa di onde d'urto, il raffreddamento dello stesso, l'evoluzione del momento angolare, la formazione stellare, le reazioni di ritorno della formazione stellare (incluse le supernove), l'ulteriore accrescimento del gas, la fusione dissipativa di galassie, l'evoluzione chimica. Mentre alcuni eventi, come il riscaldamento e raffreddamento del gas, sono più o meno sotto controllo, altri eventi, come la formazione stellare, sono molto difficili da modellare; in particolare, la funzione di massa iniziale delle stelle, quantità poco nota in quelle condizioni, è determinante per quantificare la susseguente reazione di ritorno delle supernove, la quale può essere tanto forte da spazzare via la materia dalle buche di potenziale meno profonde (Dekel & Rees 1987). Di conseguenza, molti passi sono modellati in maniera semplicistica, basandosi su parametri molto debolmente vincolati. Tali studi sono stati condotti da molti autori, tra i quali Cole

& Kaiser (1989), Peacock & Heavens (1990), White & Frenk (1991), Cole (1991), Lacey & Silk (1991), Blanchard, Valls-Gabaud & Mamon (1992), Kauffmann & White (1993), Kauffmann, White & Guideroni (1993), Kauffmann, Guideroni & White (1994), Kauffmann & Charlot (1994). Cole et al. (1994), Avila-Reese & Firmani (1996). La susseguente evoluzione chimica delle galassie permette di porre ulteriori vincoli all'evoluzione cosmologica delle galassie; tale argomento è contenuto nella recente rassegna di Matteucci (1996).

D'altra parte, la formazione galattica può essere studiata per mezzo di simulazioni ad N corpi con idrodinamica SPH (*smoothed particle hydrodynamics*). Tali simulazioni sono state condotte, per esempio, da Katz (1992), Navarro, Frenk & White (1995a), Evrard, Summers & Davis (1994), Steinmetz (1996), Katz, Weinberg & Hernquist (1996), Tormen, Bouchet & White (1996), Gelato & Governato (1996). Lo stato dell'arte presente delle simulazioni idrodinamiche probabilmente non permette di raggiungere conclusioni sicure, soprattutto perché la risoluzione non è ancora sufficiente per risolvere le parti centrali degli oggetti, e la formazione stellare è ancora trattata ad un livello euristico; tuttavia, si riesce a simulare la formazione di dischi di gas all'interno degli aloni di materia oscura, anche se di solito i dischi sono troppo concentrati al centro.

Le storie di accrescimento possono essere direttamente utilizzate per modellare eventi astrofisici connessi con le interazioni. In particolare, il formalismo dell'aggregazione cinetica sviluppato da Cavaliere, Colafrancesco & Menci (1991) può essere utilizzato come segue. L'equazione di Smoluchowsky, introdotta nella §2.4.3 (Eq. 2.14), può in particolari condizioni dare inizio ad un'aggregazione divergente, che corrisponde alla formazione di un oggetto centrale di massa confrontabile con quella del sistema (Cavaliere & Menci 1991; Colafrancesco, Menci & Biferale 1993); tale aggregazione divergente può essere ritenuta responsabile per la formazione di grandi galassie cD in protoammassi, o per la cancellazione di sottostrutture negli ammassi di galassie. Le aggregazioni cinetiche possono anche aver luogo in una maniera più tranquilla, in ambienti adatti come i filamenti di galassie su grande scala (Menci & Valdarnini 1994); in questo caso, esse possono causare un appiattimento della funzione di luminosità al passare del tempo, e possono giustificare l'aumento dei conteggi di galassie blu ad alti redshift, come effetto della formazione stellare indotta dalle aggregazioni (Cavaliere & Menci 1993). Inoltre, sono state utilizzate le storie di accrescimento degli aloni, trovate tramite il formalismo di PS, per quantificare l'effetto Butcher-Oemler, cioè l'eccesso di galassie blu negli ammassi ad alti redshift, interpretato come una conseguenza della formazione stellare indotta dalle fusioni (Bower 1991). I tempi scala delle interazioni galattiche sono stati utilizzati per stimare il

fondo di radiazione millimetrica dovuto alla formazione stellare nelle galassie (Blain & Longair 1993a,b).

Secondo il mio parere, la formazione galattica è oggi più un problema di dinamica del gas che di materia oscura. Infatti, gli aloni numerici di materia oscura, la cui abbondanza è ben predetta dalla teoria di PS, sono probabilmente sufficienti per modellare in maniera soddisfacente la parte della formazione galattica che riguarda la materia oscura, dato che gli altri passi, in cui entra in gioco la dinamica del gas, sono così incerti. Inoltre, miglioramenti dei modelli di storie di accrescimento rispetto alla teoria di Lacey & Cole potrebbero essere non molto importanti, dato che le fusioni di galassie seguono altre vie rispetto alla materia oscura. Queste considerazioni naturalmente prescindono dalla necessità, espressa nei capitoli precedenti, di approfondire la comprensione del fenomeno dinamico in sé.

Rispetto alla teoria sviluppata nei precedenti capitoli, le galassie a bassi redshift si trovano nella parte a piccole masse della MF, la quale è stata considerata una predizione non robusta delle teorie di MF. D'altra parte, se è vero che le galassie si trovano in gran parte in gruppi, e se almeno un buon numero di gruppi di galassie hanno già subito il loro primo collasso, le galassie non sono associate ad aloni isolati, ma sono sottostruttura di oggetti più grandi; inoltre, le galassie irregolari deboli sono probabilmente satelliti delle galassie luminose, circondate dallo stesso alone. Da questo punto di vista, un confronto diretto tra la MF galattica ed una MF teorica come la PS, o come quelle presentate nel capitolo 4, non ha molto senso. Una teoria dinamica più evoluta, capace di risolvere la struttura interna degli oggetti collassati, potrebbe essere usata per descrivere le galassie all'interno degli ambienti a grande scala; la teoria cinetica sviluppata da Cavaliere e collaboratori è un possibile esempio di tali teorie. Saremmo allora portati a prendere in esame l'esistenza di *due* MF, una per gli ambienti a grande scala, che potrebbe essere data dalla teoria dinamica della MF, ed un'altra per le sottostrutture, che descriverebbe tra l'altro le galassie reali.

D'altra parte, si ritiene che le protogalassie ad alto redshift siano associate ai picchi più alti del campo di densità alla scala rilevante. In questo caso, in cui i transienti dinamici hanno probabilmente un ruolo importante, la teoria dinamica della MF si può utilmente applicare; questo verrà descritto nella §5.3. Di conseguenza, la teoria dinamica della MF può essere utile per capire quelle caratteristiche delle galassie che sono state causate da eventi che hanno avuto luogo all'epoca della loro formazione.

5.2 Gruppi ed ammassi di galassie

Gruppi ed ammassi di galassie sono definiti osservativamente come zone di incremento locale del campo di galassie, soddisfacenti qualche criterio di soglia. Non c'è una differenza cruciale tra le due classi di oggetti: per definizione (Abell 1958), gli ammassi ricchi di galassie presentano almeno 50 galassie, di magnitudine apparente tra m_3 ed m_3+2 (m_3 è la magnitudine apparente della terza galassia più luminosa) all'interno di una sfera di raggio $1.5 h^{-1}$ Mpc, mentre i gruppi vengono di solito trovati per mezzo di un algoritmo di percolazione amici-degli-amici (Hucra & Geller 1982), o per mezzo di un algoritmo gerarchico (Materne 1978). Gli ammassi possono anche essere definiti, in maniera fisicamente più chiara, per mezzo della loro emissione X (vedi ad esempio Sarazin 1986); d'altra parte, è stato osservato che molti gruppi, tra cui alcuni compatti, mostrano la stessa emissione X degli ammassi, anche se con luminosità minori.

Il primo, pionieristico confronto della funzione di molteplicità (di luminosità ottica) dei gruppi con la MF di PS fu condotto da Gott & Turner (1977); i gruppi erano identificati come strutture con una certa sovradensità in numero di galassie, e la loro molteplicità era stimata sulla base del numero e della luminosità delle galassie componenti, il che è equivalente ad assumere un rapporto M/L costante.

Più tardi divenne chiaro che tali stime, semplicemente basate sulla luminosità ottica delle strutture (cioè sul numero di galassie), non sono soddisfacenti, almeno quando si considerano grandi intervalli di massa, poiché si è trovato che il rapporto M/L è una funzione della massa della struttura: le strutture più grandi hanno più materia oscura (vedi ad esempio Bahcall 1988, anche se, come detto prima, le galassie mostrano una tendenza opposta). Nel frattempo sono stati sviluppati un numero di metodi diversi per stimare la massa dei gruppi ed ammassi di galassie; sono oggi disponibili le stime di massa di un discreto numero di oggetti.

5.2.1 Stime di massa

Fino ad ora, solo pochi autori, i cui lavori saranno descritti in seguito, hanno stimato la MF dei sistemi di galassie; la determinazione osservativa di tale MF è lontana dall'essere definitiva. Tuttavia, la massa di ogni singolo oggetto può essere determinata per mezzo di tre metodi indipendenti. Per il momento, le misure di massa hanno errori abbastanza grandi, dell'ordine del 50%, ed i diversi metodi non sempre danno risultati in accordo; tali misure di massa potranno però migliorare la loro precisione con l'aumentare del numero di dati osservativi disponibili.

Masse ottiche

La determinazione ottica delle masse degli ammassi è ovviamente basata sulla cinematica delle galassie componenti. Analogamente a quanto detto per le galassie ellittiche, un ammasso può essere considerato come un gas di galassie; se il gas è in equilibrio, e se l'ammasso è sferico, vale la seguente equazione di Jeans:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\frac{1}{n(r)} \frac{d(n(r)\sigma_r^2(r))}{dr} - \frac{2}{r}(\sigma_r^2(r) - \sigma_t^2(r)). \quad (5.3)$$

Φ è il potenziale gravitazionale dell'ammasso, $n(r)$ è la densità numerica di galassie e σ_r^2 e σ_t^2 sono le dispersioni di velocità trasverse e radiali. Mentre la densità numerica (proiettata) di galassie può essere direttamente osservata, si può misurare solo una particolare combinazione delle due dispersioni di velocità, cioè la dispersione lungo la linea di vista. È possibile comunque risolvere il problema in maniera autoconsistente (Dejonghe & Merritt 1992), ma tale analisi, molto raffinata, richiede la conoscenza di un grande numero di galassie, alcune centinaia, per poter funzionare; gli scostamenti degli ammassi reali dalla simmetria sferica costituiscono un ulteriore problema. Facendo ulteriori assunzioni sulle orbite galattiche, è comunque possibile determinare i profili di massa con un numero minore di galassie (vedi ad esempio Merritt & Gebhardt 1994).

D'altra parte, è possibile ottenere stime di massa più "economiche" utilizzando il teorema del viriale per gli ammassi (vedi, ad esempio, Limber & Mathews 1960; Giuricin, Mardirossian & Mezzetti 1982), secondo il quale la massa della struttura è collegata alla dispersione delle velocità lungo la linea di vista σ_V^2 ed al raggio viriale R_v nella seguente maniera:

$$M \simeq \sigma_V^2 R_v / G. \quad (5.4)$$

L'esatta costante di proporzionalità dipende dal profilo dell'ammasso; si assume di solito essere $3\pi/2$. Il raggio viriale di un sistema di N masse $\{M_i\}$, a distanze mutue di $(r_{ij})_\perp$, è definito come:

$$R_v = \frac{\pi}{2} \frac{(\sum_i M_i)}{\sum_{i<j} \frac{M_i M_j}{(r_{ij})_\perp}} \simeq \frac{\pi}{2} \left(\sum_{i<j} \frac{N^2}{(r_{ij})_\perp} \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

La seconda espressione, quella comunemente utilizzata per la stima di R_v , assume per semplicità che tutte le galassie abbiano la stessa massa; abbiamo visto nella §5.1.1 che la dipendenza della massa galattica dalla luminosità non è molto forte. Le masse viriali presentano errori piuttosto grandi, dell'ordine

del 50%, ma possono essere applicate ad ammassi con solamente 30 redshift misurati (vedi Biviano et al. 1993).

Le stime viriali presentano alcuni problemi. In primo luogo, il numero dei traccianti (le galassie) è limitato in ogni caso, il che pone un limite superiore alla precisione che può essere raggiunta per mezzo di tali misure. In secondo luogo, le galassie di sfondo o che stanno prima dell'ammasso, ma che non appartengono ad esso, contaminano le quantità osservate, specialmente la dispersione di velocità. Si può correggere questo fatto sviluppando procedure statistiche per escludere tali intrusi ed ottenere stime robuste della dispersione delle velocità (Beers, Flynn & Gebhardt 1990; Girardi et al. 1992). Infine, la stima delle masse viriali si basa ovviamente sull'ipotesi che gli ammassi siano virializzati. Le sottostrutture nelle distribuzioni di galassie e nelle mappe X mostrano che questo non è vero in molti se non tutti gli ammassi. Una maniera di alleviare questo problema è quella di eliminare gli ammassi con sottostrutture molto prominenti: Biviano et al. (1993) hanno mostrato che le masse viriali non sono molto influenzate dalla presenza di sottostrutture, se queste non sono troppo pronunciate. Contemporaneamente, un grande vantaggio delle stime viriali di massa è che esse possono essere estese alle parti esterne dell'ammasso, a differenza delle stime basate sui raggi X, di cui si parlerà nel seguito. Un altro vantaggio delle analisi ottiche, rispetto a quelle X, è che è più facile distinguere il caso di due ammassi che giacciono lungo la stessa linea di vista.

Per ottenere una MF degli ammassi è necessario stimare le masse di un campione completo di ammassi di galassie, ovvero stimare le masse di un campione incompleto e poi correggere per l'incompletezza. Biviano et al. (1993) hanno trovato una MF degli ammassi, basata su stime di massa viriale, per un sottocampione degli ammassi di Abell (1958) ed Abell, Corwin & Olowin (1989). Essi hanno trovato che la loro MF è consistente entro gli errori con una legge di potenza di pendenza circa -2.5 ; se si crede che la MF abbia una pendenza circa -2 a piccole masse, tale irripidimento va interpretato come un effetto del taglio esponenziale della MF.

I gruppi di galassie possono essere analizzati per mezzo dello stesso metodo, ma il numero di galassie osservate è spesso molto piccolo, e l'ipotesi di virializzazione è ancora più improbabile per questi oggetti. L'effetto di non completa virializzazione può essere corretto seguendo i suggerimenti di Giuricin et al. (1988), i quali, descrivendo i gruppi come strutture che collassano sfericamente, hanno stimato lo stato di rilassamento della struttura analizzando il *tempo di attraversamento*, definito come il rapporto tra raggio viriale e radice quadrata della dispersione di velocità; il rapporto tra tale tempo di attraversamento ed il tempo di Hubble definisce lo stato dinamico della struttura, e quindi il suo discostamento dalla virializzazione. Per costruire

la MF bisogna costruire un catalogo completo di gruppi, ovvero quantificare l'incompletezza di un catalogo esistente, correggendo per la perdita selettiva di gruppi piccoli a grandi distanze. Questo è stato fatto da Pisani et al. (1992), i quali hanno determinato la MF dei gruppi di Tully (1987). Essi hanno trovato una MF consistente con una legge di potenza di pendenza circa -2 , in sorprendente accordo con quella trovata per le galassie da Ashman et al. (1993).

Masse X

Come accennato prima, gli ammassi di galassie ed i gruppi più grossi emettono nella banda dei raggi X: tale emissione è principalmente dovuta ad emissione sottile di bremsstrahlung (radiazione di frenamento) da parte di un plasma caldo che riempie la buca di potenziale dell'ammasso (vedi ad esempio Sarazin 1986; Cavaliere & Colafrancesco 1990; Jones & Forman 1991). Questa emissione può essere osservata per mezzo dei satelliti X, come Exosat, Einstein, Rosat, Asca o il più recente Sax, o il futuro Axas. Sono osservabili due quantità principali, cioè la luminosità e la temperatura del gas; la prima quantità risulta dell'ordine $L_X \sim 10^{44}$ erg/s, la seconda $T \sim 10^8$ K. Risolvendo l'equazione di Jeans per l'equilibrio idrostatico di un gas a simmetria sferica, si può stimare la massa totale attraverso i profili di temperatura $T(r)$ e di densità del gas $\rho_g(r)$:

$$M(r) = -\frac{krT(r)}{G\mu m_H} \left(\frac{d \log \rho_g}{d \log r} + \frac{d \log T}{d \log r} \right). \quad (5.6)$$

k e G sono la costante di Boltzmann e quella gravitazionale, μ è il peso molecolare medio del gas e m_p è la massa del protone. Si assume di solito che il gradiente di temperatura sia piccolo, come i dati sembrano indicare. Il profilo di densità viene di solito parametrizzato attraverso il modello β di Cavaliere & Fusco Femiano (1976):

$$\rho_g(r) = \rho_0(1 + (r/r_c)^2)^{-3\beta/2}. \quad (5.7)$$

I parametri β ed r_c si trovano adattando il profilo dell'emissione X con l'emissione proiettata prevista, proporzionale a ρ_g^2 .

Se da una parte l'emissione del gas non è limitata ad un modesto numero di traccianti, come accadeva nel caso ottico, d'altra parte le determinazioni di massa basate su tale procedura richiedono tipicamente dati di ottima qualità, disponibili oggi solamente per un numero limitato di ammassi. Sono comunque disponibili in letteratura le distribuzioni delle luminosità X (Edge et al. 1990) e delle temperature (Edge et al. 1990; Henry & Arnaud 1991) di campioni completi di ammassi X. Tali quantità risultano strettamente correlate

con la massa totale dell'ammasso, per cui si preferisce normalmente confrontare le teorie direttamente con le luminosità o le temperature osservate, piuttosto che con le masse.

Il vantaggio delle masse X è sicuramente quello di essere basate sul gas come tracciante, la cui fisica è semplice ed abbastanza ben compresa rispetto a quella delle galassie; inoltre, come accennato prima, non c'è limite al numero dei traccianti, dato che le molecole di gas sono molto più numerose delle galassie. Infine, visto che solo gruppi ed ammassi di galassie mostrano emissione X estesa, non si presenta in questo caso il problema degli intrusi, eccetto il caso (non molto fuori dal comune) di ammassi diversi che giacciono sulla stessa linea di vista. Tuttavia, le masse X presentano ancora grandi errori, dovuti soprattutto alla difficile determinazione della temperatura, alla sua non costanza, ed agli effetti di non sfericità e di presenza di sottostrutture; inoltre, l'emissione X è limitata solamente alla parte interna (~ 0.5 Mpc) degli ammassi, per cui la massa totale va determinata con qualche estrapolazione o con qualche ipotesi.

La relazione tra masse ottiche e masse X non è stata ancora determinata con precisione; alcuni autori affermano che le masse ottiche tendono ad essere più grandi di quelle X , ma tale conclusione potrebbe essere dovuta semplicemente al fatto che tali misure sono ancora molto incerte, e che gli errori principali sono di natura sistematica.

Un'altra determinazione della MF, che sfrutta sia informazioni ottiche che X , è stata condotta da Bahcall & Cen (1993). Essi hanno determinato la massa degli ammassi sia attraverso una nota correlazione tra la massa ed il numero delle galassie nella regione interna dell'ammasso (il che è in qualche modo equivalente ad assumere M/L costante), sia utilizzando la funzione di temperatura X di Henry & Arnaud (1991) e la correlazione tra questa e la massa dell'ammasso. Entrambe le relazioni sono state calibrate sull'ammasso di Coma. Un ulteriore punto nella MF è stato aggiunto a piccole masse utilizzando la funzione di luminosità dei gruppi ricchi (vedi le referenze nell'articolo citato). La loro MF risulta consistente con una funzione di Schechter con un parametro $\alpha = -1$. Tale MF è marginalmente inconsistente con quella data da Biviano et al. (1993), ma, date le incertezze che caratterizzano le determinazioni della MF, non è possibile raggiungere conclusioni sicure, ed il problema va considerato come ancora aperto.

Masse con lenti gravitazionali

Un'altra maniera per misurare le masse degli ammassi è dovuta alle lenti gravitazionali. La profonda buca di potenziale dell'ammasso può distorcere, leggermente o profondamente, le immagini delle galassie di sfondo; è quindi

possibile dalla forma delle immagini risalire alla profondità della buca di potenziale, e quindi alla massa (vedi, ad esempio, Fort & Mellier 1994; Kaiser 1996). Naturalmente è necessario determinare se le distorsioni di un oggetto di sfondo siano intrinseche dell'oggetto o siano dovute alla lente. In alcuni casi, le immagini galattiche sono profondamente distorte in archi giganti, lunghi frazioni considerevoli di radiante. In questo caso, facendo delle ipotesi sulla geometria dell'ammasso, è possibile determinare la massa proiettata all'interno dell'arco; tuttavia, tali eventi sono rari, e le masse così ottenute dipendono profondamente dal modello geometrico dell'ammasso. Inoltre, la validità di questo metodo è stata recentemente messa in dubbio da Bartlemann & Steinmetz (1996), i quali, basandosi su simulazioni ad N corpi, hanno trovato che gli archi giganti si formano soprattutto in coppie di ammassi che si stanno fondendo lungo la linea di vista.

D'altra parte, si può ricostruire il potenziale dell'ammasso sfruttando la distorsione di molte galassie di sfondo, senza dover fare ipotesi sulla sua geometria; questo è detto metodo delle lenti deboli (vedi ad esempio Kaiser 1996). Il potenziale dell'ammasso esercita sulle immagini di sfondo una distorsione che dipende semplicemente dalle derivate seconde del potenziale, proiettato lungo la linea di vista. La distorsione può essere trovata osservando molte galassie di sfondo, e calcolandone l'ellitticità media, nell'ipotesi ragionevole che la distorsione intrinseca delle galassie non presenti correlazioni sulle scale rilevanti. Quando le distorsioni sono lievi, la relazione tra distorsione e potenziale è semplice, ma il segnale è ovviamente debole; d'altra parte, quando le distorsioni si fanno più forti (anche se non al livello degli archi giganti), il procedimento di inversione diventa non lineare, ma ancora affrontabile. Tuttavia le tecniche per estrarre il segnale in maniera priva di bias non sono ancora completamente sviluppate.

Le misure delle masse degli ammassi con le lenti gravitazionali sono tuttora in fase pionieristica. In particolare, con le misure con le lenti deboli si è riusciti a ricostruire il profilo di massa di alcuni ammassi (circa una decina); tali profili sono risultati qualitativamente compatibili con i profili ottici, il che indica in maniera incoraggiante che il metodo funziona. Il vantaggio di tali misure è che esse sondano direttamente il potenziale gravitazionale, senza fare alcuna ipotesi sulla geometria (nel caso delle lenti deboli) o sullo stato dinamico del sistema. Tali metodi richiedono osservazioni fotometriche di alta qualità, abbastanza dispendiose in termini di tempo di telescopio, ma non richiedono l'uso della spettroscopia. I risultati sembrerebbero a prima vista in parziale contraddizione con quelli ottici ed X: le masse determinate con le lenti gravitazionali sarebbero tipicamente più grandi, per un fattore due, di quelle ottiche ed X, ma esistono casi in cui si osserva il comportamento opposto. Non è irrealistico pensare che questa discrepanza possa attenuarsi

od annullarsi con il raffinarsi delle tecniche osservative e di analisi.

5.2.2 Ammassi e cosmologia

Gli ammassi di galassie, essendo le strutture collassate più grandi del nostro Universo visibile, sono stati da lungo tempo riconosciuti come oggetti di importanza cruciale nella cosmologia. Infatti, la loro abbondanza e le loro proprietà principali (dispersioni di velocità, luminosità e temperatura X) possono fornire preziosi vincoli per i modelli cosmologici. Di solito, per determinare il numero degli ammassi si è utilizzata la MF di PS, spesso considerata come riprodotte la MF delle simulazioni numeriche. Tuttavia, i confronti tra dati e modelli sono tipicamente operati in termini non di massa ma di quantità direttamente osservabili, come le suddette dispersioni di velocità o luminosità e temperature X . Questa scelta è ragionevole, dal momento in cui è meglio manipolare i modelli (in cui tutto è in linea di principio sotto controllo) piuttosto che i dati.

Di fatto, è stato dimostrato che le masse degli ammassi correlano strettamente con le quantità osservative suddette. Tali relazioni possono anche essere trovate per mezzo di considerazioni teoriche, tipicamente basate sull'ipotesi di simmetria sferica, equilibrio del gas e virializzazione dell'alone di materia oscura, ma l'esatta calibrazione dipende dal profilo di densità che si assume, dal discostamento del sistema dalla sfericità e da altri particolari incerti, per cui le relazioni sono tipicamente calibrate per mezzo dei risultati delle simulazioni ad N corpi con SPH, o per mezzo dei dati osservativi (come nel già citato lavoro di Bahcall & Cen 1993). Tali relazioni sono:

$$\sigma_V^2 \propto (1+z)M^{1/3} \quad (5.8)$$

(Evrard 1989), dove z è il redshift al quale si osserva l'ammasso;

$$T \propto (1+z_c)M^{2/3}\Omega_0^{1/3}\rho_g^{1/3} \quad (5.9)$$

(vedi ad esempio Lilje 1992), dove z_c è il redshift di collasso dell'ammasso e ρ_g è la densità media del gas;

$$L \propto (1+z)^{-3/5}M^{4/3}\rho_g^{7/6}K \quad (5.10)$$

(vedi ad esempio Colafrancesco & Vittorio 1994), dove K è la correzione standard per l'espansione cosmologica.

Utilizzando queste formule, una MF può essere trasformata in una funzione di dispersione di velocità, di temperatura X o di luminosità X , e quindi confrontata con i dati. Le funzioni di temperatura e luminosità X si trovano

nei già citati lavori di Edge et al. (1990) e Henry & Arnaud (1991), mentre la funzione di dispersione di velocità è stata data da Zabludoff et al. (1993), Girardi et al. (1993), Mazure et al. (1996), Fadda et al. (1996); tali distribuzioni sono consistenti tra di loro entro i limiti di completezza dei campioni; lo stesso vale per le due funzioni di temperatura.

Diversi autori hanno confrontato i modelli cosmologici con tali distribuzioni osservative. Tipicamente, è stata utilizzata la MF di PS, con un parametro δ_c uguale al valore sferico 1.69, visto che gli ammassi collassano in maniera quasi sferica (come dimostrato nel capitolo 4, un valore di 1.5 sarebbe stato più idoneo; sono di questo avviso, ad esempio, Klypin & Rhee 1994). Evrard (1989) e Peebles, Daly & Juszkievicz (1989), e più recentemente Cavaliere, Menci & Tozzi (1994), trovarono che l'esistenza di un numero significativo di ammassi ad alti redshift ($z > 0.5$) e con grandi dispersioni di velocità ($\sigma_V^2 > 700$ km/sec) sono difficilmente conciliabili con uno scenario CDM standard. Tale conflitto verrebbe risolto considerando Universi con $\Omega_0 < 1$, nei quali le strutture finiscono di formarsi in tempi recenti, e quindi gli ammassi oggi visibili devono essersi assemblati da tempo. Un'altra possibile spiegazione potrebbe essere data da un abbassamento del valore effettivo del parametro δ_c a grandi redshift, dovuto all'accoppiamento non lineare con la struttura a piccola scala; infatti, diversi argomenti teorici, basati sulla cosiddetta previrializzazione (Peebles 1990; Lokas et al. 1996) o sul possibile effetto della frizione dinamica (Antonuccio & Colafrancesco 1994) concordano nell'affermare che la struttura a piccola scala può rallentare il collasso; una spiegazione del genere era stata suggerita dal sottoscritto (Monaco 1995), per spiegare il risultato delle simulazioni di Jain & Bertschinger (1993) e Ma & Bertschinger (1994). La necessità di Universi di bassa densità per interpretare la MF osservativa degli ammassi di galassie era stata indipendentemente proposta da Bahcall & Cen (1992; 1993) e da Kofman, Gnedin & Bahcall (1993).

Molti autori hanno confrontato le predizioni della PS con i dati X, per esempio Cavaliere & Colafrancesco (1988), Schaeffer & Silk (1988b), Lilje (1990; 1992), Kaiser (1991), Oukbir & Blanchard (1992), Hanami (1993), Cavaliere, Colafrancesco & Menci (1993), Bartlett & Silk (1993), Colafrancesco & Vittorio (1994), Cavaliere, Menci & Tozzi (1994), Balland & Blanchard (1995), Kitayama & Suto (1996a,b), Liddle et al. (1996), Viana & Liddle (1996), Eke, Cole & Frenk (1996), Pen (1996). Una conclusione generale è che il modello CDM standard non riesce a riprodurre i dati, specialmente ad alti redshift; un Universo a bassa densità, con o senza costante cosmologica, o un Universo misto CHDM, migliora di solito l'accordo con i dati. Queste conclusioni sono state confermate dai lavori basati sulle simulazioni ad N corpi, come quelli di Ueda, Itoh & Suto (1993) o di Klypin et al. (1993).

L'abbondanza degli ammassi può essere usata per stimare la varianza di massa su scale dell'ordine di ~ 10 Mpc, dato che la posizione del taglio esponenziale della MF è molto più sensibile alla normalizzazione che allo spettro di potenza. Questo è stato fatto, per esempio, da White, Efstathiou & Frenk (1993), Bond & Myers (1993c), ed Eke, Cole & Frenk (1996); tutti questi autori riportano che σ_8 , la varianza di massa su $8 h^{-1}$ Mpc, è attorno a 0.6 se $\Omega_0 = 1$, ed attorno ad uno se $\Omega_0 \sim 0.3$. Un'altra importante quantità osservativa connessa con gli ammassi di galassie è la loro traccia sul CMB, attraverso il cosiddetto effetto Sunyaev-Zeldovich (Sunyaev & Zel'dovich 1972). Questo effetto sarà misurabile in maniera estesa grazie alla prossima generazione di satelliti dedicati alle osservazioni del CMB; su questo argomento sono stati sviluppati molti lavori teorici (vedi ad esempio Schaeffer & Silk 1988b; Cole & Kaiser 1989; Cavaliere, Menci & Setti 1991; Makino & Suto 1993; Bartlett & Silk 1994; Barbosa et al. 1996; Bond & Myers 1996c). Infine, molti gruppi stanno simulando gli ammassi di galassie per mezzo di simulazioni ad N corpi con SPH; vedi ad esempio Evrard (1990), Thomas & Couchman (1992), Navarro, Frenk & White (1995b), Ostriker & Cen (1996), Lubin et al. (1996), Anninos & Norman (1996).

È interessante notare che, mentre l'abbondanza degli ammassi sembra suggerire un Universo a bassa densità (mettendo per il momento a parte la possibilità di un Universo CHDM), altre evidenze osservative suggeriscono fortemente la presenza di Universi piatti. Molti ammassi mostrano forti o deboli sottostrutture (vedi ad esempio West 1994); anche la parte centrale dell'ammasso molto ricco di Coma, se osservato abbastanza accuratamente, mostra qualche grado di sottostruttura. Se questa sottostruttura è un ricordo di un recente evento di accrescimento, e se le sottostrutture non sopravvivono che per un tempo più piccolo di quello di Hubble all'interno delle profonde buche di potenziale, allora il grado di sottostruttura indicherebbe che tali ammassi si sono formati di recente, e che quindi la cosmologia di fondo è piatta (vedi ad esempio Richstone, Loeb & Turner 1992; Evrard 1994; Cro-ne. Evrard & Richstone 1996; West, Jones & Forman 1995). Tuttavia, un Universo piatto con costante cosmologica potrebbe riuscire a produrre una quantità sufficiente di sottostruttura (Jing et al. 1995). Un argomento analogo può essere dato per i gruppi compatti di galassie: essi possono crearsi come configurazioni transienti in normali gruppi di galassie, a patto che la densità sia critica; il caso di costante cosmologica sarebbe solo marginalmente inconsistente con l'evidenza osservativa (Governato, Tozzi & Cavaliere 1996).

Questa breve rassegna è stata limitata alla visione "Lagrangiana" degli ammassi di galassie, cioè polarizzata verso le problematiche della massa degli ammassi e della loro struttura interna. Sono state volutamente trascurate le importanti problematiche "Euleriane" della distribuzione spaziale degli

ammassi, del loro spettro di potenza, delle loro velocità peculiari, del loro dipolo; tali problematiche non sono di interesse immediato nel presente contesto. Tuttavia è interessante notare che uno dei metodi proposti in letteratura per analizzare efficacemente tali quantità è quello di costruire campioni sintetici di ammassi selezionandoli dai picchi del campo di densità, simulato con realizzazioni Monte Carlo ed evoluto con l'approssimazione di Zel'dovich (Borgani, Coles & Moscardini 1994); tale procedura ha evidenti connessioni con la teoria dinamica della MF.

5.2.3 Discussione

Come detto prima, si assume di solito che gli ammassi collassino sfericamente, dal momento in cui essi provengono da fluttuazioni rare. Nel capitolo 3 era stato visto che il collasso sferico non riproduce correttamente la statistica dei tempi di collasso neanche per gli eventi rari. Di fatto, le due conclusioni non sono immediatamente in contraddizione, dato che il tempo di collasso di una struttura estesa non è la stessa cosa del collasso locale di un elemento di massa infinitesimo. Tuttavia, il fatto che molte simulazioni ad N corpi trovino un accordo con la PS solo a patto di diminuire il parametro δ_c al valore ~ 1.5 , come predetto nel capitolo 4, sembra confermare che la non sfericità giochi un ruolo importante anche nella formazione degli ammassi. Tuttavia, tutti questi ragionamenti sono solo qualitativi e non del tutto soddisfacenti, dato che manca una considerazione importante.

Questa è stata ben espressa da Cavaliere, Colafrancesco & Menci (1991): gli ammassi sono oggetti *mal definiti* nello spazio e nel tempo. Mentre è del tutto chiaro che gli ammassi esistano (l'emissione X ne è la prova cruciale), non è chiaro dove essi terminino, e questa indeterminazione influenza fortemente la definizione stessa di massa totale dell'ammasso, concetto che sembra mal definito. Inoltre, si assume di solito che gli ammassi siano sferici, mentre le stesse simulazioni ad N corpi suggeriscono che le parti esterne dell'ammasso sono dominate da una rete di strutture a frittella o filamentari, e l'accrescimento non avviene per conchiglie concentriche ma attraverso i filamenti.

In questo senso, la teoria dinamica della MF può dare un contributo importante ai modelli di formazione degli ammassi. La materia che appartiene all'ammasso può essere definita come la materia appartenente ad una regione di multi flusso ad una certa scala; se l'insieme di escursione nello spazio Lagrangiano è semplicemente connesso, la massa dell'ammasso risulterebbe ben definita, almeno dal punto di vista teorico. Un confronto con le simulazioni ad N corpi può aiutare a capire se tutta questa massa debba essere ritrovata in un unico blocco rilassato o in una struttura più complicata (nello

spazio Euleriano). Una descrizione dinamica del tipo di quella presentata nel capitolo 3 tiene meglio conto dei transienti gravitazionali; come suggerito dalla presenza di numerose sottostrutture, gli ammassi sono probabilmente dominati da questi transienti dinamici, e quindi la teoria dinamica della MF può fornire interessanti approfondimenti del problema della loro formazione. Inoltre, se le sottostrutture sono il ricordo di recenti fusioni, la teoria dinamica della MF, estesa alla descrizione delle storie di accrescimento, può essere utilizzata per connettere la statistica di tali sottostrutture con i modelli cosmologici, con particolare attenzione al valore della densità di fondo.

I gruppi di galassie sono oggetti ancor più mal definiti, specialmente quelli poveri ed aperti, della cui esistenza è fin lecito dubitare. Dal punto di vista della MF dinamica, essi stanno appena al di sotto della massa critica M_* , e quindi al limite della validità della teoria. Le considerazioni sviluppate nei capitoli precedenti potrebbero aiutare a comprendere lo stato dinamico di tali gruppi aperti, che potrebbero essere connessi a strutture che hanno appena subito il loro primo collasso, o devono subirlo nell'immediato futuro cosmologico. Dato che gli insiemi di escursione di tali strutture presentano già geometrie e topologie complesse, è probabile che solo un'attenta analisi di simulazioni numeriche, interpretate alla luce della MF dinamica, possa chiarire lo stato dinamico dei gruppi aperti, e se tali oggetti possano essere utili per ottenere vincoli cosmologici.

5.3 Oggetti ad alti redshift

I nuclei galattici attivi (*active galactic nuclei*, AGN), sono gli oggetti compatti più luminosi che possiamo osservare nel nostro Universo. Si pensa che essi consistano in un buco nero supermassivo (*supermassive black hole*, SBH) che accresce ingoiando materia proveniente da una struttura ospite, che si pensa sia una galassia o una protogalassia. La disposizione geometrica della materia che cade dentro il buco nero determina il tipo di emissione e le sue proprietà spettrali. Gli AGN più luminosi sono chiamati quasar (*quasi-stellar radio sources*) o, più generalmente, QSO (*quasi-stellar objects*), anche se recentemente è stato possibile osservare la galassia ospite di qualche QSO vicino. Il paradigma del SBH è la base per i cosiddetti *modelli unificati di AGN*, che cercano di descrivere tutti i tipi di AGN come realizzazioni diverse dello stesso tipo di oggetto. In pratica, tale paradigma non è mai stato dimostrato osservativamente, ma i presenti vincoli di alta efficienza del motore centrale, di grande compattezza e di breve tempo di variabilità (che può essere anche inferiore ad un giorno) ostacolano fortemente tutti i modelli non basati su buchi neri. Il problema degli AGN è stato ampiamente discusso e analizzato

da una letteratura molto vasta; gli argomenti principali sono stati passati in rassegna ad esempio da Rees (1984), Lawrence (1987) e Blanford (1990).

La rilevanza dei QSO in cosmologia è molto grande, dato che tali oggetti sono visibili fino a redshift molto alti, come $z=4-5$. Essi possono quindi essere utilizzati per sondare l'Universo a distanze molto grandi e tempi molto remoti. Inoltre, negli spettri degli AGN sono state scoperte intere "foreste" di righe Lyman α in assorbimento, con una varietà di redshift (ovviamente inferiori a quello del QSO). Si pensa che tali righe Lyman α siano prodotte da nuvole di gas che giacciono nella stessa linea di vista del QSO; le righe più forti (sistemi Lyman α smorzati) sono probabilmente associate a dischi protogalattici; alcuni di essi sono già stati osservati dai telescopi ottici. Questa classe di oggetti è un ulteriore prezioso strumento per vincolare i modelli cosmologici ad alti redshift.

5.3.1 Formazione di QSO in ambito cosmologico

L'evento dell'attività QSO accoppia ciò che avviene a scale molto piccole, dell'ordine dell'orizzonte degli eventi del SBH centrale (~ 0.01 pc o meno), con la scala cosmologica del collasso, che a $z \sim 2$ è dell'ordine di ~ 1 Mpc; questo rende il problema molto difficile da affrontare. È essenzialmente impossibile seguire la creazione di un buco nero in ambito cosmologico con le simulazioni attuali, e probabilmente con quelle dell'immediato futuro, poiché l'intervallo di scale è troppo grande, ed i meccanismi fisici troppo complessi (vedi ad esempio Rees 1984). L'unico modo di affrontare tale problema è attraverso argomenti analitici.

Si ritiene che le fasi principali dell'attività QSO siano le seguenti (vedi ad esempio Haehnelt & Rees 1993, o Eisenstein & Loeb 1995b):

1. La perturbazione entro la quale si formerà il SBH, che si assume essere una perturbazione rara e piuttosto massiva, acquisisce momento angolare durante l'evoluzione debolmente non lineare (Peebles 1969; White 1984). In questo momento, il gas segue la materia oscura.
2. La perturbazione collassa e forma un alone virializzato. Il gas viene riscaldato dalle onde d'urto, ma almeno una parte di esso si raffredda e forma un disco sostenuto dalla rotazione.
3. Il disco si raffredda e si frammenta, formando stelle. Le esplosioni di supernove possono spazzare via tutto il gas, se la buca di potenziale non è abbastanza profonda.

4. Nel frattempo la parte centrale del disco può perdere momento angolare per mezzo di un certo numero di processi viscosi, tra i quali le instabilità gravitazionali, la turbolenza (che può essere indotta dalle supernove) o i campi magnetici.
5. Se la parte centrale del disco riesce a comprimersi fino a raggi abbastanza piccoli, effetti relativistici possono entrare in gioco, provocando meccanismi viscosi capaci di fare cadere il gas a raggi ancora più piccoli.
6. Se si instaura una contrazione divergente, il disco può evolvere in un disco relativistico supermassivo o una stella supermassiva rotante, dipendentemente dalla quantità di momento angolare che rimane. Tali configurazioni sono altamente instabili e provocano la formazione di un SBH in un tempo cosmologicamente breve.
7. La materia cade nel SBH; viene emessa radiazione con un'alta efficienza, dell'ordine del 10% in mc^2 , dove m è la massa che cade dentro il SBH. Durante le prime fasi, il SBH può irradiare con una luminosità superiore a quella di Eddington, ma alla fine si raggiunge uno stadio di equilibrio ed il SBH continua ad accrescere al limite di Eddington.
8. Il "carburante" finisce, la materia smette di cadere sul SBH, la cui luminosità diminuisce improvvisamente al di sotto di quella di Eddington. La fase di piena attività dura molto meno di un tempo di Hubble, circa 10^7 yr.
9. Eventualmente può essere disponibile per il SBH del nuovo carburante; questo può avvenire a causa di eventi di fusione dell'oggetto ospite, o in generale a causa di interazioni con l'ambiente circostante. In questo caso l'AGN può ritornare in attività, anche se di bassa luminosità.

L'ultimo passaggio è stato analizzato dal sottoscritto (Monaco et al. 1994); nell'appendice questo argomento è descritto con qualche dettaglio.

Da questa lista di eventi, probabilmente ottimistica rispetto alla vera entità del problema, emerge chiaramente la complessità del fenomeno AGN in ambito cosmologico. I principali vincoli osservativi che le teorie di formazione dei QSO in ambito cosmologico devono soddisfare sono l'evoluzione delle abbondanze in funzione del redshift, la funzione di luminosità e l'evidenza osservativa che le masse dei residui SBH, presenti nelle comuni galassie, non sono molto grandi, tipicamente dell'ordine di $10^6 M_{\odot}$ e raramente più grandi (vedi ad esempio Salucci & Szuszkiewicz 1996).

Dal punto di vista osservativo, i QSO luminosi mostrano una densità numerica comovente che aumenta rapidamente fino a $z \simeq 2$, rimane più o meno

costante fino a $z \simeq 3$ e quindi diminuisce di nuovo, anche se le misure ad alto redshift sono ancora incerte (vedi, ad esempio, Boyle 1993). Se il SBH irradia alla luminosità di Eddington, si può trasformare la funzione di luminosità dei QSO nella distribuzione delle masse dei SBH, con la sorprendente conclusione che la massa dei buchi neri diminuisce col tempo. Questa conclusione non è assurda come sembra a prima vista: se si assume, come detto prima, che l'attività QSO duri molto meno di un tempo di Hubble, le masse dei buchi neri si riferiscono a quelli appena formati, che possono essere più piccoli a tempi più grandi poiché gli aloni che si formano in quel caso hanno densità centrali più piccole (Haehnelt & Rees 1993). In effetti, l'attività QSO deve durare molto meno di un tempo di Hubble, altrimenti le luminosità osservate implicherebbero buchi neri di masse troppo grandi, in contraddizione con le evidenze osservative (Cavaliere et al. 1983).

Il problema della formazione dei QSO è stato studiato da molti autori, tra cui Efstathiou & Rees (1988), Cole & Kaiser (1989), Carlberg (1990), Nusser & Silk (1993), Kashlinsky (1993), Katz et al. (1994), Fugikita & Kawasaki (1994), Yi (1996). Tali autori hanno tipicamente stimato il numero dei QSO assumendo *a priori* in quale tipo di oggetto (alone di materia oscura) i SBH possono essere ospitati. Il numero di aloni è stato generalmente stimato per mezzo della MF di PS, a volte confrontata con simulazioni ad N corpi (come nei lavori di Efstathiou & Rees 1988 e Katz et al. 1994). Haehnelt & Rees (1993), Haehnelt (1993), ed Eisenstein & Loeb (1995a,b) hanno invece affrontato in dettaglio il problema della formazione di SBH; questi lavori saranno ora brevemente descritti.

Haehnelt e Rees ritengono che i SBH si formino all'interno dei comuni proto-bulbi delle galassie a spirali. Si può infatti porre un limite inferiore alla profondità della buca di potenziale nella quale si forma un SBH, imponendo che essa sia abbastanza profonda da non permettere che le supernove spazzino via tutto il gas: negli aloni con velocità viriali inferiori a ~ 200 km/sec non si possono formare SBH. D'altra parte, l'efficienza del processo di formazione dei SBH dipende probabilmente dalla densità centrale dell'alone, la quale è più grande ad alti redshift, in quanto gli aloni, che raggiungono l'equilibrio viriale ad un contrasto di densità costante rispetto alla densità di fondo, sono più concentrati (vedi la §1.2.4). L'efficienza della formazione dei SBH può quindi essere descritta dalla seguente formula:

$$\frac{M_{BH}}{M_{halo}} = \epsilon_* \left(\frac{1+z}{1+z_*} \right)^\gamma \exp \left(- \left(\frac{v_*}{v} \right)^{2\beta} \right). \quad (5.11)$$

Qui v è la velocità viriale dell'alone, z è il redshift di formazione ed ϵ_* , z_* , β e γ sono parametri liberi. Questa parametrizzazione permette di predire

masse di buchi neri più piccole a redshift più piccoli, in linea con quanto su accennato. Tale efficienza può essere inserita nella MF di PS per ottenere l'abbondanza dei SBH; la curva così ottenuta può essere convoluta con una curva di luce dei QSO, ragionevole ma speculativa (e che introduce altri due parametri liberi), per ottenere infine la funzione di luminosità dei QSO, da confrontare con le osservazioni. Si assume infine che l'attività QSO dovuta non alla formazione di nuovi SBH ma alla riattivazione di quelli vecchi, evento di cui non si tiene conto nel modello, influenzi ad alti redshift la funzione di luminosità soltanto nella parte degli oggetti deboli. Haehnelt (1993) ha studiato i vincoli cosmologici che si possono ottenere per mezzo di questa procedura.

Eisenstein e Loeb hanno adottato un punto di vista molto diverso; essi hanno concentrato la loro attenzione sul momento angolare della struttura collassante. In lavori precedenti, Loeb (1993; vedi anche Umemura, Loeb & Turner 1993) aveva proposto che i buchi neri si possano formare a redshift molto alti, $z \sim 100$, a patto che la struttura collassante perda abbastanza momento angolare per attrito Compton contro il CMB. Tale processo può essere efficace solo se è presente abbastanza potenza su piccola scala a quei redshift; questo non è il caso del modello CDM e di tutte le sue varianti, poiché lo spettro di potenza è molto ripido a scale molto piccole ($P(k) \propto k^{-3}$), al limite dell'ammassamento gerarchico. Loeb & Rasio (1994) considerarono l'evoluzione di una nube protogalattica di gas per mezzo di simulazioni numeriche, raggiungendo la conclusione che la formazione di un SBH è fortemente ostacolata dal momento angolare, a meno che non sia già presente un buco nero di massa moderata ($10^6 M_{\odot}$).

Avendo riconosciuto l'importanza del momento angolare, i due autori di cui sopra stimarono il momento angolare acquisito da un blocco collassante, modellandolo come un ellissoide omogeneo. In questo caso bisogna stare molto attenti a descrivere in modo opportuno l'evoluzione non lineare della materia che circonda l'ellissoide, dato che questa influenza in maniera significativa la quantità di momento angolare finale; per far ciò essi hanno diviso la materia attorno all'ellissoide in regioni concentriche, facendo evolvere ognuna di esse nel regime non lineare, tenendo conto di tutte le mutue interazioni. In questa maniera essi hanno calcolato la distribuzione del momento angolare delle concentrazioni rare, trovando che un numero piccolo ma sufficiente di strutture riesce a collassare con un momento angolare abbastanza piccolo, e quindi con una dimensione abbastanza compatta, perché possano instaurarsi dei meccanismi efficaci di viscosità. Tuttavia, il blocco collassato può frammentarsi e formare stelle prima di contrarsi abbastanza da entrare in quella catena di eventi, esposta prima, che termina con la formazione di un buco nero. Si possono quindi confrontare i tempi scala di dissipazione del momento

angolare e di formazione stellare; quest'ultimo rimane un parametro libero. Quando il disco riesce a contrarsi prima di formare stelle, si assume che si formi un buco nero. Si ottiene infine il seguente risultato: è possibile formare grandi buchi neri ad alti redshift, $z > 10$; essi diventano poi visibili quando attorno a loro collassa una struttura delle dimensioni di una protogalassia (o di un protobulbo), capace di fornire abbastanza gas da dare vita ad attività QSO.

Un terzo scenario è stato recentemente proposto da Cavaliere, Perri & Vittorini (1996); per evitare l'introduzione di un eccessivo numero di ipotesi e parametri liberi, essi hanno ipotizzato un'efficienza costante di formazione di SBH: ogni alone contiene un buco nero di massa pari ad un millesimo della massa totale; essi hanno inoltre ammesso la possibilità che le interazioni influenzino anche i QSO più luminosi. Utilizzando il formalismo dei tempi scala di Cavaliere, Colafrancesco & Scaramella (1991), essi hanno introdotto sia un tempo scala di formazione del SBH che un tempo scala di interazione. Essi sono così riusciti a riprodurre la funzione di luminosità dei QSO con un numero molto limitato di parametri liberi. Tuttavia il processo di formazione del SBH rimane trattato ad un livello euristico, mentre viene messo in evidenza il ruolo importante delle interazioni.

La teoria dinamica della MF descritta nei capitoli 3 e 4 può dare un contributo sostanziale a questa problematica. Infatti, come mostrato da White (1984) e più recentemente da Catelan & Theuns (1996a,b), la dinamica Lagrangiana è uno strumento ideale per seguire l'acquisizione di momento angolare da parte di un blocco che collassa: il momento angolare è acquisito durante l'evoluzione debolmente non lineare della perturbazione, il regime dinamico in cui la descrizione data dalle perturbazioni Lagrangiane è accurata. Per calcolare il momento angolare acquisito da una struttura estesa, è necessario integrare il contributo infinitesimo di ogni elemento di massa su tutta la regione dello spazio Lagrangiano corrispondente alla struttura finale. Come è stato detto nella §4.4, la determinazione di tali regioni è alquanto complicata; Catelan e Theuns hanno considerato il caso di un picco ellissoidale, assumendo *a priori* che esso avrebbe formato una struttura. Il problema può comunque essere affrontato per mezzo di simulazioni Monte Carlo del tipo descritto nella §3.3.2. È interessante notare come sia in questo modo possibile non solo quantificare il momento angolare di ogni struttura collassata, ma anche descrivere la storia dell'acquisizione di tale momento angolare; questo potrebbe dare informazioni preziose per capire come tale momento angolare si redistribuisca all'interno della struttura.

Bisogna comunque tenere presente che il momento angolare globale della struttura ospite è una quantità diversa dal momento angolare del nucleo barionico centrale, che può collassare in un SBH; è ragionevole supporre una

relazione tra le due quantità, ma questa relazione può essere tutt'altro che banale. Inoltre, se la geometria del collasso non è semplice, il momento angolare globale può essere una quantità poco vincolante per la dinamica, visto che le traiettorie possono essere altamente irregolari. Anche in questi casi complicati, la teoria dinamica della MF può aiutare ad approfondire la comprensione del problema, visto si ha a disposizione per ogni particella una buona approssimazione della traiettoria fino al collasso.

5.3.2 Nubi Lyman α

Come accennato prima, gli spettri dei QSO mostrano, dalla parte blu della loro riga di emissione Lyman α^1 , una "foresta" di righe di assorbimento, di larghezza di circa ~ 25 km/s. Lynds (1971) fu il primo a capire che esse sono righe di assorbimento da parte di nubi di gas giacenti nella stessa linea di vista del QSO. Tali nubi costituiscono una nuova classe di oggetti ad alto redshift, le cui proprietà possono essere utilizzate per vincolare i modelli cosmologici.

Lo stato dell'arte relativo alla ricerca ed all'interpretazione di tali nubi può essere trovato, ad esempio, negli atti, editi da Meylan (1995), di un congresso dedicato all'argomento. Le principali evidenze osservative possono essere riassunte come segue:

- Sono note tre classi principali di assorbitori Lyman α . Gli oggetti della prima classe sono associati a righe con alta densità di colonna di idrogeno neutro, $N_{HI} \geq 3 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-2}$, e basse dispersioni di velocità, ~ 10 km/sec. Tali righe sono rare rispetto alla popolazione della foresta Lyman α , mostrano vistose ali di smorzamento, e ad esse sono associate altre righe di elementi pesanti; le strutture ad esse associate sono chiamate sistemi Lyman α smorzati, e sono di solito interpretate come la parte interna di dischi protogalattici.
- Le nubi associate a righe con densità di colonna maggiore di $N_{HI} \geq 3 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ (tali righe sono saturate, ma non mostrano le ali di smorzamento) sono chiamate nubi al limite di Lyman; si ritiene che queste strutture siano associate alle zone esterne, meno dense dei dischi protogalattici.

¹Tali righe sono emesse nel lontano ultravioletto, e sono quindi usualmente molto difficili da osservare, poiché tale radiazione è assorbita dall'idrogeno neutro presente nella nostra Galassia; tuttavia, a causa del redshift cosmologico, tali righe vengono da noi osservate nella banda ottica.

²Si stima la densità di colonna per mezzo della profondità della riga, la dispersione di velocità per mezzo della larghezza

- La terza classe di oggetti è quella associata alle righe di densità di colonna inferiore al limite di Lyman, che costituiscono la vera e propria foresta Lyman α ; si ritiene che tali righe siano associate a nubi di contrasto di densità molto basso.
- Non si sa molto sulla reale geometria di tali nubi. In alcuni casi è stato possibile osservare delle galassie ad alti o medi redshift, associate a righe Lyman α (vedi ad esempio Lanzetta et al. 1995, Steidel et al. 1996). Qualche osservazione, basata sulle coppie vicine di QSO, ha suggerito che le nubi Lyman α possano essere associate a strutture spazialmente estese (vedi ad esempio Dinshaw et al. 1995; Bajtlik 1995).

In questa esposizione trascuro molte problematiche importanti, come le abbondanze degli elementi nelle nubi Lyman α e la loro interpretazione, o come l'importante problema delle correlazioni spaziali di tali nubi; tali argomenti sono passati in rassegna in Meylan (1995).

Se l'associazione tra sistemi Lyman α smorzati o al limite di Lyman e protogalassie è generalmente accettata, l'interpretazione della foresta di Lyman α è ancora incerta. Sargent et al. (1980) avevano proposto un modello in cui la nube è confinata dalla pressione esercitata dal mezzo intergalattico circostante; tale modello però non riesce facilmente a riprodurre la varietà delle densità di colonna osservate. Un altro modello, proposto da Rees (1986) e Ikeuchi, Murikama & Rees (1988), associa tali nubi a piccoli aloni di CDM (vedi anche Bond, Szalay & Silk 1988; Mo, Miralda-Escudé & Rees 1993; Gnedin & Hui 1996; Hui, Gnedin & Zhang 1996). Tale modello non soddisferebbe il vincolo menzionato prima sull'estensione delle nubi Lyman α . Recentemente, è stato proposto che le nubi Lyman α possano essere associate non ad aloni virializzati, ma a strutture a frittella, che hanno subito il collasso lungo un asse ma possono essere ancora in espansione sugli altri assi (Haehnelt 1995). Recenti simulazioni ad N corpi con SPH suggeriscono che le nubi Lyman α smorzate e al limite di Lyman potrebbero essere associate ad aloni più o meno virializzati (see, e.g., Gardner et al. 1996; Rauch, Haehnelt & Steinmetz 1996).

L'abbondanza dei sistemi Lyman α smorzati, interpretati come protogalassie, sta ormai diventando un vincolo standard per i modelli cosmologici; sono stati utilizzati, ad esempio, da Mo & Miralda-Escudé (1994), Klypin et al. (1995) e Liddle et al. (1996). Tali autori utilizzano tipicamente la teoria di PS (a volte confrontata con i risultati di simulazioni ad N corpi) per trovare il numero di aloni che possono ospitare una nube. È da notare il fatto che alcuni dei suddetti autori seguono il suggerimento di Monaco (1995), utilizzando un parametro δ_c di circa 1.5; per esempio, Klypin et al. (1995)

trovano $\delta_c=1.5$ nel confronto con le simulazioni, mentre Liddle et al. (1996) utilizzano 1.5 solo per le nubi Lyman α , interpretate come strutture che hanno appena subito il loro primo collasso, mentre riservano il valore sferico 1.69 per gli ammassi di galassie, considerati più rilassati (il che, come dimostrato nei precedenti capitoli, non è del tutto corretto). L'utilizzo in cosmologia di tali oggetti è ancora discusso: vedi, ad esempio, Haehnelt (1996), Cen et al. (1994), Cen (1996); una critica generale potrebbe essere che i risultati di tali confronti sono ancora molto dipendenti dalle ipotesi utilizzate.

La teoria dinamica della MF può anche in questo caso dare un contributo all'approfondimento di questo argomento. Infatti, nella teoria dinamica vengono trattati in maniera realistica i transienti gravitazionali, come le strutture a frittella e filamentari, che probabilmente dominano la dinamica delle nubi Lyman α , soprattutto quelle di densità di colonna più bassa; inoltre, la gran quantità di informazione dinamica disponibile può essere utilizzata per modellare il comportamento del gas in maniera realistica.

Come commento finale, la teoria dinamica della MF può anche dare un importante contributo ad un problema intimamente connesso alla formazione di QSO e di nubi Lyman α , nonché al problema della reionizzazione dell'idrogeno primordiale, cioè la formazione dei primi oggetti luminosi dell'Universo (Tegmark et al. 1996; Rees 1996), che potrebbero essere collegati al collasso gravitazionale delle prime strutture, dominate ancora una volta dai transienti gravitazionali.

Capitolo 6

Prospettive

Spero di aver dato nei capitoli precedenti la sensazione di come il problema della funzione di massa sia un campo vivo e promettente della cosmologia, sia dal punto di vista teorico che da quello osservativo: i risultati certi sono ben pochi, i problemi aperti numerosi, e molte delle procedure descritte sono ancora da sviluppare in dettaglio.

Dal punto di vista teorico, i problemi maggiori sono a mio parere i seguenti:

- Bisogna comprendere bene cosa sia la massa totale assegnata ad una struttura, e trovare per essa una definizione rigorosa, ben posta e di facile interpretazione, che sia anche da guida per l'interpretazione delle osservazioni. La possibilità di trovare tale definizione è ostacolata da parecchi fatti; per esempio, non è opportuno supporre *a priori* la forma del profilo di densità della struttura, o imporre qualche simmetria particolare su di essa; bisogna inoltre tenere presente che nelle parti esterne della struttura possono sovrapporsi zone già collassate con zone ancora in caduta.
- Bisogna descrivere in maniera opportuna la geometria delle zone collassate nello spazio Lagrangiano, andando oltre la classica regola d'oro descritta in dettaglio nella §4.4. Nel caso realistico in cui il processo statistico che sta alla base della MF sia non Gaussiano, è necessario ricorrere a tecniche Monte Carlo per tale determinazione, stando però attenti ad inserire il maggior numero possibile di elementi analitici, in maniera che la formulazione finale sia analiticamente manipolabile.
- Bisogna aggiungere dell'altra fisica alla funzione di massa dinamica, per descrivere eventi come la frammentazione e l'aggregazione di strutture già collassate. In questa maniera si potrebbe iniziare a risolvere la

dinamica all'interno delle strutture, cosa indispensabile nel momento in cui si vogliono descrivere le galassie, che possono essere considerate in buona parte come sottostrutture di gruppi ed ammassi. La teoria cinetica della funzione di massa, descritta nella §2.5.3, va in questa direzione; è in questo senso molto interessante il formalismo degli alberi di Cayley, capace di descrivere contemporaneamente l'ammassamento gerarchico diretto e l'aggregazione cinetica.

Lo stato dell'arte osservativo è alquanto promettente, specialmente per gli ammassi di galassie, per i quali sono disponibili tre procedure indipendenti per la stima delle masse. Il maggior problema è a mio parere ancora una volta la definizione della massa totale delle strutture: senza una comprensione profonda di cosa ciò significhi, ogni confronto tra teoria della funzione di massa ed osservazioni sarà sempre molto incerto; d'altra parte, le osservazioni sono in questo momento così incerte che tale indeterminazione risulta di impatto modesto. Un altro problema inerente alle stime osservative è il fatto che esse si basano su qualche ipotesi abbastanza restrittiva: le stime viriali si basano naturalmente sull'ipotesi, non verificata se non approssimativamente, che l'ammasso sia virializzato; le stime X si basano sull'ipotesi di sfericità dell'ammasso, anch'essa valida solo approssimativamente, e di gas in equilibrio ed isoterma; le stime basate sugli archi giganti suppongono una particolare geometria dell'ammasso, mentre le stime basate sulle lenti deboli presentano ancora diversi problemi tecnici. Tutte queste tecniche potranno essere migliorate, permettendo di rilassare alcune delle ipotesi, nel momento in cui aumenteranno in maniera considerevole sia il numero delle osservazioni che la loro qualità. Nel frattempo i teorici preferiscono confrontare le loro teorie con le quantità direttamente misurate, cioè le dispersioni di velocità, le temperature o le luminosità X , trasferendo di fatto tutte le ipotesi su menzionate dalle procedure osservative alla teoria, dove in linea di principio tutto è sotto controllo.

Questa tesi costituisce, più che un punto di arrivo, un punto di partenza per le mie ricerche future nel campo della cosmologia. Le possibili applicazioni di questa teoria sono già state messe in evidenza nel capitolo 5; le idee principali che intendo sviluppare nel futuro sono le seguenti:

- **Confronto con le simulazioni:** ritengo che il primo passo sia quello di verificare la validità dei calcoli teorici qui presentati, confrontandoli con i risultati di simulazioni numeriche. Questa idea è già un progetto di ricerca attivo, che verrà brevemente descritto nella prossima sezione.
- **Storie di accrescimento:** sono uno dei prodotti più interessanti di una teoria di funzione di massa; per la determinazione rigorosa di tali

quantità è necessario trattare il passaggio dalla risoluzione alla massa (§4.4) in maniera realistica, ovvero comprendere in profondità il significato delle eventuali approssimazioni. L'uso di diversi filtri può avere profonde conseguenze: i filtri Gaussiani permettono di distinguere (in una maniera che potrebbe essere artificiale) tra eventi di accrescimento e di fusione, mentre con i filtri SKS si hanno solo eventi di fusione con altre strutture più o meno grandi; questo è un ulteriore punto da chiarire.

- **Formazione di SBH:** la ricchezza di informazioni dinamiche su ogni struttura collassata permette di descrivere in dettaglio il comportamento di tali strutture; in particolare, è possibile ottenere sia la storia di acquisizione del momento angolare che informazioni sulla geometria del collasso, quantità molto importanti per determinare se all'interno di una struttura possa nascere un buco nero di dimensioni tali da dare origine ad attività QSO.
- **Nubi Lyman α :** essendo tali strutture probabilmente osservate durante fasi dinamiche poco evolute, forse durante il collasso in strutture planari (o forse subito prima del collasso!), la teoria dinamica della funzione di massa può descriverle in maniera soddisfacente; il necessario inserimento della dinamica dei gas potrebbe quindi essere fatto tenendo conto della geometria realistica delle strutture.
- **Gruppi di galassie:** non è affatto chiaro quale sia lo stato dinamico dei gruppi aperti di galassie, se siano reali strutture fisiche, che stanno sperimentando il loro primo collasso, o se non abbiano alcun significato dinamico. La teoria dinamica della funzione di massa potrebbe chiarire se tali strutture siano collegate ai transienti dinamici, come le strutture a frittella, o se possano essere collegati a strutture che non abbiano ancora subito il loro primo collasso. Si potrebbe inoltre chiarire se tali oggetti possano essere utilizzati per ottenere vincoli cosmologici.
- **Ammassi di galassie:** anche in questo caso l'abbondanza di informazioni dinamiche può portare ad una più dettagliata descrizione degli ammassi di galassie, specialmente nelle parti esterne, chiarendone il ruolo dinamico. In particolare, come suggerito prima è importante capire bene cosa sia la massa totale dell'ammasso, cosa che non può essere affrontata realisticamente se non si descrive la dinamica del collasso in maniera opportuna.
- **Sottostrutture negli ammassi:** se tali sottostrutture sono il ricordo della fusione di strutture di massa confrontabile, le storie di accresci-

mento possono essere utilizzate per predire il numero di sottostrutture, che si sa dipendere fortemente dalla densità cosmologica. Tale confronto avrebbe bisogno però dell'inserimento di un elemento esterno, cioè del tempo di sopravvivenza di una sottostruttura; la ricchezza di informazioni data dalla teoria dinamica della funzione di massa sarebbe d'aiuto nella stima di tale quantità.

6.1 Il confronto con le simulazioni

Nel confrontare la teoria di Press e Schechter con le simulazioni numeriche, gli aloni sono sempre stati estratti per mezzo di criteri di overdensità (come l'algoritmo DENMAX), o per mezzo del famoso algoritmo amici-degli-amici, basato sulla percolazione. Tali algoritmi sono parametrici, nel senso che il loro risultato dipende dal valore di un parametro libero, che potrebbe essere un'overdensità limite o un parametro di percolazione (vedi anche la §2.2). Tali parametri possono essere debolmente vincolati per mezzo di argomenti basati sul collasso sferico, che sono quindi di natura molto euristica ed approssimata.

Nel caso della teoria dinamica della funzione di massa, siamo in grado di dire in maniera molto più precisa che cosa voglia dire collasso (o almeno quello che è stato definito come collasso). Non ha quindi senso confrontare i risultati di tale teoria direttamente con le abbondanze di aloni amici-degli-amici o DENMAX; è molto più sensato costruire un algoritmo di riconoscimento delle zone collassate che cerchi di riprodurre esattamente quello che si predice. La definizione di collasso utilizzata nella teoria è basata sul concetto di attraversamento delle orbite, che corrisponde all'annullamento del determinante Jacobiano della trasformazione di coordinate dallo spazio Lagrangiano a quello Euleriano (Eq. 1.40); le alte densità sono solo una conseguenza di tale evento. L'attraversamento delle orbite è un evento molto semplice da comprendere: elementi di massa provenienti da punti diversi arrivano a distanza molto ravvicinata. Se il mezzo cosmologico fosse veramente un fluido perfetto e senza pressione, osserveremmo la formazione di caustiche, ma in realtà tale descrizione è solamente approssimata, visto che viene trascurata tutta la struttura a piccola scala, per mezzo della procedura di filtraggio. L'effetto probabile della piccola scala è quello di rendere le caustiche meno coerenti, diminuendone così la densità effettiva. La maggiore ipotesi della teoria dinamica della funzione di massa rimane quella che la struttura a piccola scala non interferisca in maniera sistematica sulla formazioni di caustiche su grande scala. Si può a questo punto chiarire perché un criterio di sovradsensità non sarebbe adatto per trovare le strutture predette dalla teoria dinamica della funzione di massa: un tale criterio, che comunque rimane parametri-

co (bisogna definire una densità di soglia), selezionerebbe preferibilmente le caustiche di geometria più compatta, le quali, sparpagliate dalla struttura a piccola scala, tendono a rimanere a densità più alta, piuttosto delle caustiche filamentari o a frittella, che verrebbero sparpagliate a densità più basse.

In Monaco (1996a) ho proposto il seguente algoritmo come implementazione naturale del concetto di attraversamento delle orbite in situazioni dinamicamente realistiche, come potrebbe essere una simulazione numerica:

$$\exists \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 : |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2| \geq L, \quad |\mathbf{x}(\mathbf{q}_1, t) - \mathbf{x}(\mathbf{q}_2, t)| < \varepsilon, \quad \varepsilon \ll L. \quad (6.1)$$

In altre parole, gli elementi di massa che stanno in un certo intorno di dimensione ε del punto Euleriano \mathbf{x} appartengono ad una regione di flusso multiplo, su scala maggiore o uguale ad L , se almeno due elementi di massa \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 , provengono da una distanza maggiore o uguale ad L . Tale algoritmo appare molto semplice da implementare in una simulazione numerica, ma il suo successo non appare scontato. Perché tale definizione abbia senso, bisogna trovare un ragionevole intervallo di valori del parametro ε , connesso alla dimensione tipica delle strutture su una certa scala, per i quali la determinazione delle zone collassate sia stabile; in altre parole, ε non deve essere un parametro libero. La dimensione L invece mette in evidenza come tale definizione sia dipendente dalla scala; tale quantità va messa in relazione con la risoluzione Λ , ed il valore esatto di tale relazione va scelto in modo da ottimizzare le predizioni dinamiche, analogamente a quanto viene fatto per l'ottimizzazione dell'approssimazione di Zel'dovich troncata. Tale ottimizzazione deve riguardare anche la forma del filtro, che ci si aspetta essere preferibilmente Gaussiana, anche se questa predizione potrebbe in linea di principio essere smentita dalle analisi.

Questo confronto tra teoria e simulazioni permetterà di chiarire se e quanto la massa totale di una struttura sia una quantità ben definita, e cosa sia esattamente un ammasso; infatti non appartengono ad un ammasso solamente le particelle che si trovano nella sua parte centrale, più densa, ma tutte le particelle che sono in qualche modo entrate in "contatto dinamico" con l'ammasso, penetrando nella sua zona a multi flusso.

Capitolo 7

Bibliografia

- Abell G.O., 1958, ApJS. 3. 211
Abell G.O., Corwin H.G., Olowin R.P, 1989, ApJS, 70, 1
Adler R.J., 1981, The Geometry of Random Fields. Wiley, New York
Anninos P., Norman M.L.. 1996, ApJ, 459, 12
Antonuccio-Delogu, V., Colafrancesco, S., 1994, ApJ, 427, 72
Appel L., Jones B.J.T., 1990, MNRAS, 245, 522
Arnold L., 1973, Stochastic Differential Equations. Wiley, New York
Ashman, K.M., 1992, PASP, 104, 1109
Ashman, K.M., Salucci, P., Persic, M. 1993, MNRAS 260, 610
Audit E., Alimi J.M., 1996, submitted to A&A (preprint astro-ph/9609156)
Avila-Reese V., Firmani C., in Persic M., Salucci P. eds., Dark Matter 1996.
Pasp Conf. Ser., in press
Bagla, J.S., Padmanabhan, T. 1994, MNRAS 266, 227
Bahcall N.A., 1988, ARA&A, 26, 631
Bahcall N.A., Cen, R. 1992, ApJ, 398, L81
Bahcall N.A., Cen, R. 1993, ApJ, 407, L49
Bajtlik S., 1995, in Meylan G. ed., QSO Absorption Lines. Springer, Berlin
Balland C., Blanchard A.. 1995, A&A, 298, 323
Barbosa D., Bartlett J.G., Blanchard A., Oukbir J., 1996, A&A, 314, 13
Bardeen J.M., Bond J.R., Kaiser N., Szalay A.S., 1986, ApJ, 304, 15
Barrow J.D., Silk J., 1981, ApJ, 250, 432
Bartlemann M., Ehlers J., Shneider P. 1993, A&A 280,351
Bartlemann M., Steinmetz M., 1996, preprint astro-ph/9603101
Bartlett J.G., Silk J., 1993, ApJ, 407, L45
Bartlett J.G., Silk J., 1994, ApJ, 423, 12
Beers T.C., Flynn K., Gebhardt K., 1990, AJ, 100, 32
Bernardeau F., 1994a, A&A, 291, 697
Bernardeau F., 1994b, ApJ, 427, 51

- Bernardeau F., Kofman L., 1995, *ApJ*, 443, 479
- Bertola F., Pizzella A., Persic M., Salucci P., 1993, *ApJ*, 416, L45
- Bertschinger, E., Jain, B. 1994, *ApJ*, 431, 486
- Binney J., 1977, *ApJ*, 215, 483
- Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Princeton
- Biviano A., Girardi M., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1993, *ApJ*, 411, L13
- Blanford R.D., 1990, in Courvoisier T.J.L., Mayor M. eds., *Active Galactic Nuclei*. Springer, Berlin
- Blain A.W., Longair M.S., 1993a, *MNRAS*, 264, 509
- Blain A.W., Longair M.S., 1993b, *MNRAS*, 265, L21
- Blanchard A., Valls-Gabaud D., Mamon G.A., 1992, *A&A*, 264, 365
- Bond J.R., 1989, in *Large-Scale Motions in the Universe*, eds. V. Rubin, G. Coyne (Princeton: Princeton University Press)
- Bond J.R., Cole S., Efstathiou G., Kaiser N., 1991, *ApJ*, 379, 440
- Bond J.R., Myers S.T., 1996a, *ApJS*, 103, 1
- Bond J.R., Myers S.T., 1996b, *ApJS*, 103, 41
- Bond J.R., Myers S.T., 1996c, *ApJS*, 103, 63
- Bond J.R., Szalay A.S., Silk J., 1988, *ApJ*, 324, 627
- Borgani S., Coles P., Moscardini L., 1994, *MNRAS*, 271, 223
- Bouchet F.R., 1996, in Bonometto S., Primack J., Provenzale A., eds., *Dark Matter in the Universe*. In press (preprint astro-ph/9603013)
- Bouchet F.R., Colombi S., Hivon E., Juszkiewicz R., 1995, *A&A*, 296, 575
- Bouchet F.R., Juszkiewicz R., Colombi S., Pellat R., 1992, *ApJ*, 394, L5
- Boyle B.J., 1993, in Shull M., Thronson H. eds., *Galaxies and their Environment*. Kluwer, Dordrecht
- Bower R.G., 1991, *MNRAS*, 248, 332
- Brainerd T.G., Villumsen J.V., 1992, *ApJ*, 394, 409
- Brainerd T.G., Sherrer R., Villumsen J.V., 1993, *ApJ*, 418, 570
- Buchert T., 1989, *A&A*, 223, 9
- Buchert T., 1992, *MNRAS*, 254, 729
- Buchert T., 1994, *MNRAS*, 267, 811
- Buchert T., 1996, in Bonometto S., Primack J., Provenzale A. eds., *Dark Matter in the Universe*. In press (preprint astro-ph/9603013)
- Buchert T., Ehlers J., 1993, *MNRAS*, 264, 375
- Buchert T., Melott A.L., Weiß A.G., 1994, *A&A*, 288, 349
- Carlberg R.G., 1990, *ApJ*, 350, 505
- Carlberg R.G., Couchman H.M.P., 1989, *ApJ*, 340, 47
- Catelan P., 1995, *MNRAS*, 276, 115
- Catelan P., Lucchin F., Matarrese S., 1988, *Phys.Rev.Lett.*, 61, 267

- Catelan P., Theuns T., 1996a, MNRAS, 282, 436
 Catelan P., Theuns T., 1996b, MNRAS, 282, 455
 Cavaliere A., Colafrancesco S., 1988 ApJ, 331, 660
 Cavaliere A., Colafrancesco S., 1990, in Oegerle W.R., Fitchett M.J., Danly L. eds., Clusters of galaxies. Cambridge University Press, Cambridge
 Cavaliere A., Colafrancesco S., Menci N., 1991a, ApJ, 376, L37
 Cavaliere A., Colafrancesco S., Menci N., 1991b, in Fabian A.C. ed., Clusters and Superclusters of galaxies. Kluwer Ac. Pub., Dordrecht
 Cavaliere A., Colafrancesco S., Menci N., 1992, ApJ, 392, 41
 Cavaliere A., Colafrancesco S., Menci N., 1993, ApJ, 415, 50
 Cavaliere A., Colafrancesco S., Scaramella R., 1991, ApJ, 380, 15
 Cavaliere A., Fusco Femiano R., 1976, A&A, 49, 137
 Cavaliere A., Giallongo E., Vagnetti F., Messina A., 1983, ApJ, 269, 57 et al. 1983,
 Cavaliere A., Menci N., Setti G., 1991, A&A, 245, L21
 Cavaliere A., Menci N., 1993, ApJ, 407, L9
 Cavaliere A., Menci N., 1994, ApJ, 435, 528
 Cavaliere A., Menci N., Tozzi P., 1994, in Seitter W.C., ed., Cosmological Aspects of X-ray Clusters of Galaxies. Kluwer Ac. Pub., Dordrecht
 Cavaliere A., Menci N., Tozzi P., 1996, ApJ, 464, 44
 Cavaliere A., Perri F., Vittorini V., 1996, in Proceedings of 2nd National Meeting on AGNs. In press
 Cen R., 1996, (preprint astro-ph/9608116)
 Cen R., Miralda-Escudé J., Ostriker J.P., Rauch M., 1994, ApJ, 437, L9
 Chandrasekhar S., 1943. Rev. Mod. Phys., 15, 2
 Charlton J.C., Salpeter E.E., 1991, ApJ, 375, 517
 Colafrancesco S., Lucchin F., Matarrese S., 1989, ApJ, 345, 3
 Colafrancesco S., Vittorio N., 1994, ApJ, 422, 443
 Cole S., 1991, ApJ, 367, 45
 Cole S., Kaiser N., 1988, MNRAS, 233, 637
 Cole S., Kaiser N., 1989, MNRAS, 237, 1127
 Cole S., Aragon-Salamanca A., Frenk C.S., Navarro J.F., Zepf S.E., 1994, MNRAS, 271, 781
 Coles P., Jones B., 1991, MNRAS, 248, 1
 Coles P., Lucchin F., 1995, Cosmology. Wiley, New York
 Coles P., Melott A.L., Shandarin S.F., 1993, MNRAS, 260, 765
 Crone M.M., Evrard A.E., Richstone D.O., 1996, ApJ, 467, 489
 Danziger I.J., 1996, in Persic M., Salucci P. eds., Dark Matter 1996. Pasp Conf. Ser., in press
 Davis M., 1996, in Turok N. ed., Critical Dialogues in Cosmology. In press
 Davis M., Peebles P.J.E., 1983, ApJ, 267, 465

- Dejonghe H., Merritt D., 1992, *ApJ*, 391, 531
- Dekel A., Rees M., 1987, *Nature*, 326, 455
- Dinshaw N., Foltz C.B., Impey C.D., Weymann R.J., Morris S.L., 1995, in Meylan G. ed., *QSO Absorption Lines*. Springer, Berlin
- Doroshkevich, A.G. 1970, *Astrofizika* 6, 581 (transl.: 1973, *Astrophysics* 6, 320)
- Doroshkevich A.G., Kotok T.V., 1990, *MNRAS*, 246, 10
- Edge A.C., Stewart G.C., Fabian A.C., Arnaud K.A., 1990, *MNRAS*, 245, 559
- Efstathiou G.. 1989, in Peacock J.A., Heavens A.F., Davies A.T. eds., *Physics of the Early Universe*. Edinburgh University Press, Edinburgh
- Efstathiou G.. 1995, *MNRAS*, 272, L25
- Efstathiou G.. Ellis R.S., Peterson B.A., 1988, *MNRAS*, 232, 431
- Efstathiou G.. Fall S.M., Hogan C., 1979, *ApJ*, 189, 203
- Efstathiou G.. Frenk C.S., White S.D.M., Davis M., 1988, *MNRAS*, 235, 715
- Efstathiou G.. Rees M.J., 1988, *MNRAS*, 230, 5P
- Eisenstein D.J., Loeb A., 1995a, *ApJ*, 439, 520
- Eisenstein D.J., Loeb A., 1995b, *ApJ*, 443, 11
- Eke V.R., Cole S., Frenk C.S., 1996, preprint astro-ph/9601088
- Ellis, G.F.R. 1971, in *General Relativity and Cosmology*, ed. R.K.Sachs (New York: Academic Press)
- Ellis R.S., Colless M., Broadhurst T., Heyl J., Glazebrook K., 1996, *MNRAS*, 280, 235
- Epstein R.I.. 1983, *MNRAS*, 205, 207
- Epstein R.I.. 1984, *ApJ*, 281, 545
- Ernst M.H.. 1986, in *Fractals in Physics*, eds. L. Pietronero, E. Tosatti (Elsevier Science Publisher)
- Evrard A.E.. 1989, *ApJ*, 341, L71
- Evrard A.E.. 1990, *ApJ*, 363, 349
- Evrard A.E.. 1994, in Durret F., Mazure A., Tran Thanh Van J. eds., *Clusters of Galaxies*. Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette
- Evrard A.E., Summers F.J., Davis M., 1994, *ApJ*, 422, 11
- Fadda D., Girardi M., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1996, *ApJ*, in press (preprint astro-ph/9606098)
- Fort B., Mellier Y., 1994, *A&A Rev.*, 5, 239
- Fugikita M., Kawasaki M., 1994, *MNRAS*, 269, 563
- Gardner J.P., Katz N., Hernquist L., Weinberg D.H., 1996, preprint astro-ph/9609072
- Gelato S., Governato F., 1996, in Persic M., Salucci P. eds., *Dark Matter 1996*. Pasp Conf. Ser., in press
- Gelb J.M., Bertschinger E., 1994, *ApJ*, 436, 467

- Girardi M., Biviano A., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1993. ApJ, 404, 38
- Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1982, ApJ, 255, 361
- Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., Monaco P., 1993, ApJ, 407, 22
- Giuricin G., Gondolo P., Mardirossian F., Mezzetti M., Ramella M., 1988. A&A, 199, 85
- Gnedin N.Y., Hui L., 1996, preprint astro-ph/9608156
- Gott J.R. III, Turner E.L., 1977, ApJ, 216, 357
- Governato F., Tozzi P., Cavaliere A., 1996, ApJ, 458, 18
- Gunn J.E., Gott J.R., 1972, ApJ, 176, 1
- Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F., 1989, MNRAS. 236. 385
- Haehnelt M.G., 1993. MNRAS, 265. 727
- Haehnelt M.G., 1995. in Cold Gas at High Redshift, eds. Bremer et al., in press (preprint astro-ph/9512024)
- Haehnelt M.G., Rees M.J., 1993, MNRAS, 263, 168
- Hanami H., 1993, ApJ. 415, 42
- Harrison E.R., 1970. Phys. Rev. D, 1, 2726
- Henry J.P., Arnaud K.A., 1991, ApJ, 372, 410
- Hoffman Y., 1986, ApJ, 308, 493
- Hoffman Y., 1988, ApJ, 329, 8
- Hucra J.P., Geller M.J., 1982, ApJ, 257, 423
- Hui L., Gnedin N.Y., Zhang Y., 1996, preprint astro-ph/9608157
- Ikeuchi S., Murikama I., Rees M.J., 1988, MNRAS, 236, 21P
- Jain B., Bertschinger E., 1994, ApJ, 431, 495
- Jedamzik K., 1995, ApJ, 448, 1
- Jing Y.P., Mo H.J., Borner G., Fang L.Z., 1995, MNRAS, 276, 417
- Jones C., Forman W., 1991, in Fabian A.C. ed., Clusters and Superclusters of galaxies. Kluwer Ac. Pub., Dordrecht
- Kaiser N., 1984, ApJ, 284, L9
- Kaiser N., 1991, ApJ, 383, 104
- Kaiser N., 1996, in Schramm D. ed., Generation of Large-Scale Cosmological Structures. In press
- Kashlinsky A., 1987, ApJ, 317, 19
- Kashlinsky A., 1993, ApJ, 406, L1
- Katz N., 1992, ApJ, 391, 502
- Katz N., Quinn T., Bertschinger E., Gelb J.M., 1994, MNRAS, 270, L71
- Katz N., Quinn T., Gelb J.M., 1993, MNRAS, 265, 689
- Katz N., Weinberg D.H., Hernquist L., 1996, ApJS, 105, 19
- Kauffmann G., Guideroni B., White S.D.M., 1994, MNRAS, 267, 981
- Kauffmann G., White S.D.M., 1993, MNRAS, 261, 921
- Kauffmann G., White S.D.M., Guideroni B., 1993, MNRAS, 264, 201

- Kitayama T., Suto Y., 1996a, MNRAS, 280, 638
 Kitayama T., Suto Y., 1996b, ApJ, 469, 480
 Klypin A., 1996, in Bonometto S., Primack J., Provenzale A., eds., *Dark Matter in the Universe*. In press
 Klypin A., Holtzman J., Primack J., Regös E., 1993, ApJ, 416, 1
 Klypin A., Borgani S., Holtzman J., Primack J., 1995, ApJ, 444, 1
 Klypin A., Rhee G., 1994, ApJ, 428, 399
 Kofman L.A., Gnedin N.Y., Bahcall N.A., 1993, ApJ, 413, 1
 Kofman L., Pogosyan D., 1995, ApJ, 442, 30
 Kofman L., Pogosyan D., Shandarin S., Melott A., 1992, ApJ, 393, 437
 Kolb E.W., Turner M.S., 1990, *The Early Universe*. Addison-Wesley, New York
 Lacey C., Cole S., 1993, MNRAS, 262, 627
 Lacey C., Cole S., 1994, MNRAS, 271, 676
 Lacey C., Silk J., 1991, ApJ, 381, 14
 Lachièze-Rey M., 1993a, ApJ, 407, 1
 Lachièze-Rey M., 1993b, ApJ, 408, 403
 Lahav O., Lilje P.B., Primack J.R., Rees M.J., 1991, MNRAS, 251, 128
 Lanzetta K.M., Bowen D.B., Tytler D., Webb J.K., 1995, ApJ, 442, 538
 Lawrence A., 1987, PASP, 99, 309
 Lilje P.B., 1990, ApJ, 351, 1
 Lilje P.B., 1992, ApJ, 386, L33
 Limber D.N., Mathews W.G., 1960, ApJ, 132, 286
 Liddle A.R., Lyth D.H., Schaefer R.K., Shafi Q., Viana P.T.P., 1995, MNRAS, in press (preprint astro-ph/9511057)
 Loeb A., 1993, ApJ, 403, 542
 Loeb A., Rasio F.A., 1994, ApJ, 432, 52
 Lokas E.L., Juszkievicz R., Bouchet F.R., Hivon E., 1996, ApJ, 467, L1
 Lubin L.M., Cen R., Bahcall N.A., Ostriker, J.P., 1996, ApJ, 460, 10
 Lynds R., 1971, ApJ, 168, L87
 Lucchin F., 1989, in Flin P., Duerbeck H.W., eds., *Morphological Cosmology*. Springer Verlag, Berlin
 Lucchin F., 1990, *Introduzione alla Cosmologia*. Zanichelli, Bologna
 Lucchin F., Matarrese S., 1988, ApJ, 330, 535
 Lynden-Bell D., 1967, MNRAS, 136, 101
 Ma C., Bertschinger E., 1994, ApJ, 434, L5
 Makino N., Suto S., 1993, ApJ, 405, 1
 Manrique A., Salvador-Solé E., 1995, ApJ, 453, 6
 Manrique A., Salvador-Solé E., 1996, ApJ, 467, 504 (preprint astro-ph/9511012)
 Martínez-González E., Sanz J.L., 1988a, ApJ, 324, 653
 Martínez-González E., Sanz J.L., 1988b, ApJ, 332, 89

- Matarrese S., 1996. in Bonometto S., Primack J., Provenzale A., eds., Dark Matter in the Universe. In press (preprint astro-ph/9601172)
- Matarrese S., Lucchin F., Moscardini L., Saez D., 1992, MNRAS, 259, 437
- Matarrese S., Pantano O., Saez D., 1993, Phys. Rev. D 47, 1311
- Matarrese S., Pantano O., Saez D., 1994, Phys. Rev. Lett. 72, 320
- Materne J., 1978, A&A. 63, 401
- Matteucci F., 1996. Fund. Cosm. Phys., in press
- Mazure A., et al.. 1996. A&A, 310, 31
- Melott A.L., Buchert T., Weiß A.G., 1995, A&A, 294, 345
- Melott A.L., Pellman T., Shandarin S.F., 1994, MNRAS. 269, 626
- Menci N., Colafrancesco S., Biferale L., 1993, J. Phys., 3. 1105
- Menci N., Valdarnini R., 1995, ApJ, 445, 1019
- Merritt D., Gebhardt K.. 1994, in Durret F., Mazure A., Tran Thanh Van J. eds., Clusters of Galaxies. Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette
- Meylan G. (ed.), 1995, QSO Absorption Lines. Springer, Berlin
- Mo H.J., Miralda-Escudé J., 1994, ApJ, 430, L25
- Mo H.J., Miralda-Escudé J., Rees M.J., 1993, MNRAS, 264, 705
- Monaco P., 1994, in Durret F., Mazure A., Tran Thanh Van J. eds., Clusters of Galaxies. Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette
- Monaco P., 1995, ApJ, 447, 23
- Monaco P., 1996a, MNRAS, in press (preprint astro-ph/9606027)
- Monaco P., 1996b, MNRAS, submitted (preprint astro-ph/9606029)
- Monaco P., 1996c, Astrophys. Lett. Comm., 33, 79
- Monaco P., 1996d. Astrophys. Lett. Comm., in press
- Monaco P., 1996e, in Persic M., Salucci P. eds., Dark Matter 1996. Pasp Conf. Ser., in press
- Monaco P., 1996f, in Schramm D. ed., Generation of Large-Scale Cosmological Structures. In press
- Monaco P., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1994, ApJ, 436, 576
- Moutarde F., Alimi J.M., Bouchet F.R., Pellat R., Ramani A., 1991, ApJ, 382, 377
- Narayan R., White S.D.M., 1988, MNRAS, 231, 97P
- Navarro J.F., 1996. in Persic M., Salucci P. eds., Dark Matter 1996. Pasp Conf. Ser., in press
- Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1995a, MNRAS, 275, 56
- Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1995b, MNRAS, 275, 720
- Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M., 1996, ApJ, 462, 563
- Nusser A., Dekel A.. 1990, ApJ, 362, 14
- Nusser A., Silk J., 1993, ApJ, 411, L1
- Occhionero F., Scaramella R., 1988, A&A, 204, 3
- Ostriker J.P., Cen R., 1996, ApJ, 464, 27

- Oukbir J., Blanchard A., 1992, *A&A*, 262, L21
- Padmanabhan T., 1993, *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, Cambridge
- Peacock J.A., Heavens A.F., 1985, *MNRAS*, 217, 805
- Peacock J.A., Heavens A.F., 1990, *MNRAS*, 243, 133
- Peebles P.J.E., 1969, *ApJ*, 155, 393
- Peebles P.J.E. 1980, *The Large Scale Structure of the Universe* (Princeton: Princeton Univ. Press)
- Peebles P.J.E., 1990, *ApJ*, 365, 27
- Peebles P.J.E., 1993, *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press. Princeton
- Peebles P.J.E., Daly R.A., Juszkievicz R., 1989, *ApJ*, 347, 563
- Pen U., 1996. preprint astro-ph/9610147
- Persic M., Salucci P., 1995. *ApJS*, 99, 501
- Persic M., Salucci P., Stel F., 1996, *MNRAS*, 281, 27
- Pietronero L., Montuori M., Sylos-Labini F., 1996, in Turok N. ed., *Critical Dialogues in Cosmology*. In press (preprint astro-ph/9611197)
- Pisani A., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1992, *ApJ*, 389, 68
- Porciani C., Ferrini F., Lucchin F., Matarrese S., 1996, *MNRAS*, 281, 311
- Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1992, *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge
- Press W.H., Schechter P., 1974, *ApJ*, 187, 425
- Press W.H., Teukolsky S.A., 1990, *Computers in Physics* Jan/Feb, 1990, 92
- Rauch M., Haehnelt M.G., Steinmetz M., 1996, preprint astro-ph/9609083
- Rees M.J., 1984, *ARA&A*, 22, 471
- Rees M.J., 1986, *MNRAS*, 218, 25P
- Rees M.J., 1996, preprint astro-ph/9608196
- Rees M.J., Ostriker J.P., 1977, *MNRAS*, 179, 541
- Richstone D., Loeb A., Turner E.L., 1992, *ApJ*, 393, 477
- Risken H., 1989, *The Fokker-Planck Equation*. Springer Verlag, Berlin
- Rodrigues D.D.C., Thomas P.A., 1996, *MNRAS*, 282, 631
- Rubin V.C., Ford W.K.Jr, Thonnard N., 1980, *ApJ*, 238, 471
- Rubin V.C., Burstein D., Ford W.K.Jr, Thonnard N., 1985, *ApJ*, 289, 81
- Ryden B.S., 1988, *ApJ*, 333, 78
- Sahni V., Coles P., 1996, *Phys. Rep.*, in press (preprint astro-ph/9505005)
- Sahni V., Shandarin S.F., 1996. *MNRAS*, 282, 641
- Salucci P., Szuskiewicz E., 1996, in preparation
- Sarazin C.L., 1986, *Rev. Mod. Phys.*, 58, 1
- Sargent W.L.W., Young P.J., Boksenberg A., Tytler D., 1980, *ApJS*, 42, 41
- Sasaki S., 1994, *PASJ*, 46, 427
- Schaeffer R., Silk J., 1985, *ApJ*, 292, 319

- Schaeffer R., Silk J., 1988a, ApJ, 332, 1
Schaeffer R., Silk J., 1988b, ApJ, 333, 509
Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B., 1989, Rev. Mod. Phys., 61, 185
Shandarin S.F., Doroshkevich A.G., Zel'dovich Ya.B., 1983, Sov. Phys. Usp.,
26, 46
Shaviv N.J., Shaviv G., 1993, ApJ, 412, L25
Shaviv N.J., Shaviv G., 1995, ApJ, 448, 514
Schechter P.L., 1976, ApJ, 203, 297
Sheth R.K., 1995, MNRAS, 276, 796
Sheth R.K., 1996, MNRAS, 261, 1277
Silk J., 1977, ApJ, 211, 638
Silk J., 1978, ApJ, 220, 390
Silk J., White S.D., 1978, ApJ, 223, L59
Smoluchowski M., 1916, Phys. Z., 17, 557
Steidel C., Dickinson M., Meyer D., Adelberger K., Sembach K., 1996, pre-
print astro-ph/9610230
Steinmetz M., 1996, in Bonometto S., Primack J., Provenzale A., eds., Dark
Matter in the Universe. In press (preprint astro-ph/9512013)
Sunyaev R.A., Zel'dovich Ya.B., 1970, Astrophys. Space Sci., 7, 3
Tegmark M., Silk J., Rees M.J., Blanchard A., Abel T., Palla F., 1996, ApJ,
in press (preprint astro-ph/9603007)
Thomas P.A., Couchman H.M.P., 1992, MNRAS, 257, 11
Tormen G., Bouchet F.R., White S.D.M., 1996, preprint astro-ph/9603132
Tully R.B., 1987, ApJ, 321, 280
Ueda H., Itoh M., Suto Y., 1993, ApJ, 408, 3
Umemura M., Loeb A., Turner E.L., 1993, ApJ, 419, 459
van de Weygaert R., Babul A., 1994, ApJ, 425, L59
Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A., 1994, A&A, 289, 325
Viana P.T.P., Liddle A.R., 1996, MNRAS, in press (preprint astro-ph/9511007)
Weinberg S., 1972, Gravitation and Cosmology. Wiley, New York
Weiß A.G., Gottlöber S., Buchert T., 1996, MNRAS, 278, 953
West M.J., 1994, in Durret F., Mazure A., Tran Thanh Van J. eds., Clusters
of Galaxies. Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette
West M.J., Jones C., Forman W., 1995, ApJ, 451, L5
White S.D.M., 1984, ApJ, 286, 38
White S.D.M., in Schaeffer R. ed., Les Houches 1993. In press
White S.D.M., Frenk C.S., 1991, ApJ, 379, 52
White S.D.M., Efstathiou G., Frenk C.S., 1993, MNRAS, 262, 1023
White S.D.M., Rees M.J., 1978, MNRAS, 183, 341
White S.D.M., Silk J., 1979, ApJ 231, 1

- Williams B.G., Heavens A.F., Peacock J.A., Shandarin S.F., 1991, MNRAS, 250, 458
- Yano T., Nagashima M., Gouda N., 1996, ApJ, 466, 1
- Yi I., 1996, ApJ, in press (preprint astro-ph/9609146)
- Zabludoff A.I., Geller M.J., Hucra J.P., Vogeley M.S., 1993, AJ, 106, 1273
- Zaritsky D., Smith R., Frenk C.S., White S.D.M., 1993, ApJ, 405, 464
- Zel'dovich, Ya.B. 1970, Astrofizika 6, 319 (transl.: 1973, Astrophysics 6, 164)
- Zel'dovich Ya.B., 1972. MNRAS, 160, 1P

Appendice A

Altri lavori

In questa appendice descrivo brevemente i lavori, non riguardanti la funzione di massa cosmologica, che ho condotto o a cui ho collaborato durante il mio dottorato; tali lavori sono allegati alla tesi. Quattro di essi trattano l'argomento degli effetti di ambiente sulle proprietà delle galassie vicine, uno analizza l'emissione nucleare delle galassie a spirale nella banda dei 10μ , ed infine uno confronta una predizione della teoria di Gurzadyan e Kocharyan con la funzione di correlazione a due punti delle galassie in ammasso.

A.1 Effetti d'ambiente

È stato recentemente riconosciuto che, per comprendere a pieno le proprietà osservative delle galassie, è necessario prendere in considerazione gli effetti che l'ambiente circostante esercita su di esse. Tuttavia, nella letteratura scientifica, non esiste un'unica definizione rigorosa dell'ambiente che circonda una galassia.

Per definire rigorosamente la densità galattica ambientale, è necessario conoscere la distribuzione tridimensionale di un campione ben definito di galassie. Abbiamo utilizzato per questo scopo il *Nearby Galaxies Catalog* (Tully 1988), il quale include oggetti fino a $cz < 3000$ km/sec, che vuol dire 40 Mpc se $H_0 = 75$ km/s/Mpc, valore adottato in tutti i lavori. Questo volume contiene quello che è comunemente chiamato il Superammasso Locale. Per ogni galassia contenuta nel catalogo viene data una stima di distanza, basata sul redshift (e sul valore della costante di Hubble) e corretta per l'appartenenza a gruppi e per la caduta sull'ammasso della Vergine.

È da sottolineare che, sebbene tale volume contenga una piccola parte dell'Universo osservabile, esso contiene la maggiorparte delle galassie per le quali esiste una dettagliata descrizione di alcune importanti proprietà, come i det-

tagli sulla morfologia (barre, struttura delle braccia a spirale...), l'emissione nucleare di bassa luminosità, la fotometria dettagliata etc.

Dato questo campione, è possibile definire una densità ambientale per ogni suo oggetto, calcolando il numero di galassie vicine. Questo è stato fatto in Giuricin et al. (1993a; vedi anche Monaco 1996): ad ogni galassia viene associata un filtro Gaussiano di semiampiezza σ (in Mpc),

$$\rho_\sigma(\mathbf{r}_i) = \sum_{i \neq j} \frac{C}{\sigma^3} F(r_i) \exp \left[-\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{2\sigma^2} \right]. \quad (\text{A.1})$$

Questa quantità dà il numero di galassie (più luminose della magnitudine blu -16), per Mpc^3 , che stanno entro una distanza $\sim \sigma$ dalla i -esima galassia del campione. La funzione F è una correzione per l'incompletezza del catalogo, della forma

$$F = \exp[0.033(\mu - 28.5)^{2.83}] \quad (\text{A.2})$$

(dove μ è il modulo della distanza), e $C = 1/(2\pi\sigma^2)^{3/2}$ è una costante di normalizzazione.

Questa densità ambientale è definita in dipendenza della scala di filtraggio σ . È importante riconoscere che densità a scale diverse danno virtualmente informazioni diverse, malgrado una correlazione tra le densità a scale diverse sia ovviamente presente. Infatti, a scale diverse entrano in gioco eventi astrofisici diversi: per esempio, mentre la densità $\rho_{0.25}$ può essere associata con le interazioni binarie, la densità ρ_2 è adeguata per descrivere l'ambiente che si ha negli ammassi di galassie. Ne segue che, per avere un'informazione completa sull'ambiente di una galassia, è necessario conoscere la sua densità a scale diverse. Per dare un esempio di come si comporti la densità al variare della scala, è da notare come uno scalamento della distribuzione delle galassie, corrispondente ad una funzione di correlazione a due punti che segue una legge di potenza ($\xi(r) \propto r^{-\gamma}$), si rifletta in un'equivalente scalamento del valore medio della densità ambientale, $\langle \rho_\sigma \rangle \propto \sigma^{-\gamma}$.

Come prima applicazione, abbiamo analizzato in Giuricin et al. (1993a,b) la correlazione di tale densità ambientale con la presenza di una barra in una galassia a disco. Molti autori hanno suggerito che le interazioni di una galassia a disco con un vicino possono stimolare la formazione di una barra. Di conseguenza, ci si aspetta di trovare una frazione maggiore di galassie barrate in ambienti densi. In alcuni studi precedenti (vedi le referenze in Giuricin et al. 1993a) era stato trovato un effetto marginale di questo tipo solo per le spirali dei primi tipi; tali studi erano però caratterizzati da una descrizione povera e qualitativa dell'ambiente. Noi abbiamo trovato che, solamente per i sottotipi morfologici Sa ed Sab, le galassie barrate tendono significativamente

a stare in zone più dense di quelle non barrate, specialmente se si usa la densità $\rho_{0.25}$, che caratterizza le interazioni tra sistemi binari. Nessun effetto è stato trovato per le altre spirali o per le lenticolari.

Un'analisi simile è stata fatta in Giuricin et al. (1994a) per capire la dipendenza tra l'ambiente e la classe morfologica delle braccia a spirale (*arm class*, AC), un parametro fenomenologico che descrive l'apparenza delle braccia a spirale (a gran disegno, flocculente etc.). È noto come AC correli con la luminosità della galassia, nel senso che le galassie più luminose tendono ad avere braccia a gran disegno, mentre le braccia delle galassie più deboli sono tipicamente flocculente. Noi abbiamo trovato che l'ambiente ha un'influenza indiretta sull'AC: la correlazione AC-luminosità è rafforzata nelle zone ad alta densità (su scala $\sigma \sim 0.5$ Mpc), ma solamente se si prendono in esame i sottotipi morfologici Sbc, Sc ed Scd. Inoltre, la densità mostra una correlazione opposta con l'AC se vengono prese in esame le galassie più luminose o quelle più deboli.

Sono stati ottenuti degli interessanti risultati analizzando la correlazione tra la densità ambientale e l'emissione nucleare delle galassie vicine (Monaco et al. 1994;1995a,b). Abbiamo trovato che le spirali dei primi tipi (Sa, Sab ed Sb) che ospitano un nucleo galattico attivo di bassa luminosità, tipicamente una LINER o una Seyfert 2, tendono a risiedere in zone più dense di quelle che mostrano nuclei quieti (la cui emissione non mostra righe di emissione non stellari). Tale segregazione in densità è significativa sia per piccole scale, $\sigma = 0.25$ Mpc, che per scale più grandi, $\sigma = 2$ Mpc, fino alle scale più grandi, delle dimensioni del catalogo. In particolare, nell'ambito delle spirali dei primi tipi, si trova che gli AGN stanno preferenzialmente entro 10-20 Mpc dall'ammasso della Vergine, che può essere considerato come il centro fisico del superammasso locale. L'effetto su piccola scala trovato, che è probabilmente più forte per le Seyfert che per le LINER, conferma alcuni risultati precedenti, su cui c'era stato molto dibattito, ed è consistente con uno scenario in cui l'attività nucleare è stimolata dalle interazioni; in questo caso, l'attività LINER va vista come una fase di attività AGN quasi quiescente, successiva alla fase di attività Seyfert. Gli effetti osservati su grande scala sono invece un fenomeno originale e stimolante, che rimane da interpretare; è da notare come questo effetto, insieme con lo scenario prima menzionato di attività AGN, sollevi la questione di come gli AGN traccino la struttura a grande scala.

La segregazione su grande scala degli AGN potrebbe essere dovuta ad una modulazione del rapporto bulbo/disco a tipo morfologico fissato. Abbiamo quindi cercato di chiarire se il rapporto tra la luminosità del bulbo delle spirali e quella del disco, dato il tipo morfologico, correli con la densità ambientale (Giuricin et al. 1995;1996). In questo caso, non abbiamo trovato

nessuna correlazione significativa, a parte quella triviale indotta dalla ben nota relazione morfologia - densità.

Abbiamo quindi deciso di passare ad un campione di galassie più grandi. Abbiamo scelto un sottocampione della compilazione LEDA, limitato alla magnitudine apparente blu 14, ed entro $cz < 5500$ km/s (Garcia et al. 1993). Abbiamo trovato le distanze tridimensionali utilizzando un modello di moti peculiari su grande scala, adattato sulle misure di velocità peculiare disponibili in letteratura; tale modello è ancora sotto studio, visto che sono stati recentemente resi pubblici nuovi dati di velocità peculiari. Tale modello di moti peculiari è stato applicato non tanto sulle singole galassie, quanto sui gruppi di galassie, trovati da Garcia (1993); questo per sottrarre la componente di velocità dovuta alla appartenenza della galassia ad una struttura più o meno collassata. Abbiamo avuto cura ad assegnare la distanza in maniera idonea nelle cosiddette zone a triplo valore, dove la relazione distanza - redshift non è univoca. I risultati di questa procedura verranno pubblicati in un prossimo lavoro, ancora in preparazione.

A.2 Emissione galattica nel medio infrarosso

In Giuricin et al. (1994b) abbiamo preso in considerazione l'emissione nel medio infrarosso ($\lambda \sim 10\mu$) dei nuclei delle galassie a spirale. L'emissione in tale banda, la sua compattezza e la sua correlazione con le altre proprietà galattiche e con l'emissione X, non sono state approfondite da molti autori; tali correlazioni permettono di porre utili vincoli sui meccanismi di emissione in tale banda. Abbiamo compilato una lista di 281 spirali con emissione a 10μ nota, ed abbiamo stimato la compattezza di tale emissione confrontandola con quella IRAS a 12μ (le osservazioni IRAS, essendo dotate di una risoluzione minore, sono relative a tutto il disco galattico; dal rapporto tra le due luminosità si può quindi stimare la compattezza dell'emissione). Per analizzare le misure a disposizione, molte delle quali sono soltanto limiti superiori, abbiamo utilizzato le tecniche statistiche dell'analisi di sopravvivenza.

Abbiamo trovato molte interessanti ed inedite correlazioni tra l'emissione nell'infrarosso medio ed altre proprietà galattiche, come la presenza di nuclei Seyfert, le peculiarità morfologiche e l'emissione X. In particolare, abbiamo trovato che le galassie Seyfert, che contengono le sorgenti più potenti nel medio infrarosso, presentano contributi significativi anche dalle parti esterne del disco; tale emissione non correla con l'emissione X. Le galassie con regioni HII nucleari sono molto più potenti delle LINER, la cui emissione è indistinguibile da quella delle galassie normali. L'interazione con galassie vicine fa aumentare sia la luminosità che la compattezza dell'emissione. Anche la mor-

fologia galattica influenza l'emissione medio infrarossa: le galassie a spirale dei primi tipi sono sia più luminose che compatte di quelle degli ultimi tipi; la presenza di una barra, a cui spesso si associano regioni HII, induce maggiore luminosità.

Tutte queste correlazioni mettono in evidenza come l'emissione delle galassie a spirale nella banda dei 10μ sia da mettere in relazione con l'emissione di sincrotrone non termico che si osserva nelle bande radio.

A.3 La relazione di Gurzadyan-Kocharyan

In seguito ad una serie di interessanti discussioni con il Prof. V. Gurzadyan, ho affrontato l'argomento dello stato dinamico degli ammassi di galassie. Una teoria, proposta da Gurzadyan & Kocharyan (1991), mette in relazione la dimensione di Hausdorff d_H di un insieme di oggetti autogravitanti con il suo stato dinamico:

$$d_H \simeq 3 \left(1 - \frac{2}{3} \exp \left(-\frac{T}{\tau_{GS}} \right) \right) \quad (\text{A.3})$$

dove T è il tempo di Hubble, ed il tempo scala τ_{GS} ,

$$\tau_{GS} = \left(\frac{15}{4} \right)^{2/3} \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{v}{Gmn^{2/3}} \quad (\text{A.4})$$

proposto da Gurzadyan & Savvidy (1986), quantifica lo stato di rilassamento del sistema (v è la dispersione delle velocità, m la massa media degli oggetti ed n la densità numerica).

In base a questa formula, si può predire che la pendenza della funzione di correlazione delle galassie in ammasso deve risultare più bassa di quella delle galassie di campo (il che corrisponde ad un aumento della dimensione di Hausdorff), e l'appiattimento può essere messo in relazione con lo stato dinamico del sistema. Ho quindi controllato (Monaco 1994a,b) se tale ipotesi risultasse verificata in quattro ammassi, cioè gli ammassi di Abell 401, 426, 1656 e 1795. La scelta degli ammassi è stata motivata dal fatto che per essi è noto un sottoinsieme di galassie, limitato in magnitudine apparente e di numero sufficiente (da 78 a 156), della cui appartenenza all'ammasso si è sufficientemente sicuri (tramite uno studio accurato della distribuzione dei redshift delle galassie osservate lungo la linea di vista dell'ammasso; vedi le referenze citate nell'articolo). Ho quindi calcolato, per mezzo di metodi standard, la pendenza della funzione di correlazione angolare delle galassie; tale pendenza è risultata in tutti i casi significativamente minore di quella nota per le galassie di campo, il che è pienamente consistente con la teoria

suddetta. Da questo è stato possibile stimare che il rapporto τ_{GS}/T , tra il tempo scala di rilassamento degli ammassi ed il tempo di Hubble, è di $\simeq 3$.

A.4 Referenze

- Garcia A.M., 1993, *A&AS*, 100, 47
 Garcia A.M., Paturel G., Bottinelli L., Goughenheim L., 1993, *A&AS*, 98, 7
 Giuricin G., Limboz F., Monaco P., Mardirossian F., Mezzetti M., 1995, *ApJ*, 450, 41
 Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., Monaco P., 1993a, *ApJ*, 407, 22
 Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., Monaco P., 1993b, in Chincarini et al. eds., *Observational Cosmology. ASP Conf. Ser.*, Vol. 51
 Giuricin G., Monaco P., Mardirossian F., Mezzetti M., 1994a, *ApJ*, 425, 450
 Giuricin G., Monaco P., Mardirossian F., Mezzetti M., Limboz F., 1996, *Astr. Lett. Comm.*, 33, 139
 Giuricin G., Tamburini L., Mardirossian F., Mezzetti M., Monaco P., 1994b *ApJ*, 427, 202
 Gurzadyan V.G., Kocharian A.A., 1991, *Europh. Lett.*, 15, 801
 Gurzadyan V.G., Savvidy G.K., 1986, *A&A*, 160, 203
 Monaco P., 1994a, *A&A*, 287, L13
 Monaco P., 1994b, in Durret F., Mazure A., Tran Thanh Van J. eds., *Clusters of Galaxies. Editions Frontieres, Gif-sur-Yvette*
 Monaco P., 1996, *Astr. Lett. Comm.*, 33, 153
 Monaco P., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1994, *ApJ*, 436, 576
 Monaco P., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1995a, *Mem.S.A.It.*, 66, 149
 Monaco P., Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., 1995b, in Occhionero F. ed., *Birth of the Universe and Fundamental Physics. Springer, Berlin*
 Tully R.B., 1988, *Nearby Galaxies Catalog. Cambridge University Press, Cambridge*