

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELLA TERRA

TESI DI
DOTTORATO DI RICERCA
IN
GEOFISICA DELLA LITOSFERA E GEODINAMICA

IX Ciclo di dottorato
1993-1996

Potere risolutivo dei dati nelle inversioni per sorgenti sismiche estese

Dottoranda: Angela Saraò 168

en



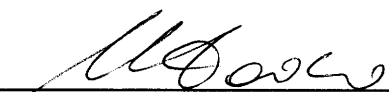
Relatore: Prof. Peter Suhadolc

Dipartimento di Scienze della Terra, Università di Trieste, Italia



Correlatrice: Dr. Shamita Das

Dipartimento di Scienze della Terra, Università di Oxford, UK



Coordinatrice del dottorato: Prof. Mara Zadro

Dipartimento di Scienze della Terra, Università di Trieste, Italia

Ai miei genitori

INDICE

Introduzione	1
---------------------------	---

Capitolo 1 - Sorgenti sismiche estese

1.1 - Introduzione	5
1.2 - Approssimazione di sorgente sismica: la sorgente volume	7
1.3 - Approssimazione di sorgente sismica: la sorgente volume	9
La velocità di scorrimento come vettore nei modelli classici	11
Modello di Haskell	13
1.4 L'approssimazione della sorgente estesa come somma di sorgenti puntiformi	14
1.5 Formulazione del problema discreto nella descrizione della sorgente estesa	18

Capitolo 2 - Il problema diretto: calcolo dei sismogrammi sintetici

2.1 - Introduzione	21
2.2 - Mezzi perfettamente elastici: brevi richiami teorici	23
L'inseguitore di modi	26
Minimizzazione della struttura	27
2.3 - Mezzi Anelastici: brevi richiami teorici	29
L'inseguitore di modi	30
2.4 - Risposta delle sorgenti: mezzi perfettamente elastici	31
2.5 - Risposta della sorgente: mezzi elastici	33

Capitolo 3 - Metodi di inversione di forme d'onda

3.1- Introduzione	35
3.2 - Proprietà delle soluzioni dei metodi di inversione	37
3.3 - Classificazione dei metodi di inversione	38
3.4 - Metodi risolutivi per problemi lineari o linearizzati	39
Metodo ai minimi quadrati	40
3.5 - Inversione linearizzata per forme d'onda di eventi locali e regionali	

per meccanismi di sorgente e processi di rottura	42
3.6 - Inversione per la ricostruzione temporale del vettore slip rate tramite l'uso di vncoli stabilizzanti	44

Capitolo 4 - La programmazione lineare: il metodo del Simpleso

4.1 - Introduzione	49
4.2 - Teorema fondamentale della ottimizzazione lineare	51
4.3 - L'idea del metodo del Simpleso	52
4.4 - L'algoritmo della tabella del Simpleso	59
4.5 - Una revisione dell'algoritmo del Simpleso	67

Capitolo 5 - Inversione di forme d'onda con l'approssimazione di sorgente puntiforme: limit e vincoli da test sintetici

5.1 - Introduzione	71
5.2 - Brevi richiami teorici	72
5.3 - Calcolo dei dati artificiali o finti osservati	72
5.4 - Inversione dei dati con l'approssimazione di sorgente puntiforme	81
5.5 - Discussione e conclusioni	93

Capitolo 6 - Effetto della copertura azimutale nelle inversioni per sorgenti estese: analisi e risultati

6.1 - Introduzione	96
6.2 - Calcolo dei dati artificiali	99
6.3 - Test preliminari	111
6.4 - Inversioni usando una stessa griglia nel problema diretto e inverso..	123
6.5 - Inversioni usando un modello di griglia piu' grossolano di quello usato nel caso diretto	138
6.6 - Inversione usando una struttura differente nel modello diretto e nel modello inverso	164

Capitolo 7 - Conclusioni e suggerimenti per analisi future

7.1 - Conclusioni e discussione	187
7.2 - Progetti per analisi future	189

Bibliografia	191
Appendice A Discretizzazione di una funzione continua	
A.1 - Teorema di campionamento ed Aliasing	199
A.2 - Procedure pratiche per la definizione di uno spettro ad alta risoluzione	200
Appendice B - My thesis in a nutshell	203

INTRODUZIONE

Il processo fisico che avviene nella Terra durante il rilascio energetico che provoca un terremoto, è alquanto difficile da determinare. Con lo sviluppo di sismometri digitali a larga banda e la disponibilità di potenti calcolatori, è divenuto possibile applicare procedure di calcolo sempre più sofisticate che consentono di determinare in dettaglio la storia spazio-temporale del rilascio energetico tramite inversione di forme d'onda sismica.

Diversi sono i fattori che possono tuttavia compromettere la buona riuscita di un'inversione, a cominciare dal tipo di approssimazione fisica assunta per modellare la sorgente. Se piccoli rilasci energetici sono trattati con l'approssimazione di sorgente puntiforme, tale approssimazione non può essere mantenuta nel caso di grossi rilasci di energia se non a frequenze estremamente basse. Nell'ultimo caso la sorgente viene studiata come sorgente volume o più spesso come sorgente superficie. Si parla in tal caso di sorgente sismica estesa.

Una descrizione teorica delle caratteristiche e delle rappresentazioni di una sorgente estesa sono presentate nel Cap. 1.

Lo scopo di questa tesi rientra in un progetto di studio già avviato da Das e Suhadolc (1996) al fine di definire i limiti delle procedure di inversione per sorgenti estese. L'aspetto che qui viene analizzato in dettaglio è l'influenza che ha la distribuzione spaziale del dato, e quindi la distribuzione di ricevitori attorno alla faglia causale, nelle procedure di inversione. Presentiamo in questa tesi uno studio realizzato con dati e modelli artificiali e non tratteremo analisi su casi reali, cosa quest'ultima che ci proponiamo di fare in una seconda fase del progetto sulla base dei risultati conseguiti in questa tesi.

Il problema diretto e quindi la metodologia applicata per calcolare i dati sintetici, sono discussi nel Cap. 2.

Nel Cap. 3 descriviamo alcune procedure di inversione genericamente applicate nel trattare le sorgenti sismiche e nel Cap. 4 discutiamo il metodo del Semplesso da noi utilizzato in questa tesi.

Genericamente i terremoti con rilascio energetico "medio basso" (magnitudo 3.9), sono studiati con l'approssimazione di sorgente puntiforme. In tal caso solo la storia del rilascio temporale del momento può essere ricostruita e le

informazioni spaziali del rilascio energetico vengono perse. Nel Cap. 5 presentiamo i risultati di un'analisi condotta al fine di definire i limiti e la reale perdita di informazioni che si ha quando sismogrammi sintetici, usati come dati artificiali e calcolati per sorgente estesa per una magnitudo uguale a 3.9, sono invertiti con l'approssimazione di sorgente puntiforme.

Per stabilizzare i problemi inversi, è preferibile disporre di una distribuzione azimutale uniforme attorno alla faglia causale ma nella realtà la distribuzione di stazioni è spesso ben lontana dall'essere ottimale o uniforme. Pertanto, una indagine che determini le limitazioni imposte da una non ottimale copertura azimutale dei ricevitori, si rivela necessaria al fine di valutare l'affidabilità di soluzioni ottenute nello studio di terremoti reali tramite procedure di inversione.

È ben noto dalla letteratura come il problema inverso sia tutt'altro che stabile anche nel caso immaginario di una distribuzione continua di stazioni sismiche sulla Terra (Kostrov e Das, 1988). Ciò, da un punto di vista computazionale, si traduce nella instabilità e non unicità delle soluzioni del problema e l'impiego di vincoli fisici si rivela quindi importante per limitare le soluzioni possibili, come già dimostrato da Das e Suhadolc (1996) e Das et al. (1996) nel loro studio. Simili conclusioni sono ottenute in questa tesi e riportate nel Cap. 7.

Il problema di una distribuzione non uniforme di stazioni è stato già trattato da altri autori (Stump e Johnson, 1977; Satake, 1985; Huang, 1985; Olson e Anderson, 1988; Steimberg et al., 1995; Iida, 1993) ma senza imporre vincoli fisici a limitare lo spazio all'interno del quale ricercare le soluzioni (Cap. 6).

In questa tesi, considereremo l'effetto che la distribuzione non uniforme di ricevitori ha nelle procedure di inversione quando deboli vincoli fisici addizionali, quali la positività della velocità di scorrimento o il vincolo sul valore di momento totale, sono presi in considerazione.

Come dati artificiali abbiamo utilizzato accelerogrammi sintetici generati per stazioni poste a distanze locali (inferiori a 100 km). Il problema inverso è stato poi risolto, imponendo vincoli fisici, col metodo della programmazione lineare applicato, a questo tipo di problema da Das e Kostrov (1990, 1994) e descritto in dettaglio nel Cap. 4.

Dopo aver analizzato una prima configurazione uniforme per la quale siamo in grado di risolvere il problema inverso vincolato, abbiamo studiato casi con distribuzioni di stazioni azimutalmente non uniformi. Si è quindi considerato

il problema per forme d'onda con e senza un livello di rumore casuale, per diversi modelli di griglia usati nella modellazione delle sorgenti, e infine abbiamo analizzato gli effetti di un modello strutturale non adeguato, ossia di un modello strutturale utilizzato nell'inversione diverso da quello usato nel problema diretto. Nel Cap. 6 sono riportati in dettaglio descrizione delle analisi e risultati.

Le conclusioni di questo studio si rivelano di pratica importanza, non solo a fini teorici o di definizione di limiti e affidabilità di soluzioni ottenuti dalle inversioni su terremoti reali, ma anche e soprattutto pratici. Forniscono infatti informazioni importanti per la collocazione di stazioni sismiche temporanee in campagna, ed in particolare possono fornire un valido contributo per la collocazione e lo sviluppo di reti sismiche a distanza regionale subito dopo alcuni terremoti di particolare interesse.

Riteniamo che l'indagine proposta in questa tesi sia importante sia per definire il potere risolutivo dei dati nelle procedure di inversione per sorgente sismica estesa che per concorrere al miglioramento delle procedure e delle metodologie da applicarsi per una determinazione quanto più realistica del processo di nucleazione e rilascio dell'energia durante un terremoto.

CAPITOLO 1

Sorgenti sismiche estese

1.1 Introduzione

La rappresentazione meccanica della sorgente sismica estesa è una regione di dimensioni spaziali L e di durata temporale L/c , dove c è la velocità con cui si propaga la rottura. Quando la distanza epicentrale è maggiore delle dimensioni spaziali della sorgente ($\Delta \gg L$) e le lunghezze d'onda sono relativamente grandi ($\lambda/L \gg 1$), o più rigorosamente $\lambda\Delta/2 \gg L^2$, allora la sorgente sismica può essere trattata come un punto (*sorgente sismica puntiforme*) per la quale vale l'equilibrio di forze e di momento.

In questo capitolo analizzeremo i casi in cui non è valida l'approssimazione della sorgente come puntiforme nello spazio e nel tempo. Ci concentreremo essenzialmente sui metodi che modellano i terremoti come scivolamento su superfici di faglia, sebbene accenneremo brevemente anche a sorgenti di "volume".

Le sorgenti sismiche che tratteremo sono quelle che originano terremoti tettonici, vulcanici ed esplosioni artificiali. Tale classificazione si basa sul tipo di energia che, improvvisamente rilasciata, provoca il terremoto. Terremoti causati dal rilascio di energia elastica di deformazione sono definiti tettonici, mentre rilasci di energia di origine idrodinamica (ossia legata a fenomeni quali ad esempio un eccessivo accumulo di pressione gassosa, o ad un improvviso arresto di massa magmatica) sono associati a terremoti di origine vulcanica. Spesso i terremoti tettonici sono idealizzati come dislocazioni su superfici di faglie piane, mentre le esplosioni sono rappresentate come centri di compressione. Tali idealizzazioni sono ovviamente delle semplificazioni del processo fisico reale. Le esplosioni possono ad esempio risultare dalla creazione di cavità permanenti e possono essere accompagnate dal comportamento non lineare dei materiali, così come anche da deformazioni di taglio risultanti dal rilascio energetico dovuto agli sforzi tettonici locali. Da un'attento esame della regione sorgente, i terremoti tettonici risultano similmente complessi. Dalla mappatura di superfici di

rottura, da investigazioni di tipo geologico di zone di faglia venute in superficie (Sibson, 1986) e dalla esposizione di zone sorgenti in miniere (Gay e Ortlepp, 1974), sappiamo che i terremoti avvengono in regioni in cui la roccia locale si deforma anelasticamente durante il rilascio energetico. Si possono inoltre osservare delle locali variazioni di volume (Gilbert e Dziewonski, 1975) possibilmente dovute a transizioni di fase e/o espansioni termiche.

La zona sorgente ha generalmente molte superfici interne attraverso cui avviene lo scivolamento (Tchalenko e Ambraseys, 1970). Tali superfici possono o no intersecarsi tra loro e possono mostrare delle rugosità (ad esempio delle deviazioni da una superficie piana) su tutte le dimensioni spaziali (Tchalenko, 1970; King 1983). Su tali superfici possono aversi inoltre delle dislocazioni conseguenti alla presenza di cavità e quindi all'iniezione, ad esempio, di fluidi come vapori o magma (Julian, 1983).

Nella modellazione della sorgente sono anche incluse le proprietà di rottura della faglia, legate a variazioni spaziali degli sforzi o a rugosità delle superfici. Alle rugosità ci si riferisce talvolta come "asperità" e, nei punti in cui la rottura rallenta o si blocca, si dice che la faglia presenta delle "barriere".

A partire dal 1964, Haskell sviluppò un modello in cui lo spostamento sulla faglia risultava dalla propagazione di un'onda su segmenti della faglia stessa; le radiazioni dalle sezioni adiacenti si assumevano essere statisticamente indipendenti. Nel 1977, Das e Aki, considerarono tipi di faglie con barriere. La rottura può originarsi vicino ad una barriera e propagarsi sia unilateralmente che bilateralmente lungo il piano di faglia, fintanto che non si ferma per la presenza di un'altra barriera. Come conseguenza della dislocazione, le barriere possono poi rompersi oppure no; alcune volte la dislocazione riparte dal lato più lontano della barriera e poi continua; altre volte la barriera non si rompe inizialmente ma in un secondo momento a causa della ripartizione degli sforzi e degli effetti non lineari, originando eventualmente degli "aftershocks".

In sintesi, il modello fisico di sorgente per i terremoti tettonici è genericamente concepito in termini di sorgente estesa al di sopra di un piano di faglia nella roccia. La rottura procede sulla faglia tramite una serie di dislocazioni e si propaga con velocità di rottura differente dal punto in cui si è originata. Il fronte di dislocazione cambia velocità mentre si propaga tra asperità o barriere sulla faglia. Prima che la dislocazione si arresti c'è un tempo finito perchè abbia luogo uno scivolamento delle due facce di faglia adiacenti e lo scivolamento si manifesta in tal caso come un rimbalzo elastico di ogni lato della faglia,

determinando quindi una diminuzione della deformazione totale. Lo scivolamento può avere componente verticale ed orizzontale e può variare lungo la faglia. Le onde sono prodotte vicino al fronte di dislocazione come conseguenza del rilascio dell'energia di deformazione durante lo scivolamento.

I modelli di sorgente che assumeremo per gli studi in questa tesi sono tuttavia dei modelli molto semplificati e ciò al fine di isolare i diversi effetti che possono concorrere alla determinazione di soluzioni instabili e non-uniche nelle procedure di inversione di forme d'onda sismiche applicate per ricavare un modello quanto più realistico di sorgente utilizzando.

1.2 Approssimazioni di sorgente sismica: la sorgente volume

Abbiamo già discusso che le sorgenti di terremoti ed esplosioni mostrano complessità che non possono essere rappresentate da semplici modelli idealizzati. Discuteremo qui alcune approssimazioni fisico-matematiche genericamente assunte nello studio delle sorgenti, cominciando col trattare il teorema di rappresentazione per la sorgente volume.

Un teorema di rappresentazione è una definizione matematica che collega una quantità osservabile, come lo spostamento del suolo, ai parametri di un modello teorico di sorgente sismica. La sorgente volume può essere trattata secondo due diverse approssimazioni. La prima di queste utilizza il concetto di "stress-free strain" (Robinson, 1951) o di "stress glut" (Backus e Mulcahy, 1976a). Backus e Mulcahy danno un teorema di rappresentazione che è valido per una sorgente distribuita in un volume V . La componente k -esima della dislocazione nel punto di osservazione y e al tempo t risulta

$$u_k(y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iiint_V \Gamma_{pq}(x,t') \partial_{x_q} G_{kp}(y,t-t';x,0) dV \quad (1.2.1)$$

dove x è un punto entro V , Γ è lo "stress glut" che caratterizza la sorgente sismica, e $G_{kp}(y,t-t';x,0)$ è la componente k -esima della dislocazione nel punto y al tempo $t-t'$ causata da una forza istantanea di impulso unitario applicata in direzione p nella posizione x al tempo $t=0$ (ad esempio l'usuale funzione di Green per una forza applicata in un punto), dove la convenzione di sommatoria si applica agli indici ripetuti e dove $\partial_{x_q} = \partial/\partial x_q$. Lo "stress glut" Γ è collegato al tensore di "stress-free strain" e^F da

$$\Gamma = C:e^F \quad (1.2.2)$$

dove C è il tensore delle costanti elastiche.

Per capire come tale rappresentazione possa essere usata con un modello di sorgente complicata, si consideri un modello di Terra di riferimento inizialmente "quiescente", con proprietà dei materiali note ed un campo di sforzi presente dovunque. Per semplicità assumiamo che la relazione sforzo-deformazione nel nostro modello di riferimento sia espressa da una semplice reazione di elasticità lineare indipendente nel tempo e che lo stato di presforzo sia nullo. Le funzioni di Green e il tensore elastico nelle equazioni (1.2.1) e (1.2.2) sono appropriate per il modello di Terra qui preso come riferimento. Caratterizziamo il nostro modello di sorgente specificando il campo della deformazione $e(x,t)$ e il campo di sforzi $\sigma(x,t)$ dovunque all'interno della sorgente volume V . Si noti che σ non può essere uguale a $C:e$; se lo fosse, la linearità elastica prevarrebbe dovunque all'interno della sorgente volume e non si genererebbe nessuna onda. Le onde sismiche sono infatti generate laddove lo sforzo vero σ nel nostro modello di sorgente, differisce dallo sforzo $C:e$ che ci si aspetta nel modello di Terra preso come riferimento. Questa differenza è la definizione di "stress glut":

$$\Gamma(x,t) = \sigma(x,t) - C(x):e(x,t) \quad (1.2.3)$$

Poichè si assume che l'elasticità lineare prevalga nel modello di riferimento, la regione dove lo "stress glut" è diversa da zero è la regione in cui si manifesta la deformazione anelastica. Pertanto, la regione entro cui la deformazione anelastica si manifesta può essere considerata come la regione in cui è confinata la sorgente sismica.

Una sorgente sismica complicata può essere descritta specificando il campo di sforzi associati $\sigma(x,t)$ e il suo campo di deformazioni $e(x,t)$. Nel caso di sorgenti sismiche realistiche la specificazione di σ ed e può essere davvero difficile, dal momento che l'azione di una sorgente sismica è governata da numerose leggi fisiche la cui soluzione può diventare un formidabile, quanto complicato, problema matematico o di calcolo.

Con il termine modelli "dinamici" di sorgente ci si riferisce a modelli in cui sono state risolte le appropriate leggi fisiche per ottenere soluzioni autoconsistenti di σ e di e . Modelli in cui viene assegnato solmanete σ oppure e , sono detti modelli cinematici, poichè in tal caso viene specificato il movimento della particella (Spudich e Archuleta, 1987). Da un punto di vista storico, la distinzione

tra sorgenti cinematiche e dinamiche non è molto importante nella sorgente volume. La sorgente di volume cinematica viene infatti usata molto raramente. Tale distinzione è invece molto più importante per trattare le onde di superficie, così come gli scivolamenti su faglie superficiali infinitamente sottili.

Un secondo teorema di rappresentazione è stato usato da Bache et al. (1982) per una sorgente volume. Nel loro metodo la sorgente è sostituita da dislocazioni e trazioni che sono generate dalla sorgente su una superficie arbitraria S che la racchiude sorgente. Tali dislocazioni o trazioni vengono calcolate per una sorgente arbitraria col metodo delle differenze finite o degli elementi finiti.

Denotiamo queste dislocazioni e trazioni tramite $u_s(x,t)$ e $T_s(x,t)$. Usiamo le proprietà del mezzo in V_e per definire un modello di riferimento e denotiamo le funzioni di Green appropriate per questo modello tramite il vettore G^j , dove la componente i -esima di G^j è G_{ij} , come nell'equazione (1.2.1), e j è la direzione della forza puntiforme. G^j , causa le trazioni T^j attraverso una superficie con normale \hat{n} . Si ottiene quindi la rappresentazione

$$u_i(y,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt' \iint_{\Sigma} [G^j(x,t';y,0) \cdot T_s(x,t-t') - u_s(x,t') \cdot T^j(x,t-t';y,0)] d\Sigma \quad (1.2.4)$$

Sia le equazioni (1.2.1) che (1.2.4) possono essere usate per un modello diretto di sorgente volume. Se per determinare lo "stress glut" T_{pq} nell'eq. (1.2.1), si usa il metodo delle differenze finite o degli elementi finiti, allora l'eq (1.2.4) è probabilmente la rappresentazione più semplice da usare. Ciò perchè l'eq. (1.2.4) coinvolge un integrale di superficie piuttosto che un integrale di volume. L'eq. (1.2.1) è comunque preferibile per affrontare i problemi inversi poichè il suo kernel contiene esplicitamente i termini di sorgente che si vogliono calcolare.

1.3 Approssimazioni di sorgenti sismiche: la sorgente superficie

A cominciare dall'analisi di Aki (1968) del terremoto di Parkfield del 1966 in California, quasi tutti i modelli di sorgente di terremoto e spostamenti del suolo a distanze locali ($R < 200$ km) considerano l'assunzione, piuttosto restrittiva, che i terremoti avvengano come scivolamento su un piccolo numero di superfici di faglia infinitamente sottili e genericamente piane. Questo modello di sorgente è matematicamente molto più conveniente del modello di sorgente "volume" e si rivela adeguato per la comprensione del processo di rottura. È stato inoltre usato con successo per modellazioni di forme d'onda rappresentanti spostamenti del

suolo generati da forti terremoti a periodi inferiori a circa $1/5$ della durata del processo di fagliazione, che è approssimativamente L/β con L lunghezza della faglia e β velocità delle onde di taglio.

Trascurando gli effetti di gravitazione e di pre-sforzo, Backus e Mulcahy (1976b) dimostrarono che lo "stress glut" associato a una discontinuità di dislocazione s sulla superficie S è data dalla

$$\Gamma_{ij} = C_{ijkl} n_k s_l \quad (1.3.1)$$

dove \hat{n} è un vettore unitario normale a S ed orientato verso il lato positivo di S , mentre la discontinuità di dislocazione s è la differenza nella dislocazione tra i lati positivi e negativi della faglia

$$s(x, t) = u(x^+, t) - u(x^-, t) \quad (1.3.2)$$

dove x è un punto sulla superficie S . L'equazione (1.3.1) è valida per una discontinuità di dislocazione sia parallela che perpendicolare alla faglia. Inserendo l'eq. (1.3.1) nell'eq. (1.2.1) si ottiene la rappresentazione più comunemente usata per lo spostamento del terreno

$$u_m(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iint_{\Sigma} C_{ijkl} n_k s_l \partial_{x_j} G_{mi}(y, t - t'; x, 0) d\Sigma \quad (1.3.3)$$

ricavata da Maruyama (1963), Burridge e Knopoff (1964), e Haskell (1964). Usando la relazione di reciprocità per le funzioni di Green

$$G_{ij}(y, t; x, 0) = G_{ji}(x, t; y, 0) \quad (1.3.4)$$

l'eq. (1.3.3) può essere riscritta come

$$u_m(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iint_{\Sigma} C_{ijkl} n_k s_l \partial_{x_j} G_{im}(x, t - t'; y, 0) d\Sigma \quad (1.3.5)$$

La forma dell'equazione (1.3.3) è intuitivamente più soddisfacente dell'eq. (1.3.5), poichè le funzioni di Green nell'eq. (1.3.3) sono quelle che descrivono la propagazione dalla forza puntiforme applicata sulla superficie di faglia nel punto di osservazione, mentre nell'eq. (1.3.5) le forze puntiformi sono applicate al punto di osservazione e le funzioni di Green sono calcolate sulla faglia. L'eq. (1.3.5) è tuttavia più generale dell'eq. (1.3.3) e può risultare più conveniente da un punto di vista di calcolo, dipendendo dal numero di punti di osservazione e dal metodo adoperato per il calcolo delle funzioni di Green.

I termini "sorgente" e "ricevitore" sono ambigui se riferiti all'eq. (1.3.4) per la reciprocità delle funzioni di Green. Useremo sempre il termine "punto di

osservazione" o qualcosa di simile per riferirci al punto y nell'eq. (1.3.5) che rappresenta il posto dove lo spostamento del suolo, causato dalla sorgente sismica, è calcolato. Si userà il termine "sorgente" per riferirsi alla collocazione della forza puntiforme o al tensore momento quando si discutono le funzioni di Green e denoteremo altrimenti la regione di "stress glut" diversa da zero.

Per semplificare ulteriormente l'eq. (1.3.5) si noti che il tensore di stress σ_G associato con la funzione di Green nell'eq. (1.3.5) è

$$\sigma_G^{mkl}(x, t; y, 0) = C_{ijkl}(x) \partial_{x_i} G_{im}(x, t; y, 0) \quad (1.3.6)$$

dove m è la direzione della forza puntiforme. Pertanto la trazione associata T^m è

$$T^{ml}(x, t; y, 0) = \hat{n} \cdot \sigma_G^{mkl} \quad (1.3.7)$$

e l'eq. (1.3.5) può essere riscritta come

$$u_m(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \iint_{\Sigma} s_l(x, t') \cdot T^{ml}(x, t - t'; y, 0) d\Sigma \quad (1.3.8)$$

Se denotiamo la trasformata di Fourier di $f(t)$ tramite

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.3.9)$$

allora la versione della (1.3.8) nel dominio delle frequenze è

$$u_m(y, \omega) = \iint_{\Sigma} s_l(x, \omega) \cdot T^{ml}(x, \omega; y, 0) d\Sigma \quad (1.3.10)$$

Sebbene l'equazione (1.3.10) sia perfettamente valida, le funzioni di scorrimento di più grande interesse sismologico hanno un "offset" statico, e conseguentemente le loro trasformate di Fourier sono indefinite (Spudich e Archuleta, 1987). Se denotiamo la derivazione spaziale con un punto, allora la velocità di scorrimento è \dot{s} e l'eq. (1.3.10) può essere scritta come

$$\dot{u}_m(y, \omega) = \iint_{\Sigma} \dot{s}_l(x, \omega) \cdot T^{ml}(x, \omega; y, 0) d\Sigma \quad (1.3.11)$$

dove \dot{u}_m è la componente m -sima della dislocazione del suolo.

La velocità di scorrimento come vettore nei modelli cinematici

La determinazione del vettore velocità di scorrimento ("slip rate") ci aiuta a capire il processo di rottura del terremoto. Sulla base del confronto tra forme d'onda ricavate da procedure di inversione e dati reali, si osserva come il

comportamento alla sorgente è ben rappresentato per frequenze fino ad 1-2 Hz. Al di sopra di queste frequenze il processo alla sorgente è studiato con procedure statistiche piuttosto che con procedure deterministiche (Archuleta e Spudich, 1987).

Genericamente lo studio del vettore velocità di scorrimento si preferisce a quello del semplice vettore di scorrimento (slip) dal momento che il primo ha un migliore comportamento nella trasformata di Fourier, nel senso che non occorre considerare l'offset statico inerente allo stesso vettore di slip (Spudich e Archuleta, 1987).

La formula più comune per esprimere la velocità di scorrimento tramite una funzione rettangolo $\Pi(t)$, è quella proposta nel **modello di Haskell** (1964), in cui lo scorrimento ad un dato x è una rampa lineare con tempo di risalita $\tau(x)$. Per consentire la propagazione della rottura, differenti punti sulla faglia si muoveranno in tempi differenti. Pertanto ogni punto sulla faglia ha un tempo di rottura $t_s(x)$ a cui lo scorrimento comincia. Questo parametro entra naturalmente nella funzione di velocità di scorrimento

$$\dot{s}(x,t) = [a_1(x)\hat{x}_1 + a_2(x)\hat{x}_2] \Pi\left\{\frac{t - t_s(x)}{\tau(x)}\right\} \quad (1.3.13)$$

dove a_1 e a_2 sono le componenti del vettore velocità di scorrimento.

Questa descrizione della velocità di scorrimento dipende quindi da quattro parametri di base $a_1(x,t)$, $a_2(x,t)$, $\tau(x)$, $t_s(x)$.

Ci sono tuttavia molte variazioni al modello di Haskell. Ad esempio, Hartzell e Helmberger (1982) usarono una funzione di velocità di scorrimento triangolare per calcolare i sintetici per lo studio del terremoto del 1979 nell'Imperial Valley, in California. La forma per la velocità di scorrimento derivata da Kostrov (1964), per l'autopropagazione simile della caduta di sforzo è divenuta una valida alternativa al modello di Haskell. Archuleta e Hartzell (1981) hanno dimostrato che alle basse frequenze questi due modelli di dislocazione danno risultati molto simili.

L'effetto della variazione della velocità di scorrimento è fortemente governata dall'attenuazione geometrica ($\approx R^{-1}, R^{-2}, R^{-4}$ per i termini di campo lontano, intermedio e vicino rispettivamente, dove R è la distanza tra il punto di osservazione e il punto sulla faglia). Ogni variazione della velocità di scorrimento influenza maggiormente le stazioni più vicine al punto in cui la variazione è avvenuta.

Nello studio che presenteremo nel Cap. 6 faremo uso del modello di Haskell, e pertanto diamo di seguito una dettagliata descrizione di tale modello.

Modello di Haskell

La funzione che esprime la dislocazione sulla faglia, nel caso di terremoti reali, è alquanto complessa nel dettaglio (Haskell, 1964; Aki, 1967; Wyss e Brune, 1967). Tuttavia sembra appropriato calcolare tale dislocazione per un modello molto semplice di faglia che fornisca un caso ideale con il quale poter confrontare la complessità dei casi reali. A tale scopo viene assunta una faglia rettangolare (fig. 1.1) di lunghezza L in direzione x_1 e di larghezza w in direzione x_2 . Sopra questa superficie la dislocazione D_i è definita da

$$D_i(\xi_1, \xi_2, t) = \begin{cases} 0 & t - \xi_1/v < 0 \\ (D_{i0}/T)(t - \xi_1/v) & 0 < t - \xi_1/v < T \\ D_{i0} & t - \xi_1/v > T \end{cases} \quad (1.3.14)$$

con ξ_1 distanza lungo x_1 dal lato della faglia che si rompe per primo e v velocità di rottura sulla faglia.

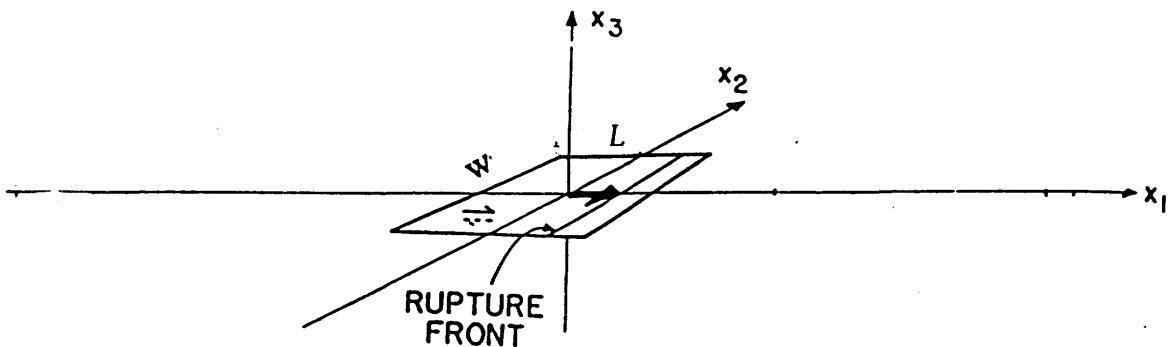


Fig. 1.1 - Modello di Haskell, modifiche da Spudich e Archuleta (1987).

Tale forma di dislocazione sulla faglia implica che nell'istante $t=0$ un fronte di frattura si forma istantaneamente lungo la direzione dell'asse x_2 per una lunghezza w .

Il fronte si propaga unilateralmente con una velocità costante v , lungo tutta la lunghezza L dell'asse x_1 . Ad ogni prefissato punto sul piano di faglia la dislocazione relativa aumenta a velocità costante da 0, per $t = \xi_1/v$, l'istante di arrivo del fronte di rottura ξ_1 , ad un valore costante finale D_{i0} , per $t=T + \xi_1/v$.

Tale modello ha delle ovvie artificialità. Presumibilmente infatti la frattura comincia ad un punto e da questa si diffonde radialmente.

Savage (1966) suggerì la possibilità che la frattura su faglie superficiali abbia la tendenza a propagarsi solo nella direzione verticale, cosicchè la loro crescita dominante risulterebbe quella orizzontale. Pertanto, ad eccezione di una regione vicina al margine iniziale, ci si aspetta che il presente modello sia una rappresentazione ragionevole per faglie superficiali che si propagano unilateralmente. Il caso della faglia bilaterale può ovviamente essere trattata con la stessa procedura computazionale aggiungendo la dislocazione dovuta ad un paio di faglie unilaterali che si propagano in direzione opposta.

Un'altra differenza rispetto ad un modello realistico è che l'accelerazione della dislocazione di faglia, D_i , ha una singolarità tipo funzione $\delta(t)$ a $t = \xi_1/v$ e un'altra di eguale intensità ma negativa a $t=T + \xi_1/v$.

L'integrazione lungo il piano di faglia rimuove, tuttavia, queste singolarità, e gli spostamenti calcolati in punti che sono distanti dal piano di faglia hanno derivate prime e seconde finite. Questo non succede se si considera una funzione gradino, anzicchè una rampa di durata finita, come la nostra funzione di base per la sorgente temporale.

Madariaga (1978) ha dimostrato che l'approssimazione di Haskell è un modello appropriato per simulare la radiazione di faglie estese quando le lunghezze d'onda sono maggiori della larghezza w della faglia.

1.4 L'approssimazione della sorgente estesa come somma di sorgenti puntiformi

Una descrizione realistica della sorgente sismica richiede la capacità di modellare le sorgenti con dimensioni finite. Per grandi distanze epicentrali $r \geq 10L$, dove L è la lunghezza di faglia, l'uso del *fattore di finitezza* (Ben-

Menahem, 1961) consente una facile estensione dell'approssimazione che viene fatta per sorgenti puntiformi a sorgenti di tipo lineare nel caso di rilascio di momento uniforme sulla faglia. Tuttavia per distanze dell'ordine della lunghezza di faglia e rilascio di momento non uniformi, il fattore di finitezza non può essere applicato. In tal caso si usa l'approssimazione della *Somma di sorgenti puntiformi*.

Tale approssimazione è assunta frequentemente in sismologia e molti dei terremoti studiati finora sono stati simulati con una griglia di punti sorgente (e.g. Heaton e Helmberger, 1979; Archuleta e Hartzell, 1981; Bouchon, 1982; Hartzell e Helmberger, 1982; ...). Una faglia di lunghezza finita viene modellata con una serie di punti sorgenti definiti su una griglia posta sulla superficie del piano di faglia, con passo Δs . Per non introdurre o eliminare artificialmente frequenze nel problema, Δs deve essere tale che la separazione temporale tra le singole sorgenti, così come viene determinata al ricevitore, sia più piccola del periodo di Nyquist (vedi Appendice A). Inoltre Δs dipende dalla velocità di rottura, poiché l'intervallo temporale tra i rilasci energetici di due punti vicini deve essere più piccola o uguale al tempo di campionamento dei sismogrammi. Un'altra condizione equivalente è che la più piccola lunghezza d'onda considerata sia campionata con almeno tre punti sorgente (vedi Appendice A).

La scelta della giusta dimensione della cella o spaziatura della griglia è un aspetto fondamentale della modellazione della sorgente estesa. In fig. 1.2 che riportiamo da Spudich e Archuleta (1987), è possibile osservare come l'effetto di una discretizzazione non adeguata si manifesti principalmente nella direzione opposta a quella del fronte di rottura con una serie di impulsi isolati.

In fig 1.3 che riportiamo da un rapporto di lavoro di Asya Kaverina effettuato presso il nostro Dipartimento, si osserva come anche delle variazioni in termini di ampiezza, oltre che di frequenze, possano osservarsi con diverse discretizzazioni della faglia.

D'altra parte, così come dimostreremo nel Cap. 6 anche una discretizzazione troppo fitta, può creare dei problemi, oltre che in termini pratici legati al consumo eccessivo di memoria e tempo di calcolo dei computer, soprattutto in termini di instabilità dei risultati ottenuti da procedure di inversioni.

Nel prossimo paragrafo riportiamo la descrizione dettagliata dell'approssimazione da noi usata per generare i simogrammi sintetici utilizzati in questa tesi.

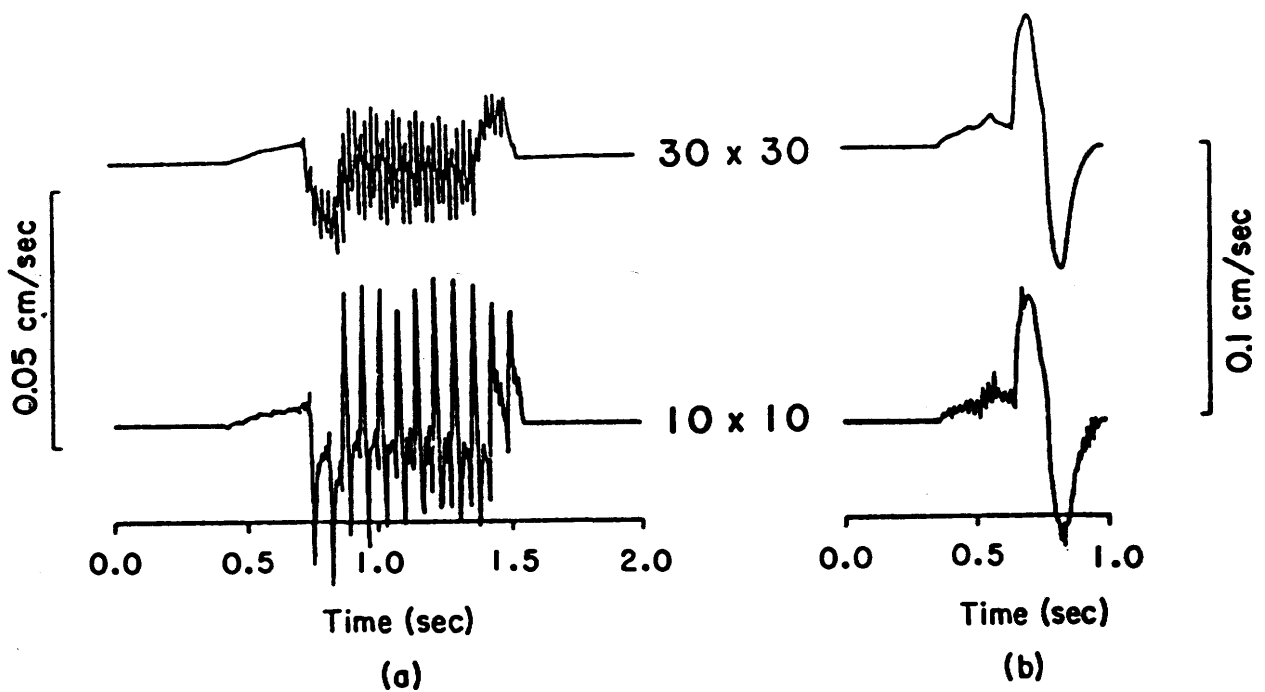


Fig. 1.2 - Effetti di una non adatta discretizzazione del piano di faglia per modellare la sorgente estesa (Spudich e Archuleta, 1987). I sismogrammi più in alto sono calcolati per una griglia con 900 celle quadrate, quelli in basso per una griglia con 100 celle quadrate. Nell'esempio a) il ricevitore è posto nella direzione opposta a quella del fronte di propagazione della frattura, nell'esempio b) il ricevitore è invece collocato lungo la stessa direzione del fronte di propagazione della rottura.

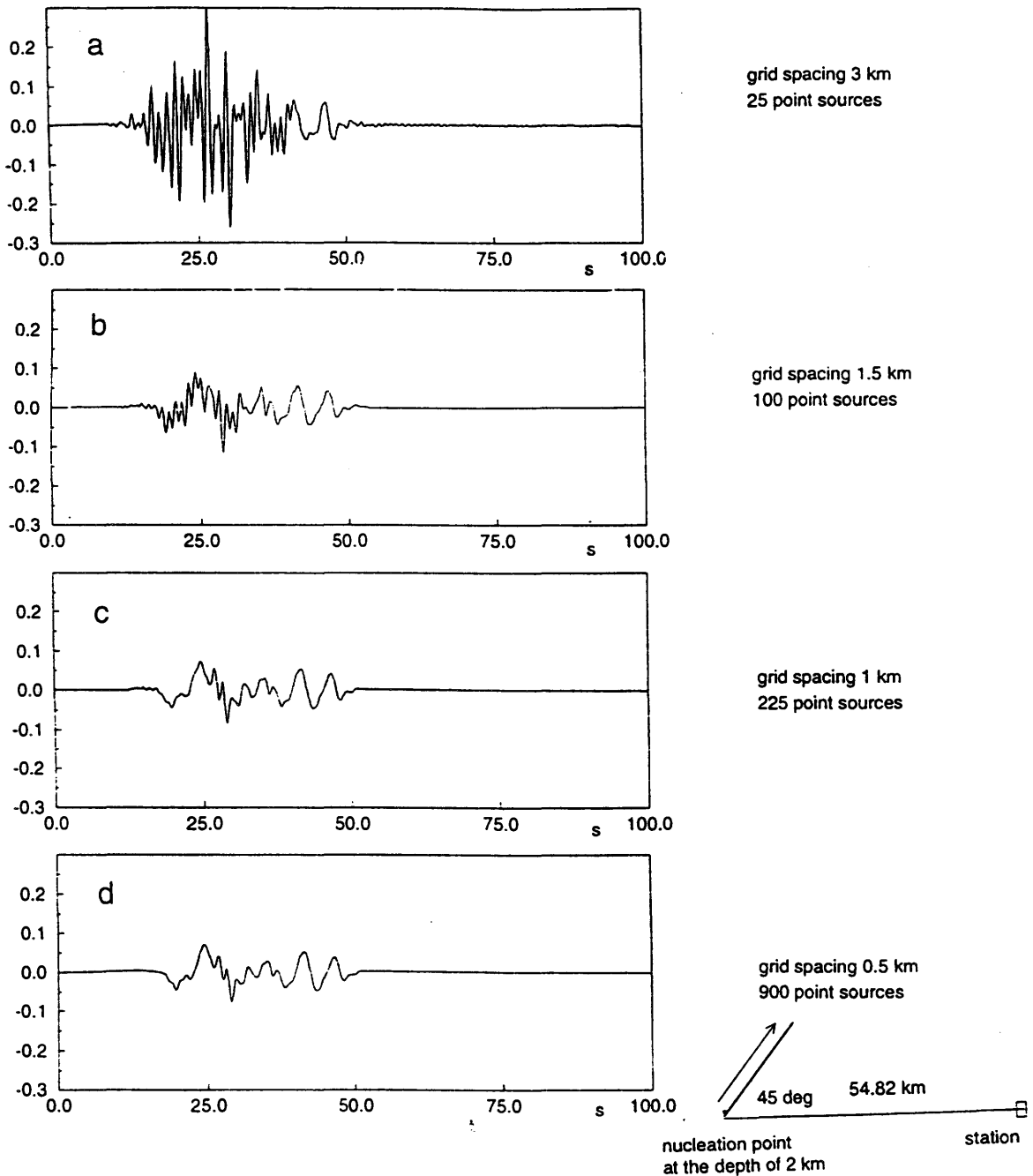


Fig.1.3 - Sismogrammi sintetici (componente verticale della velocità) calcolati per diversi modelli di discretizzazione del piano di faglia. La faglia è verticale con un meccanismo di puro strike-slip. La profondità del limite superiore del piano di faglia è a 1.5 km dalla superficie. I sismogrammi sono calcolati per un momento totale $M= 1e+20$ dyne cm. La velocità di rottura è pari al 70% del valore di velocità delle onde S del modello di velocità strutturale considerato.

Caso a) - 25 sorgenti puntiformi spaziate ogni 3 km.

Caso b) - 100 sorgenti puntiformi spaziate ogni 1.5 km.

Caso c) - 225 sorgenti puntiformi spaziate ogni 1 km.

Caso d) - 900 sorgenti puntiformi spaziate ogni 0.5 km

Si osservi come la forma d'onda si stabilizzi in contenuti di frequenza ed ampiezze quanto più si migliora la discretizzazione del piano di faglia. (Si ringrazia Asya Kaverina per la concessione ad usare questa figura del suo rapporto di studio, 1996)

1.5 Formulazione del problema discreto nella descrizione della sorgente estesa

La dislocazione registrata ad una stazione collocata in un punto x sulla superficie terrestre può essere espressa in base al teorema di rappresentazione (Aki-Richards, 1980), in termini della distribuzione dello scorrimento sopra nella faglia Σ , dall'eq.

$$u_k(x_1, t_1) = \int_0^{t_1} dt \iint_{\Sigma} K_{ik}(x_1, x, t_1, t) a_i(x, t) dS \quad (1.5.1)$$

dove $i, k=1,2,3$, $u_k(x_1, t_1)$ sono le componenti del vettore di spostamento nel punto x , mentre $a_i(x, t)$ sono le componenti del vettore di scorrimento sulla faglia e $K_{ik}(x_1, x, t_1, t)$ sono le componenti della risposta del mezzo nel punto (x_1, t_1) ad un impulso dovuto alla dislocazione del punto sorgente collocato in x . all'istante t .

Tuttavia i sismogrammi osservati non rappresentano direttamente il vettore di spostamento, ma sono filtrati dallo strumento. Per tenere conto della risposta strumentale ad una data stazione e assumendo la direzione di scorrimento costante, si ottiene dopo alcune trasformazioni

$$S_j(t_1) = \int_0^{t_1} dt \iint_{\Sigma} W_j(\xi, t_1 - t) \dot{a}(\xi, t) dS \quad (1.5.2)$$

dove j identifica la stazione e le componenti del sismogramma $S(t_1)$, $W_j(\xi, t)$ è la risposta all'impulso in (ξ, t) corrispondente ad una direzione di scivolamento (slip) prefissata e convoluta con la risposta dello strumento, mentre $\dot{a}(\xi, t)$ è la velocità di scorrimento. Il vettore bidimensionale ξ individua la posizione sulla faglia relativa ad un qualche punto di riferimento (che potrebbe, ad esempio, essere l'ipocentro del terremoto), mentre t è il tempo misurato dal tempo origine del terremoto.

L'equazione (1.5.2) è un' equazione integrale del primo ordine nel caso di una distribuzione continua di stazioni, ed è notoriamente instabile. Per stabilizzarla ai fini dell'analisi presentata nel Cap. 6 imporrò i vincoli di causalità debole, di velocità di scorrimento positiva, e fisseremo inoltre il valore del momento sismico.

Pertanto si avranno le equazioni aggiuntive

$$\dot{a}(\xi, t) \geq 0 \text{ per tutti } (\xi, t) \quad (1.5.3)$$

$$\dot{a}(\xi, t) = 0 \text{ per tutti } t < T(\xi) \quad (1.5.4)$$

dove con $t=T(\xi)$ si indica il limite dell'area consentita allo scorrimento al tempo t (in seguito alla condizione di causalità) è

$$\int_0^{\infty} dt \iint_{\Sigma} \mu(\xi) \dot{a}(\xi, t) dS = M_0 \quad (1.5.5)$$

essendo M_0 il momento sismico e μ il modulo di rigidità del mezzo.

Perché l'equazione (1.5.2) possa risolversi deve essere prima discretizzata. A tale scopo l'area di faglia viene suddivisa in un certo numero di celle rettangolari (fig. 1.4) e all'interno di ogni cella si approssima \dot{a} con delle funzioni lineari nel tempo e lungo la direzione di faglia (da qui in avanti per brevità *strike*) e da una costante lungo l'immersione (da qui in avanti *dip*). W_j è quindi integrato analiticamente sopra ogni cella, mentre gli integrali su l'area di faglia sono sostituiti da somme.

Il tempo alla sorgente è discretizzato fissando un passo costante Δt , e assumendo che \dot{a} , nella durata dell'intervallo scelto, vari linearmente nel tempo.

Si assume inoltre che la durata della sorgente non possa essere maggiore della più lunga registrazione ottenuta, nè minore di quella ottenuta dalla soluzione del tensore momento centroide, qualora tale tipo di soluzione fosse disponibile.

Ricapitolando, l'area di faglia viene discretizzata in celle rettangolari (fig. 1.4) da linee parallele egualmente spaziate lungo la direzione di strike e di dip, in modo che almeno il centro di una cella coincida con l'ipocentro. Le dimensioni delle celle sono indicate con Δx e Δh nelle direzioni di strike e dip rispettivamente. Per ognuna delle celle si calcolano i sismogrammi sintetici per tutte le stazioni con velocità di scorrimento uniforme all'interno della cella e un intervallo temporale pari a Δt che è considerato come l'intervallo di campionamento della storia dello scorrimento.

Siano N_x e N_h il numero totale di celle rispettivamente nella direzione di strike e di dip e N_t il numero di passi di campionamento nella storia dello scorrimento. Se $S(k_x, k_h, j_s, j_t \Delta t)$ sono i sismogrammi sintetici ad ogni cella, essendo k_x, k_h , i numeri relativi alle celle lungo lo strike e il dip e j_t il numero del corrispondente sismogramma alla stazione j_s , ed $\dot{a}(k_x, k_h, k_\tau)$ la velocità di scorrimento incognita alla cella (k_x, k_h) al tempo $\Delta t k_\tau$, i sismogrammi finali alle varie stazioni sono espressi come

$$\sum_{k_x=1}^{N_x} \sum_{k_h=1}^{N_h} \sum_{k_\tau=1}^{N_\tau} S(k_x, k_h, j_s, j_t \Delta t - k_\tau \Delta \tau) \cdot \dot{a}(k_x, k_h, k_\tau) \quad (1.5.6)$$

e il problema inverso consiste nel ritrovare $\dot{a}(k_x, k_h, k_\tau)$ così da approssimare al meglio i dati reali registrati alle diverse stazioni.

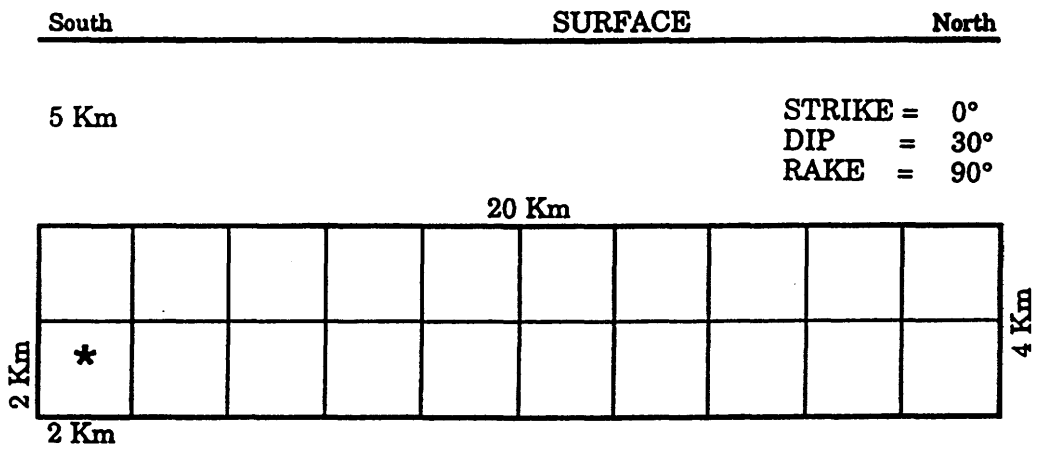


Fig. 1. 4 Esempio di discretizzazione della superficie del piano di faglia

CAPITOLO 2

Il problema diretto: calcolo dei sismogrammi sintetici

2.1 Introduzione

I principi matematici fondamentali per il calcolo dei sismogrammi sintetici furono definiti agli inizi degli anni sessanta da Maryuama (1963) e da Burridge e Knopoff (1964). Essi dimostrarono che la forza puntiforme equivalente della dislocazione sulla faglia è una doppia coppia e che il sismogramma può essere calcolato come convoluzione spazio-temporale della funzione di dislocazione e della funzione di Green. La funzione di dislocazione descrive lo spostamento durante un terremoto come funzione del tempo e della posizione sul piano di faglia; la funzione di Green rappresenta la risposta del mezzo quando una doppia coppia impulsiva è applicata ad un punto sul piano di faglia. La funzione di dislocazione e la funzione di Green, rappresentano, nello spostamento sismico, quantitativamente la sorgente e l'effetto di propagazione. Per ottenere la funzione di dislocazione da un sismogramma reale è quindi necessario conoscere la funzione di Green.

La ricostruzione di un segnale sintetico può essere ottenuta tramite diversi approcci che di seguito ci limiteremo ad elencare brevemente.

Raggi generalizzati in cui il mezzo è approssimato da strati omogenei e il campo d'onda è decomposto in sismogrammi elementari corrispondenti ai raggi.

Metodo completo dei raggi: prende in considerazione i raggi per strati non omogenei tenendo conto degli effetti dipendenti dalla frequenza derivanti, ad esempio, dalla presenza di zone d'ombra.

Metodo WKBJ: considera i raggi per strati non omogenei, più limitato del metodo completo dei raggi per quanto riguarda gli effetti di dipendenza dalla frequenza ma che consente tuttavia dei calcoli molto rapidi per mezzi lentamente variabili nello spazio.

Metodo del numero d'onda: si basa sulla rappresentazione della trasformata di Fourier del campo d'onda di un mezzo stratificato, tramite integrali sul numero d'onda orizzontale.

Metodo della somma dei numeri d'onda: simile al metodo precedente, ma la distribuzione continua dei numeri d'onda è sostituita in tal caso da una distribuzione discreta.

Metodo della somma modale: ossia una rappresentazione del campo d'onda tramite i modi normali delle onde di Rayleigh e di Love, assumendo o no un riflettore perfetto in profondità.

I primi tre metodi sopra descritti sono adatti a calcolare il contributo delle onde di volume nel sismogramma, mentre gli ultimi tre metodi consentono anche l'inserimento del contributo delle onde di superficie e pertanto possono considerarsi come particolarmente adatti per il calcolo di sismogrammi completi.

Il metodo della somma modale che abbiamo usato per le analisi presentate in questa tesi, ha le sue radici nel pionieristico lavoro di Pekeris (1948). Egli mostrò infatti la possibilità di trattare il problema della propagazione delle onde in un mezzo omogeneo stratificato sia in termini di raggi che in termini di modi. L'introduzione dell'effetto della sorgente viene fatto tramite il formalismo introdotto da Ben-Menahem e Harkrider (1964).

Di seguito viene descritta la teoria che consente il calcolo dei sismogrammi sintetici tramite il metodo della somma multimodale come sviluppato da Knopoff, 1964; Schwab e Knopoff, 1972; Schwab et al., 1984; Panza, 1985. Tale metodologia è descritta per la sorgente puntiforme ma può essere estesa a sorgenti di dimensioni e durata finite. Inoltre viene presentata la teoria relativa ai modi di Rayleigh (onde P e SV), poichè il loro trattamento presenta dei gradi di maggiore complessità rispetto ai modi di Love, il comportamento dei quali può comunque essere ricavato da semplici modifiche ed estrapolazioni della teoria di seguito riportata per il calcolo delle autofunzioni e degli autovalori (Florsch et al., 1991).

2.2 Mezzi perfettamente elastici: brevi richiami teorici

Knopoff (1964a) propose come soluzione del problema della propagazione di un'onda elastica in un mezzo multistrato, il quoziente dei prodotti delle matrici. Nel caso di onde SH, le matrici sono del secondo ordine; nel caso delle onde P-SV, le matrici sono del quarto ordine. Gli elementi della matrice individuale sono i determinanti del secondo o del quarto ordine nei due casi.

Per quanto concerne la determinazione della velocità di fase dell'onda di Rayleigh usando il metodo di Knopoff, è stato dimostrato (Schwab, 1970) che con 16 cifre decimali utilizzate durante i calcoli e con 15.4 cifre significative richieste per il calcolo delle velocità di fase, il numero delle lunghezze d'onda di una struttura a strati sopra il semispazio omogeneo può essere portato fino a 196 senza alcuna perdita di precisione. Per controllare l'overflow quando lo spessore (H) della struttura corrisponde ad un elevato numero di lunghezze d'onda (λ), è richiesta una semplice normalizzazione (Schwab et al., 1984). Una volta che la normalizzazione è stata inclusa così da poter trattare grandi valori di H/λ , devono essere evitate situazioni di overflow/underflow: gli elementi della matrice, per gli strati con $c < \beta_m < \alpha_m$ dove c è la velocità di fase, β_m è la velocità delle onde S e α_m la velocità delle onde P dell' m -esimo strato, contengono fattori del tipo (Schwab, 1970)

$$\begin{Bmatrix} \sinh \\ \cosh \end{Bmatrix} P_m^* \begin{Bmatrix} \sinh \\ \cosh \end{Bmatrix} Q_m^* \quad (2.2.1)$$

dove

$$P_m^* = -(\omega d_m/c) \sqrt{1 - (c^2/\alpha_m^2)} = +(\omega d_m/c) r_{\alpha_m}^* \quad (2.2.2)$$

e

$$Q_m^* = -(\omega d_m/c) \sqrt{1 - (c^2/\beta_m^2)} = +(\omega d_m/c) r_{\beta_m}^*$$

essendo d_m lo spessore dell' m -esimo strato e ω la frequenza angolare. Nella notazione usata in questo contesto, gli asterischi indicano la parte immaginaria di una quantità complessa. Per grandi valori dell'argomento, i moduli di questi fattori sono approssimati dalla quantità:

$$\frac{1}{4} \exp\left[(\omega d_m/c)(r_{\alpha_m}^* + r_{\beta_m}^*)\right] \quad (2.2.3)$$

che è sempre positiva.

Poichè il nostro interesse è limitato ai cambiamenti di segno della funzione di dispersione, questo fattore può essere eliminato quando trattiamo lo strato m ; di conseguenza non sarà più necessario trattare con esponenziali aventi argomenti al di sopra di un certo livello.

Per analogia si può trattare il caso $\beta_m < c < \alpha_m$ e un grande d_m/λ , essendo possibile trascurare termini come:

$$\frac{1}{2} \exp\left[(\omega d_m/c)r_{\alpha_m}^*\right] \quad (2.2.4)$$

Il potere di questo approccio è stato ampiamente testato da Schwab et al. (1984).

Una volta ottenuta la velocità di fase c calcolata per una data frequenza angolare ω , la velocità di gruppo u si ottiene da:

$$u = \frac{c}{1 - (dc/d\omega)(\omega/c)} \quad (2.2.5)$$

dove la teoria della funzione implicita standard è applicata alla funzione di dispersione F in modo da ottenere:

$$\frac{dc}{d\omega} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_c \bigg/ \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)_\omega \quad (2.2.6)$$

Per ulteriori dettagli si veda Schwab e Knopoff (1972).

I dettagli dell'algoritmo per il calcolo degli autovalori con il metodo di Knopoff sono abbastanza complicati e vengono considerati raramente, sebbene in principio sia richiesta solo una applicazione diretta della regola di Cramer, mentre i dettagli della formulazione originale (Haskell, 1953) sono relativamente semplici. Una descrizione dettagliata riguardante il metodo di Knopoff è data da Schwab et al. (1984).

Qui ricordiamo semplicemente che u_m^* , w_m^* , σ_m^* e τ_m^* sono, rispettivamente, le componenti orizzontali e verticali dello spostamento e le componenti normali e tangenziali dello stress all'interfaccia m -esima, dove la superficie libera corrisponde ad $m=0$.

Poichè tutti i problemi connessi con la perdita di precisione alle alte frequenze sono stati risolti, useremo la sommatoria dei modi più alti delle onde di superficie per la generazione di un moto sintetico "completo" alle alte frequenze. Descriveremo in dettaglio gli algoritmi sviluppati per le onde di Rayleigh, cioè

per sintetizzare le componenti radiali e verticali del moto. Tuttavia i risultati ottenuti possono essere facilmente estesi alle onde di Love.

Il punto chiave nell'utilizzo della sommatoria multimodale, sia per i modi di Love che di Rayleigh, è un calcolo efficiente della velocità di fase per i differenti modi ad intervalli di frequenza sufficientemente piccoli Δf , con sufficiente precisione. Per essere efficienti è consigliabile non determinare, ad ogni frequenza e ad ogni modo, gli zeri della funzione di dispersione usando le procedure standard dette di "root-bracketing" e "root-refining" (vedi p.e. Schwab e Knopoff, 1972). Queste devono essere usate solo se strettamente necessario, come ad esempio agli inizi di ogni modo. Per tutti gli altri punti di ogni modo, la velocità di fase può essere stimata con una estrapolazione cubica, usando i valori della lentezza di fase ("phase slowness") $s=1/c$ e df/ds già determinati alle frequenze f_{i-2} ed f_{i-1} . Tuttavia la precisione che può essere raggiunta in questo modo non è soddisfacente, quindi la velocità di fase deve essere raffinata. Ciò può venir fatto attraverso un'interpolazione cubica interattiva nel piano F-c. Tale procedura ha sempre dato determinazioni molto accurate della velocità di fase e permette un considerevole risparmio di tempo rispetto alle procedure standard "root-bracketing" e "root-refining".

Una volta risolto il problema della determinazione accurata della velocità di fase, devono essere risolti altri due problemi per ogni frequenza:

- (a) seguire correttamente un modo e
- (b) determinare il minimo numero di strati da utilizzare ad una determinata frequenza.

Il problema di seguire correttamente un modo nasce nel dominio delle alte frequenze (ossia $f > 0.1$ Hz), dove molti modi superiori sono vicini l'uno all'altro. La determinazione del minimo numero di strati da utilizzare (minimizzazione della struttura) è critica per ottenere una elevata precisione nella determinazione della velocità di fase utilizzando il minor tempo computazionale possibile.

Per ottenere una elevata efficienza nel calcolo dei sismogrammi sintetici è necessario calcolare (nel dominio della frequenza) la velocità di fase, l'attenuazione di fase, la velocità di gruppo, l'ellitticità, l'integrale dell'energia, le autofunzioni e la loro massima profondità di penetrazione ad intervalli di frequenza costanti. Per raggiungere una frequenza massima di 10 Hz, un passo soddisfacente è 0.05 Hz. Per determinare il numero totale di modi presenti nell'intervallo di frequenza considerato, si fissa $c_0 = 0.98\beta_n$, dove β_n è la velocità delle onde S nel semispazio, e f viene incrementato usando l'algoritmo di

Schwab e Knopoff (1972) per trovare i valori di f corrispondenti agli zeri della funzione di dispersione $F(f, c_0)$. Ovviamente, partendo da $f=0$, il primo zero in $F(f, c_0)$ corrisponde al modo fondamentale, il secondo al primo modo superiore e così via. I valori di f per i quali risulta $F(f, c_0)=0$ vengono usati come frequenze di partenza (le frequenze più basse) per il calcolo dei diversi modi. Una volta definita la frequenza di partenza per ciascun modo, è possibile calcolare, cominciando dal modo fondamentale, tutte le relazioni di dispersione. Questo viene fatto mantenendo f costante e facendo variare c , applicando tale procedura a tutti i punti di frequenza ugualmente spaziatosi dell'intervallo di frequenza scelto.

L'inseguitore di modi

Per potere correttamente associare lo zero della funzione di dispersione al modo appropriato, bisogna definire un metodo efficiente per seguire un modo M nello spazio velocità di fase-frequenza, distinguendolo dai modi vicini $M-1$ e $M+1$. Il problema che è alquanto difficile da risolvere vicino ai punti di osculazione, ossia quei punti che caratterizzano la transizione dalle onde crostali alle onde di canale (Panza et al., 1972). Per frequenze fino ad 1 Hz, il modo fondamentale è generalmente ben separato dai modi rimanenti, mentre ciò non accade per le frequenze più alte. Così, per la ricostruzione dei sintetici che rappresentano il moto forte del terreno, l'inseguitore di modi deve essere applicato a tutti i modi, incluso il fondamentale. Sulla base della nostra esperienza, non ci sono altri modi presenti in prossimità delle osculazioni vicine tra il modo fondamentale e il primo modo superiore. Per seguire il modo fondamentale è quindi sufficiente (Panza e Suhadolc, 1987) usare le seguenti proprietà di $\partial F/\partial c$:

- (a) per un dato modo M , il segno di $\partial F/\partial c$ è costante con la frequenza, e
- (b) andando da un modo al successivo $\partial F/\partial c$ cambia segno con regolarità.

In altre parole, una volta che $\partial F/\partial c$ è calcolato alla frequenza iniziale del modo fondamentale, in tutti i punti seguenti il semplice controllo dell'andamento del segno rende possibile seguire il modo correttamente. Infatti, con l'aumentare della frequenza, fintanto che il segno non cambia, lo zero della $F(f, c)$ appartiene al modo fondamentale. Se il segno di $\partial F/\partial c$ cambia, lo zero di $F(f, c)$ non appartiene al modo fondamentale e la ricerca dello zero riparte dal valore più

basso di c . In tal modo è possibile calcolare tutta la curva di dispersione per il modo fondamentale in modo davvero rapido.

Per i modi superiori, l'algoritmo di sopra non è sufficiente, poichè questi modi sono generalmente molto più vicini gli uni agli altri. Comunque la ricostruzione di un efficiente inseguitore di modi da seguire è ancora possibile.

Infatti Tolstoy (1965) dimostrò per un dato modo superiore anche se i calcoli sono fatti per strutture che contengono degli strati a bassa velocità, la velocità di fase decresce all'aumentare della frequenza. Così, per ogni modo superiore M , il possibile valore della velocità di fase ad una data frequenza f giace nel range (c_1, c_2) , dove c_1 è la velocità di fase del modo $M-1$ alla frequenza f e c_2 è la velocità di fase del modo M alla frequenza $f-\Delta f$. Se i calcoli sono portati fino ad una massima frequenza di 1 Hz, un passo di campionamento appropriato in frequenza è di $\Delta f=0.005$ Hz. Questa condizione, combinata con la proprietà del segno di $\partial F/\partial c$, riconosce un eventuale salto dal modo M ai modi $M \pm (2n + 1)$ ($n=0,1,\dots$). Se nel dominio (c_1, c_2) e $(f-\Delta f, f)$ sono contenuti $2m+1$ ($m=1,2,\dots$) modi, la procedura appena descritta non è sufficiente per seguire il modo. Ciò accade comunque raramente, così non è stato messo appunto un algoritmo molto efficiente per questo tipo di problema. Il nostro inseguitore di modi riconosce il salto di modi solo quando il calcolo dei modi $M+1$ e $M+2$ è completa. A tal punto il calcolo può essere ripreso dal modo M alla frequenza F usando come valore iniziale della velocità di fase un valore appena maggiore di quello del modo $M-1$ alla stessa frequenza.

Minimizzazione della struttura

La minimizzazione della struttura è un punto critico che riguarda l'efficienza e l'accuratezza del calcolo degli autovalori, delle autofunzioni e di tutte le quantità connesse. Per ogni modo, al fine di salvare tempo macchina, è necessario determinare, per ogni frequenza, la minima parte di struttura da usarsi per mantenere comunque una buona accuratezza nei calcoli.

In genere per ogni struttura fatta di n strati, ciò può essere fatto (Panza e Suahadolc, 1987) calcolando la quantità

$$E_m = \bar{\rho}_m \left[\left(\frac{u_m^*}{w_o} \right)^2 + \left(\frac{w_m}{w_o} \right)^2 \right], \quad m = 1, \dots, n-1 \quad (2.2.7)$$

dove

$$\bar{\rho}_m = \frac{1}{2}(\rho_{m-1} + \rho_m) \quad \text{se } m \geq 2 \quad (2.2.8)$$

e ρ_{m-1} e ρ_m sono le densità negli strati $m-1$ e m ; se $m=1$, allora è $\bar{\rho}_1 = \rho_1$.

Poichè si comincia dalle frequenze più basse consistenti con un valore di $c=0.98 \beta_n$, la quantità di struttura da usarsi all'inizio di ogni modo, coincide con il numero totale di strati n nel modello strutturale. Una volta che la velocità di fase è stata determinata, si può calcolare facilmente E_m e partendo da $m=n-1$, è facile individuare il suo valore di minimo più basso e così determinare la massima profondità di penetrazione del modo considerato ad una certa frequenza.

A questo stadio tutte gli strati al di sotto dell'interfaccia j corrispondente al valore di minimo più basso di E_m possono venire scartati e i parametri degli $j+1$ strati usati per definire la parte terminale del semispazio possono essere usati per definire il semispazio. Con la struttura così minimizzata, è possibile calcolare con la necessaria accuratezza (più di 8 cifre) il valore finale della velocità di fase. In generale, ripetendo questa procedura per ogni frequenza e modo si ottengono risultati soddisfacenti.

Una particolare attenzione va posta quando nel modello strutturale sono presenti strati a bassa velocità. Consideriamo ad esempio la presenza di un solo canale a bassa velocità, essendo ovvia l'estensione a più strati. Per le onde che si propagano essenzialmente nel canale a bassa velocità, la necessaria accuratezza è assicurata semplicemente ponendo il semispazio finale giusto al di sotto della zona di inversione della velocità. Per le onde che si propagano sopra il canale a bassa velocità, per esempio per le onde che hanno una velocità di fase minore della minima velocità delle S nel canale, bisogna conservare soltanto la struttura sopra il minimo più basso di E_m collocato al di sopra del canale stesso.

La situazione è completamente differente quando si trattano onde che si propagano con una velocità di fase maggiore della velocità minima delle onde S nel canale, ad esempio onde che si propagano principalmente al di sopra del canale a bassa velocità ma campionano anche più in profondità. Per queste onde è genericamente necessario tenere almeno tutto il canale, assegnando al semispazio le proprietà dello strato immediatamente sottostante. In molti casi la penetrazione del canale a bassa velocità è così piccola che la minimizzazione della struttura può essere calcolata senza perdita di precisione anche rimuovendo il canale.

L'identificazione delle onde per cui è possibile tale riduzione, può essere fatta valutando il valore di E_m , cominciando da $m=0$. Se per alcuni degli strati giusto al di sopra dello strato a bassa velocità $E_j \leq 10^{-4} E_0$, la struttura può essere terminata all'interfaccia j -esima, usando come caratteristiche del semispazio quelle dello strato j -simo.

Da quanto detto fin qui risulta dunque che la quantità iniziale di struttura utilizzata per il calcolo ad una data frequenza f è determinata dal risultato della minimizzazione della struttura alla frequenza $f-\Delta f$, a meno che alla frequenza $f-\Delta f$ ci sia un campionamento in un canale molto debole. In questi casi la quantità di struttura inizialmente usata alla frequenza f contiene sempre lo strato a bassa velocità.

2.3 Mezzi Anelastici: brevi richiami teorici

La natura anelastica della Terra si manifesta attraverso l'attenuazione delle onde elastiche. Per tenere in considerazione tali effetti, Knopoff (1964b) introdusse un termine addizionale nella equazione differenziale del moto. Tale termine contiene la costante adimensionale Q , collegata ai coefficienti di attenuazione spaziale ($e^{\alpha x}$) e temporale ($e^{-\gamma t}$) dalle seguenti relazioni

$$\alpha = \omega/2Qc \quad , \quad \gamma = \omega/2Q \quad (2.3.1)$$

dove c è la velocità di fase del moto di onde piane preso in considerazione.

L'attenuazione distorce anche le proprietà della dispersione. Futtermann (1962) indicò che la dispersione fisica deve accompagnare l'attenuazione delle onde affinché la causalità sia conservata. In un mezzo con una costante Q , la correzione alla dispersione delle onde di corpo può essere espressa come

$$A_1(\omega) = A_1(\omega_0) / [1 + (2/\pi)A_1(\omega_0)A_2(\omega_0)\ln(\omega_0/\omega)] \quad (2.3.2)$$

$$B_1(\omega) = B_1(\omega_0) / [1 + (2/\pi)B_1(\omega_0)B_2(\omega_0)\ln(\omega_0/\omega)] \quad (2.3.3)$$

dove $A_1(\omega)$ è la velocità di fase delle onde P, $A_2(\omega_0)$ è l'attenuazione di fase delle onde P, $B_1(\omega)$ è la velocità di fase delle onde S, e $B_2(\omega_0)$ l'attenuazione di fase delle onde S.

Nel seguente calcolo, abbiamo scelto $\omega_0 = 2\pi rad$. Le quantità A_1 , A_2 , B_1 e B_2 sono collegate alle velocità complesse delle onde di corpo α e β , e descrivono le proprietà anelastiche del mezzo, tramite le relazioni

$$\alpha^{-1} = A_1^{-1} - iA_2, \quad \beta^{-1} = B_1^{-1} - iB_2 \quad (2.3.4)$$

(Schwab and Knopoff, 1972). In mezzi anelastici, la velocità di fase delle onde di superficie deve anche essere espressa come una quantità complessa:

$$c^{-1} = C_1^{-1} - iC_2, \quad (2.3.5)$$

dove C_1 è la velocità di fase attenuata e C_2 l'attenuazione di fase.

Con tali generalizzazioni, gli algoritmi sviluppati per mezzi perfettamente elastici possono essere applicati a mezzi anelastici. La velocità di fase attenuata e l'attenuazione di fase possono essere determinate come radici della funzione di dispersione F , che ora è una funzione complessa. Perché l'algoritmo sia efficiente, sono necessarie delle buone stime di C_1 e C_2 .

Come valore iniziale di C_1 e C_2 , è conveniente usare la velocità di fase determinata per il caso di perfetta elasticità una volta che è stata introdotta la dispersione delle onde di volume. Avendo stimato i valori iniziali per C_1 e C_2 , il trattamento esatto dell'attenuazione dovuto alla anelasticità descritto da Schwab e Knopoff (1972) può essere applicato.

L'inseguitore di modi.

Le onde di volume sono disperse in mezzi anelastici. La dipendenza in frequenza delle onde di volume richiede l'introduzione (Panza e Suhadolc, 1987) di una piccola ma essenziale variazione nell'inseguitore di modi.

Se nel caso di un mezzo perfettamente elastico per ogni modo superiore M il possibile valore della velocità di fase ad una certa frequenza giace nell'intervallo (c_1, c_2) , in presenza della dispersione delle onde di volume, bisogna ridefinire il limite superiore c_2 . Infatti, la velocità di fase aumenta con l'aumentare della frequenza e questo può causare un aumento della velocità di fase dei modi superiori con la frequenza. Tale effetto è evidente in quelle parti della curva del modo che sono per la maggior parte non disperse nei casi perfettamente elastici.

Occorre pertanto stimare l'incremento nella velocità di fase di un dato modo ad una data frequenza f rispetto alla frequenza $f - \Delta f$ dovuta alla dispersione delle onde di volume. Il massimo incremento della velocità di fase (Δc_2) può essere

ricavato come funzione della velocità media delle onde S (B_1) e della loro stessa attenuazione (B_2), usando come pesi le autofunzioni alla frequenza $f-\Delta f$.

$$\Delta c_2 = \frac{\bar{B}_1(f - \Delta f)}{1 + \bar{x} \ln[f_0/(f - \Delta f)]} \frac{\bar{x} \ln[f/(f - \Delta f)]}{1 + \bar{x} \ln(f_0/f)} \quad (2.3.6)$$

con

$$\bar{x} = (2/\pi) \bar{B}_1(f - \Delta f) \bar{B}_2(f - \Delta f). \quad (2.3.7)$$

Nel caso in cui le onde alla frequenza $f-\Delta f$ penetra ad una profondità inferiore di quella alla frequenza f . così come ad esempio nel canale delle onde crostali, si calcolano le medie pesate dei valori di velocità delle onde S e dell'attenuazione all'ultima frequenza $f - N\Delta f$, dove l'onda raggiunge la stessa profondità di penetrazione come alla frequenza f . Il maggiore vantaggio di tale tipo di approccio sta nel mantenere lo schema generale del inseguitore di modi del caso elastico.

Sempre a causa della dispersione delle onde di volume, bisogna anche porre attenzione a calcolare le velocità di gruppo usando la teoria delle funzioni implicite.

L'effetto della dispersione delle onde di volume non sono nella pratica molto rilevanti, almeno nella banda in frequenze che caratterizza le registrazioni di forti spostamenti del suolo. Tuttavia l'introduzione della dispersione delle onde di volume in mezzi anelastici risulta da una esigenza fisica.

2.4 Risposta delle sorgenti: mezzi perfettamente elastici

Una dettagliata descrizione del modello di faglia di un terremoto usato nei calcoli seguenti, è data da Panza, Schwab e Knopoff (1973).

L'espressione asintotica della trasformata temporale di Fourier della dislocazione del j -esimo modo di Rayleigh sulla superficie libera di un modello di Terra perfettamente elastico alla distanza r da una sorgente tipo doppia coppia può essere scritta come

$$U_r^{DC} = \{ |R(\omega) \exp(i\phi_0)| \} |n| k^{1/2} \exp(-i3\pi/4) \chi(\theta, h) \varepsilon_0 G \exp(-ikr) / \sqrt{2\pi r} \quad (2.4.1)$$

$$U_z^{DC} = (\varepsilon_0 \exp(i\pi/2))^{-1} U_r^{DC} \quad (2.4.2a)$$

$$U_\theta^{DC} = 0 \quad (2.4.2b)$$

dove $R(\omega)$ è la trasformata di Fourier della funzione temporale equivalente ad una forza puntiforme, ϕ è relativa fase iniziale

$$\phi_0 = \arg R(\omega) \quad (2.4.3)$$

la quantità n è il vettore perpendicolare alla faglia di lunghezza unitaria, k numero d'onda e fase iniziale ed inoltre è ε_0 l'ellitticità espressa come

$$\varepsilon_0 = -u_0^*/w_0 \quad (2.4.4)$$

Il fattore G è dato da

$$G^{-1} = 2cuI_1 \quad (2.4.5)$$

dove

$$I_1 = \int_0^\infty \rho(z)[y_1^2(z) + y_3^2(z)]dz \quad (2.4.6)$$

e $\rho(z)$ è la densità. La dipendenza azimutale della risposta è data da

$$\chi(\theta, h) = d_0 + i(d_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta) + d_3 \sin 2\theta + d_4 \cos \theta \quad (2.4.7)$$

dove θ è l'angolo tra lo strike della faglia e la direzione epicentro-stazione, ed h è la profondità ipocentrale. Le quantità d_i ($i=0, \dots, 4$) sono

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta B(h) \\ d_1 &= -\sin \lambda \cos 2\delta C(h) \\ d_2 &= -\cos \lambda \cos \delta E(h) \\ d_3 &= \cos \lambda \sin \delta A(h) \\ d_4 &= -\frac{1}{2} \sin \lambda \sin 2\delta A(h) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

dove λ è l'angolo di scorrimento e δ è l'angolo di inclinazione della faglia ossia il *dip*. Inoltre

$$\begin{aligned}
 A(h) &= -u^*(h)/w_0 \\
 B(h) &= -\left(3 - 4 \frac{\beta(h)^2}{\alpha(h)^2}\right) \frac{u^*(h)}{w_0} - \frac{2}{\rho(h)\alpha(h)^2} \frac{\sigma^*(h)}{\dot{w}_0/c} \\
 C(h) &= -\frac{1}{\mu(h)} \frac{\tau(h)}{\dot{w}_0/c}
 \end{aligned}
 \tag{2.4.9}$$

dove $\alpha(h)$ è la velocità delle onde P alla profondità della sorgente, $\beta(h)$ la corrispondente velocità delle onde S, $u^*(h)$, $\sigma^*(h)$, $\tau(h)$, e w_0 sono le autofunzioni alla profondità della sorgente, e alla superficie libera, rispettivamente.

Adottando la relazione del campo-lontano data da Ben-Menahem e Harkrider (1964)

$$U_r/U_z = \varepsilon_0 e^{i\pi/2} \tag{2.4.10}$$

allora per un'onda che si propaga nella direzione positiva r con moto particellare ellittico retrogrado U_r , conduce a U_z per $\pi/2$ radianti e ε_0 è positivo solo se z è scelto come positivo verso l'alto.

L'espressione asintotica appena descritta consente di calcolare i sismogrammi sintetici con almeno 3 cifre significative finchè $kr \geq 10$ (Panza et al., 1973) ed è equivalente all'espressione in termini del momento sismico (Aki e Richards, 1980)

2.5 Risposta della sorgente: mezzi anelastici

Quando si considerano mezzi anelastici, il numero d'onda k è complesso:

$$k = (\omega/C_1) - i\omega C_2 \tag{2.5.1}$$

così il termine $e^{-\omega C_2 r}$ rappresenta l'ampiezza smorzata ed è il maggiore effetto introdotto dall'anelasticità. Minori effetti, come quelli che provengono dalle velocità di gruppo complesse e dalle autofunzioni, non sono qui incluse. Esse divengono infatti maggiormente importanti quando si trattano le variazioni laterali del mezzo.

L'estensione di questi risultati al formalismo per le sorgenti a dimensioni e durate finite è pressochè diretto. Nel caso la sorgente non sia approssimabile

come sorgente istantanea ma abbia un tempo di risalita finito, la derivata della funzione temporale della sorgente cambia da una funzione di tipo delta ad una di tipo triangolare di durata T , con l'effetto di filtrare i periodi minori di T .

Le sorgenti a dimensioni finite, possono essere trattate con due differenti approcci. Nel caso in cui la distanza sorgente-ricevitore sia molto più grande (almeno di un fattore 10) delle dimensioni della sorgente, si può usare il fattore di Beh-Menahem

$$[(\sin X)/X]e^{-iX} \quad (2.5.2)$$

con

$$X = \frac{\omega L}{2} \left[\frac{1}{v} - \frac{\cos \psi}{c} \right] \quad (2.5.3)$$

così come descritto in dettaglio da Båth (1974). Nell'equazione (2.5.3) ω è la frequenza angolare, L la lunghezza della sorgente, v la velocità di rottura, c è la velocità di fase e ψ l'azimut della stazione misurato dalla direzione di rottura.

Una seconda possibilità è quella di calcolare il sismogramma come somma di sorgenti puntiformi spostate nello spazio e nel tempo. Questo metodo è stato già ampiamente discusso nel capitolo precedente ed è il tipo di approssimazione che abbiamo adottato in questa tesi per il trattamento della sorgente estesa.

Si vuole qui ricordare che quando per l'approssimazione della propagazione della rottura si considera l'eccitazione successiva di sorgenti puntiformi equidistanziate nello spazio, è necessario che sia verificata la condizione per cui il tempo di separazione apparente tra due punti successivi, così come sono visti al ricevitore, sia più piccola del periodo di Nyquist del segnale sintetico. Tale condizione non deve invece essere soddisfatta nel caso in cui pochi punti sorgenti vengono adoperati per approssimare delle asperità irregolarmente spaziate.

È anche importante osservare che l'espressione per le sorgenti di dimensioni finite è valida nell'approssimazione di campo lontano, che può essere all'incirca approssimato dalla condizione che la distanza sorgente-ricevitore sia di un ordine di grandezza maggiore delle dimensioni della sorgente. Se tale ultima condizione non è soddisfatta, ma risulta ancora $kr \geq 10$, il segnale sintetico può essere calcolato come la somma di sismogrammi dati da sorgenti puntiformi separate nello spazio e nel tempo.

CAPITOLO 3

Metodi di inversione di forme d'onda

3.1 Introduzione

Seguendo la definizione di Keller (1976), due problemi sono inversi l'uno dell'altro se la formulazione di uno di essi richiede la totale o parziale conoscenza dell'altro. Secondo questa definizione, sarebbe arbitrario dire quali dei due problemi si può dire diretto e quale inverso. Usualmente uno dei problemi deve essere studiato prima e forse in maggior dettaglio. Questo è solitamente chiamato *problema diretto*, mentre l'altro è detto *problema inverso*.

Esiste comunque un'altra importante differenza tra questi due problemi. Hadamard (1923) introdusse il concetto di problema *ben-posto*, concetto che si origina dalla filosofia matematica e che afferma che il modello di un problema fisico deve avere le proprietà di unicità, esistenza e stabilità delle soluzioni. Se una delle proprietà viene meno, il problema diventa *mal-posto*. È quindi evidente che molti problemi inversi conducano a problemi mal-posti, mentre i corrispondenti problemi diretti si dicono ben-posti.

Spesso l'esistenza e l'unicità delle soluzioni può essere forzata ampliando o riducendo lo spazio delle soluzioni (lo spazio del "modello"). Per recuperare la stabilità, comunque, bisogna variare la topologia degli spazi, cosa che è in molti casi impossibile per la presenza degli errori di misurazione. Sembrerebbe quindi impossibile calcolare la soluzione di un problema numerico inverso, visto che la soluzione del problema dipende in modo continuo dai dati, ossia da problemi mal-posti. Con informazioni addizionali (vincoli a priori) sulle soluzioni, può risultare possibile ricavare la stabilità e costruire efficienti algoritmi numerici.

In geofisica, la teoria dell'inversione fornisce gli strumenti per spiegare le osservazioni geofisiche e dedurre da esse informazioni sulla distribuzione spaziale delle proprietà dei materiali o dei processi geodinamici all'interno della Terra. In sismologia in particolare, i dati di osservazione consistono in sismogrammi generati da terremoti o esplosioni artificiali. Derivare da questi dati un modello costituisce il problema inverso. Per capire tuttavia come i dati siano

influenzati dal modello, dobbiamo essere in grado di calcolare dati sintetici per un ipotetico modello di terra. Questo costituisce il problema diretto (fig. 3.1).

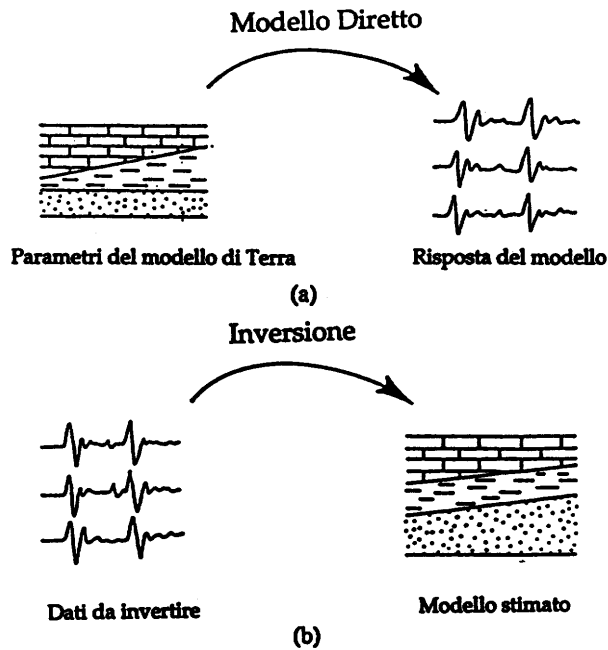


Fig. 3.1 - Rappresentazione schematica del a) problema diretto e b) problema inverso

La nozione di ottimizzazione è alla base della teoria inversa, essendo fondata sull'osservazione che i problemi, i cui dati si basano su misure fisiche non possono avere una soluzione unica. D'altra parte, dalle misure fisiche possiamo risalire ad un particolare modello e quindi accontentarci solamente di una soluzione tra l'insieme delle molteplici soluzioni possibili. In alternativa, si possono cercare di risolvere solamente le proprietà comuni, proprietà che siano cioè valide per ognuno degli elementi dell'insieme di soluzioni possibili.

L'inversione "geofisica" consiste nel trovare un valore ottimale di una funzione in più variabili. La funzione che si vuole minimizzare o massimizzare è una funzione di "misfit", funzione che definisce la differenza (o la similarità) tra dati osservati e dati sintetici calcolati assumendo un determinato modello della Terra. Il modello della Terra è descritto da parametri fisici che caratterizzano le proprietà degli strati rocciosi, quali ad esempio la velocità delle onde compressionali, la resistività e così via, oppure da parametri che caratterizzano un dato processo geodinamico (rilascio di momento nello spazio e nel tempo).

Per trovare tali parametri vengono usati sia i metodi di ottimizzazione globale che locale.

Per molte applicazioni geofisiche, la superficie di "misfit", intesa come una funzione del modello dei parametri che è descritta dal confronto tra i dati calcolati e osservati, può essere notevolmente complicata e caratterizzata da molti massimi e minimi; il minimo dei minimi è detto *minimo globale* e tutti gli altri minimi sono chiamati *minimi locali*. Il minimo globale è un minimo locale ma non vale il contrario ed è anche possibile avere diversi minimi più o meno alla stessa profondità.

L'ottimizzazione locale ottenuta, ad esempio, con i metodi del gradiente discendente, tentano tipicamente di trovare un minimo locale nelle vicinanze della soluzione iniziale. La maggior parte dei metodi di ricerca locale sono algoritmi deterministici. Essi usano le proprietà locali della funzione di "misfit" per calcolare e aggiornare l'ultima soluzione trovata e procedere nella direzione di un altro minimo. In tal modo tali metodi non raggiungeranno il minimo globale se la soluzione iniziale è vicina a quella di un minimo locale.

I metodi di ottimizzazione globale, a differenza dei metodi di ottimizzazione locale, tentano di determinare il minimo assoluto della funzione di misfit.

La maggior parte degli algoritmi di ottimizzazione globale sono di natura stocastica e usano informazioni più globali sulla superficie di misfit per aggiornare la loro soluzione più recente. Tuttavia la convergenza di tali metodi al minimo globale non è garantita per tutti gli algoritmi. La convergenza al minimo globale è statisticamente garantita solo per alcuni degli algoritmi "simulated annealing" ed a determinate condizioni.

D'altronde, quando si trattano dati provenienti da osservazioni non è mai possibile sapere se la soluzione derivata corrisponde al minimo globale o no. Da un punto di vista computazionale questi metodi sono piuttosto intensivi e richiedono potenti calcolatori.

3.2 Proprietà delle soluzioni dei metodi di inversione

Le soluzioni dei problemi inversi devono godere di alcune proprietà fondamentali.

Esistenza : l'esistenza implica che esista almeno un modello che possa spiegare i dati.

Unicità : ogni modello deve poter generare un insieme unico di dati. Se due modelli originano dati che non sono differenti tra loro, allora si ottiene una soluzione che non è unica. I motivi che danno origine alla non unicità possono essere differenti. Per problemi che trattano, ad esempio, i parametri della Terra, la dimensionalità infinita dello spazio del modello è genericamente approssimata con un problema finito discreto, e ciò induce ad una non-unicità inerente (Backus e Gilbert, 1967). Le proprietà dei materiali sono, ad esempio, funzioni continue delle coordinate spaziali e nell'inversioni tali funzioni vengono calcolate per un numero finito di punti. L'unicità è poi anche collegata al problema dell'identificazione del modello dai dati. Molti modelli possono spiegare abbastanza bene i dati, ma ciò dipende anche dalla risoluzione a cui i dati possono condurci.

Stabilità: la stabilità indica come dei piccoli errori nei dati possano propagarsi nel modello. Una soluzione stabile è insensibile a piccoli errori nei dati. L'instabilità può condurre alla non unicità.

Robustezza : la robustezza indica il livello di insensibilità delle soluzioni rispetto ad un piccolo numero di grandi errori nei dati.

Così come già detto nell'introduzione, problemi che non possiedono unicità e stabilità sono detti mal-posti, viceversa si hanno problemi ben-posti.

Poiché in molti problemi geofisici le soluzioni non sono uniche, l'obiettivo dell'inversione è quello di trovare una soluzione o più soluzioni e rappresentare il grado di non unicità della soluzione in maniera quantitativa. Durante la procedura devono essere fatti dei tentativi per ridurre la non-unicità e tentare di spiegare i dati in termini di errori e della fisica del problema diretto.

3.3 Classificazione dei metodi di inversione

Sulla base del metodo di ricerca applicato a ritrovare la soluzione ottimale, i metodi di inversione possono essere così catalogati:

Metodi di inversione lineare o linearizzata

Questi metodi assumono che i dati siano una funzione lineare del modello dei parametri oppure che l'approssimazione lineare sia valida.

Metodi lineari iterativi o del gradiente

Tali metodi possono anche essere definiti come metodi basati sul calcolo, poichè usano delle informazioni gradiente per calcolare e aggiornare di volta in volta il modello calcolato. L'errore tra i dati e i sintetici per il modello calcolato è rappresentato negli aggiornamenti iterativi del modello e la procedura viene ripetuta fintanto che l'aggiustamento diviene molto piccolo.

Metodo enumerativo o della griglia di ricerca

Questo metodo comporta una ricerca della soluzione analizzando ogni punto dello spazio del modello. Il calcolo dei dati sintetici per un grande spazio del modello è davvero un imponente e spesso improponibile compito e spesso non determina una soluzione pratica.

Metodo Monte Carlo

Il metodo coinvolge in tal caso un campionamento casuale dello spazio del modello. Ciò nella speranza che in un numero relativamente basso di tentativi, si sia in grado di trovare delle buone soluzioni. All'inizio la ricerca è del tutto cieca e può essere molto impegnativa dal punto di vista computazionale.

Metodi diretti Monte Carlo

I metodi di ottimizzazione globale, quali il "simulated annealing" e l'algoritmo genetico appartengono a questa categoria. Questi metodi usano dei campionamenti casuali con alcune direttività per guidare la loro ricerca nello spazio del modello.

Per gli studi presentati in questa tesi, sono state usate metodologie di inversione lineare ed è su queste che ci concentreremo maggiormente.

3.4 Metodi risolutivi per problemi lineari o linearizzati

L'assunzione di base per tale tipo di formulazione è che i dati siano una funzione lineare del modello dei parametri e ovviamente tale tipo di assunzione funziona bene laddove tali assunzioni sono valide. In molti casi possiamo però essere in grado di linearizzare la relazione tra dati e modello purchè siano verificate determinate assunzioni di partenza.

La soluzione dei problemi di tipo lineare può essere ottenuta con diverse metodologie: il metodo dei minimi quadrati, il metodo di massima verosimiglianza o della "Singular Value Decomposition" (SVD) e l'algoritmo del Simplex. Qui ci limiteremo alla descrizione del metodo dei minimi quadrati che applicheremo per l'analisi presentata nel Cap. 5. Nel Cap. 4 tratteremo con ampio dettaglio l'algoritmo del Simplex applicato per la risoluzione dei problemi lineari di cui discuteremo nel Cap. 6.

Metodo ai minimi quadrati.

Se i dati sono funzioni lineari del modello dei parametri, allora l'espressione

$$d = Gm \tag{3.4.1}$$

esprime la relazione tra dati e parametri del modello. d è un vettore colonna che contiene i dati sperimentali, m è un vettore colonna che contiene i parametri del modello ipotizzato e G è un operatore lineare, una matrice in tal caso, che contiene le relazioni lineari tra dati e parametri del modello (es. funzioni di Green).

Il problema inverso consiste nella determinazione del modello che minimizza (o massimizza) la differenza o misfit tra valori osservati e valori calcolati. La funzione di misfit è anche detta *funzione oggettiva* o *funzione costo*, *funzione errore*, *funzione energia* per citare solo alcune delle nomenclature più comuni, e usualmente è definita da una norma. Se il vettore e è dato da

$$e = d_{obs} - d_{syn} = d_{obs} - Gm \tag{3.4.2}$$

una norma generale, L_p (Menke, 1984) è definita come

$$\text{norma } L_p : \|e\|_p = \left[\sum_{i=1}^{ND} |e_i|^p \right]^{1/p} \tag{3.4.3}$$

dove ND è il numero di punti che costituiscono i dati. La comunemente usata norma L_2 è definita

$$\text{norma } L_2 : \|e\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{ND} |e_i|^2 \right]^{1/2} \tag{3.4.4}$$

o, in una notazione vettoriale e considerando un generico operatore $g(m)$ si ha

$$\text{norma } L_2: \quad \|e\|_2 = \left[(d_{obs} - g(m))^T (d_{obs} - g(m)) \right]^{1/2} \quad (3.4.5)$$

Di solito l'espressione (3.4.5) è divisa per il numero di punti osservati ND , in tal caso si riduce alla "root mean square" o RMS.

Più è grande la norma, maggiore è il peso che si da agli elementi grandi di e , e quindi eventualmente agli errori.

Nel metodo dei minimi quadrati, o metodo della norma L_2 , la funzione errore è definita come

$$E(m) = e^T e = (d - Gm)^T (d - Gm) \quad (3.4.6)$$

Per localizzare il minimo della (3.4.6) basta porre a zero la derivata di E rispetto ad m , ossia

$$\frac{\partial E(m)}{\partial m} = 0 \quad (3.4.7)$$

che dà quindi

$$G^T Gm - G^T d = 0 \quad (3.4.8)$$

dove 0 è il vettore nullo. Questo conduce a

$$m_{est} = [G^T G]^{-1} G^T d \quad (3.4.9)$$

assumendo che $[G^T G]^{-1}$ esista, dove m_{est} è la stima ai minimi quadrati del modello. Così dalla conoscenza della matrice G , si può risalire ai parametri del modello. G è una matrice ($ND \times NM$) e $G^T G$ è una matrice quadrata simmetrica con ($NM \times NM$) elementi. Se la soluzione ai minimi quadrati esiste o no, dipende da $[G^T G]^{-1}$ che a sua volta dipende da quanta informazione è contenuta nel vettore dati d rispetto ai parametri del modello.

Definiamo a questo punto il *numero di condizione* di una matrice, ossia un parametro che indica quanto se una matrice è ben condizionata.

Ogni matrice A di tipo $M \times N$ con M numero di righe maggiore o uguale al numero di colonne N , può essere scritta come prodotto $M \times N$ di una matrice colonna ortogonale U per una matrice diagonale $N \times N$ W con elementi positivi o nulli (valori singolari) e la trasposta di una matrice ortogonale $N \times N$ V . Se indichiamo con w_j gli elementi della matrice diagonale W , il numero di condizione di una matrice e' definito come il rapporto tra il più grande e il più piccolo degli w_j elementi di W . Una matrice è singolare se il suo numero di condizione è infinito; è

malcondizionata se il suo numero di condizione è troppo grande, ad esempio, se il suo reciproco è inferiore all'errore di singola ($10e6$) o doppia ($10e-12$) precisione di un calcolatore.

La matrice $[G^T G]^{-1} G^T$ opera sui dati per derivare i parametri del modello e inverte per un sistema di equazioni lineari del tipo (3.4.1).

Una condizione necessaria affinché il sistema (3.4.1) abbia un'unica soluzione è che il numero di equazioni sia uguale al numero di parametri incogniti del modello. In tal caso il problema si dice determinato. In ogni caso anche i problemi sottodeterminati, ossia con un numero di incognite superiore rispetto al numero di equazioni, può essere riportato ad un problema determinato o sovradeterminato (in quest'ultimo caso il numero di incognite è inferiore al numero di equazioni) tramite opportune discretizzazioni che riducano il numero di parametri del modello. Nel caso di problemi sovradeterminati, non si può trovare una risposta per il sistema di equazioni lineari che rappresenti ugualmente bene allo stesso modo le soluzioni, a meno che i dati non giacciono tutti sopra una linea. In tal caso la migliore stima può essere ottenuta nel senso dei minimi quadrati, ossia nel senso che il valore più piccolo è un valore diverso da zero.

3.5 Inversione linearizzata per forme d'onda di eventi locali e regionali per meccanismi di sorgente e processi di rottura

Le inversioni di forme d'onda consentono di ricostruire il processo alla sorgente utilizzando le informazioni contenute nel sismogramma. Le fasi di un sismogramma contengono infatti informazioni relative alla posizione della sorgente, mentre le ampiezze delle onde danno informazioni sul profilo di radiazione e quindi sul meccanismo associato all'evento sismico in esame.

Nel caso in cui la distanza epicentrale e la minima lunghezza d'onda del segnale siano molto più grandi delle dimensioni della sorgente, questa può essere trattata come puntiforme (vedi Cap. 1). In tal caso la dislocazione alla sorgente è schematizzata da una doppia coppia con momento totale nullo (Burridge e Knopoff, 1964), la cui orientazione è determinata dalla geometria del piano di faglia e la cui posizione coincide con le coordinate ipocentrali.

Il movimento del suolo s , generato da una sorgente puntiforme, può esprimersi nella seguente maniera

$$s(t) = u(t, x) * \dot{m}(t) \quad (3.5.1)$$

ossia come convoluzione tra lo spostamento u alla superficie libera causata dal passaggio della perturbazione generata da una sorgente puntiforme la cui dipendenza temporale è data da una funzione gradino e la funzione temporale della sorgente; x è il vettore che rappresenta la distanza sorgente-stazione.

Le funzioni di Green $u(t, x)$ che rappresentano la risposta della struttura considerata, e sono calcolate col metodo della somma multimodale ampiamente descritto nel Cap. 2. La funzione temporale di sorgente è parametrizzata tramite una serie di triangoli (Nabelek, 1984), aventi base dt , parzialmente sovrapposti. La distanza tra due triangoli successivi è dt' , con $dt' \leq dt/2$. Ogni triangolo di area unitaria è moltiplicato per un peso opportuno. Dato un numero j di triangoli e definiti w_j i pesi associati ai triangoli, la funzione temporale di sorgente è

$$\dot{m}(t) = \sum_{j=1}^k w_j g[t - (j-1)dt] \quad (3.5.2)$$

dove $g[t - (j-1)dt]$ è la funzione che rappresenta un triangolo di area unitaria (cioè di momento sismico unitario) centrato all'istante $(j-1)dt$. Dato un insieme di valori dt e dt' , la funzione temporale di sorgente è condizionata dal numero k di triangoli e da altrettanti pesi w_j .

Mao et al. (1994) hanno sviluppato una procedura di inversione linearizzata che conduce, partendo dalle posizioni e approssimazioni precedentemente discusse, alla determinazione di sei parametri incogniti della sorgente, *strike*, *slip*, *rake*, profondità ipocentrale, posizione epicentrale e da k parametri incogniti w_j della funzione temporale della sorgente. In tale tipo di procedura viene scartata a priori la possibilità di avere scorrimento negativo (no back-slip); pertanto, ogni volta che durante le iterazioni i pesi w_j tendono a valori negativi, sono automaticamente posti a zero. Dal momento che i sismogrammi teorici non sono funzioni lineari dei parametri di sorgente, la minimizzazione è effettuata adottando la tecnica dell'inversione linearizzata. L'equazione linearizzata standard è data da:

$$A dx = r \quad (3.5.3)$$

dove A è lo jacobiano delle derivate parziali dei sismogrammi sintetici rispetto ai parametri di sorgente; dx è il vettore incognito, le cui componenti sono le perturbazioni degli N parametri di sorgente; r è il vettore che contiene le differenze $(o_j - s_j)$ ($j = 1, \dots, M$) tra i dati ed i rispettivi sismogrammi sintetici.

L'equazione (3.5.3) è quasi lineare poichè A cambia in corrispondenza al vettore x contenente la soluzione e il minimo viene ricercato mediante una procedura iterativa.

Una volta determinati i parametri di sorgente e la funzione temporale, il momento sismico scalare viene determinato con l'espressione

$$M_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{O_{i\max}}{S_{i\max}} \int_0^{t_k} \dot{m}(t) dt \quad (3.5.4)$$

dove $O_{i\max}$ e $S_{i\max}$ sono i massimi degli involuppi, rispettivamente del dato e del sismogramma teorico, relativi alla stazione i , mentre il valore dell'integrale rappresenta l'area racchiusa dalla curva, cioè il momento sismico scalare del sismogramma sintetico, e t_k è dato da

$$t_k = dt + (k - 1)dt' \quad (3.5.5)$$

Le differenze tra i valori del momento sismico scalare, dedotti dalle varie stazioni, sono piccoli poichè viene incluso un vincolo sull'ampiezza relativa alle varie stazioni in modo da tenere conto del profilo di radiazione.

3.6 Inversioni per la ricostruzione spazio temporale del vettore slip rate tramite l'uso di vincoli stabilizzanti.

La soluzione del problema inverso per determinare la distribuzione spazio temporale della velocità di scorrimento (slip rate) o dello scorrimento stesso (slip) sull'area di faglia, è tutt'altro che semplice e diversi sono stati i tentativi per definire la migliore procedura da seguire. È ben noto che il problema inverso è instabile anche nel caso immaginario di una distribuzione continua di stazioni sismiche sulla superficie della Terra (Das e Kostrov, 1990) e la sua instabilità, da un punto di vista computazionale, è equivalente alla non-unicità delle soluzioni. In molte inversioni per il calcolo del processo alla sorgente, la faglia è suddivisa in un numero più o meno grande di piccole sottofaglie. In tal caso l'instabilità del problema può essere dovuta alla malcondizionata matrice dei sintetici, anche nel caso di un sistema di equazioni sovradeterminato. Per stabilizzare la soluzione, vengono assegnati dei vincoli aggiuntivi, come la minimizzazione del momento, lo smorzamento o il filtraggio di valori singolari. Con l'aggiunta di vincoli stabilizzanti, la risoluzione della soluzione tuttavia peggiora, essendo ridotta la

dimensione dell'iperspazio all'interno del quale cercare le soluzioni stesse. In generale è necessario trovare un compromesso tra la risoluzione e la varianza della soluzione (Backus e Gilbert, 1967).

Mostreremo in questa tesi che l'uso di vincoli ben definiti può solo migliorare le soluzioni nei problemi di inversione, e dimostreremo come dei vincoli fisici nell'inversione del processo di sorgente siano necessari per ottenere una soluzione definita di un problema che non si limiti soltanto alla richiesta di una buona rappresentazione delle forme d'onda.

Il problema per l'inversione spazio-temporale dello scorrimento sismico fu risolto per la prima volta formalmente da Olson e Apsel (1982). Nel loro studio è esplicitamente discussa la necessità di vincoli fisici e sono presi in considerazione anche i relativi aspetti matematici del problema inverso. Citando dal loro lavoro:

Affinchè una particolare distribuzione di scorrimento sia una soluzione accettabile per il problema inverso essa deve soddisfare le tre seguenti condizioni

1 - *La soluzione deve spiegare i dati.*

2 - *La soluzione deve essere fisicamente ragionevole (ossia consistente con vincoli indipendenti).*

3 - *Se più di una soluzione rappresenta ugualmente bene, i dati, informazioni aggiuntive devono essere fornite per definire unicamente quale delle soluzioni è accettabile.*

La terza condizione vuol essenzialmente dire che dei vincoli fisici possono essere insufficienti per individuare una soluzione unica del problema e quindi Olson e Apsel proposero di includere delle assunzioni aggiuntive, non fisiche, per rendere la soluzione unica. Il vincolo da loro imposto fu quello di norma minima per la soluzione. Il metodo usato da Kikuchi e Fukao (1985), impone una richiesta implicita che la soluzione sia concentrata nel più piccolo numero possibile di aree di rilascio di momento, il che è ottenuto tramite la successiva riduzione dello scarto quadratico medio usando una serie limitata di sorgenti istantanee

In tal caso però, quando si ottiene la soluzione unica, non è chiaro se questa sia unica come conseguenza del metodo usato nell'inversione o per i vincoli esplicitamente imposti. Un ragionevole approccio per superare tale difficoltà potrebbe essere quello di descrivere l'intero insieme di soluzioni ugualmente accettabili dopo avere ottenuto alcune soluzioni rappresentative di tali insiemi.

I vincoli fisici dovrebbero essere definiti dalla fisica del processo che avviene sulla faglia durante il terremoto, ossia dall'analisi del processo di frattura

e di attrito. Sfortunatamente, la conoscenza della fisica del processo dei terremoti è ancora limitata e gli unici vincoli ben definiti riguardano la limitazione della velocità della propagazione della frattura. Questo è un *vincolo debole* poiché la durata dell'intero processo del terremoto è di certo maggiore del tempo di propagazione dell'onda attraverso la faglia. Per incrementare questo vincolo, da un punto di vista numerico, si richiede una discretizzazione molto fine, da un punto di vista temporale, del processo di rottura che avviene sulla faglia. Ma la discretizzazione fine del problema può causare a sua volta dei vincoli non desiderati sulle soluzioni. È noto che se la griglia scelta per la discretizzazione del modello di faglia è molto fitta, l'elevato numero di incognite renderà il problema molto più instabile che non nel caso in cui la griglia è scelta in modo più grossolano. Nell'ultimo caso il problema risulterà stabile anche senza l'aggiunta di vincoli fisici; infatti aumentando il numero di celle si incrementa il *numero di condizione* della matrice che contiene le equazioni del sistema lineare che si vuole risolvere.

Un vincolo che potrebbe essere considerato meno fondato da un punto di vista fisico, riguarda la richiesta che il vettore rappresentante la velocità di scorrimento sia orientato lungo la direzione della caduta di sforzi media determinata dalla soluzione del piano di faglia. In altre parole si richiede che la proiezione del vettore di scorrimento nella direzione della caduta di sforzo sia positiva. Sebbene in linea di principio, lo scorrimento sia possibile anche nella direzione opposta, ciò non sembra poi verificarsi nella realtà di un modello diretto tridimensionale che mostra invece come la direzione di scorrimento coincida quasi sempre con quella della caduta di sforzo (Das, 1981). Con una sufficiente accuratezza pratica si può quindi assumere che la direzione di scorrimento sia costante sopra la faglia durante il processo e coincida con la direzione di caduta di sforzo. Tale vincolo è stato già usato da diversi autori (ad es. Kikuchi e Fukao, 1985; Olson e Apsel, 1982).

Un altro vincolo fisico è la richiesta che la soluzione ottenuta dalla inversione sia in accordo con il momento sismico ricavato dalla soluzione del centroide del momento tensore o da misure geodetiche. Si può ancora richiedere che il massimo dello scorrimento sulla faglia sia limitato da alcune considerazioni derivanti dalla meccanica della frattura. Hartzell e Heaton (1983) minimizzano ad esempio il momento sismico. Olson e Apsel (1982) usano il vincolo di scorrimento positivo (no back-slip), oltre a limitare anche la velocità della propagazione di rottura. In aggiunta essi vincolarono lo scorrimento per quelle

celle che nella loro modellazione del piano di faglia intersecano il fronte di rottura e limitano il numero di volte che ogni cella può scivolare. Il loro modello include due fronti preassegnati, il fronte di rottura e quello di saldatura (healing) entro cui è confinato l'intero processo di scorrimento. Questa ultima assunzione consente drastiche riduzioni del numero di incognite del modello. Soluzioni numeriche del problema diretto mostrano comunque, che con una forza non omogenea e attrito sulla faglia, il fronte di rottura può divenire molto distinto da una singola linea e conseguentemente si può ottenere lo scorrimento dietro il principale fronte di rottura (Das e Aki, 1977; Mikumo e Miyatake, 1979). Un ulteriore scorrimento in regioni già precedentemente interessate da scorrimento sulla faglia è stato trovato, ad esempio, nello studio del terremoto delle Andeanof del 1986 (Das e Kostrov, 1990). Hartzell e Heaton (1983) e Beroza e Spudich (1988) non hanno nelle loro inversioni la possibilità di scorrimento dietro al fronte di rottura, facendo così diminuire la dimensione del problema.

Nel metodo che abbiamo applicato in questa tesi (Cap. 6) per l'inversione delle sorgenti estese, non confineremo la regione di scorrimento alla regione vicina al fronte di rottura, nè assegneremo a priori il numero di volte che ogni griglia può scivolare, ma determineremo la storia spazio-temporale dello scorrimento per ogni cella della griglia usata per modellare la faglia.

Questo lavoro di tesi e lavori precedenti (Das et al., 1990, 1995, 1996; Saraò et al. 1996) suggeriscono che l'instabilità del problema inverso per ritrovare il processo alla sorgente del terremoto, può essere trattato meglio se si descrive l'intero insieme di soluzioni ugualmente accettabili e possibili. Ciò può essere ottenuto usando la tecnica della programmazione lineare che include vincoli per limitare lo spazio delle soluzioni. Tali vincoli servono solo a riempire il vuoto creato dalla mancanza di dati sufficienti. Il vantaggio di usare questa procedura è che tali vincoli sono stabiliti esplicitamente.

Il vantaggio della programmazione lineare è che i vincoli fisici tradizionali precedentemente discussi, possono essere facilmente incorporati nelle soluzioni ad ogni fase del problema. Inoltre, poichè l'inclusione di vincoli fisici riduce il numero di vertici nell'iperspazio delle soluzioni, la soluzione ad ogni fase è generalmente raggiunta molto più rapidamente utilizzando il metodo del Simplexso (Cap. 4). Infine nel metodo del Simplexso il minimo della funzione di errore risulta essere anche il minimo globale.

CAPITOLO 4

La programmazione lineare: il metodo del Simplexso

4.1 Introduzione

Un problema di programmazione lineare si compone di tre parti:

- un insieme finito di disequazioni o equazioni lineari con un numero finito di incognite x_1, \dots, x_n ;
- un insieme di vincoli sul segno delle variabili affinché $x_i \geq 0$,
- una funzione lineare da ottimizzare (massimizzare o minimizzare).

La soluzione x_1, \dots, x_n che soddisfa le prime due parti é detta *ammissibile* (o vettore ammissibile); una soluzione che soddisfa tutte e tre le parti é detta *ottimale* (o vettore ammissibile ottimale). Il sistema che tiene conto delle prime due parti da sole ha usualmente molte soluzioni; il sistema con tutte e tre le parti ha genericamente una sola soluzione ottimale.

La programmazione lineare si rivela di grande importanza in diversi settori, ed é ampiamente usata in quelli economici. La non negativita é un vincolo usualmente comune a molte variabili x_i che rappresentano delle quantità fisiche reali. Inoltre si può essere interessati ad imporre dei limiti derivanti dalla conoscenza fisica del processo in esame ed imposti dalla natura stessa. La funzione che si vuole minimizzare può inoltre essere lineare o approssimabile con una funzione lineare. Ecco perché la programmazione lineare si é rivelata adatta anche a trattare problemi non lineari.

La programmazione lineare é figlia dell'era del computer. Un primo risultato teorico fu pubblicato nel 1902 da Julius Farkas ma questi non poteva immaginare quanto la sua teoria sarebbe divenuta importante. Le computazioni di calcolo sembravano irrealizzabili per quell'epoca in cui la sua teoria veniva guardata come una curiosità di pura matematica teorica. Con l'avvento dell'era del computer comparve anche il metodo del simplexso di George Dantzig; era il

1948 e improvvisamente la programmazione lineare prese vita. Il metodo del simpleso forniva un modo immediato per calcolare una soluzione.

Il simpleso è una figura geometrica ad N dimensioni, di $N+1$ vertici. Il metodo è collegato alla programmazione o ottimizzazione lineare, cosicchè per N variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_n , la *funzione oggettiva*

$$z = a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \dots + a_{0n}x_n \quad (4.1.1)$$

è massimizzata (o minimizzata), quando soggetta ad N vincoli primari

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (4.1.2)$$

e ad $M = m_1 + m_2 + m_3$ vincoli addizionali, di cui m_1 nella forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (b_i \geq 0) \quad i=1, \dots, m_1 \quad (4.1.3)$$

m_2 nella forma

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j \geq 0 \quad j=m_1+1, \dots, m_1+m_2 \quad (4.1.4)$$

ed m_3 nella forma

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \geq 0 \quad k=m_1+m_2+1, \dots, m_1+m_2+m_3 \quad (4.1.5)$$

Esistono casi per cui il vettore ammissibile non esiste, ad esempio quando i vincoli sono incompatibili oppure quando non esiste il massimo. In quest'ultimo caso c'è una direzione nello spazio ad N dimensioni dove una o più delle variabili può assumere valore infinito pur continuando a soddisfare i vincoli.

Un problema di programmazione lineare è posto in forma normale se non ha vincoli espressi in forma (4.1.3) o (4.1.4), ma piuttosto solo eguaglianze della forma (4.1.5) e vincoli di non negatività nella forma (4.1.2).

Per i nostri scopi sarà utile considerare anche un più ristretto insieme di casi, con le seguenti proprietà addizionali: ogni vincolo espresso come eguaglianza della forma (4.1.5) deve avere almeno una variabile che ha un coefficiente positivo e che compare unicamente solo in quel vincolo. Possiamo allora scegliere tale variabile nell'equazione del vincolo, e risolvere tale equazione per quella incognita. Le variabili così scelte sono dette *variabili di sinistra* o *variabili di base*, e sono esattamente $M (=m_3)$. Le rimanenti $N-M$ variabili sono dette *variabili di destra* o *variabili non di base*. Ovviamente la forma normale ristretta può essere applicata solo nel caso in cui $M \leq N$.

Si può dimostrare (###) che ogni problema di programmazione lineare può essere trasformato nella forma normale ristretta.

Il metodo del simplexso ricerca i vettori ammissibili nello spazio in cui la funzione oggettiva è definita, dopo che questo è stato ridotto eliminando le regioni non consentite, regioni queste che sono delineate dall'imposizione dei vincoli.

4.2 Teorema fondamentale della ottimizzazione lineare

Si consideri uno spazio completo N -dimensionale di vettori ammissibili candidati. Di seguito si escludano le regioni eliminate di volta in volta tramite l'imposizione dei vincoli. Poiché i vincoli sono espressi matematicamente in forma lineare, ogni confine inserito in tale processo è un piano, o meglio un iperpiano. Le uguaglianze espresse nella forma (4.1.5) forzano la regione ammissibile ad un iperpiano di piccole dimensioni, mentre le disequaglianze dividono la regione ammissibile in zone "consentite" e zone "non consentite".

Dopo avere imposto tutti i vincoli esistono ancora delle regioni ammissibili, viceversa ci ritroveremmo con vettori non ammissibili. Poiché la regione ammissibile è limitata da iperpiani, da un punto di vista geometrico questa è rappresentabile con un poliedro di tipo convesso o simplexso.

Il vettore ammissibile non può trovarsi nell'interno della regione ammissibile, lontano dai bordi. La cosa è dovuta alla linearità della funzione oggettiva e quindi ad un vettore gradiente non nullo. Il gradiente si può pertanto incrementare in modo da spingere la funzione sul limite della regione ammissibile.

Il contorno di ogni regione geometrica ha una dimensione in meno della regione stessa. Pertanto, possiamo calcolare il gradiente proiettato sul contorno stesso finché non raggiungiamo il limite di quel contorno. Si raggiunge così quel limite e si itera la procedura finché non si arriva ad un vertice del simplexso originale. Poiché tale punto ha tutte le sue N coordinate definite, esso deve essere la soluzione di N eguaglianze simultaneamente, eguaglianze provenienti dall'insieme originale di eguaglianze e disequaglianze.

Punti nello spazio dei modelli che sono vettori ammissibili e che soddisfano N degli originali vincoli imposti come eguaglianze, sono detti *vettori ammissibili di base*. Se $N > M$, allora un vettore ammissibile di base ha almeno $N - M$ delle sue

componenti uguali a zero, dal momento che molti dei vincoli saranno necessari per compensare il numero totale N . Ciò vuol dire che al più M componenti del vettore ammissibile di base sono non nulli.

Da quanto detto finora deriva il Teorema fondamentale della Ottimizzazione lineare: *se un vettore ammissibile esiste, allora esiste un vettore ammissibile di base che è ottimale.*

L'importanza del teorema fondamentale è che il problema dell'ottimizzazione si riduce ad un problema combinatorio, ossia al problema di determinare quale degli N vincoli, al di fuori degli $M+N$ vincoli precedentemente definiti, soddisfa il vettore ammissibile ottimale. Bisogna quindi provare differenti combinazioni e calcolare la funzione oggettiva per ogni combinazione finché si ritrova la migliore.

Chiaramente tale vettore non viene trovato per tentativi ciechi così come finora abbiamo detto. Il metodo del Simplex, è un modo di organizzare la procedura: si prende in considerazione una serie di combinazioni per cui la funzione oggettiva aumenta gradualmente; dopo un certo numero di iterazioni, che quasi sempre non è maggiore dell'ordine N o M , a seconda di quale dei due è maggiore. Da un punto di vista matematico è interessante osservare che la seconda proprietà, sebbene nota empiricamente, fu dimostrata rigorosamente solo nel 1982 da Stephen Smale.

4.3 L'idea del metodo del Simplex

Ci limiteremo a trattare il metodo del simplex per problemi di programmazione lineare non degenerati. Il caso dei problemi degenerati è davvero molto raro e riveste un'importanza esclusivamente teorica.

Consideriamo il problema di programmazione lineare nella sua forma canonica:

$$Ax=b, \quad x \geq 0, \quad c^T x = \min \quad (4.3.1)$$

e facciamo una serie di assunzioni che genericamente vengono soddisfatte.

Assunzione di non degenerazione. Supponiamo che A abbia m righe e n colonne e che vi siano meno equazioni che incognite, ossia $m < n$.

(i) Assumiamo che le m righe di A siano linearmente indipendenti. Dall'algebra lineare é noto che questo é equivalente ad assumere che A abbia m colonne indipendenti (di solito A avrà alcuni insiemi di m colonne indipendenti).

(ii) Assumiamo che b non sia una combinazione lineare di meno di m colonne di A . In altre parole se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z_i &= b_i \\ \sum z_i &= \min. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

almeno m delle componenti x_j devono essere diverse da zero.

La prima assunzione implica che l'equazione $Ax=b$ ha soluzione x per ogni b . Questo perché la colonna di A ricopre l'intero spazio m -dimensionale in cui ogni vettore b giace.

Se l'assunzione (i) é falsa, le m righe di A sono dipendenti, il che significa che le m equazioni $\sum a_{ij}x_j = b_i$ sono dipendenti o anche inconsistenti.

In pratica se le equazioni sono dipendenti, una o più di esse dovrebbero essere cancellate. Se l'equazioni sono inconsistenti, il tutto va rivisto dall'inizio.

Se l'assunzione (ii) non é soddisfatta allora una perturbazione random del vettore b soddisfa l'assunzione (ii) quasi sicuramente. (Infatti il vettore degenerato b giace nell'unione finita dei sottospazi lineari coperti dal sottoinsieme di $m-1$ colonne di A ; tutti questi sottospazi hanno una dimensione inferiore di m e così una perturbazione random di b in m dimensioni quasi sicuramente giace al di fuori della loro unione).

Dopo avere fatto le due assunzioni di non degenerazione, analizziamo il metodo del Simplexso. Il metodo si compone di due fasi:

Fase I in cui si determina la soluzione ammissibile di base di $Ax=b, x \geq 0$.

In tale fase si determina eventualmente anche se il problema non ha soluzioni ammissibili.

Fase II in cui, cominciando con una prima soluzione ammissibile, si arriva a determinare la soluzione ottimale di base. Se il problema non ha soluzioni ottimali, la Fase II prova questo fatto.

Entrambi le fasi lavorano con un numero finito di passi. Si ottengono delle risposte precise a meno degli inevitabili errori di approssimazione del computer.

Fase I

Si considerino le equazioni:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.3.3)$$

Cerchiamo una soluzione ammissibile, x , con m componenti positive. Assumiamo che tutti i b_i siano positivi; se ogni b_i è negativo, l'equazione i -esima viene moltiplicata per -1 .

La fase I può essere formulata come un problema di minimo, per cui abbiamo già una soluzione ammissibile di base. Il problema viene formulato quindi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z_i &= b_i \\ x_j &\geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ z_i &\geq 0, \dots, z_m \geq 0 \\ z_1 + \dots + z_m &= \text{minimum} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Questo è un problema di minimo canonico con m equazioni e $n+m$ incognite. Assumiamo che questo problema sia non-degenerato.

La prima soluzione di base è

$$x_j = 0 \quad (j=1, \dots, n); \quad z_i = b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.3.5)$$

Questa soluzione di base contiene solo m componenti positive. La matrice nel problema preliminare (4.3.4) ha le $n+m$ colonne $a^1, \dots, a^n, e^1, \dots, e^m$; le prime n colonne vengono da A e le ultime m colonne vengono dalla matrice identità $m \times m$. Usando matrici composte e vettori, possiamo scrivere la (4.2.4) nella forma

$$[A \quad I] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = b \quad (4.3.6)$$

$$x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \sum z_i = \text{min} \quad (4.3.7)$$

La nostra soluzione ammissibile di base (4.3.5) dipende dalle m colonne indipendenti e^1, \dots, e^m .

Consideriamo ora la Fase II nel preliminare problema di minimo (4.3.4).

Caso 1: $\text{min} \sum z_i > 0$.

In questo caso il problema non ha soluzioni ammissibili. Se x fosse una soluzione ammissibile per il problema originale, allora x lungo la $z=0$ avrebbe dato una soluzione del problema preliminare (4.3.5).

Prima di discutere la Fase II, si vuole enunciare il

Lemma sulla Non-Degenerazione. Si assuma che il problema seguente sia non degenerato:

$$Ax=b, \quad x \geq 0, \quad x^T c = \min \quad (4.3.8)$$

dove A ha m righe. Allora x é una soluzione ammissibile di base se x é una soluzione ammissibile con esattamente m componenti positive.

Fase II

Sia x una data soluzione di base ammissibile del programma canonico non degenerato del tipo (4.3.8). Usando le equazioni di equilibrio si determina se x é ottimale.

Sia B l'insieme di indici j per cui x_j é positivo:

$$B = \{j: x_j > 0\} \quad (4.3.9)$$

Chiamiamo B la base. Se A ha m righe, allora l'insieme B contiene m elementi a cosí si può scrivere $|B| = m$.

La soluzione di base x dipende dalle colonne a^j per j nella base B , cioè per $x_j > 0$. Possiamo anche chiamare queste colonne le basi. Le m colonne nelle basi costituiscono una matrice M con m colonne e m righe. Chiamiamo basi anche queste, ma sarà meglio indicarle come la matrice base. Poiché le sue colonne sono indipendenti, la matrice quadrata M ha un'inversa.

Abbiamo cosí

$$\sum_B x_j a^j = b \quad (4.3.10)$$

dove sommiamo su j in B . Dal momento che le colonne base costituiscono una matrice invertibile M , possiamo risolvere le equazioni di equilibrio

$$y^T a^j = c_j \quad (j \in B) \quad (4.3.11)$$

Usando la matrice M , possiamo scrivere la (4.3.11) nella forma

$$y^T M = \hat{c}^T \quad (4.3.12)$$

dove il vettore \hat{c} ha la componente c_j per $j \in B$.

La soluzione unica é

$$y^T = \hat{c}^T M^{-1} \quad (4.3.13)$$

Si hanno pertanto due possibilità:

Caso 1. Supponiamo che la soluzione di equilibrio sia ammissibile per il duale.

Allora, x é ottimale per il problema primario (4.3.8); ad ogni modo y é ottimale per il problema duale

$$y^T A \leq c^T, \quad y^T b = \max \quad (4.3.14)$$

con $y^T b = c^T x$.

L'ammissibilità nella (4.3.14) significa che

$$y^T a^j \leq c_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.3.15)$$

Tramite l'equazione di equilibrio (4.3.11), queste diseuguaglianze sono soddisfatte come equazioni per j in B . Così tutto quello da fare é prendere il prodotto interno di y con le $n - m$ colonne non-basi a^j e controllare le diseuguaglianze (4.3.15) per $j \notin B$. Supponiamo che il controllo fallisca. Allora ci troviamo nel Caso 2.

Caso 2. Supponiamo, per qualche non basico $j=s$

$$y^T a^s > c_s \quad (4.3.16)$$

Allora la soluzione di equilibrio y é inammissibile per la duale, e non si é provato nulla. Possiamo tuttavia ridurre il nostro costo portando a^s nelle basi.

Esprimiamo la colonna non-basica a^s come combinazione delle correnti colonne basiche:

$$a^s = \sum_B t_j a^j \quad (4.3.17)$$

In termini della matrice di base, ciò vuol dire che

$$a^s = M t \quad \text{ovvero} \quad t = M^{-1} a^s \quad (4.3.18)$$

Se moltiplichiamo l'equazione (4.3.17) per λ e aggiungiamo il risultato all'equazione (4.3.10) otteniamo

$$\lambda a^s + \sum_B (x_j - \lambda t_j) a^j = b \quad (4.3.19)$$

Se λ é positivo e piccolo, allora gli $m+1$ coefficienti nella (4.3.19) sono positivi, così abbiamo una nuova soluzione ammissibile del problema primario. Il nuovo costo é

$$\lambda c_s + \sum_B (x_j - \lambda t_j) c_j \quad (4.3.20)$$

mentre il vecchio costo era

$$x^T c = \sum_B x_j c_j \quad (4.3.21)$$

Sottraendo il nuovo dal vecchio, otteniamo

$$\text{vecchio costo} - \text{nuovo costo} = \lambda(z_s - c_s) \quad (4.3.22)$$

dove definiamo

$$z_s = \sum_B t_j c_j \quad (4.3.23)$$

e dove λ è positivo essendo il coefficiente di a^s . L'equazione (4.3.22) riduce il costo se

$$z_s - c_s > 0 \quad (4.3.24)$$

Ma tale disuguaglianza si ottiene nel Caso 2. Ciò è dimostrabile nel modo seguente: la definizione (4.3.33) stabilisce che $z_s = \hat{c}^T t$; la condizione di equilibrio (4.3.12) dice che $\hat{c}^T = y^T M$. Quindi,

$$z_s = \hat{c}^T t = y^T M t \quad (4.3.25)$$

Ma la (4.3.18) asserisce che $M t = a^s$ e così

$$z_s = y^T a^s \quad (4.3.26)$$

dove y è la soluzione di equilibrio. Ricordandoci che la disuguaglianza $y^T a^s > c_s$ definisce il Caso 2, si ottiene che $z_s - c_s > 0$.

La nuova soluzione. Secondo la (4.3.22), più grande rendiamo λ , più dobbiamo ridurre il costo; così renderemo λ il più grande possibile. Secondo la (4.3.19), se B è la base corrente, allora λ deve soddisfare le seguenti limitazioni:

$$\lambda \geq 0 \quad x_j - \lambda t_j \geq 0 \quad \text{per } j \text{ in } B \quad (4.3.27)$$

così la nuova soluzione sarà ammissibile. Il Caso 2 presenta due sottocasi:

Caso 2a. Supponiamo che i t_j siano ≤ 0 per ogni j , dove la (4.3.17) definisce i t_j . Allora la (4.3.27) dice che possiamo rendere λ grande a piacere. D'altra parte la (4.3.22) dice che possiamo condurre il costo a meno infinito per $\lambda \rightarrow \infty$. In questo sottocaso non c'è soluzione ottimale x per il problema originale. Il calcolo si ferma pertanto a questo punto l'equazione (4.3.19) mostra come costruire una soluzione non-basica $x(\lambda)$ con un basso costo arbitrario.

Caso 2b. Supponiamo che un t_j sia >0 per almeno un j . Allora la (4.3.27) stabilisce che il maggior valore che possiamo scegliere per λ é

$$\lambda^* = \min\{x_j/t_j : t_j > 0\} \quad (4.3.28)$$

Ogni valore più grande produrrà un coefficiente negativo nella (4.3.19).

Se il minimo (4.3.28) é raggiunto per $j=p$, allora il coefficiente di a^p diventa zero nell'equazione (4.3.19). Quindi p é unico, poiché se più di un coefficiente diviene nullo nella (4.3.19), allora b può essere rappresentato come una combinazione lineare di meno che m colonne di A . Ciò però violerebbe l'assunzione di non-degenerazione (ii).

Così, se scegliamo il più alto valore ammissibile λ^* , un coefficiente diviene zero nella rappresentazione

$$\lambda^* a^s + \sum_{j \in B} (x_j - \lambda^* t_j) a^j = b \quad (4.3.29)$$

Adesso il lemma sulla non-degenerazione implica che questa equazione definisca una nuova base:

$$B' = \{s\} + B - \{p\} \quad (4.3.30)$$

formata aggiungendo l'indice s a B e togliendo l'unico indice p .

La (4.3.29) può così essere riscritta nella forma

$$\sum_{j \in B'} x'_j a^j \quad (4.3.31)$$

dove i nuovi coefficienti sono gli m numeri positivi:

$$x'_s = \lambda^*, \quad x'_j = x_j - \lambda^* t_j \quad (j \in B, j \neq p) \quad (4.3.32)$$

La non-degenerazione implica che tutti gli m coefficienti x'_j siano positivi e che le m colonne a^j siano indipendenti per j nelle nuove basi B' .

Calcoliamo ora una nuova soluzione di base ammissibile x' . Così facendo abbassiamo il costo di una quantità positiva $\lambda^*(z_s - c_s)$. Adesso possiamo tornare all'inizio della Fase II.

La computazione deve a questo punto fermarsi dopo un finito numero di iterazioni. Se non si verifica mai di essere nel Caso 1, ci fermiamo poiché questo prova che la soluzione ammissibile di base é ottimale.

Se ci troviamo nel Caso 2a, ci fermiamo poiché si dimostrerà in tal modo che non esiste alcuna soluzione ottimale.

Se ci troviamo invece nel Caso 2b, calcoliamo una nuova soluzione di base x' con il costo più basso. Quindi possiamo continuare attraverso il Caso 2b per un numero infinito di volte. Ciò perché la matrice A ha soltanto un numero finito di sottoinsiemi di m colonne, e così l'equazione $Ax=b$ ha solo un numero finito di soluzioni di base. Supponiamo ora di passare attraverso il Caso 2b molte volte, con una successione di soluzioni di base x^1, x^2, x^3, \dots . Poiché il costo decresce con ogni nuova soluzione di base, si ha che

$$c^T x^1 > c^T x^2 > c^T x^3 > \dots \quad (4.3.33)$$

Quindi, tutte le nostre soluzioni x^1, x^2, x^3, \dots sono differenti; il numero di queste soluzioni è finito. e pertanto il numero di iterazioni è finito.

Usando la non-degenerazione, abbiamo provato che il riciclo è impossibile: non torniamo mai alla prima soluzione di base del Caso 2b. In un problema degenerato anche se possibile il riciclo è improbabile. Esiste comunque il metodo del simplexso lessicografico che rende il riciclaggio impossibile in ogni caso.

4.4 L'algoritmo della tabella del Simplexso

Analizziamo ora i dettagli dell'algoritmo del Simplexso per vedere come questo possa essere usato come codice in un computer.

Sia A una matrice $m \times n$ con $m \leq n$ e assumiamo che le righe siano linearmente indipendenti. Si consideri il programma lineare canonico

$$Ax=b, x \geq 0, \quad c^T x = \min \quad (4.4.1)$$

Se assumiamo che b è una combinazione lineare di non meno di m colonne di A , allora il problema può essere definito come *non-degenerato*.

Supponiamo di iniziare la Fase II del calcolo. Abbiamo una soluzione ammissibile di base x , e vogliamo calcolare una nuova soluzione ammissibile di base x' col costo più basso. Come abbiamo visto, la Fase I è solo un caso particolare della Fase II, pertanto non si richiede un algoritmo differente.

Supponiamo che la soluzione ammissibile di base x dipenda dalle m colonne a^j per $j = j_1, \dots, j_m$. Da questo deriva che

$$x_j > 0 \quad \text{per} \quad j \in B \quad B = \{j = j_1, \dots, j_m\} \quad (4.4.2)$$

definiamo i vettori base

$$v^i = a^j \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.4.3)$$

In tal caso v^1, \dots, v^m sono le colonne della corrente matrice base M .

Esprimiamo ora tutte le colonne di A in termini delle colonne di base:

$$a^j = t_{1j}v^1 + t_{2j}v^2 + \dots + t_{mj}v^m \quad (4.4.4)$$

e similmente possiamo scrivere

$$b = t_{10}v^1 + t_{20}v^2 + \dots + t_{m0}v^m \quad (4.4.5)$$

Questo definisce la *tabella del simplesso*

$$(t_{ij}) \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4.6)$$

Tabella estesa del simplesso. Per alcuni scopi, è conveniente estendere la tabella esprimendo i vettori naturali e^1, \dots, e^m in termini delle basi correnti:

$$e^j = \sum_{i=1}^m u_{ij}v^i \quad (j=1, \dots, m) \quad (4.4.7)$$

da quanto detto la tabella si estende nel modo seguente

$$\begin{array}{cccccccc} & a^1 & \dots & a^n & b & e^1 & \dots & e^m \\ v^1 & t_{11} & \dots & t_{1n} & t_{10} & u_{11} & \dots & u_{1m} \\ \cdot & & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v^m & t_{m1} & \dots & t_{mn} & t_{m0} & u_{m1} & \dots & u_{mm} \end{array} \quad (4.4.8)$$

Poiché il vettore naturale unitario e^j sono le colonne della matrice identità, I , e poiché le basi dei vettori v^i sono le colonne della matrice base, M , le eq. (4.4.7) possono essere scritte come l'equazione matrice

$$I = MU \quad (4.4.9)$$

dove U è la matrice $m \times m$ con elementi u_{ij} . U risulta quindi l'inversa della corrente matrice di base M .

Similmente, la tabella di equazioni originale, (4.4.4) e (4.4.5), può essere scritta come la matrice equazione

$$[A, b] = MT \quad (4.4.10)$$

dove $T = (t_{ij})$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). E poiché $U = M^{-1}$, la tabella estesa è uguale a

$$[T;U] = M^{-1}[A,b;I] \quad (4.4.11)$$

Cambio delle basi Supponiamo di avere una tabella del simpleso (4.4.8), con una base corrente v^1, \dots, v^m . I vettori base v^i sono di certo delle colonne di A .

Supponiamo che a^s non sia la base corrente e che vogliamo sostituire uno dei correnti vettori di base con a^s .

Assumiamo che la corrente soluzione di base sia ammissibile:

$$t_{i0} > 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.4.12)$$

Così, la soluzione ammissibile di base x soddisfa

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j a^j = \sum_{j \in B} x_j a^j = \sum_{i=1}^m t_{i0} v^i = b \quad (4.4.13)$$

e quindi t_{i0} sono proprio le componenti positive di x .

La nuova tabella avrà dunque le seguenti componenti

$$t'_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad (4.4.14)$$

$$u'_{ij} \quad (i,j=1, \dots, m) \quad (4.4.15)$$

Supponiamo di sostituire il corrente vettore di base v^r tramite a^s , lasciando gli altri vettori di base v^i invariati. Allora la nuova soluzione di base x' avrà componente non nulla

$$t'_{i0} \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.4.16)$$

Se x' deve essere ammissibile, le componenti t'_{i0} devono essere positive. Questo vincolo decide la scelta di v^r .

Esprimiamo a^s , in termini della corrente base:

$$a^s = t_{1s} v^1 + \dots + t_{rs} v^r + \dots + t_{ms} v^m \quad (4.4.17)$$

I vettori base $v^1, \dots, v^r, \dots, v^m$, devono essere linearmente indipendenti. Se a^s sostituisce v^r nella base, allora deve essere $t_{rs} \neq 0$; se $t_{rs} = 0$, l'equazione (4.4.17) dimostra che la nuova base è dipendente.

Se $t_{rs} \neq 0$, v^r può essere espresso in termini della nuova base

$$v^r = t_{rs}^{-1} \left(a^s - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m t_{is} v^i \right) \quad (4.4.18)$$

Quindi, se possiamo esprimere la nostra espressione in termini di $v^1, \dots, v^r, \dots, v^m$ possiamo di certo esprimerla anche in termini di $v^1, \dots, a^s, \dots, v^m$. Quindi, il nuovo vero insieme é una base per lo spazio vettore R^m . La nuova base é

$$(v^1)' = v^1, \dots, (v^r)' = a^s, \dots, (v^m)' = v^m \quad (4.4.19)$$

Per la nuova tabella i coefficienti t'_{ij} devono soddisfare

$$a^j = t'_{ij}(v^1)' + \dots + t'_{rj}(v^r)' + \dots + t'_{mj}(v^m)'$$

che significa

$$a^j = t'_{rj}a^s + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m t'_{ij} v^i \quad (4.4.20)$$

Questo definisce unicamente i coefficienti poiché la nuova base é formata da vettori indipendenti.

In termini della vecchia base, si ha che

$$a^j = t'_{rj}v^r + \sum_{i \neq r} t_{ij}v^i \quad (4.4.21)$$

Adesso la rappresentazione della (4.4.18) nella nuova base é

$$a^j = t_{rj}t_{rs}^{-1} \left(a^s - \sum_{i \neq r} t_{is}v^i \right) + \sum_{i \neq r} t'_{ij}v^i \quad (4.4.22)$$

Questo rappresenta a^j in termini della nuova base. Il coefficiente di a^s é

$$t'_{rj} = t_{rj}/t_{rs} \quad (4.4.23)$$

e per $(i \neq r)$ il coefficiente di v^i é

$$t'_{ij} = t_{ij} - (t_{is}/t_{rs})t_{rj} \quad (i \neq r) \quad (4.4.24)$$

Queste sono le formule per la nuova tabella.

Per la tabella estesa, abbiamo bisogno anche dei nuovi coefficienti u'_{ij} . Questo non é un problema se si considerano i vettori unitari e^j come colonne di una matrice estesa $[A, I]$ ed infatti questo é esattamente quanto abbiamo fatto nella Fase I del calcolo.

$$e^1 = a^{n+1}, e^2 = a^{n+2}, \dots, e^m = a^{n+m} \quad (4.4.25)$$

e cosí possiamo definire

$$u_{ij} = t_{i,n+j} \quad (i,j=1,\dots,m) \quad (4.4.26)$$

Sostituendo j con $n+j$ nelle formule (4.4.23) e (4.4.24), otteniamo

$$u'_{rj} = u_{rj}/t_{rs} \quad (4.4.27)$$

$$u'_{ij} = u_{ij} - (t_{is}/t_{rs})u_{rj} \quad (i \neq r) \quad (4.4.28)$$

Queste complicate formule hanno un semplice significato. Se sostituiamo v' con a^s , chiamiamo la riga r della vecchia tabella, la riga "pivot", e chiamiamo la colonna s la colonna "pivot". Indicheremo t_{rs} come l'elemento "pivot".

Le formule di trasformazione (4.4.23) e (4.4.27) vogliono dire che dobbiamo dividere la colonna "pivot" per l'elemento "pivot".

Le formule (4.4.24) e (4.4.28) stabiliscono che se $(i \neq r)$, si definisce il moltiplicatore $\theta_i = t_{is}/t_{rs}$. Per trasformare la riga i , bisogna sottrarre da essa θ_i volte la riga "pivot".

In sintesi, per la riga "pivot" r ,

$$\text{nuova riga } r = (\text{vecchia riga } i)/t_{rs} \quad (4.4.29)$$

per la riga $(i \neq r)$,

$$\text{nuova riga } i = (\text{vecchia riga } i) - \theta_i / (\text{vecchia riga } r) \quad (4.4.30)$$

Il moltiplicatore θ_i ha una semplice interpretazione. Nella nuova tabella avremo $(v')^s = a^s$, e così la colonna s della nuova tabella avrà l' r -sima componente $t'_{rs} = 1$ e avrà l' i -esima componente $t'_{is} = 0$ se $(i \neq r)$.

Quindi nella formula (4.4.30) θ_i deve essere l'unico moltiplicatore che rende $t'_{is} > 0$. Infatti, se poniamo $j=s$ nella (4.4.24), otteniamo

$$t'_{is} = t_{is} - (t_{is}/t_{rs})t_{rs} = 0 \quad (i \neq r). \quad (4.4.31)$$

dove $(t_{is}/t_{rs}) = \theta_i$

Come scegliere la riga "pivot". Data la colonna "pivot" s , c'è soltanto una scelta possibile per la riga pivot r , assumendo come nel nostro caso, che il problema sia non-degenerato.

Per la corrente soluzione ammissibile di base, abbiamo le componenti positive t_{i0} ($i = 1, \dots, m$). Le nuove componenti di base saranno, derivandole dalla (4.4.23) e (4.4.24),

$$t'_{r0} = t_{r0}/t_{rs} \quad (4.4.32)$$

$$t'_{i0} = t_{i0} - (t_{is}/t_{rs})t_{r0} \quad (i \neq r) . \quad (4.4.33)$$

Poiché t'_{i0} deve essere positivo, richiediamo che $t_{rs} > 0$ l'elemento "pivot" sia positivo.

Poiché t'_{i0} deve essere positivo, per $(i \neq r)$.si deve avere che

$$t_{i0} - (t_{is}/t_{rs})t_{r0} > 0 \quad \text{per} \quad (i \neq r) . \quad (4.4.34)$$

Tutti e quattro i t in questa formula sono positivi eccetto possibili t_{is} . Se $t_{is} \leq 0$ la disequaglianza (4.4.23) é vera; se t_{is} é positivo, la disequaglianza é vera se

$$t_{r0}/t_{rs} < t_{i0}/t_{is} \quad (i \neq r, t_{is} > 0) \quad (4.4.35)$$

Così, r soddisfa

$$t_{r0}/t_{rs} = \min\{t_{i0}/t_{is} : t_{is} > 0, i = 1, \dots, m\} \quad (4.4.36)$$

La minimizzazione determina r in maniera univoca. Se infatti il minimo si avesse per $i=r$ e $i=\rho$, allora si dovrebbe verificare che

$$t_{r0}/t_{rs} = t_{\rho 0}/t_{\rho s} \quad (4.4.37)$$

il che violerebbe la disequaglianza stretta $\rho \neq r$.

Come scegliere la colonna "pivot". Prima di scegliere la riga "pivot", bisogna scegliere la colonna "pivot". Scegliremo la colonna "pivot" s in modo che questa renda il costo più basso possibile.

$$c^T x = \sum_{j \in B} c_j x_j = \hat{c}_1 t_{10} + \dots + \hat{c}_m t_{m0} \quad (4.4.39)$$

Qui la notazione \hat{c}_i rappresenta il costo unitario per il vettore di base v^i . Se $v^i = a^i$, allora $\hat{c}_i = c_i$. Similmente, l'elemento della tabella t_{i0} eguaglia $\hat{x}_i = x_j$ per la soluzione corrente x .

Al fine di introdurre la quantità λa^s nella soluzione, aggiungiamo λ volte l'equazione

$$a^s - \sum_{i=1}^m t_{is} v^i = 0 \quad (4.4.40)$$

all'equazione

$$\sum_{i=1}^m t_{i0} v^i = Ax = b \quad (4.4.41)$$

Se tutti i coefficienti rimangono positivi, otteniamo una nuova soluzione ammissibile $x(\lambda)$, con

$$\lambda a^s + \sum_{i=1}^m (t_{i0} - \lambda t_{is}) v^i = Ax(\lambda) = b \quad (4.4.42)$$

Il nuovo costo é uguale

$$\lambda c_s + \sum_{i=1}^m (t_{i0} - \lambda t_{is}) \hat{c}_i \quad (4.4.43)$$

In questa espressione

$$\sum_{i=0}^m t_{i0} \hat{c}_i = \text{vecchio costo}; \quad \sum_{i=1}^m t_{is} \hat{c}_i \equiv z_s \quad (4.4.44)$$

Quindi, la (4.4.43) implica

$$\text{nuovo costo} = \text{vecchio costo} - \lambda(z_s - c_s) \quad (4.4.45)$$

Come é possibile osservare dalla (4.4.42), se tutti i t_{is} sono ≤ 0 nella colonna pivot, possiamo fare si che per $\lambda \rightarrow +\infty$ e ancora per $x(\lambda)$ ci sia una soluzione ammissibile (questo é detto Caso 2a nell' "Idea del metodo del Simplexso"). Se $z_s - c_s > 0$ e tutti i t_{is} sono ≤ 0 , il calcolo si fermerà, poiché ora sappiamo come portare il costo a meno infinito. Il computer dovrebbe allora stampare la riga pivot r secondo la formula (4.4.36). Allora formeremo una nuova tabella, secondo le regole (4.4.29), (4.4.30).

Questo decresce il costo di $\lambda^*(z_s - c_s)$, dove λ^* é il coefficiente di a^s nella nuova soluzione di base. Poiché $a^s = (v^r)'$ si ha che

$$\lambda^* = t'_{r0} = t_{r0}/t_{rs} \quad (4.4.45a)$$

Se indichiamo con z_0 il vecchio costo il nuovo costo con z'_0 si avrà

$$z'_0 = z_0 - \left(\frac{z_s - c_s}{t_{rs}} \right) t_{r0} \quad (4.4.46)$$

criterio della riga Finora, abbiamo definito la tabella estesa come

$$[T; U] = M^{-1}[A, b; I] \quad (4.4.47)$$

dove M é la corrente matrice di base. Questa tabella ha m righe e $n+1+m$ colonne. La tabella manca di alcune informazioni che vogliamo, e quindi poniamo quelle informazioni in una riga alla fine

$$z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n, z_0; \quad y_1, \dots, y_m \quad (4.4.48)$$

Questo é il criterio della riga.

Le prime n componenti hanno la forma

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m t_{ij} \hat{c}_i - c_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.4.49)$$

Se a^j é nella base corrente, allora dovremmo avere $z_j - c_j = 0$; per $a^j = v^k$, allora é $t_{ij} = 1$ per $i=k$ e $t_{ij} = 0$ per $i \neq k$ e $\hat{c}_k = c_j$. Se a^j non é nella base corrente, sappiamo che j é il candidato per la colonna pivot se $z_j - c_j > 0$.

Ma se tutti i $z_j - c_j \leq 0$, allora la corrente soluzione ottimale di base é ottimale, come abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente.

La successiva componente nel criterio della riga é il seguente costo:

$$z_0 = \sum_{i=1}^m t_{i0} \hat{c}_i = \hat{c}^T \hat{x} = c^T x \quad (4.4.50)$$

Le ultime m componenti nel criterio della riga sono definite come segue:

$$y_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} \hat{c}_i \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.4.51)$$

Qui $(u_{ij}) = U$ é l'inversa della matrice di base; U rappresenta l'ultima parte della tabella estesa (4.4.47).

Il significato di y^T é il seguente. La definizione (4.4.51) stabilisce che

$$y^T = \hat{c}^T U$$

o anche

$$y^T M = \hat{c}^T \quad (4.4.51a)$$

o ancora

$$y^T a^k = c_k \quad \text{se } k \in B \quad (4.4.52)$$

Così, y^T é la soluzione di equilibrio. Nell'ultima fase risulta $z_j - c_j \leq 0$, e allora y^T sarà la soluzione ottimale del problema duale:

$$y^T A \leq c^T \quad y^T b = \max \quad (4.4.53)$$

Allora y^T soddiferà la relazione

$$y^T a^j = z_j \leq c_j \quad \text{con uguaglianza stretta se } j \in B \quad (4.4.54)$$

Dopo aver preso in considerazione il criterio della riga, la tabella appare così:

t_{11}	\cdot	t_{1n}	t_{10}	u_{11}	\cdot	u_{1m}
	\dots				\dots	
\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
	\dots				\dots	
t_{m1}	\cdot	t_{mn}	t_{m0}	u_{m1}	\cdot	u_{mm}
	\dots				\dots	
$z_1 - c_1$		$z_m - c_m$		y_1		y_m

(4.4.55)

Si può dimostrare che il criterio della riga trasforma tutte le altre righe "non-pivot". In altre parole ciò vuol dire che per qualche θ_0

$$\text{nuova riga criterio} = \text{vecchia riga criterio} - \theta_0 (\text{riga pivot}) \quad (4.4.56)$$

Poiché a^s sta entrando nella base, dobbiamo avere $z'_s - c_s = 0$ nella nuova tabella.

Se la formula (4.4.56) è esatta allora $z'_s - c_s = z_s - c_s - \theta_0 \cdot t_{rs}$ e quindi dobbiamo avere

$$\theta_0 = (z_s - c_s) / t_{rs} \quad (4.4.57)$$

4.5 Una revisione dell' algoritmo del Simplexso

Intorno al 1954, Dantzig e i suoi colleghi trovarono il modo per rendere l'algoritmo del simplexso più efficiente.

Come abbiamo visto, l'algoritmo del simplexso ha tre gruppi di colonne: prima, la colonna degli a_1, \dots, a_n ; seconda, la colonna singola dei b ; terza la colonna degli e^1, \dots, e^m . Con il nuovo algoritmo non si ha bisogno di calcolare il primo gruppo di colonne. Tutto ciò di cui si ha bisogno è la colonna "pivot" che può essere calcolata quando se ne ha bisogno.

Questo, come al solito è il problema

$$Ax = b \quad x \geq 0 \quad c^T x = \min \quad (4.5.1)$$

Dove A è una matrice $m \times n$, che è data secondo i vettori b e c .

Assumiamo che il problema sia non-degenerato. Prima mettiamo in memoria del computer la matrice (a_{ij}) e i vettori (b_i) e (c_j) . Tali numeri non verranno più cambiati ma ci consentiranno di calcolare gli altri numeri.

Ad ogni stadio, inizieremo con questi numeri dalla tabella del simpleso:

	t_{10}	u_{11}	·	u_{1m}
		..		
	·	·		
	..			
	t_{m0}	u_{m1}	·	u_{mm}
		..		
	z_0	y_1	·	y_m
		..		

$$(4.5.2)$$

e inizieremo anche con la lista degli indici di base:

$$\{j_1, \dots, j_m\} \tag{4.5.3}$$

Ad ogni stadio i numeri in (4.5.2) e (4.5.3) verranno modificati.

I numeri rappresentano esattamente quello che rappresentavano nel paragrafo precedente. t_{i0} da una soluzione di base corrente; u_{ij} da l'inversa della base corrente; z_0 da il costo corrente; gli y_j risolvono le equazioni di equilibrio. Tutti questi numeri sono definiti all'inizio della Fase I, nominalmente,

$$t_{i0} = b_i \quad u_{ij} = \delta_{ij} \quad z_0 = \sum b_i \quad y_i = 1 \tag{4.5.4}$$

I numeri z_0 e y_j devono essere ricalcolati a partire dalla Fase II, ossia

$$z_0 = \sum_{i=1}^m t_{i0} \hat{c}_i, \quad y_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} \hat{c}_i \tag{4.5.5}$$

dove $\hat{c}_i = c_{j_i}$.

In pratica l'unica differenza rispetto a quanto fatto nella tabella del simpleso calcolato in precedenza, é che non calcoleremo tutti i t_{ij} e i $z_j - c_j$.

Vediamo ora come modifichiamo la tabella abbreviata.

Prendiamo un indice non di base j . Calcoliamo il numero

$$z_j = \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \tag{4.5.6}$$

Se z_j soddisfa $z_j > c_j$, allora $j = s$; questo diventa l'indice della colonna "pivot". Ma se $z_j \leq c_j$, si tenta qualche altro indice j non di base.

Se $z_j \leq c_j$ per tutti gli indici j non di base, allora il processo è finito. Si è infatti trovata la soluzione di base ottimale, con le componenti positive

$$\hat{x}_i = x_{ji} = t_{i0} \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.5.7)$$

il costo minimo è z_0 , e il vettore duale ottimale è y^T .

Se dopo aver calcolato z_j tramite la formula (4.5.6) si trova che $z_j > c_j$, allora, ponendo $j=s$, si procede come di seguito.

Prima si calcola la colonna "pivot" della tabella del simpleso:

$$t_{is} = \sum_{k=1}^m u_{ik} a_{ks} \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.5.8)$$

Se tutti $t_{ij} \leq 0$ allora siamo nel Caso 2a; in tal caso si può condurre il costo a meno infinito ponendo $x(\lambda) = \lambda a^s + \sum_{i=1}^m (t_{i0} - \lambda t_{is}) v^i$

$$\text{cost} = c^T x(\lambda) = c^T x(0) - \lambda(z_s - c_s) \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (4.5.9)$$

Se, invece, solo per alcuni $t_{is} > 0$, la riga "pivot" r viene ottenuta dalla vecchia formula:

$$t_{r0}/t_{rs} = \min\{t_{i0}/t_{is} : t_{is} > 0\} \quad (4.5.10)$$

Questo è quello che avevamo definito Caso 2b. Adesso si può modificare la tabella secondo le vecchie regole di trasformazione con una eccezione: senza calcolare le prime n colonne ma semplicemente le ultime $m+1$ colonne.

Ecco le regole

$$\text{nuova riga } r = (\text{vecchia riga } r) / t_{rs} \quad (4.5.11)$$

e per $i \neq r$

$$\text{nuova riga } i = (\text{vecchia riga } i) - \theta_i (\text{vecchia riga } r) \quad (4.5.12)$$

dove

$$\theta_i = t_{is}/t_{rs} \quad (i \neq r; i = 1, \dots, m) \quad (4.5.13)$$

$$\theta_0 = (z_s - c_s)/t_{rs} \quad (4.5.14)$$

Ed infine si dovrà sostituire l'indice della vecchia base j_r per mezzo di s .



CAPITOLO 5

Inversione di forme d'onda con l'approssimazione di sorgente puntiforme: limiti e vincoli da test sintetici

5.1 Introduzione

Abbiamo ampiamente discusso nel Cap.1 quali siano le modalità più adatte per descrivere la sorgente sismica e come questa possa essere trattata, se verificate determinate condizioni, nell'approssimazione di sorgente puntiforme; lo studio che presentiamo in questo capitolo è un'analisi condotta al fine di determinare quali siano i limiti di tale approssimazione.

Come è facilmente intuibile, nel trattare la sorgente sismica come puntiforme le informazioni sulla distribuzione spaziale dell'energia vengono perse e solo la storia temporale del rilascio energetico può essere eventualmente ritrovata.

Abbiamo simulato un terremoto di "medio-bassa" magnitudo ($M=3.9$) generando i sismogrammi per una sorgente estesa. Applicando l'approssimazione della somma di sorgenti puntiformi (Cap. 1) i sismogrammi sintetici sono stati calcolati col metodo della somma multimodale (Cap. 2) per differenti modelli di propagazione della frattura.

La funzione sorgente temporale, nell'approssimazione di sorgente puntiforme, è calcolata con la procedura di inversione sviluppata da Mao et al. (1994) che si basa sul metodo dei minimi quadrati linearizzati (Cap. 3). Discutiamo di seguito gli effetti della variazione di alcuni parametri della sorgente estesa e i limiti dell'approssimazione della sorgente puntiforme. Anche gli effetti di diverse geometrie di stazioni vengono analizzati.

I risultati ottenuti mostrano che una sola sorgente puntiforme, ossia una singola funzione di Green, non è sempre in grado di modellare le eventuali complessità della sorgente sismica ma, come discuteremo di seguito, riteniamo che ulteriori analisi si rendano necessarie per poter confermare i risultati che presentiamo in questo capitolo.

5.2 Brevi richiami teorici

Nell'approssimazione di sorgente puntiforme è ben noto come la dislocazione alla sorgente possa essere schematizzata da una doppia coppia con momento nullo e la cui dislocazione dipenda dalle coordinate ipocentrali. La dipendenza temporale della sorgente può essere descritta dall'andamento del rilascio energetico nel tempo, ossia quella che definiamo come funzione sorgente temporale.

Lo spostamento del terreno eccitato da una sorgente puntiforme con una funzione di sorgente temporale $\dot{m}(t)$ può essere espressa come

$$s(t) = u(t, x) * \dot{m}(t) \quad (5.2.1)$$

dove u è lo spostamento sulla superficie libera dovuto ad un punto sorgente la cui dipendenza temporale è data dalla funzione di Heaviside.

Nel metodo che qui applicheremo per l'inversione, la funzione sorgente temporale $\dot{m}(t)$ è parametrizzata con una serie di triangoli con pesi differenti, secondo un'approssimazione che abbiamo già discusso nel Cap.3.

Il metodo che applicheremo è quello sviluppato da Mao et al. (1994). I parametri di sorgente, *strike*, *dip*, *rake*, profondità ipocentrali e coordinate epicentrali sono determinati simultaneamente assumendo che la sorgente sismica possa essere rappresentata in modo soddisfacente da una doppia coppia con momento totale nullo. Essendo tale tipo di problema non lineare, viene applicata la tecnica dei minimi quadrati linearizzati. Le derivate parziali dei sismogrammi sintetici rispetto ai parametri del modello di sorgente sono calcolate analiticamente. Inoltre viene imposto il vincolo di positività della direzione dello scorrimento sulla faglia a cui da qui in avanti ci riferiremo come "no back-slip" per brevità. I dettagli del metodo sono descritti nel Cap. 3.

5.3 Calcolo dei dati artificiali o finti osservati

La sorgente estesa è modellata come un piano di faglia e quindi come una griglia con celle che contengono ciascuna una sorgente puntiforme. La superficie di faglia è quadrata con il lato di 1 km.

Basandoci sulla legge empirica di Utsu-Seki (1955)

$$\log A = 1.02 M + 6 \quad (5.3.1)$$

dove A è la superficie di faglia misurata in cm^2 , ricaviamo che per una superficie di faglia con area di 1 km^2 , la nostra modellazione può essere valida per un terremoto di magnitudo $M=3.9$ circa a cui corrisponderà un rilascio di momento sismico di circa $10e+21$ dyne cm, valore quest'ultimo ricavato dalla legge di Thatcher e Hanks (1973)

$$\log M_0 = 1.5M_L + 16 \quad (5.3.2)$$

Il limite superiore della faglia si trova ad una profondità di 2 km dalla superficie ed il meccanismo che assumiamo è di trascorrenza pura (puro *strike-slip*), con

strike=0°, dip=90° e rake=180°.

Per ognuna delle sorgenti puntiformi che modellano la superficie di faglia calcoliamo l'accelerogramma ad ogni stazione secondo la procedura che è stata trattata nel Cap. 2. Consideriamo una distribuzione ideale di sei stazioni (fig. 5.1) attorno alla faglia a una distanza media di 5 km dalla proiezione sul piano orizzontale della sorgente.

Le funzioni di Green sono state calcolate ad una frequenza massima di 10 Hz, con un intervallo temporale di 0.00976 secondi è un intervallo in frequenza di 0.005 Hz. Gli accelerogrammi finali sono stati poi filtrati a 7 Hz con la massima ampiezza unitaria a 4 Hz.

La lunghezza d'onda minima coinvolta nel problema è $\lambda = 0.75 \text{ km}$.

Il modello strutturale di velocità delle onde P ed S, densità, fattore Q e rapporto V_p/V_s è riportato in figura 5.2.

Inizialmente la nostra analisi si è concentrata sul calcolo degli accelerogrammi per diverse discretizzazioni della griglia sulla faglia, in modo tale da poter osservare come tale aspetto del problema si ripercuota sulle forme d'onde per il tipo di sorgente estesa che qui stiamo considerando.

Abbiamo calcolato per ognuna delle sei stazioni gli accelerogrammi sintetici considerando in un primo momento una sola cella (quindi un'unica sorgente puntiforme) su tutta la superficie del piano di faglia. Ci riferiremo a questo caso come Fkob0. Gli accelerogrammi ottenuti sono rappresentati in figura 5.4. Le ampiezze riportate sulle ordinate sono misurate in cm/s^2 , e sono calcolate per un momento sismico di $10e21$ dyne*cm. Tuttavia le massime ampiezze riportate in alcuni dei grafici non sono state moltiplicate per l'opportuno fattore di scala a causa di un banale errore nei valori dati in ingresso al programma. Abbiamo

ritenuto comunque opportuno riportare questi sismogrammi sintetici i quali, a meno dell'opportuno ordine di grandezza per le unità di misura delle ampiezze, sono comunque significativi ai fini dell'analisi che qui presentiamo.

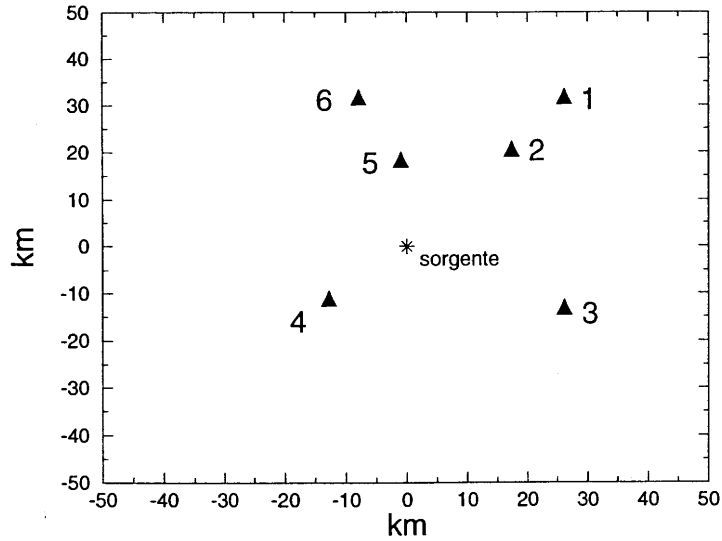


Fig.5.1 Distribuzione delle stazioni attorno alla sorgente sismica.

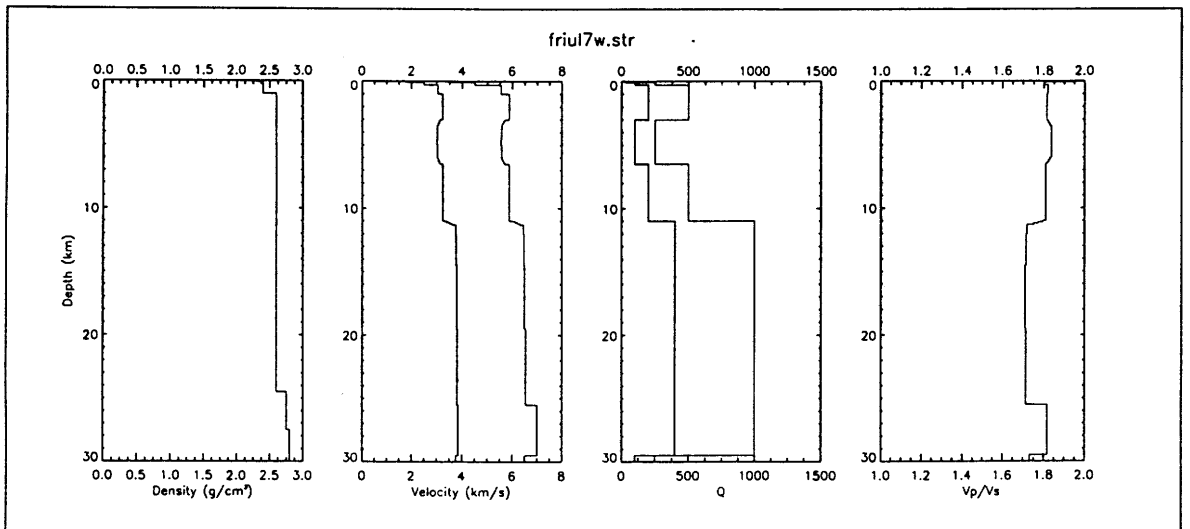


Fig. 5.2 Rappresentazione del modello strutturale utilizzato per questa analisi.

Al passaggio del fronte di rottura, la cui velocità è pari al 70% di velocità delle onde S, ogni cella rilascia una quantità di momento sismoco che varia da cella a cella e di cui teniamo conto nei calcoli tramite un opportuno fattore moltiplicativo o peso. Sono stati considerati tre diversi modelli di rottura, ossia tre diverse distribuzioni di momento sismico sulla griglia. Tali distribuzioni vengono schematicamente rappresentate in figura 5.3.

modello di rottura: fkob1

10	0	0	0	0
0	0	0	0	0
10	10	10	10	10
0	0	0	0	0
0	0	0	0	10

modello di rottura: fkob2

10	0	0	0	30
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
50	0	0	0	10

modello di rottura: fkob3

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
50	0	0	0	0

Fig. 5.3 - Rappresentazione schematica dei modelli di rottura utilizzati nel calcolo degli accelerogrami.

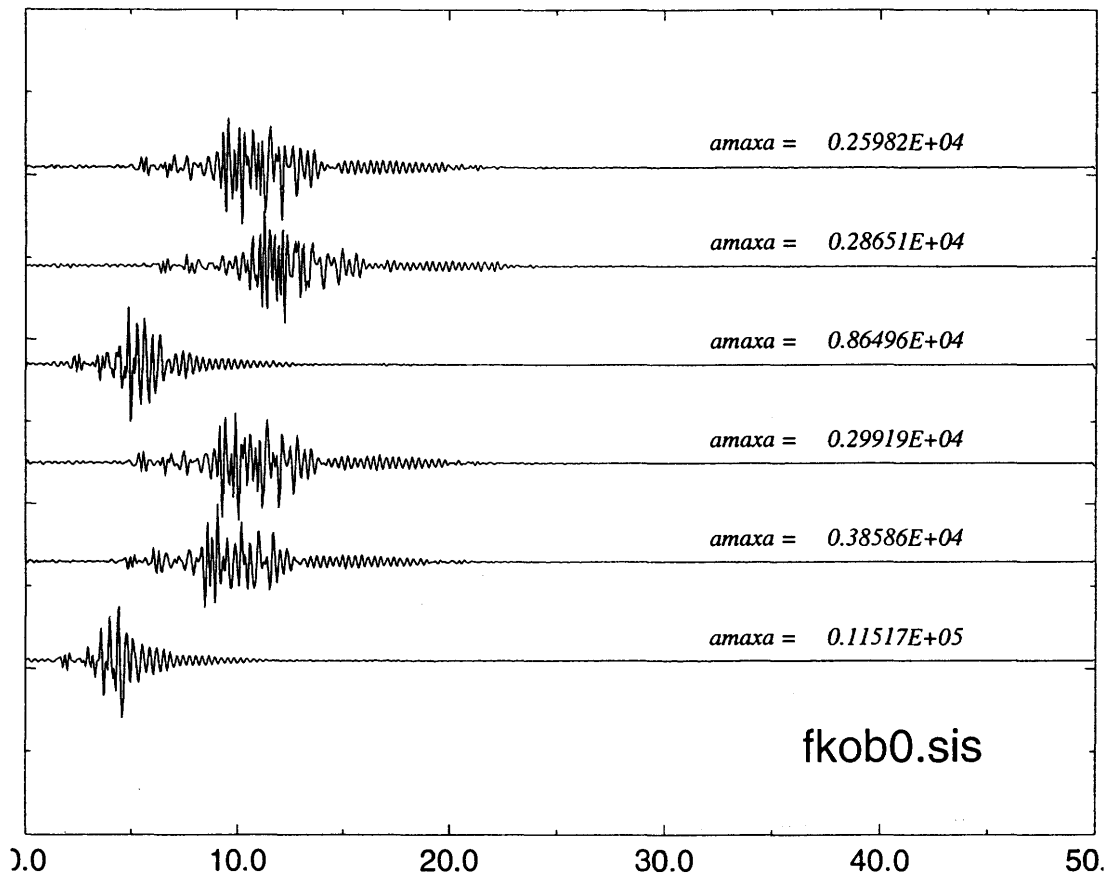


Fig. 5.4. Accelerogrammi calcolati per una sola sorgente posta al centro della superficie di faglia. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni. Così il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x sono riportati i tempi in s.

Utilizzando il modello di rottura Fkob1 (fig. 5.3) e una griglia formata da 25 celle quadrate ognuna con lato di 0.2 km, abbiamo calcolato gli accelerogrammi rappresentati in figura 5.5. Le variazioni nelle forme d'onda e nelle ampiezze non sono molto rilevanti rispetto al caso precedente. Ciò sta anche ad indicare che l'approssimazione di sorgente puntiforme, almeno per quanto concerne il problema diretto è una rappresentazione valida.

Il modello di rottura Fkob2 è stato invece utilizzato per generare gli accelerogrammi riportati in fig. 5.6. La griglia è discretizzata con 25 celle così

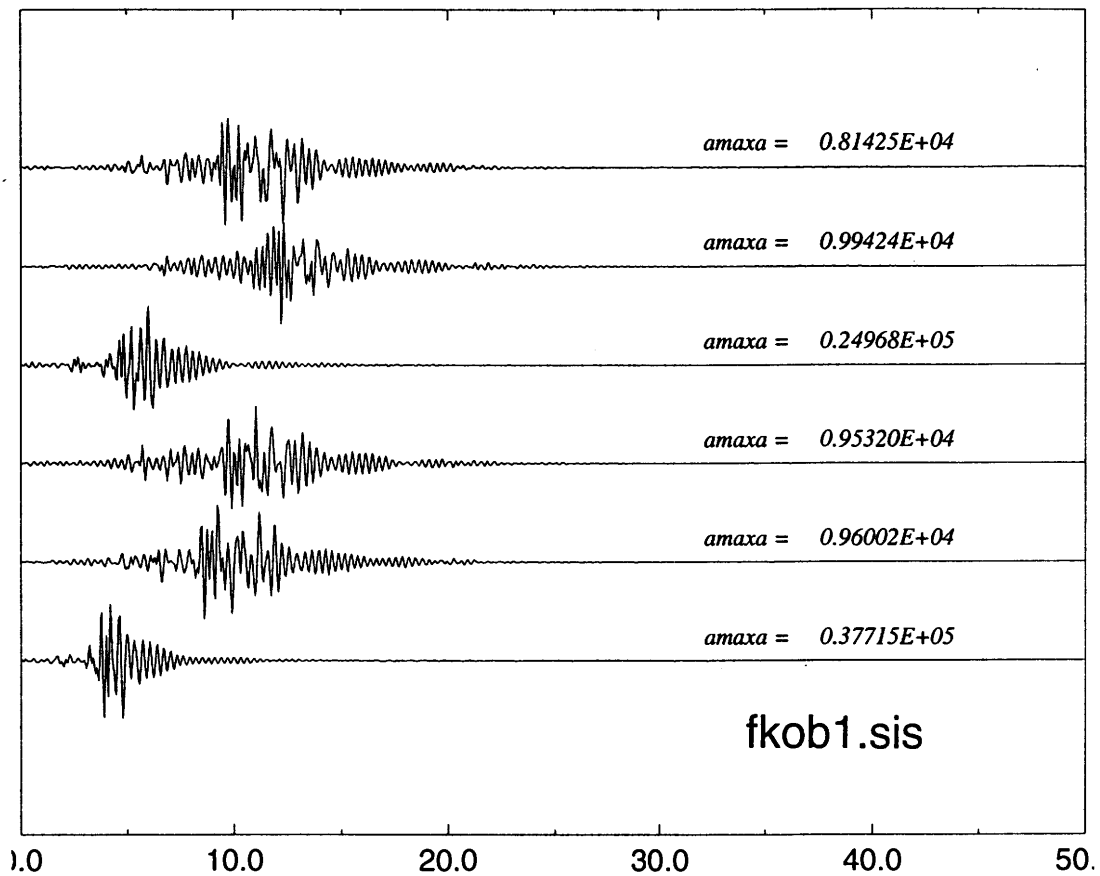


Fig. 5.5. Accelerogrammi calcolati per una griglia formata da 25 sorgenti puntiformi per il modello di rottura Fkob1 illustrato in Fig. 5.3. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni: il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x sono riportati i tempi in s.

Il modello di rottura Fkob2 è stato invece utilizzato per generare gli accelerogrammi riportati in fig. 5.6. La griglia è discretizzata con 25 celle così come nel caso precedente.

Riporteremo di seguito gli accelerogrammi calcolati con lo stesso modello di rottura (Fkob2) ma per i quali abbiamo variato alcuni parametri al fine di osservare come queste variazioni possano essere individuate nei sismogrammi sintetici che abbiamo calcolato.

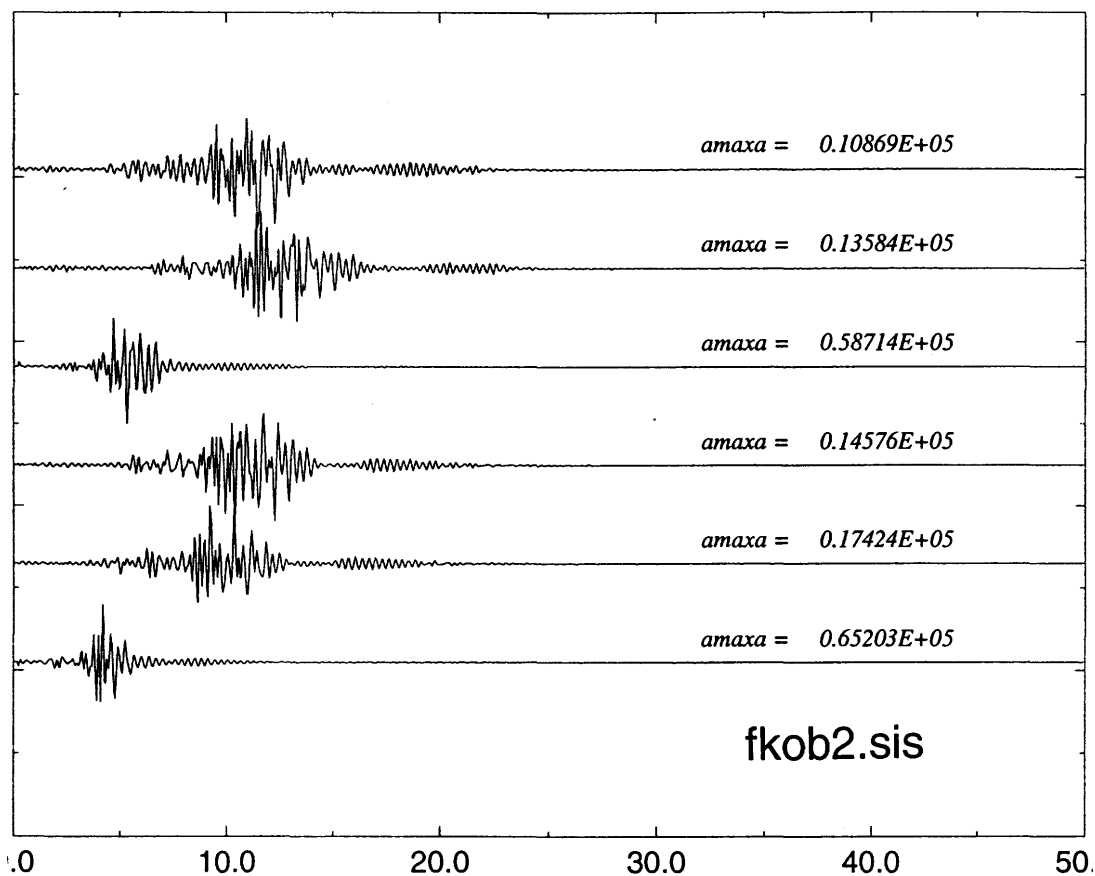


Fig. 5.6. Accelerogrammi calcolati per una griglia formata da 25 sorgenti puntiformi per il modello di rottura Fkob2 illustrato in Fig. 5.3. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni: il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x sono riportati i tempi in s.

In fig. 5.7 sono rappresentati i segnali calcolati variando la profondità del limite superiore della faglia e spostandolo da 2 a 5 Km. A tale profondità l'effetto dell'attenuazione non è ancora ben visibile sui vari segnali ma si osserva comunque un più alto contenuto in frequenze rispetto ai segnali di fig. 5.6.

Gli accelerogrammi di figura 5.8, Fkob2s sono stati calcolati considerando invece un diverso meccanismo di sorgente. Sono stati cambiati i parametri di strike, slip e rake da 0° , 90° , 180° a 30° , 60° , 160° rispettivamente.

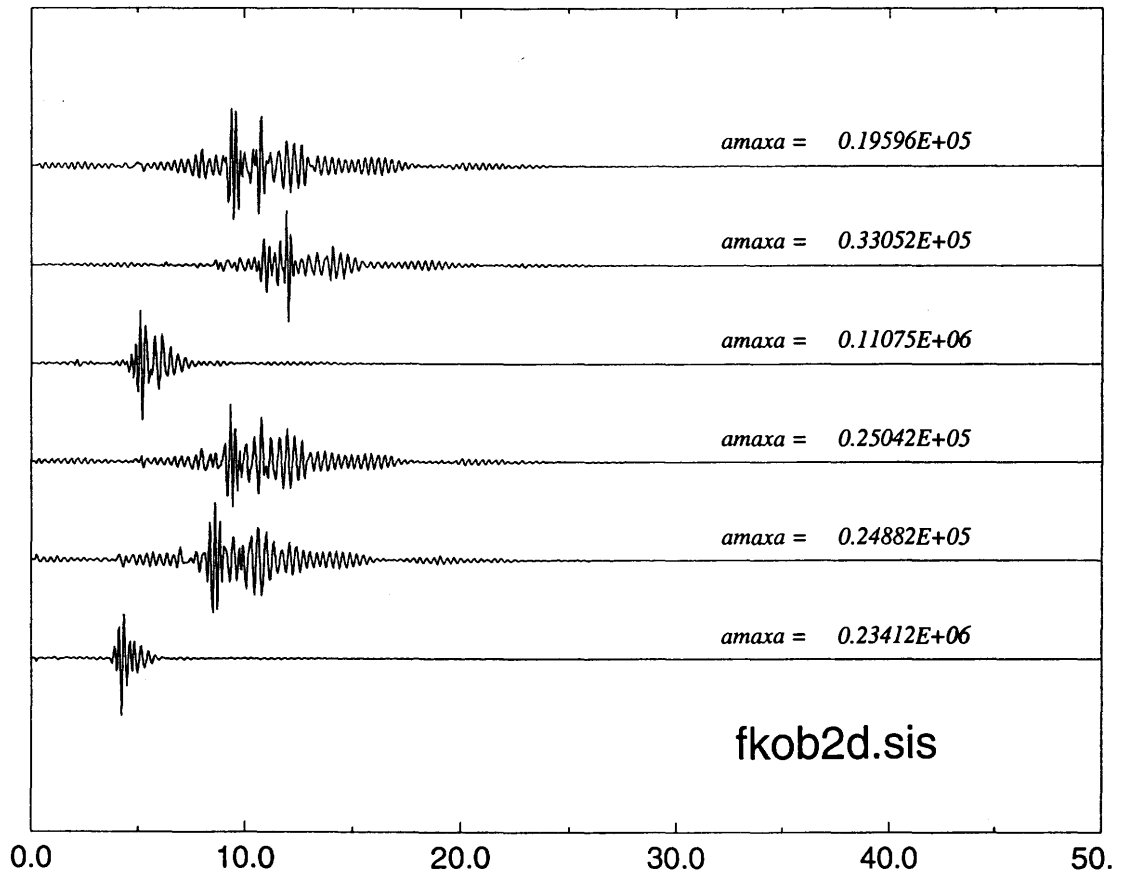


Fig. 5.7 Accelerogrammi calcolati per una griglia formata da 25 sorgenti puntiformi per il modello di rottura Fkob2 illustrato in Fig. 5.3. Il limite superiore della faglia è stato spostato a 5 Km di profondità. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni: il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x sono riportati i tempi in s.

Gli accelerogrammi rappresentati in fig. 5.9, sono invece relativi ad un modello di superficie di faglia quadrata di lato 2 km. Tale esempio è riportato solo al fine di visualizzare le differenze tra i precedenti accelerogrammi generati per una faglia di minori dimensioni. Non osserviamo grosse variazioni nella forma d'onda ad eccezione di variazioni in ampiezza così come era logico aspettarsi in seguito ad un maggior rilascio energetico.

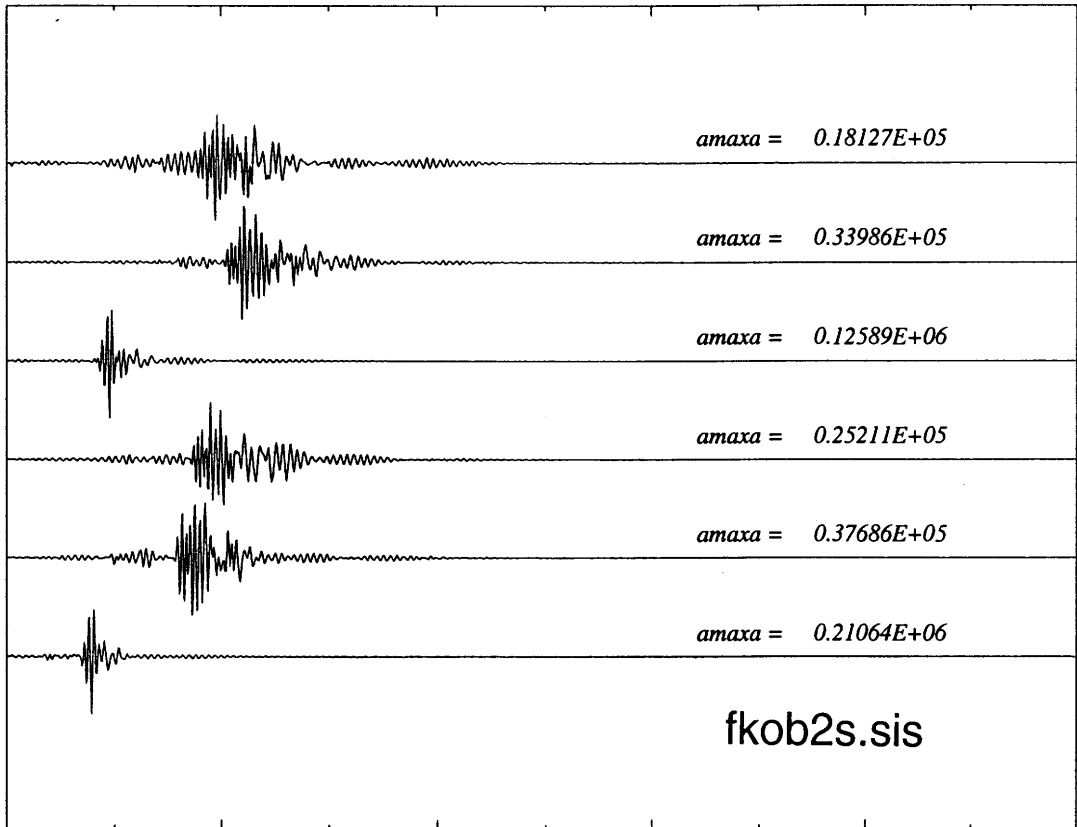


Fig. 5.8 Accelerogrammi calcolati per una griglia formata da 25 sorgenti puntiformi per il modello di rottura Fkob2 illustrato in Fig. 5.3. Il meccanismo di sorgente è stato cambiato rispetto ai precedenti. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni: il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x sono riportati i tempi in s.

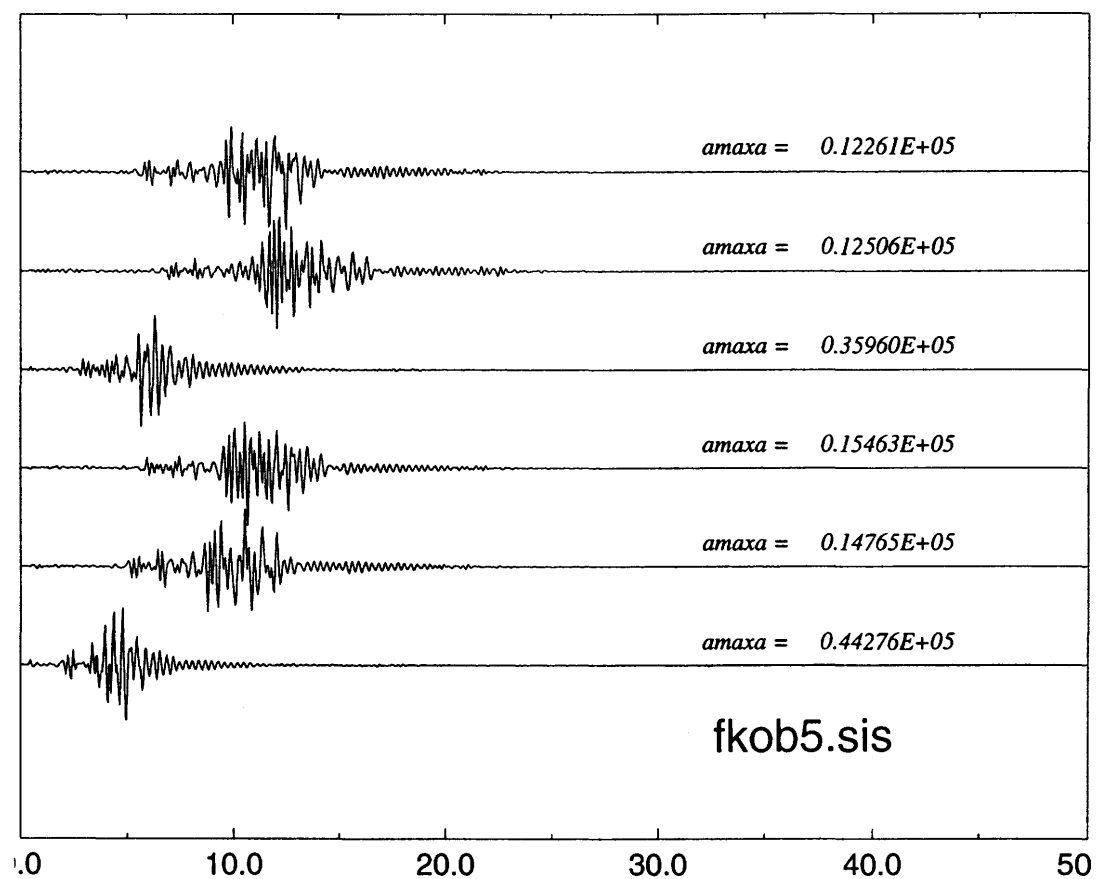


Fig. 5.9 Accelerogrammi calcolati per una griglia formata da 25 sorgenti puntiformi per il modello di rottura Fkob2 illustrato in Fig. 5.3. La faglia ha una dimensione di 2 km x 2 km. I sismogrammi sono ordinati progressivamente rispetto alle sei stazioni: il primo sismogramma in alto è relativo alla stazione 1, il secondo alla stazione 2 e così via. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x è riportato il tempo in s.

5.4 Inversione dei dati con l'approssimazione di sorgente puntiforme

Gli accelerogrammi calcolati come "finti-osservati" che abbiamo mostrato nel precedente paragrafo, sono stati utilizzati come se fossero dati reali nella procedura di inversione applicata per ritrovare i parametri di sorgente.

Ricordiamo molto brevemente che per ciascuna inversione viene imposto a priori il vincolo di positività "no back-slip".

Ci riferiremo a ciascuna inversione indicandola con la nomenclatura "test" seguita da due numeri. Il primo di questi si riferisce all'insieme di accelerogrammi calcolati come dati artificiali e di cui abbiamo discusso nel precedente paragrafo. Il secondo numero si riferisce invece al numero di inversione. Così ad esempio il *test2-10* si riferisce all'inversione per gli accelerogrammi Fkob2.sis (mostrati in fig. 5.6) nel decimo caso di inversione relativa allo stesso insieme di dati.

Riportiamo inoltre in grafico, solo per i casi che riteniamo più importanti, il confronto tra le forme d'onda calcolate e finte osservate e i relativi valori di scarto quadratico medio (o Root Mean Square, da qui in avanti RMS). Infine per alcuni dei casi calcolati riportiamo le funzioni sorgente temporale ottenute dall'inversione e come confronto la funzione sorgente temporale considerata per il problema diretto.

Diamo qui di seguito la descrizione di alcuni dei test eseguiti. Salvo diversa specificazione useremo nell'inversione sempre la stessa struttura adoperata nel problema diretto.

Test0-1 - Utilizzando i sismogrammi Fkob0.sis abbiamo calcolato l'inversione per ritrovare i parametri di sorgente. Abbiamo ben riprodotto le soluzioni di partenza essendo ovviamente ancora nel caso di un'unica sorgente puntiforme anche nel problema diretto.

Test1-4 - Questo test è stato effettuato utilizzando l'insieme di sismogrammi Fkob1.sis. Il confronto delle forme d'onda non è buono e la stessa funzione di sorgente temporale (da qui in avanti *stf*) non è riprodotta come si vede da fig. 5.10.

Test1-3 - L'inversione è stata calcolata per un diverso modello strutturale rispetto a quello di partenza (fig.5.11). In tal caso le soluzioni ottenute sono ancora peggiori, come ci si può aspettare, di quelle del caso Test1-4 ed infatti la riduzione di RMS è minore.

Test2-2 - In questo test abbiamo adoperato come dati "finti-osservati" quelli generati come Fkob2.sis che sono riportati in fig 5.6. Nel modello di partenza la

stf è stata parametrizzata con 20 triangoli . Come è si osserva in fig. 5.14 la procedura non è in grado di ridurre la stf a quella del modello diretto a parte

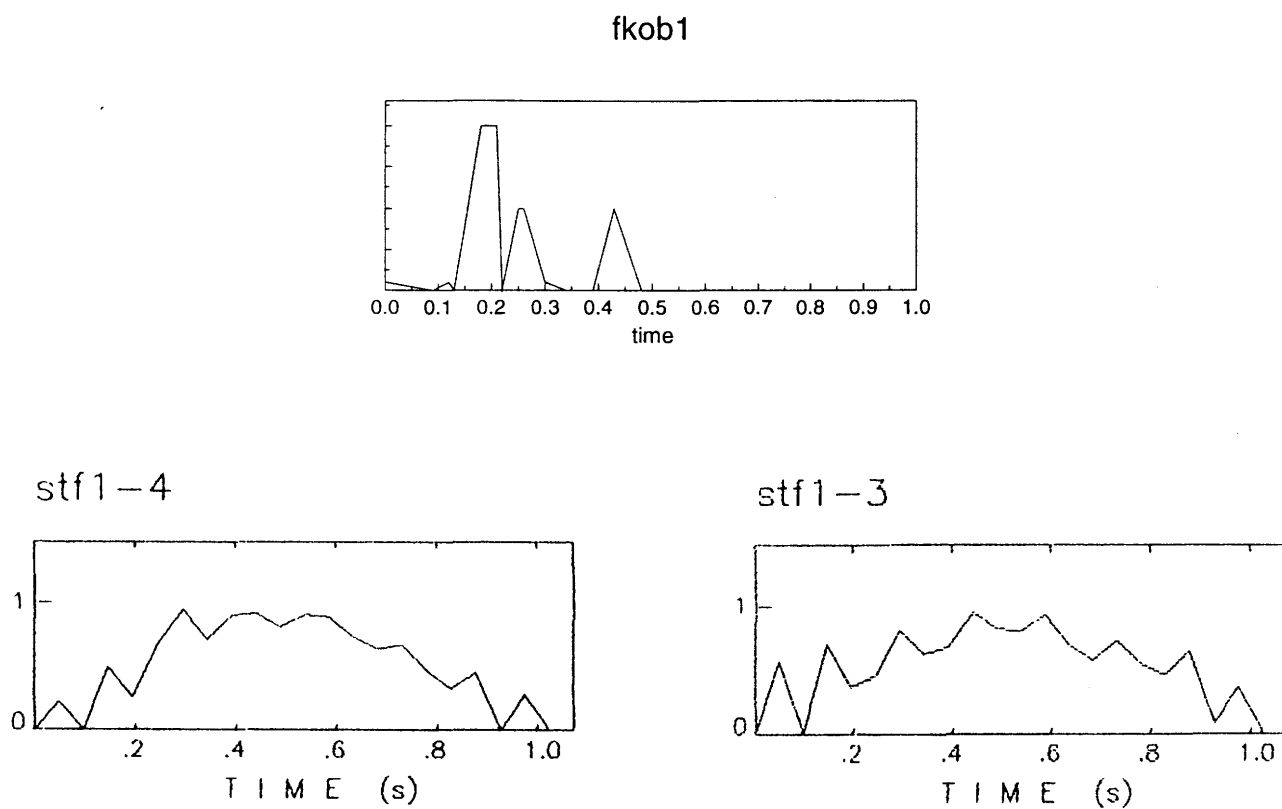


Fig. 5.10. Rappresentazione delle stf relative alle inversioni con i dati Fkob1.sis. In alto è rappresentata la stf del modello diretto (Fkob1). La stf1-4 è relativa al test1-4 , mentre la stf1-3 si riferisce al test1-3.

Test2-10 - Il test precedente è stato ripetuto sullo stesso insieme di sismogrammi ma la stf è stata modellata considerando un minor numero di triangoli, 10 anzichè 20. Si osserva un chiaro miglioramento nella rappresentazione della stf (fig. 5.13) ma non vi sono apprezzabili miglioramenti nel fit delle forme d'onda (fig. 5.14) In fig. (5.16) si osserva tuttavia un incremento dell'RMS rispetto al caso precedente, segno questa di una maggiore instabilità.

Test2-11 - Il numero di triangoli fissati in partenza per rappresentare la stf è stato ulteriormente ridotto a 5 triangoli. La stf migliora notevolmente (fig.5.13) ma il fit delle forme d'onda (fig. 5.15) peggiora rispetto ai casi precedenti (fig.5.14).

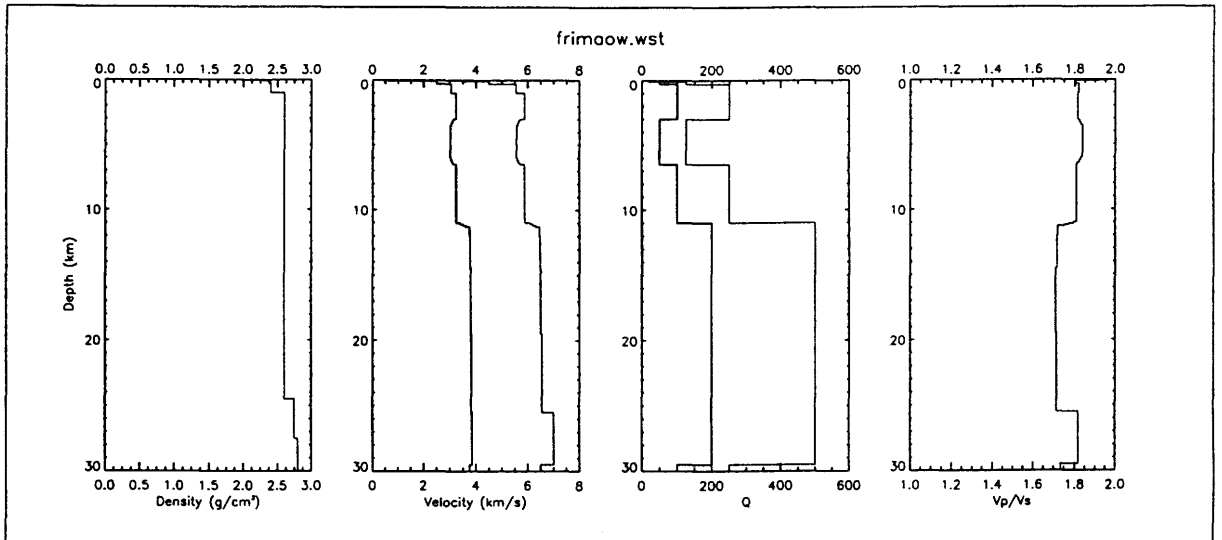


Fig. 5.11 Modello strutturale utilizzato per il test1-4

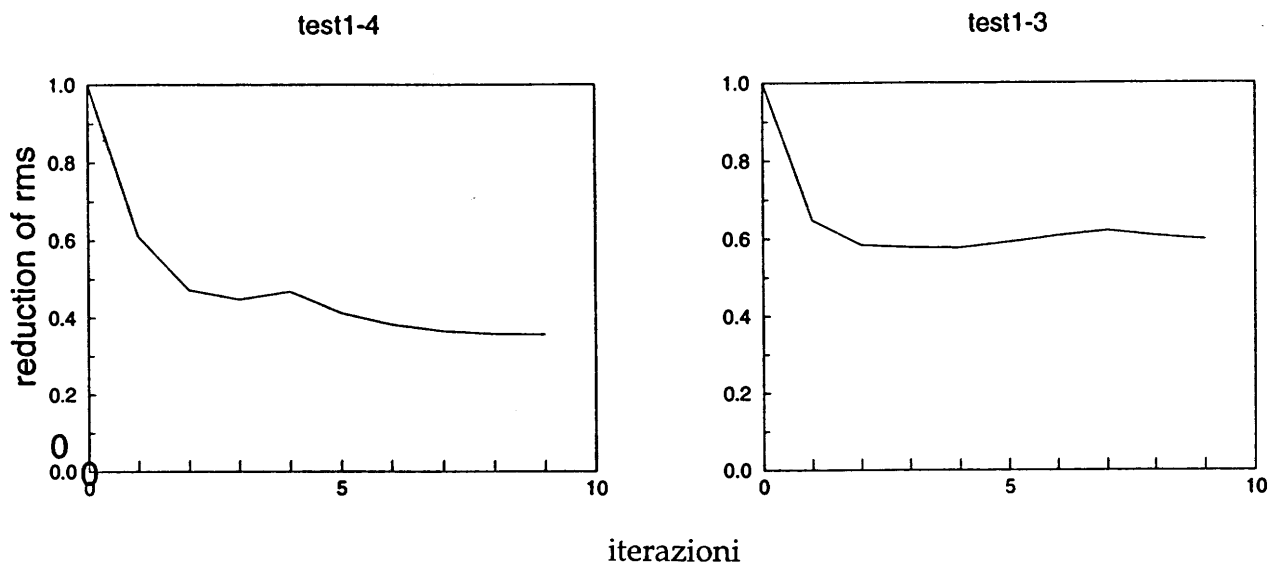


Fig. 5.12 Variazione dell'RMS (scarto quadratico medio) in funzione del numero di iterazioni. Per ognuno dei grafici il valore dell'RMS è stato normalizzato al suo valore massimo.

l'istante in cui avviene il rilascio maggiore. In fig. 5.14 riportiamo il confronto tra le forme d'onda "finte-osservate" (linee continue) e i risultati dell'inversione (linee tratteggiate).

Alla luce di questi risultati e per mediare i vari comportamenti abbiamo così deciso di rappresentare la stf con 10 triangoli per i casi che presenteremo da qui in avanti.

Test2-17 - A questo punto ci era poco chiaro quanto degli effetti e dei risultati finora ottenuti fosse dovuto ad una errata approssimazione fisica o piuttosto a limiti interni al metodo stesso. Abbiamo quindi generato nuovamente l'insieme di sismogrammi considerando diversi modelli rottura, nel senso di diverse distribuzioni di rilascio di momento sismico scalare. In particolare per questa inversione il modello diretto è stato generato considerando il modello di rottura Fkob3 ossia un rilascio di momento con fattore 50 in un'unica cella, così come è visibile in figura 5.3. In questo caso, la stf è sicuramente più vicina a

quella del modello di partenza così come il confronto delle forme d'onda è migliorato (fig. 5.15). Tale situazione è confermata anche dall'andamento dell'RMS (fig. 5.17).

Test2-18 - In questo test, gli accelerogrammi del modello di partenza sono stati calcolati assumendo che il modello di rottura avesse un'unico rilascio di momento concentrato nella cella che nel modello Fkob2 reca il numero 30. Si ritrovano gli stessi risultati che nel test precedente, così come è possibile osservare sia dalla stf (fig. 5.13) che dall'andamento dell'RMS.

Test2-19 - In questo test si assume che solo la cella più profonda con fattore 10 nel modello FKOB2 rilasci momento. Sebbene vi sia un'unica sorgente, le soluzioni della stf e dell'RMS mostrano un chiaro peggioramento rispetto alla situazioni precedenti.

Test2-20 - L'inversione è calcolata su un modello che considera il rilascio di momento alla cella in cui il fattore 10 si trova più in superficie nel modello Fkob2. La stf e l'RMS migliorano rispetto al test2-19, per quanto non si riporti ai valori del test2-17 o del test2-18, neppure per quel che riguarda l'RMS. Di questo caso riportiamo anche il fit delle forme d'onda rappresentato in fig. 5.18.

Test2-22 - I sismogrammi dell'insieme Fkob2.sis sono stati filtrati a 2hz. Il confronto delle forme d'onda è povero soprattutto per le stazioni più lontane, sebbene la stf possa considerarsi una buona approssimazione di quella del caso diretto (fig. 5.17, 5.18).

Test2-23 - Le inversioni sono state fatte considerando solo quattro stazioni, le più lontane, ossia le stazioni 1,3,4,6 (fig. 5.1). Anche in questo caso si osserva una buona riproduzione della stf e un buon andamento del RMS (fig. 5.17).

Test5-1 - Un tentativo di inversione è stato fatto anche sull'insieme di sismogrammi Fkob5.sis. Di questo test, riportiamo solo la stf che, come si vede, è ben lontana dall'essere riprodotta (fig.5.19).

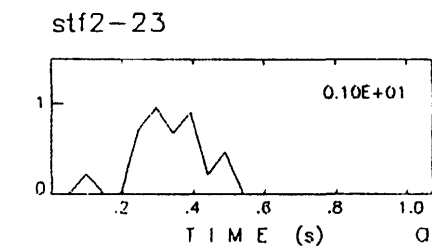
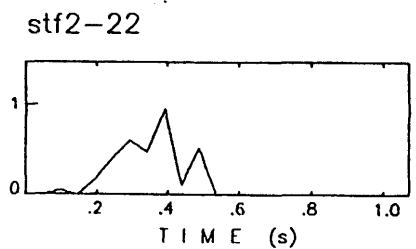
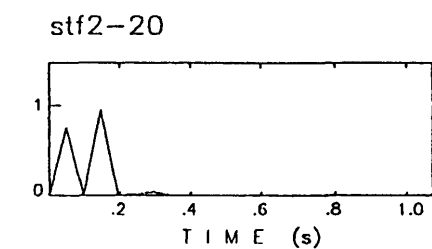
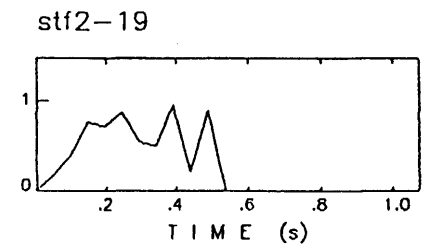
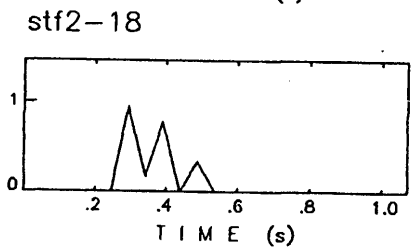
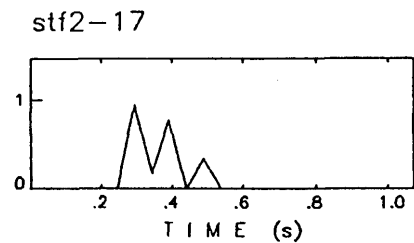
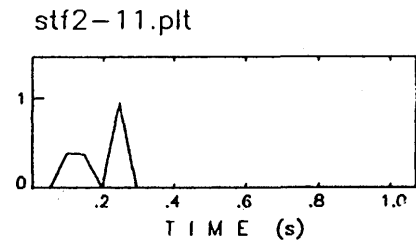
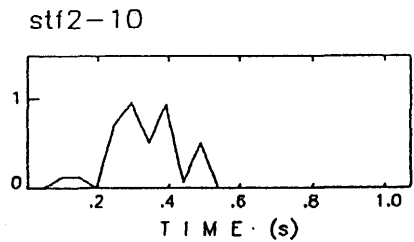
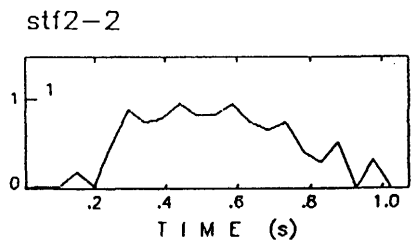
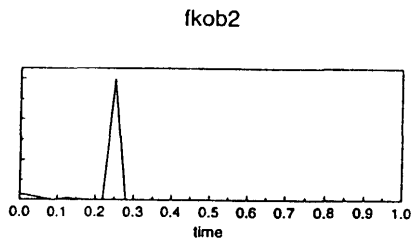
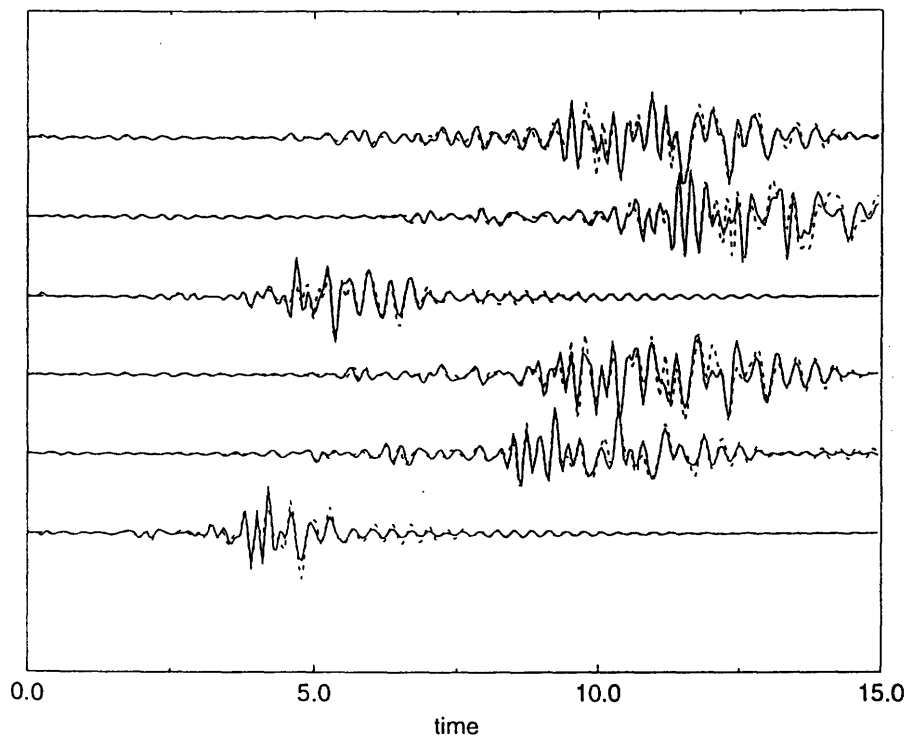


Fig.5.13 - Stf per i vari test 2 (vedi testo). La Fkob2 è la stf del modello diretto.

test2-2



test2-10

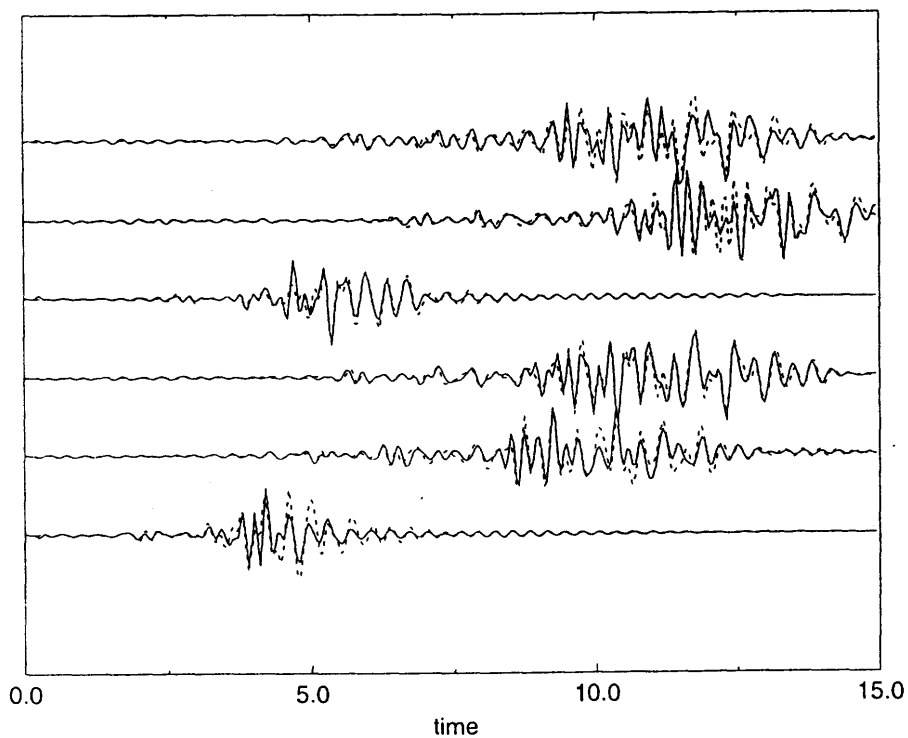
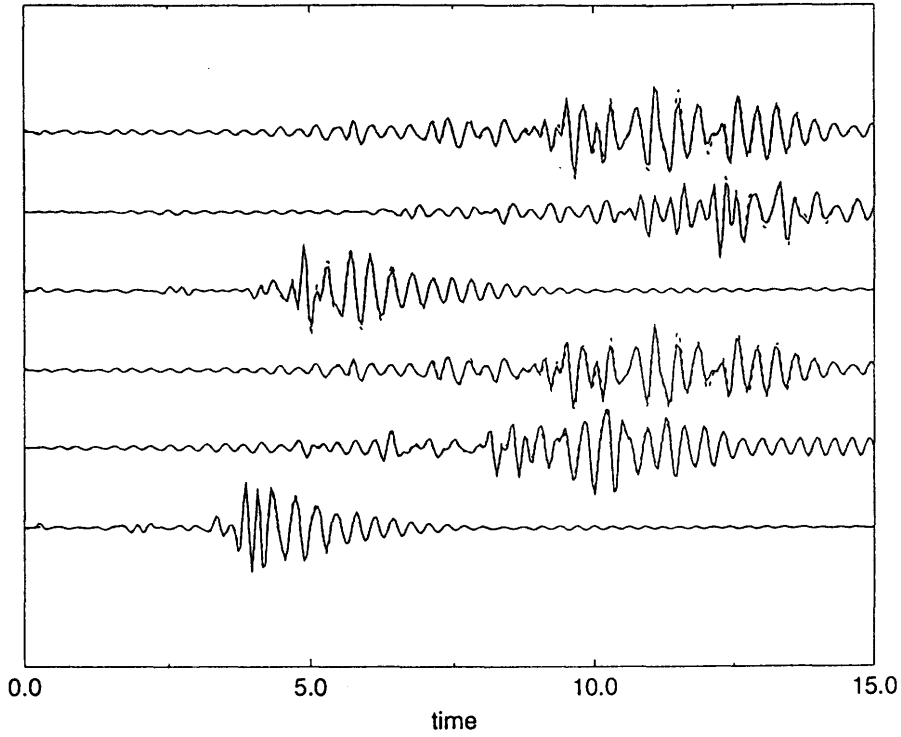


Fig. 5.14 - Confronto tra forme d'onda artificiali (linee tratteggiate) e quelle calcolate nel test 2-2 e test 2-10. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x è riportato il tempo in s.

test2-17



test2-11

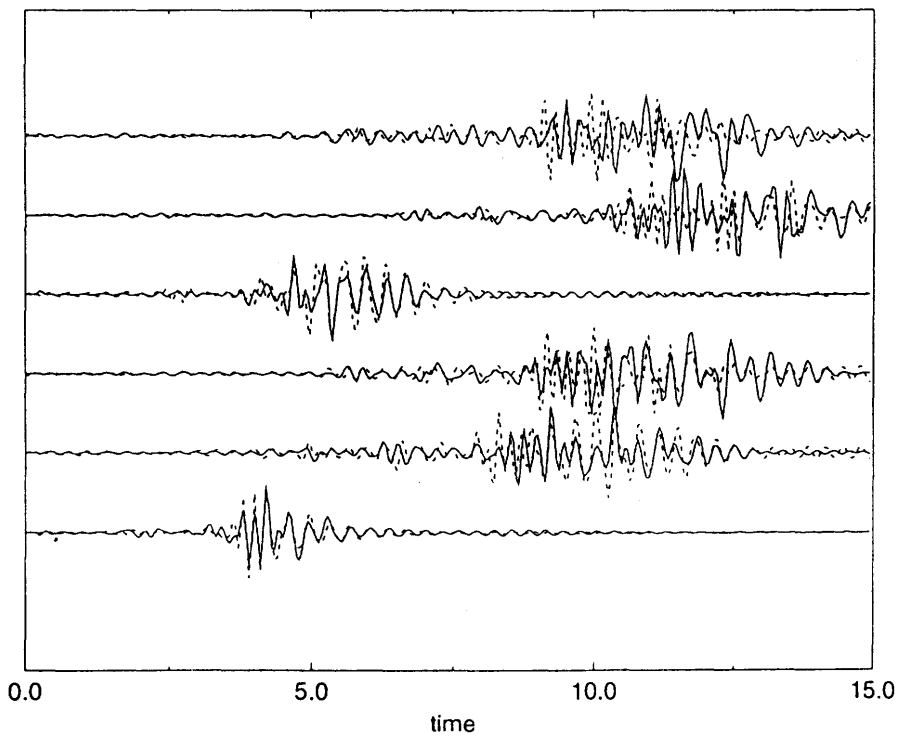


Fig. 5.15 - Confronto tra forme d'onda artificiali (linee tratteggiate) e quelle calcolate nel test 2-11 e test 2-17. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x è riportato il tempo in s.

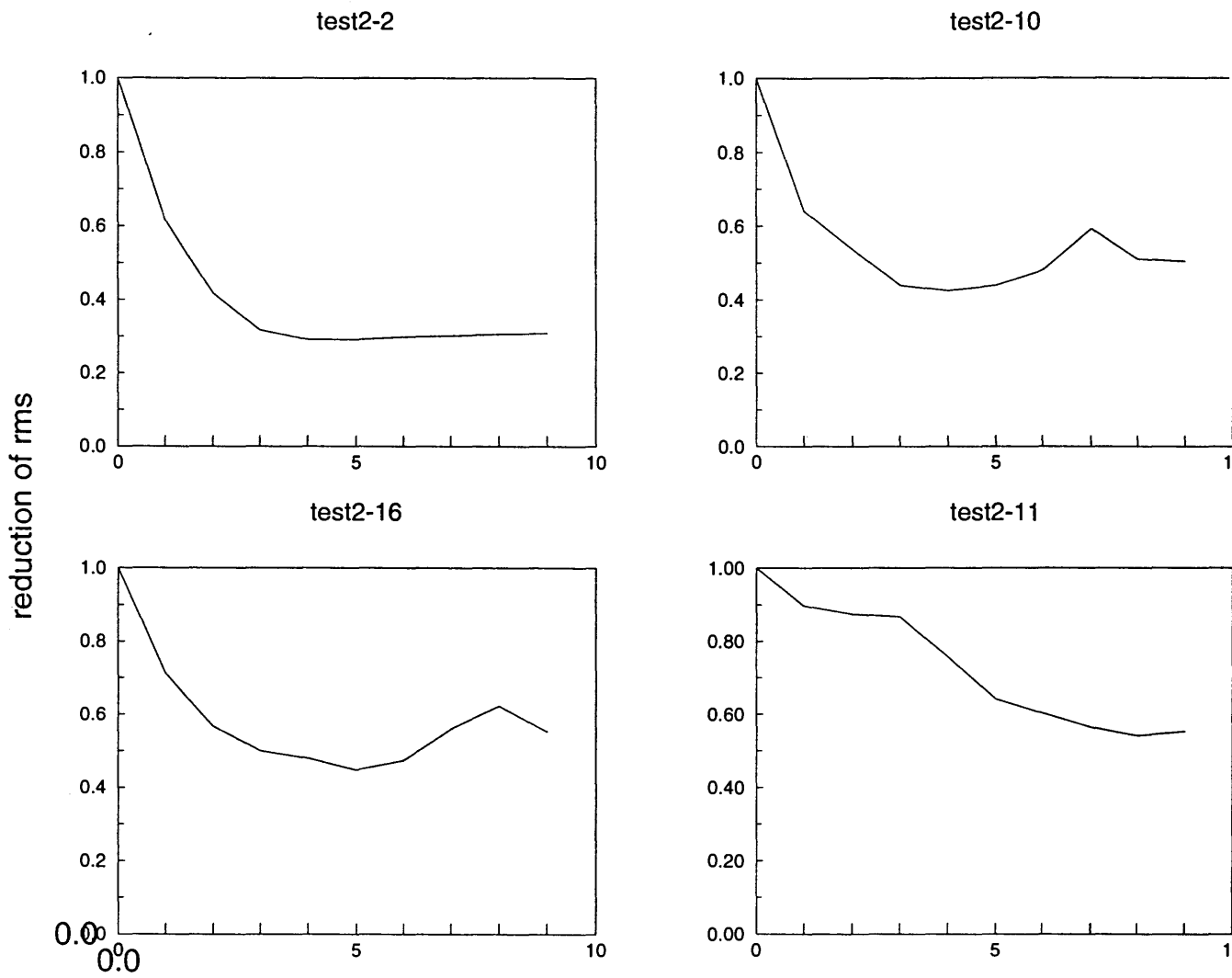
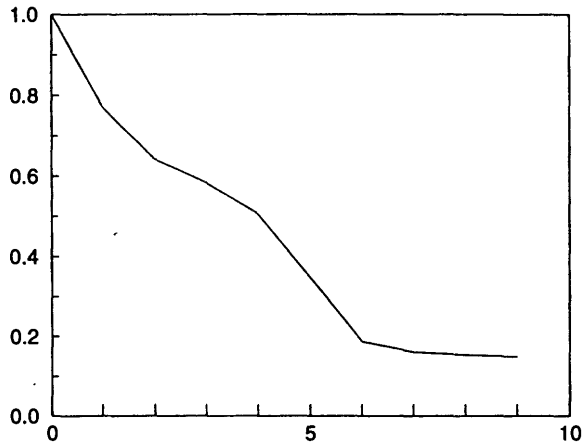
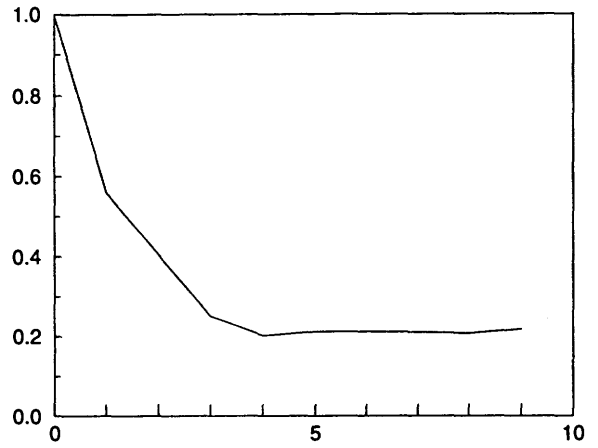


Fig. 5.16 - Rappresentazione della variazione dell'RMS (scarto quadratico medio) in funzione del numero di iterazioni.

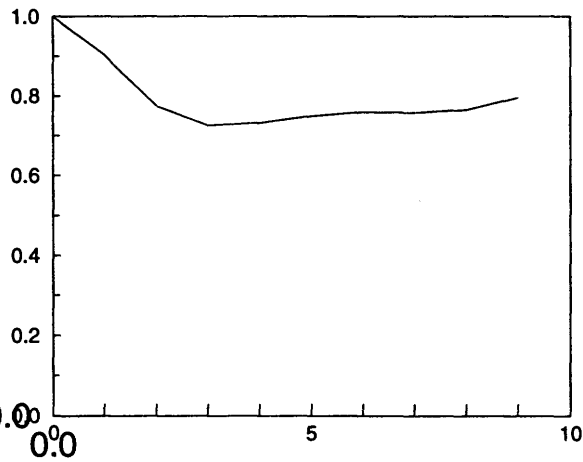
test2-17



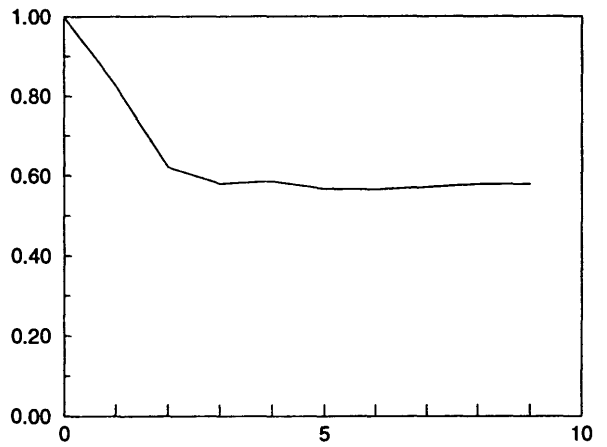
test2-18



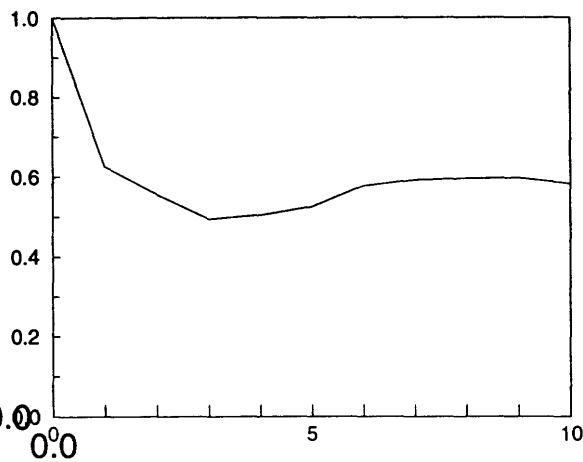
test2-19



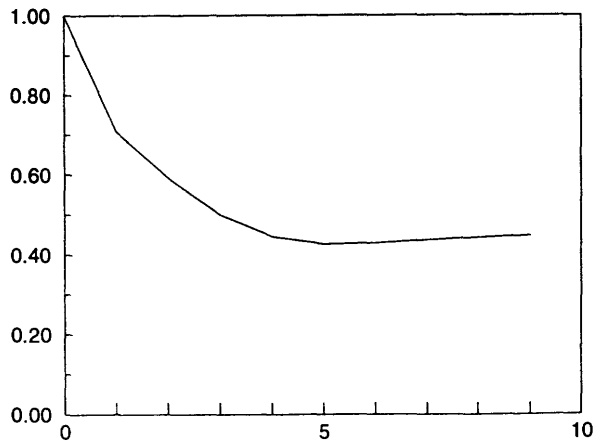
test2-20



test2-22



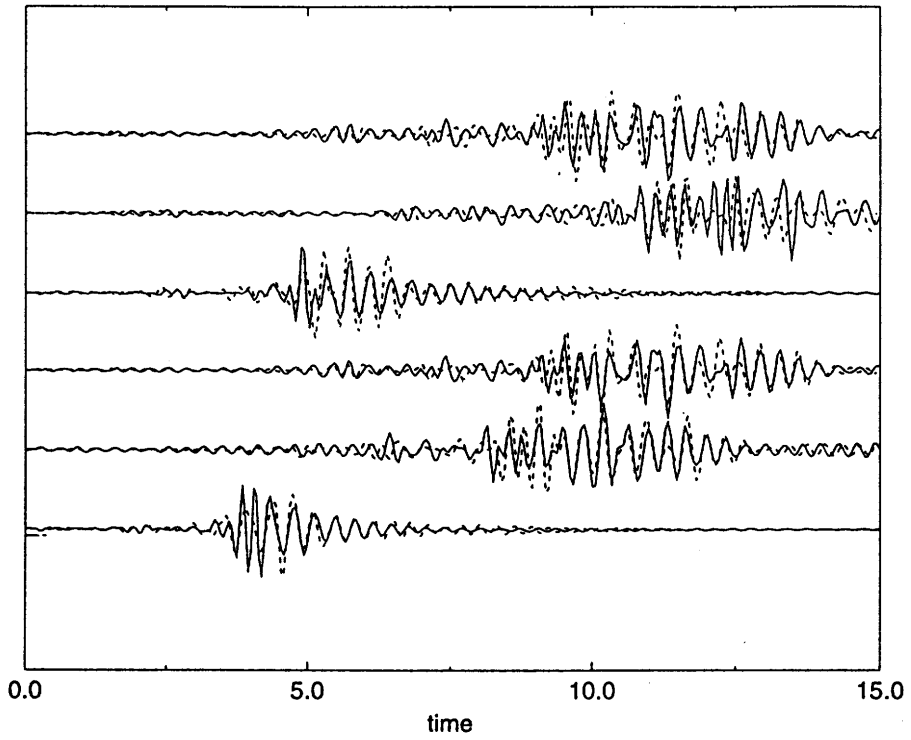
test2-23



number of iterations

Fig. 5.17 - Rappresentazione della variazione dell'RMS (scarto quadratico medio) in funzione del numero di iterazioni.

test2-20



test2-2hz

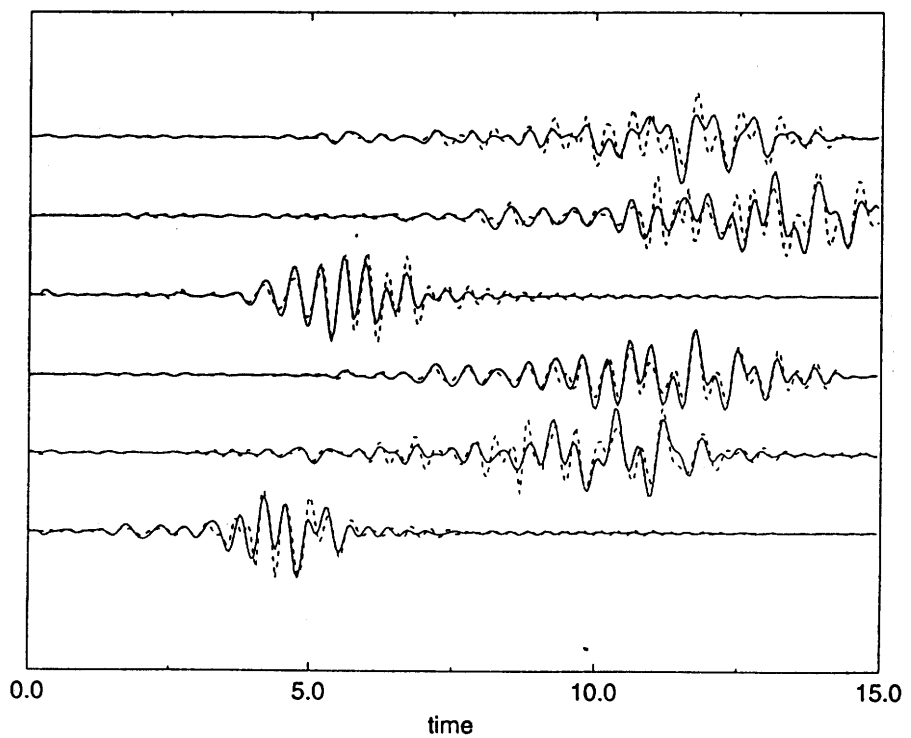


Fig. 5.18 - Confronto tra forme d'onda artificiali (linee tratteggiate) e quelle calcolate nel test 2-20 e test 2-2hz. Le ampiezze sono misurate in cm/s^2 . Sull'asse x è riportato il tempo in s.

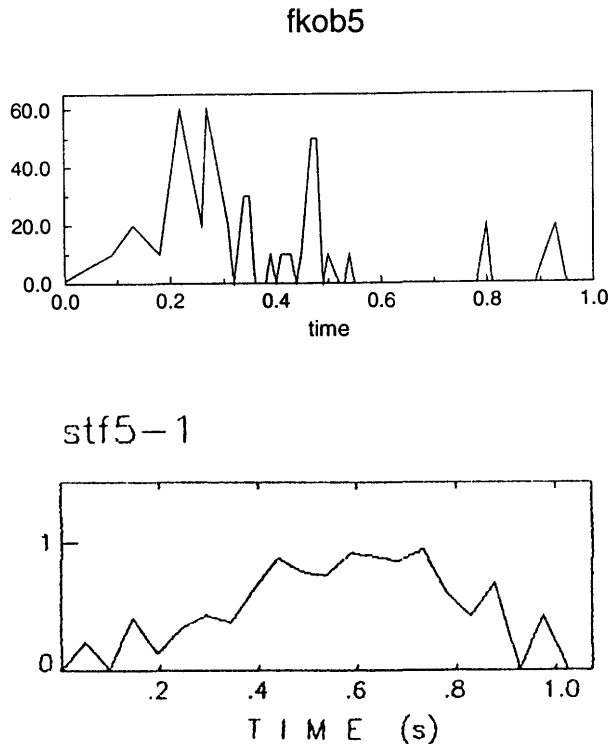


Fig. 5.19- Stf per il test 5-1

5.6 Discussione e conclusioni

Sulla base dei risultati fin qui ottenuti, sembrerebbe ovvio poter affermare che l'approssimazione di sorgente puntiforme dia scarsi risultati nel trattare la sorgente sismica a distanza regionale. Ossia che una sola funzione di Green non sia in grado di riprodurre le complessità della sorgente. Abbiamo infatti osservato come sia difficile poter riprodurre la stf dalla procedura di inversione ma anche come una buona riproduzione della stf non corrisponda ad un basso valore dell'RMS e quindi ad una buona rappresentazione delle forme d'onda.

Tuttavia, prima di poter fare delle affermazioni o interpretazioni fisiche su quanto ottenuto, bisogna stare molto attenti e spendere qualche parola sul metodo utilizzato per ottenere tali risultati e su quelli che sono i problemi legati ad un'inversione.

Il metodo di Mao et al., (1994) è stato di recente testato (l'analisi che in questo capitolo ho presentato risale al 1994) su altri casi per poter confermare la validità della procedura. Dal confronto con altre metodologie (Kravanja et al., 1997) sviluppate per l'inversione della sorgente puntiforme e che si basano

sull'inversione del tensore momento sismico completo (Sileny et al., 1991; 1992) è risultato che il metodo di Mao fornisce dei buoni risultati purchè i parametri fissati in ingresso per l'inversione non si discostino di molto dai parametri del modello finale. In tal senso la procedura sviluppata da Mao può essere usata per rifinire o rigettare le soluzioni ottenute col metodo di Sileny fornendo risultati davvero soddisfacenti

Nel metodo di Mao, si assume il vincolo a priori del "no back-slip" che probabilmente influisce sulla soluzione finale limitando il dimensionamento nello spazio all'interno del quale ricercare le soluzioni. Il metodo di Sileny non usa invece alcun vincolo a priori ed eventualmente solo in una seconda fase del problema impone la positività dello scorrimento. Ritorniamo pertanto al problema di cui abbiamo discusso nel Cap. 3, ovvero se sia giusto o meno imporre vincoli e per quali casi tale tipo di limitazioni dello spazio delle soluzioni possa continuare a fornirci buone soluzioni.

Sulla base di quanto detto, non ci sentiamo di poter dare delle conclusioni definitive sui risultati appena presentati. Piuttosto riteniamo che questo tipo di analisi vada continuata e integrata utilizzando altre metodologie di inversione, ad esempio quella di Sileny et al., (1992). Le soluzioni ottenute ci dicono qualcosa sui limiti dell'approssimazione di sorgente puntiforme nella trattazione, a distanza regionale, di terremoti di "medio-bassa" magnitudo.

CAPITOLO 6

Effetto della copertura azimutale nelle inversioni per sorgenti estese: analisi e risultati

6.1 Introduzione

Una ricostruzione dettagliata del processo di rottura tramite l'inversione di forme d'onda, dipende anche dalla disponibilità di sismogrammi di alta qualità, oltre che da tutti gli altri fattori discussi nei capitoli precedenti. Una distribuzione azimutale uniforme attorno alla faglia causale è ovviamente preferibile nella risoluzione di tali problemi. Tuttavia nella realtà la distribuzione di stazioni è spesso ben lontana dall'essere uniforme e pertanto riteniamo che uno studio che definisca le limitazioni dovute ad una copertura di stazioni non ottimale sia importante per valutare l'affidabilità delle soluzioni dei problemi di inversione. Spesso le distribuzioni non uniformi sono dovute a limitazioni di tipo tettonico, così come rappresentato schematicamente in fig. 6.1

In molte aree sismiche, come nella cintura circum-Pacifica, le stazioni sono poste soltanto sulla terra ferma e quindi da un lato rispetto alla faglia: indicheremo una configurazione di questo tipo, rappresentata in fig. 6.1(a), come Configurazione 1. In fig. 6.1(c-d) è rappresentato il caso in cui una faglia può giacere parte sulla terra e parte sottacqua. Denomineremo questo tipo di distribuzione di stazioni con Configurazione 3 e Configurazione 4. Esempi di stazioni che si trovano su un lato alla fine della faglia si trovano nel Mediterraneo (lo stretto di Messina o la penisola Iberica) o ancora in Israele (faglia di Yagur).

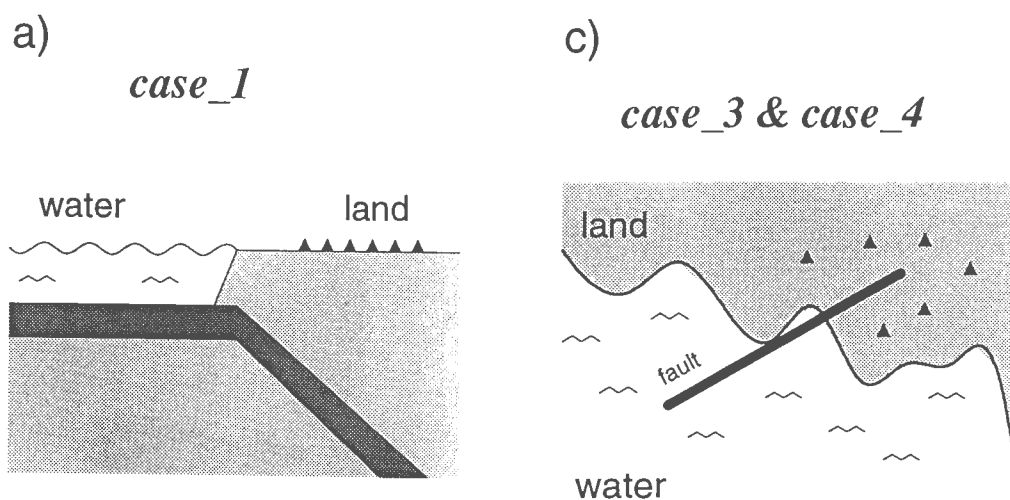


Fig.6.1 - Rappresentazione schematica di alcune situazioni tettoniche che limitano una uniforme distribuzione di stazioni.

La rottura, in tali casi, può iniziare sottacqua e propagarsi verso la direzione delle stazioni oppure può iniziare dal lato della terra e propagarsi sottacqua in direzione opposta a quella delle stazioni. Nelle due situazioni appena descritte, le onde convergono alle stazioni in maniera differente, e considereremo pertanto entrambe queste due possibilità riferendoci alla Configurazione 3 nel caso in cui la rottura si propaghi verso le stazioni e alla Configurazione 4 per il caso in cui la propagazione avviene in direzione opposta.

Riteniamo che i risultati del nostro studio possano rivelarsi importanti non solo ai fini di una valutazione dell'affidabilità della distribuzione del rilascio di momento ricavata da procedure di inversione per distribuzioni di stazioni non ottimali, ma anche a fini pratici legati ad esempio ai criteri di installazioni di stazioni mobili. Da questo tipo di analisi infatti si potranno trarre informazioni utili per la decisione di rapide installazioni di reti sismiche temporanee in

campagna, oltre che di reti sismiche a distanza regionale subito dopo alcuni terremoti in zone di particolare interesse.

Il problema della distribuzione non uniforme di stazioni è stato già trattato da altri autori. Con stazioni collocate a distanze regionali, Stump e Johnson (1977), utilizzando la procedura delle decomposizione del valore singolare (SVD), dimostrarono come almeno sei sismogrammi fossero necessari per vincolare le soluzioni del problema di inversione. Laddove meno di sei fossero le registrazioni disponibili, dovevano essere imposti dei vincoli fisici per trovare delle buone soluzioni. Un miglioramento nella stabilità delle soluzioni si otteneva nel caso in cui più componenti venissero usate per una stessa stazione. In tal caso il numero di stazioni in uso poteva essere ulteriormente ridotto.

Satake (1985), che utilizzò come procedura di inversione quella ai minimi quadrati, dimostrò che il valore del residuo medio varia significativamente con la combinazione del meccanismo di faglia e la distribuzione delle stazioni. Ciò può essere spiegato in termini della relazione geometrica esistente tra le forze presenti alla sorgente e le stazioni, e quindi in termini del diverso profilo di radiazione relativo alle diverse combinazioni. Nel suo studio viene evidenziata l'importanza della distribuzione azimutale uniforme delle stazioni a distanza telesismica come fattore essenziale per ottenere dei risultati realistici dalle inversioni del momento tensore. Huang (1985) studiò il problema dell'effetto di una non uniforme distribuzione azimutale nella determinazione dei meccanismi focali tramite inversione di forme d'onda. Egli provò che le soluzioni e le loro indeterminazioni su queste, sono molto sensibili sia alla distribuzione azimutale, peggiorando quando questa non è uniforme, sia al numero di registrazioni usate.

Olson e Anderson (1988) considerarono un problema molto sismile a quello che noi tratteremo in questa tesi. Essi risolvono il problema nel dominio delle frequenze e usano la condizione della minima norma, ma non usano i vincoli fisici che noi useremo in questa tesi. Considerano inoltre una faglia verticale di tipo "strike-slip" mentre noi, per in questa tesi ci limiteremo ad una faglia di tipo inverso. Steimberg et al. (1995) determinarono una particolare configurazione ottimale delle stazioni per migliorare l'accuratezza della collocazione ipocentrale sulle due faglie più grandi in Israele; poichè la collocazione ipocentrale ha importanti similarità con i problemi che stiamo considerando in questa tesi, anche i loro risultati si rivelano di interesse in questo contesto. Iida (1993) condusse un'analisi molto accurata sul potere risolutivo delle distribuzioni di stazioni per forti terremoti nelle procedure di inversione, ma senza l'utilizzo di

alcun vincolo fisico sulle soluzioni. È noto che tali soluzioni sono instabili (Kostrov, 1976; Kostrov e Das, 1988; Das e Kostrov, 1990; 1994) e recenti studi di Das e Suhadolc (1996) e Das, Suhadolc e Kostrov (1996) realizzati usando come dati artificiali accelerogrammi sintetici calcolati a distanze regionali, hanno dimostrato come tali vincoli siano necessari.

In questa tesi, studieremo gli effetti che una distribuzione non uniforme di stazioni ha nelle procedure di inversione per determinare la storia del rilascio spazio-temporale di momento sismico sopra la faglia. Useremo in tali inversioni vincoli fisici addizionali, quali ad esempio, la positività della velocità di scorrimento o un valore prefissato del momento sismico totale. Anche per questa analisi useremo accelerogrammi sintetici generati in stazioni poste a distanze regionali.

Il problema inverso è risolto con il metodo della programmazione lineare applicando l'algoritmo del Simplex (Cap. 4) e l'aggiunta di vincoli fisici. Tale metodo è stato sviluppato per questo tipo di problema da Das e Kostrov (1990, 1994).

Das e Suhadolc (1996) e Das et al. (1996) hanno mostrato come con un minimo di sei stazioni distribuite uniformemente attorno ad una faglia per la quale si consideri un modello di rottura di tipo Haskell, alcuni aspetti importanti del processo di rottura rimangono irrisolti anche nel caso di dati che non contengono alcun rumore.

In questo lavoro cominceremo con l'analizzare una prima serie di inversioni per una distribuzione uniforme di stazioni; quindi passeremo ad analizzare casi con distribuzioni di stazioni non uniformi. Considereremo il problema con e senza l'aggiunta di rumore random nelle forme d'onda. Studieremo poi il problema quando i dati artificiali sono calcolati usando delle griglie molto fitte per modellare la rottura sulla faglia e l'inversione è calcolata usando invece delle griglie molto più grossolane. Infine, considereremo l'inversione con un modello strutturale di velocità diverso rispetto a quello usato nel problema diretto.

6.2 Calcolo dei dati artificiali

Gli accelerogrammi sintetici che useremo nell'inversione sono stati calcolati secondo il metodo della somma multimodale (Cap. 2). Il problema diretto è calcolato considerando il modello di Haskell con una dislocazione che si propaga

unilateralmente sopra una faglia rettangolare avente velocità di rottura costante e pari al 70% della velocità delle onde S del modello strutturale adoperato.

In fig. 6.2 è rappresentata la geometria di faglia assieme ad uno schematico diagramma della propagazione della rottura. L'ipocentro è rappresentato da un asterisco.

La faglia, lunga 20 km e larga 4 km, è di tipo inverso (strike=0°, dip=30°, rake=90°) e il suo limite superiore si trova ad una profondità di 5 km.

Sulla base delle relazioni empiriche (5.3.1) e (5.3.2) presentate nel Cap. 5, ricaviamo che il nostro modello potrebbe ben simulare un terremoto di magnitudo 5.8 con un rilascio di momento sismico corrispondente a circa 10×10^{25} dyne cm.

Il modello strutturale adoperato in questo studio è rappresentato in fig. 6.3. In tale modello sono rappresentati i profili di velocità delle onde P e S al variare della profondità. In fig. 6.3b riportiamo i due modelli strutturali in dettaglio con i valori anche di densità, fattore di qualità, Q e rapporto V_p/V_s .

Fault geometry

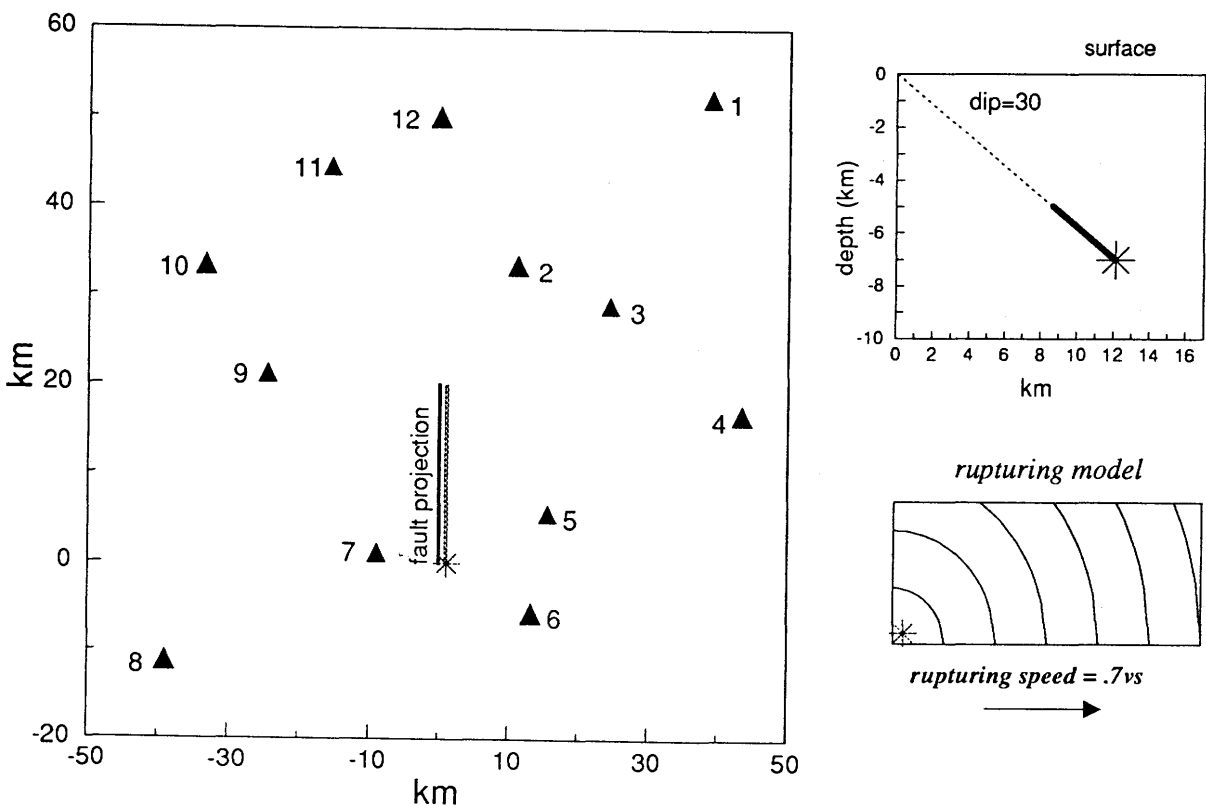


Fig. 6.2 - Geometria di faglia e distribuzione uniforme delle stazioni.

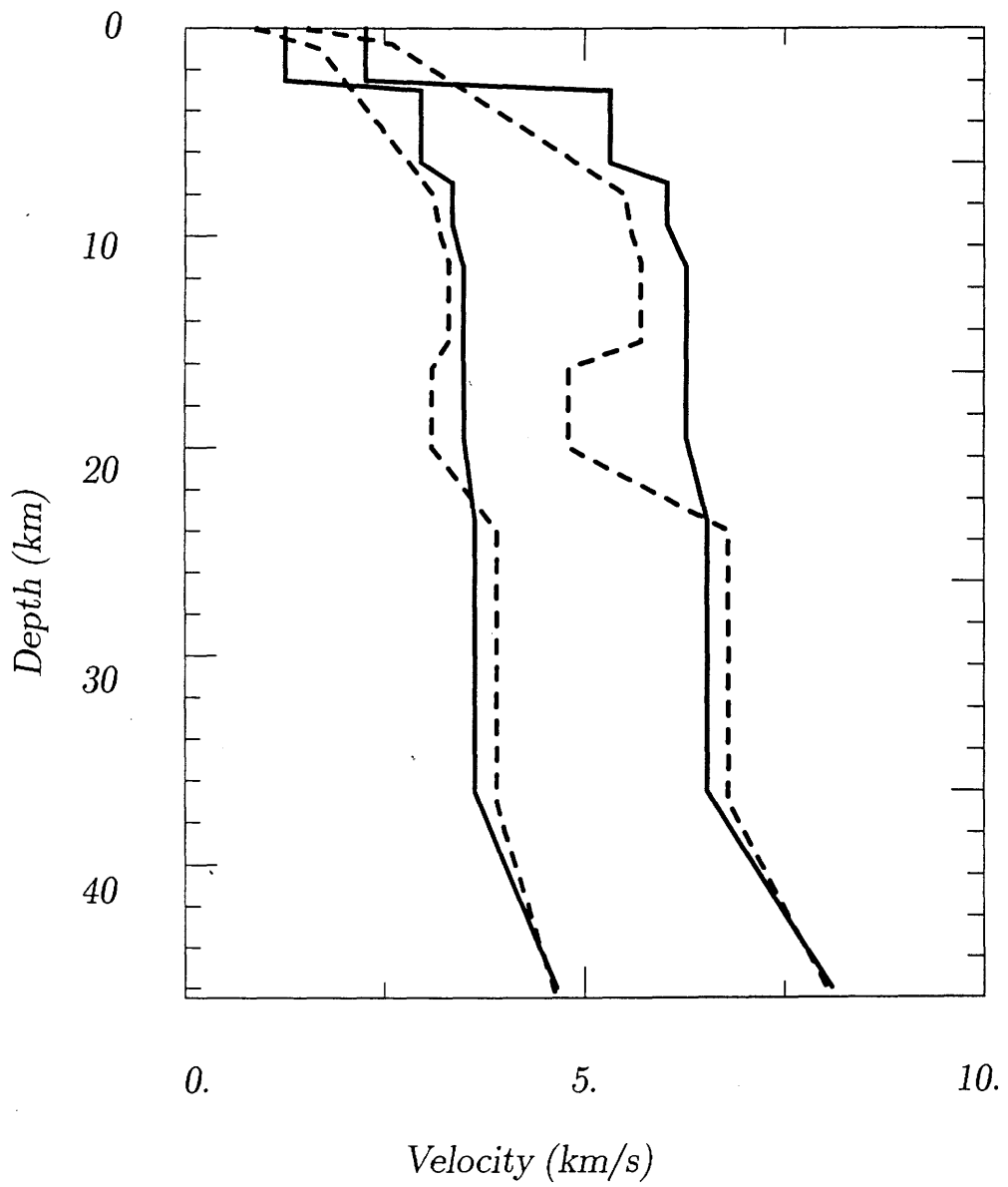
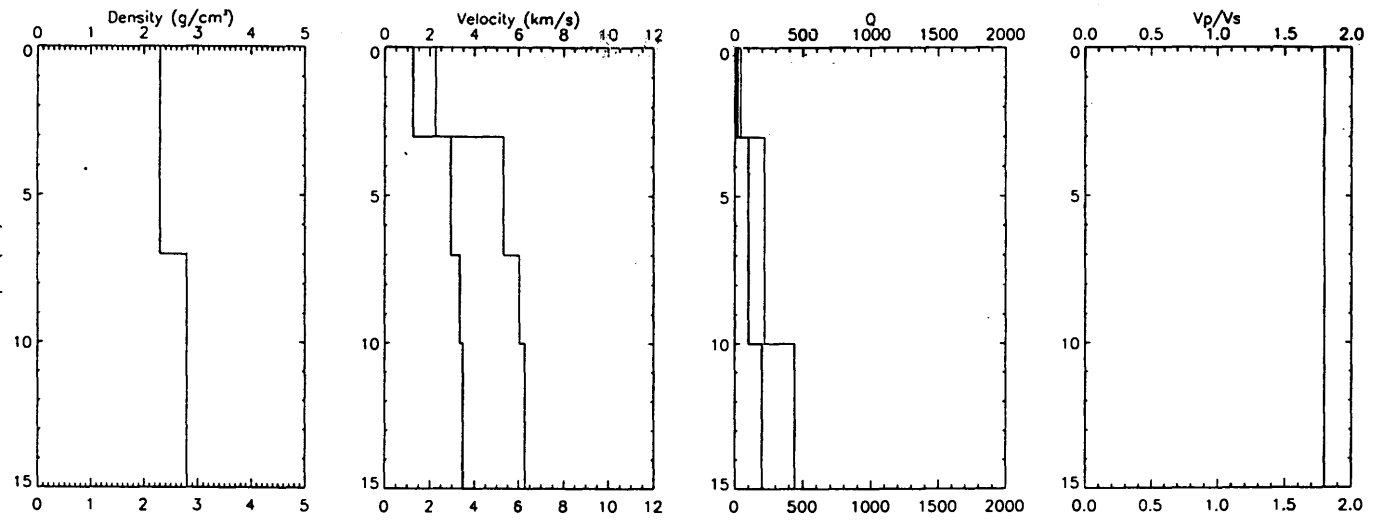


Fig.6.3 - Modello strutturale di velocità

M1



M2

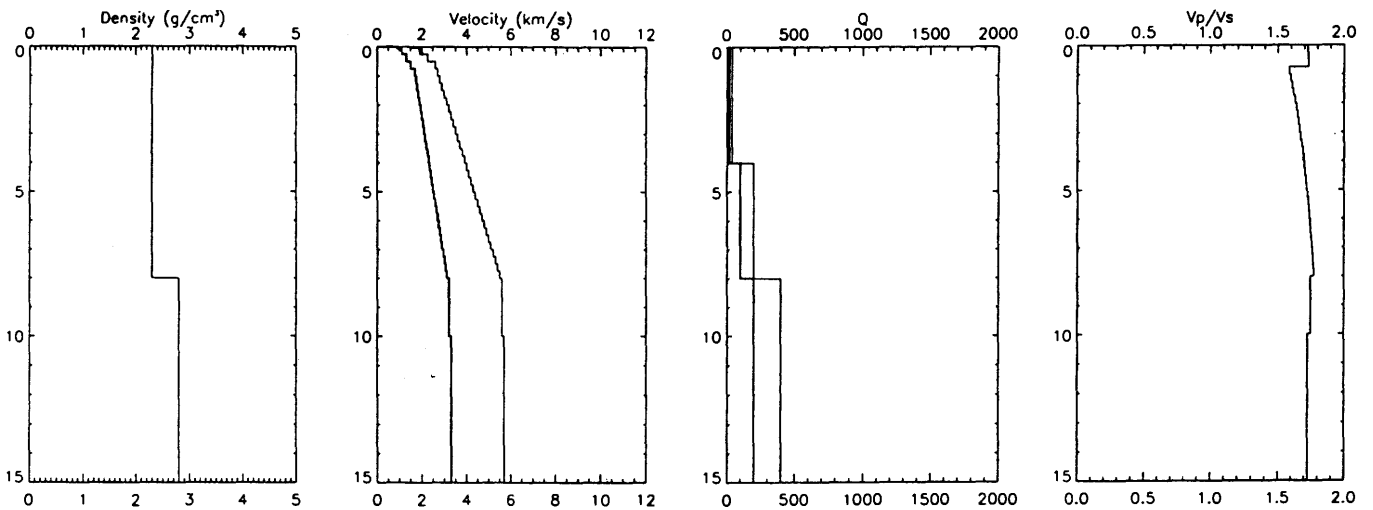


Fig.6.3b - Modelli strutturali in dettaglio.

Con riferimento alla fig. 6.3, rappresentiamo col tratto continuo il modello strutturale M1 che useremo sempre nei nostri casi, salvo diversa precisazione. Il modello tratteggiato è il modello strutturale M2 che verrà usato solo in alcuni casi per analizzare l'effetto di una incorretta struttura sui risultati dell'inversione. M2 ha un canale a bassa velocità che è assente in M1. I valori di Q nei due diversi modelli variano tra un minimo di 20 negli strati superficiali a 100 nei sedimenti profondi a 400 al di sotto di questi ultimi. Alle profondità di interesse per la faglia, il valore medio delle velocità delle onde P (v_p) è di 5.7 km/s, il valore medio per la velocità delle onde S (v_s) è di 3.3 km/s (alla profondità di 5 km, $v_p=5.32$ km/s, $v_s=2.96$ km/s; alla profondità di 9 km, $v_p=6.0$ km/s, $v_s=2.96$ km/s) e la lunghezza d'onda minima è pari a 1.2 km.

Le 12 stazioni, equamente distribuite in azimut attorno alla faglia, sono scelte in modo tale da non essere collocate in direzioni nodali. Le distanze sorgente ricevitore sono comprese tra 10 e 50 km. Sulla base di alcune situazioni reali (fig. 6.1) sei diverse distribuzioni non uniformi di stazioni sono prese in considerazione (fig. 6.4). Indicheremo le diverse distribuzioni con Configurazione 0, quella con le dodici stazioni equamente distribuite attorno alla faglia, Configurazione 1 quella con sei stazioni collocate sul tetto della faglia (per brevità d'ora in avanti "hanging wall"), Configurazione 2 quella con le sei stazioni poste sul letto di faglia (per brevità da qui in avanti "foot wall"), Configurazione 3 e Configurazione 6 quelle con nove e sei stazioni poste nella stessa direzione della propagazione della frattura, con Configurazione 4 e Configurazione 5 quella relativa alle quattro o alle sette stazioni poste in direzione opposta a quella di propagazione della rottura. Inizialmente l'analisi con le quattro stazioni è condotta solo in quella che si potrebbe ritenere come la direzione favorita per le inversioni, ossia per la Configurazione 4 (Iida et al., 1993). Per effetto di direttività infatti, in tale direzione non solo le ampiezze risulteranno smorzate rispetto alle forme d'onda registrate nella stessa direzione di propagazione del

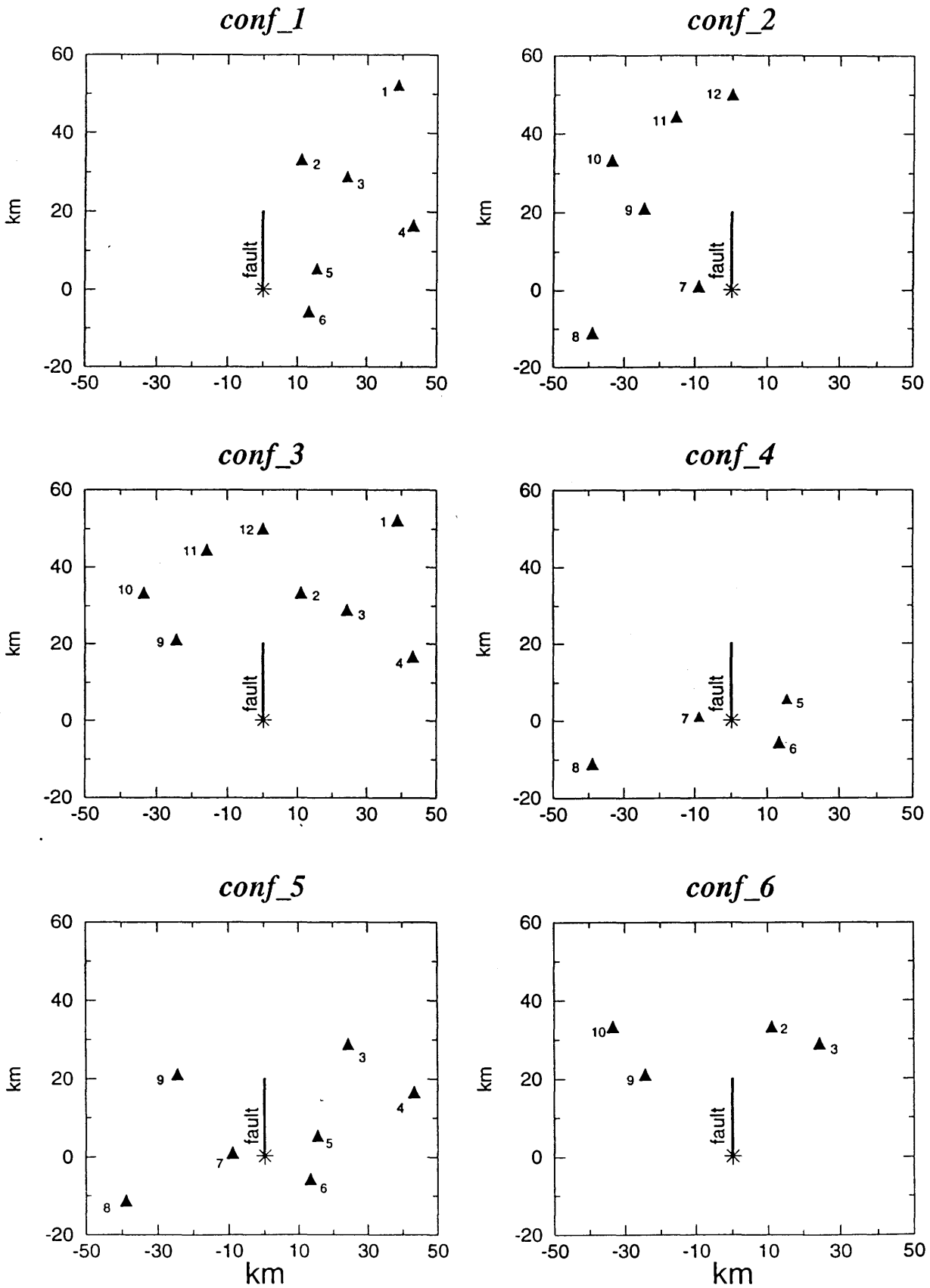


Fig.6.4 - Diverse distribuzioni di stazioni di stazioni utilizzate in questa analisi.

fronte di rottura, ma le alte frequenze sono attenuate, il che semplifica notevolmente la forma d'onda.

La faglia è discretizzata in celle quadrate di diverse dimensioni e il rilascio energetico nel tempo è discretizzato in intervalli finiti. Il momento sismico è rilasciato al centro di ogni cella al passaggio del fronte di rottura che attraversa le celle ognuna nel medesimo intervallo temporale. La quantità di momento sismico rilasciata è costante per ogni cella.

Il problema della scelta della dimensione delle celle che formano la griglia per modellare il piano di faglia, è un problema molto ben conosciuto e di cui abbiamo già discusso in precedenza nel Cap. 1 e nel Cap. 5. La regola empirica da seguire è generalmente che la dimensione della cella risulti molto minore della lunghezza d'onda di interesse nel problema. Più piccola è la griglia, migliore sarà l'approssimazione. In teoria la più piccola lunghezza d'onda dovrebbe essere campionata con almeno tre punti. Ad esempio Archuleta e Hartzell (1981) nella loro analisi sull'influenza degli effetti della finitezza della faglia sui forti spostamenti del terreno registrati nel campo vicino, utilizzarono sei punti per lunghezza d'onda ottenendo dei buoni risultati. Tuttavia, dipendendo dalla collocazione del ricevitore, molto più che sei punti per lunghezza d'onda possono essere necessari per una buona discretizzazione, soprattutto se il ricevitore è nella direzione di anti-strike (Verbanac e Suhadolc, 1996).

Una griglia troppo fitta può, d'altra parte, introdurre un notevole grado di instabilità sulle soluzioni del problema per fattori di malcondizionamento della matrice oltre a creare problemi pratici legati all'elevato tempo macchina richiesto dal calcolatore per portare a termine l'inversione.

Per questo studio, riteniamo che una misura accettabile della dimensione della griglia sia 0.250 km, ossia circa 1/5 della lunghezza d'onda minima del problema che è di 1.2 km.

Altri tre modelli di griglia con diverse dimensioni di cella vengono però presi in considerazione per analizzare l'effetto della discretizzazione nelle procedure di inversione, così come per analizzare la relazione tra il numero di stazioni e il numero di celle considerate per modellare la faglia. Considereremo celle quadrate di 2 km, 1km, e 0.5 km.

Degli accelerogrammi calcoliamo solo la componente verticale, fino ad una massima frequenza di 1 Hz.

I passi di campionamento temporale selezionati sono diversi per i vari casi, il che corrisponde ovviamente a scegliere un diverso numero di punti nella

trasformata discreta di Fourier. Ciò viene fatto compatibilmente con la dimensione di griglia e col teorema di campionamento (vedi appendice A). Quest'ultimo stabilisce che il più grande intervallo di campionamento scelto debba comunque contenere almeno due punti per ciclo, al fine di ridurre al minimo il numero di equazioni nella matrice $Ax=b$ senza per questo perdere in risoluzione nella forma d'onda.

Dopo aver calcolato i sismogrammi con l'opportuno passo di campionamento, sono state effettuate operazioni di filtraggio laddove, per incompatibilità con l'intervallo temporale del processo di rottura tra un punto sorgente e l'altro, si richiedevano frequenze massime più basse di quelle ottenute dal primo calcolo degli accelerogrammi.

Nella Tabella 1 sono indicati i valori degli intervalli di campionamento usati per ogni caso. Vengono nell'ordine riportati: la dimensione di cella (D), il numero di celle per ogni modello di griglia (#c), il passo di campionamento della propagazione di frattura (ΔT), le relative frequenze di Nyquist (NF), il passo di campionamento usato per il sismogramma ($\Delta T'$), la corrispondente frequenza di Nyquist (NF') e il numero di punti usato per calcolare il sismogramma (#p).

TABELLA 1

D (km)	#c	ΔT (s)	NF (Hz)	$\Delta T'$ (s)	NF' (Hz)	#p
2	20	0.83	0.62	0.09	5.12	2048
2	20	0.83	0.62	0.49	1.01	404
2	20	0.83	0.62	0.49	1.02	409
2	20	0.83	0.62	0.39	1.28	512
1	80	0.43	1.16	0.39	1.28	512
0.5	320	0.21	2.33	0.39	1.28	512
0.25	1280	0.1	5.12	0.09	5.12	2048

In fig. 6.6 (a,b,c,d) riportiamo rispettivamente i sismogrammi ottenuti, per una griglia di 20 celle quadrate, con 2048, 512, 409 e 404 punti di campionamento, per mostrare come gli effetti legati ad un campionamento non adatto si manifestino sui sismogrammi. La geometria di stazione che per questi casi consideriamo è rappresentata in fig. 6.5 ed è leggermente diversa da quella mostrata in fig. 6.2 per quanto riguarda le stazioni 1 e 4. Inizialmente infatti avevamo scelto la

configurazione di fig. 6.5, ma in seguito abbiamo preferito condurre tutte le nostre analisi secondo la disposizione di figura 6.2 perchè la ritenevamo più adatta a darci un maggior numero di informazioni collegate agli effetti di un profilo di radiazione quanto più differente per le varie stazioni. Le stazioni 1 e 12 ci sembravano troppo vicine tra loro e la stazione 4 era probabilmente troppo vicina alla faglia. In ogni caso questo primo insieme di analisi è stato fatto secondo la configurazione che mostriamo in fig. 6.5 e su tale distribuzione uniforme di stazioni ci baseremo per i casi che descriveremo solo ed esclusivamente in questo paragrafo e nel paragrafo 6.3, dove discuteremo altre analisi preliminari.

I sismogrammi delle fig. 6.6 (a,b) risultano molto simili tra loro e sono stati calcolati usando il passo di campionamento con 2048 e 512 punti. Gli altri casi, quelli con 409 (fig. 6.6c) e 404 (fig. 6.6d) punti non hanno dato buoni risultati così come è possibile vedere dalla figura stessa: non solo molte delle informazioni della forma d'onda vengono perse ma cominciano a comparire effetti di contaminazione dello spettro (*aliasing*', vedi Appendice A). Ciò è facilmente spiegabile se si considera che con tale tipo di campionamento si è molto vicini al passo di campionamento massimo che per questo caso è di 0.5 s.

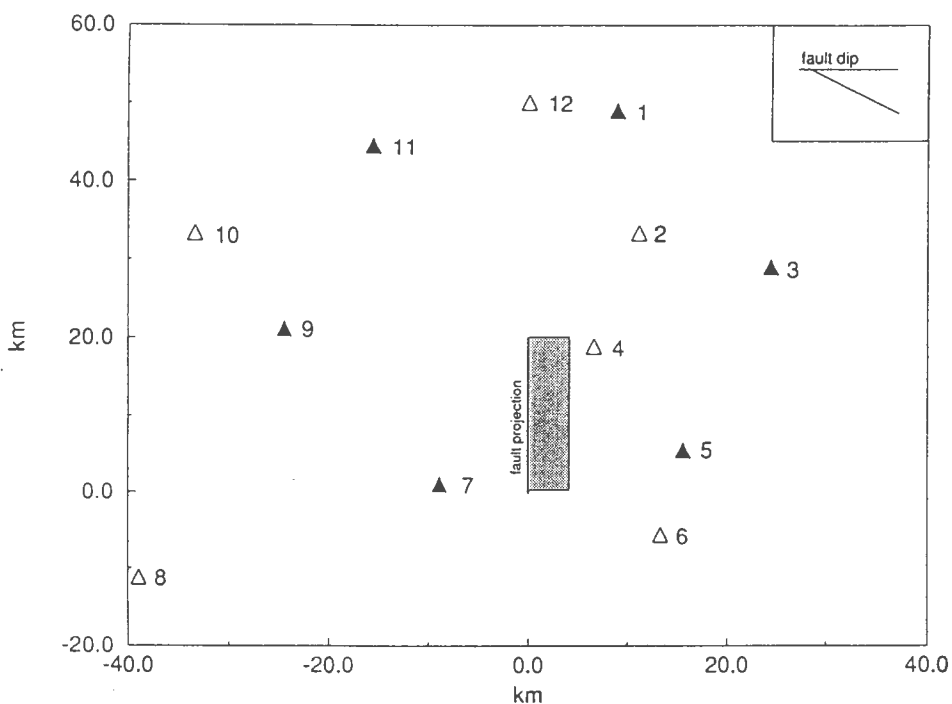


Fig. 6.5 - Distribuzione di stazioni utilizzata per le analisi preliminari presentate in questo paragrafo.

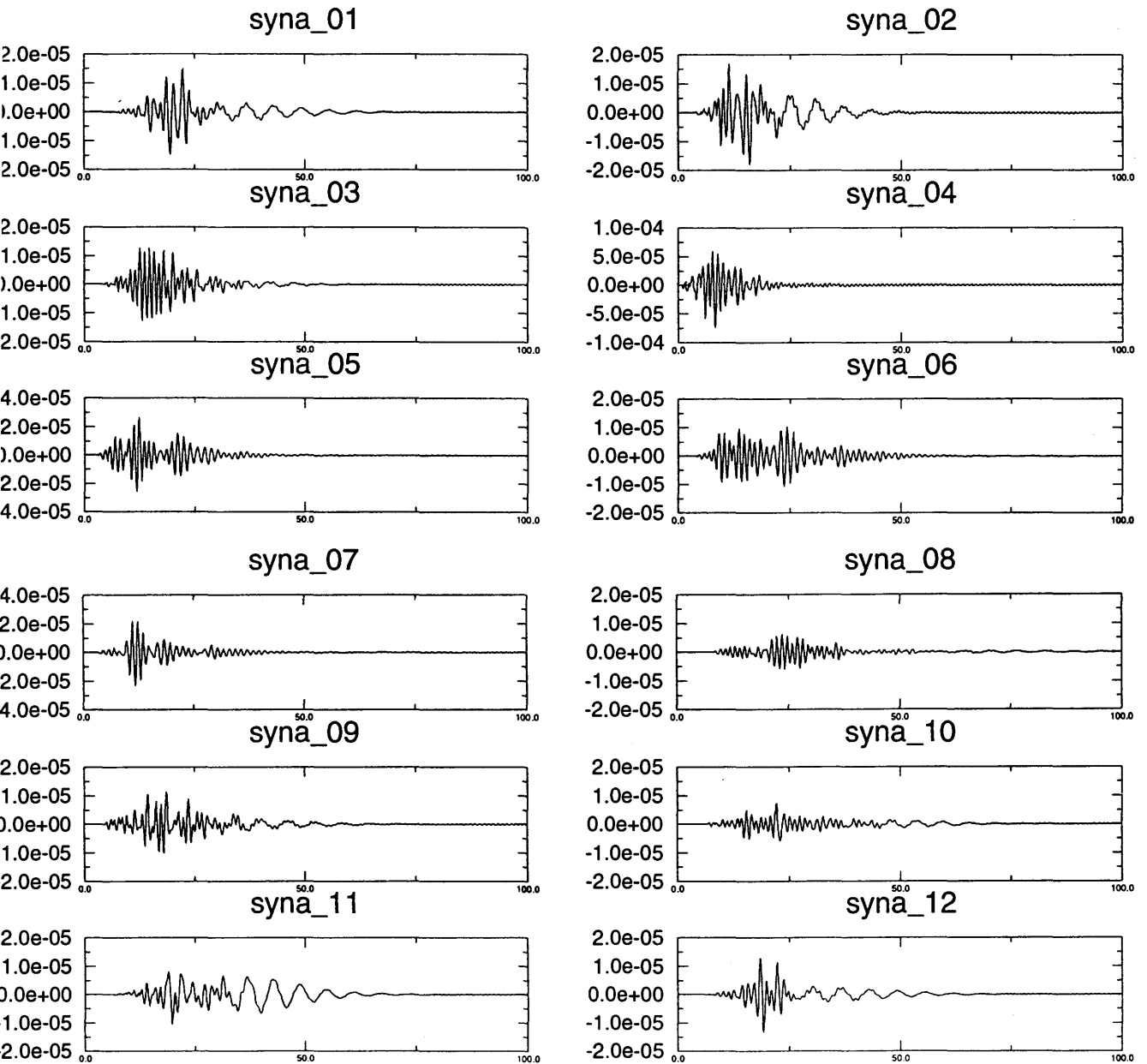


Fig. 6.6a - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 20 celle quadrate di 2 km di lato e un passo di campionamento di 0.0976 s (2048 punti). Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 , e relative ad un momento sismico di $10e25$ dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

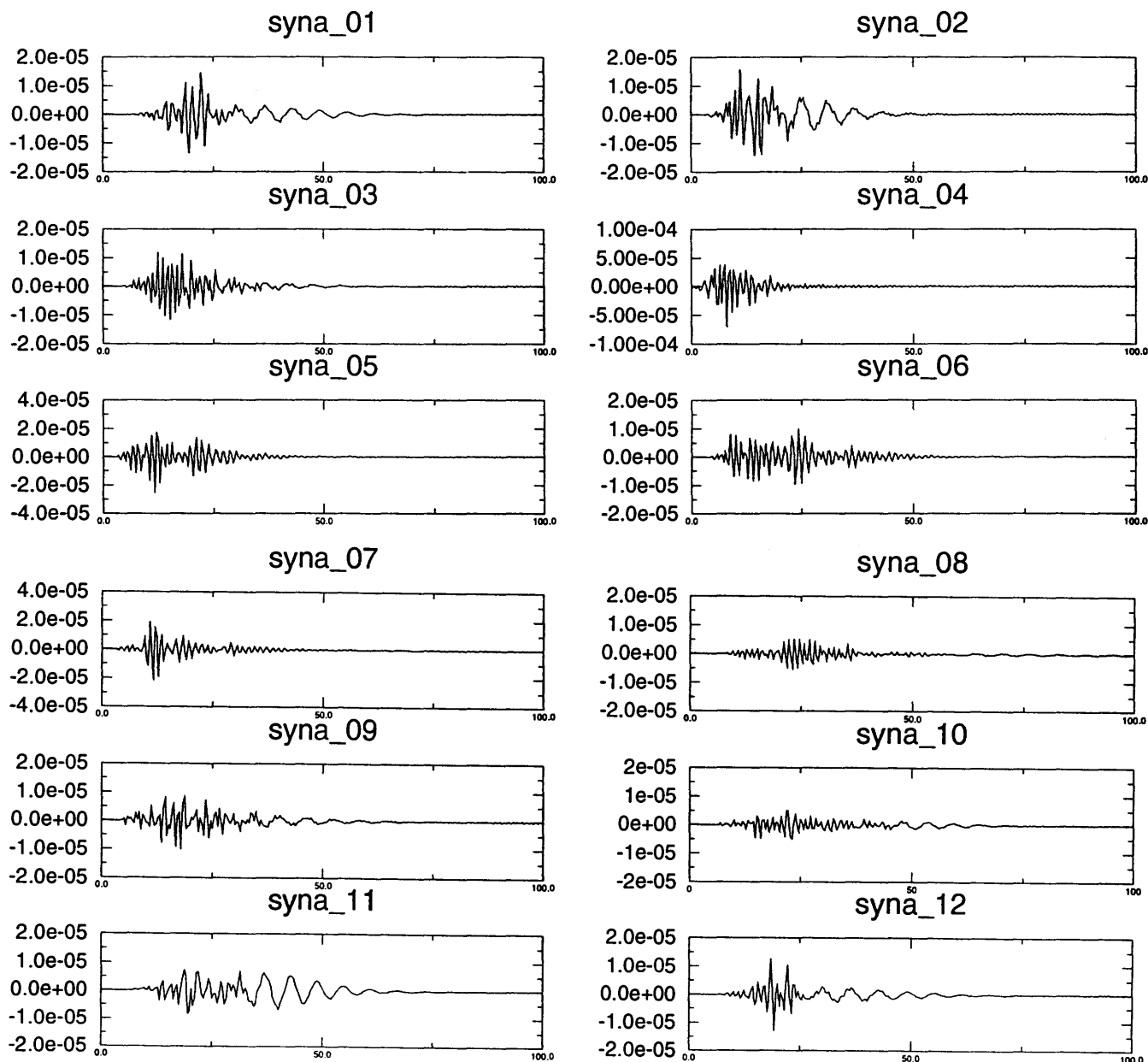


Fig. 6.6b - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 20 celle quadrate di 2 km di lato e un passo di campionamento di 0.3906 s (512 punti). Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 , e relative ad un momento sismico di 10^{25} dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

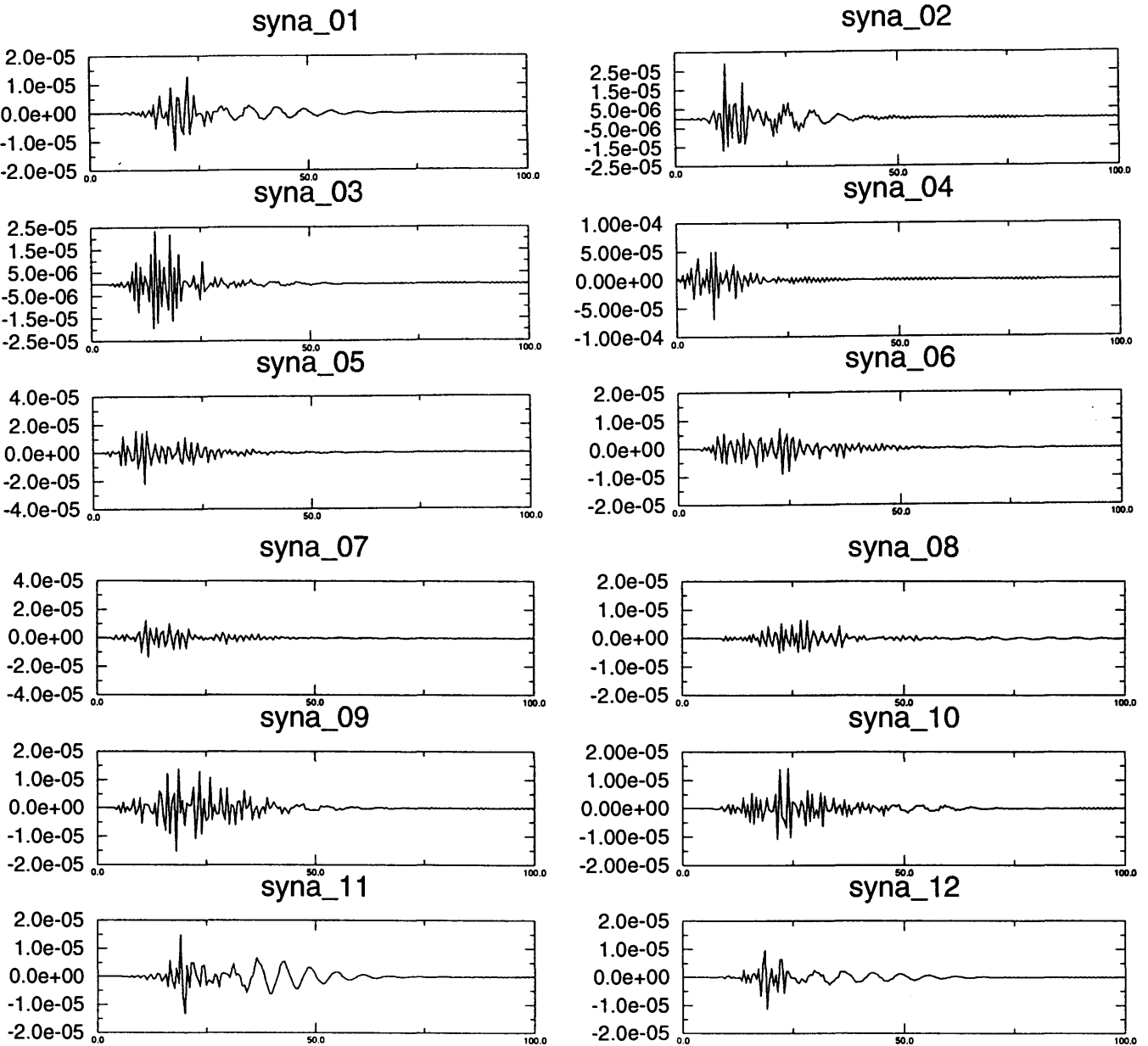


Fig. 6.6c - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 20 celle quadrate di 2 km di lato e un passo di campionamento di 0.4890 sec (409 punti). Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 e relative ad un momento sismico di $10e25$ dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

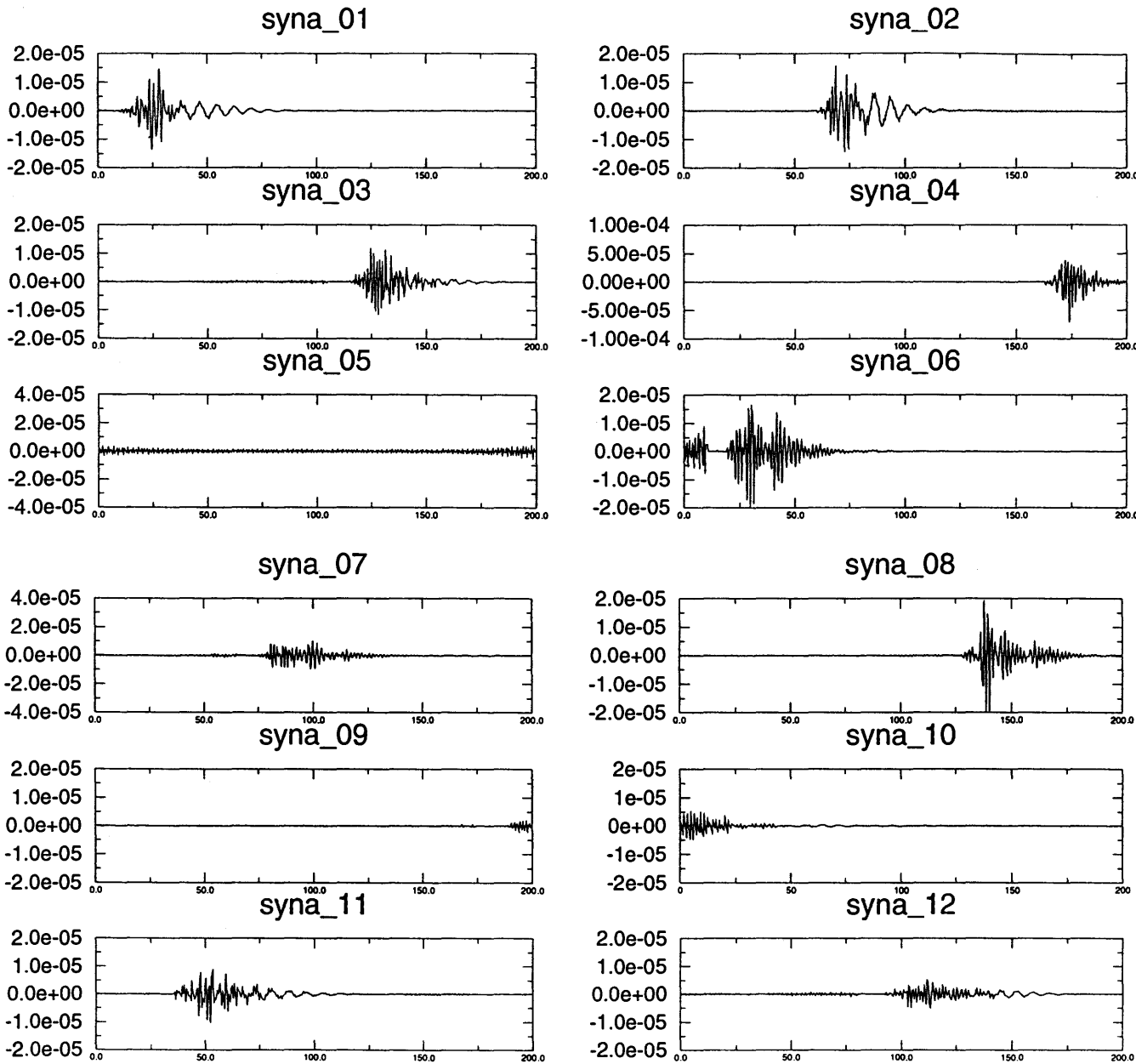


Fig. 6.6d - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 20 celle quadrate di 2 km di lato e un passo di campionamento di 0.4950 sec (404 punti). Le ampiezze sono espresse in cm/s², e relative ad un momento sismico di 10e25 dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi. Da notare come i fenomeni di contaminazione dello spettro dovuti alla campionatura non adatta (Appendice A) si manifestino sui sismogrammi.

6.3 Test preliminari

Abbiamo ritenuto opportuno iniziare la nostra analisi con una serie di prove tese a definire il buon funzionamento, da un punto di vista tecnico, dei programmi da noi adattati per questo tipo di studio e per verificare inoltre la correttezza della scelta del passo di campionamento per le forme d'onda e per il modello fisico che qui stiamo rappresentando.

Il test è stato condotto considerando la modellazione della superficie di faglia con una griglia di 20 celle quadrate di 2 km e inizialmente è stato scelto un passo di campionamento di 0.097656 s, corrispondente quindi a 2048 punti nella trasformata discreta di Fourier. La durata della funzione sorgente temporale è, per il nostro modello, 8.92 s e pertanto viene discretizzata in 91 intervalli temporali.

Al fine di limitare il numero di equazioni nel sistema $Ax=b$, solo la parte significativa degli accelerogrammi viene analizzata, e quindi solo 25 o 20 sc dei 200 s originari vengono considerati nell'inversione.

Su tutte le inversioni viene imposto a priori il vincolo di positività della velocità di scorrimento.

Caso_a : Questa prima prova di inversione è stata fatta per testare i programmi. Si considera la stessa velocità di rottura e lo stesso modello strutturale M1 del problema diretto (quest'ultimo non verrà cambiato neppure nei successivi test a meno di diversa specificazione). Ogni cella può scivolare una sola volta. Il numero delle equazioni è di 2700 e il numero di incognite è 20. Tutti gli aspetti delle soluzioni sono riprodotti. In Tabella 2 sono riportati tutti i valori di interesse per questo tipo di analisi, in cui il passo di campionamento è stato scelto molto piccolo.

In fig. 6.7 sono invece rappresentati i sismogrammi, il rilascio di momento sismico nel tempo, il momento sismico totale. Nel confronto tra i sismogrammi, quelli ottenuti come risultato dell'inversione sono leggermente spostati nel tempo, al fine di sottolineare la perfetta coincidenza tra dati artificiali e dati ottenuti dall'inversione.

Caso_b : In questo caso la velocità di propagazione della frattura è pari al 70% della velocità delle onde S, ma le celle possono scivolare più di una volta. Il numero delle incognite è di 919. Anche in tal caso tutti gli aspetti delle soluzioni sono riprodotti. Il valore del momento sismico totale non è stato fissato

a priori (fig.6.8). La linea tratteggiata, nella rappresentazione del rilascio di momento sismico, rappresenta il fronte di rottura nel caso diretto. La parte marcata con gli asterischi è invece la zona non causale e quindi non consentita al rilascio di momento sismico perchè oltre il fronte di rottura imposto nell'inversione. Le soluzioni sono stabili e il valore del misfit e della norma l_1 sono gli stessi come nel Caso_a.

Considerando lo stesso tipo di vincoli si procede all'inversione per distribuzioni di stazioni non uniformi (fig. 6.9). Le soluzioni riproducono per ogni tipo di configurazione i risultati di partenza e pertanto non vengono qui riportate.

TABELLA 2

Test	Vel. rot.	N° staz.	Stazioni usate	Equazioni	Incognite	Mom. Tot.	Misfits	l1
1	70% Vs	12	all	2700	20	0.19999	8.10 e-7	9.34 e-5
2_0	70% Vs	12	all	2700	919	0.19999	8.10 e-7	9.34 e-5
2_1	"	6	1,2,3,4,5,6	1300	"	0.19999	9.78 e-7	8.04 e-5
2_2	"	6	7,8,9,10,11,12	1400	"	0.19999	5.00 e-7	9.92 e-5
2_3	"	8	1,2,3,4,9,10,11,12	1750	"	0.19998	8.85 e-7	9.93 e-5
2_4	"	4	5,6,7,8	950	"	0.20009	8.20 e-7	9.98 e-5
3_0	100% Vs	12	all	2700	1199	0.1999	8.26 e-4	9.53 e-2
3_1	"	6	1,2,3,4,5,6	1300	"	0.2604	2.31 e-5	1.84 e-3
3_2	"	6	7,8,9,10,11,12	1400	"	0.2045	1.01 e-5	2.10 e-3
3_3	"	8	1,2,3,4,9,10,11,12	1750	"	0.2106	5.23 e-5	1.749
3_4	"	4	5,6,7,8	950	"	0.2103	6.29 e-6	7.66 e-4
3_5	"	1	8	250	"	0.226	3.55 e-7	9.33 e-4
3_6	"	1	1	200	"	0.270	6.54 e-7	9.97 e-5
4_0	100% vp	12	all	2700	1475	0.2204	6.63 e-5	7.64 e-3
4_1	"	6	1,2,3,4,5,6	1300	"	0.2155	5.31 e-5	4.22 e-3
4_2	"	6	7,8,9,10,11,12	1400	"	0.2157	2.22 e-5	4.41 e-3
4_3	"	8	1,2,3,4,9,10,11,12	1750	"	0.2174	6.74 e-5	7.56 e-3
4_4	"	4	5,6,7,8	950	"	0.2122	5.87 e-6	7.15 e-4

case_a

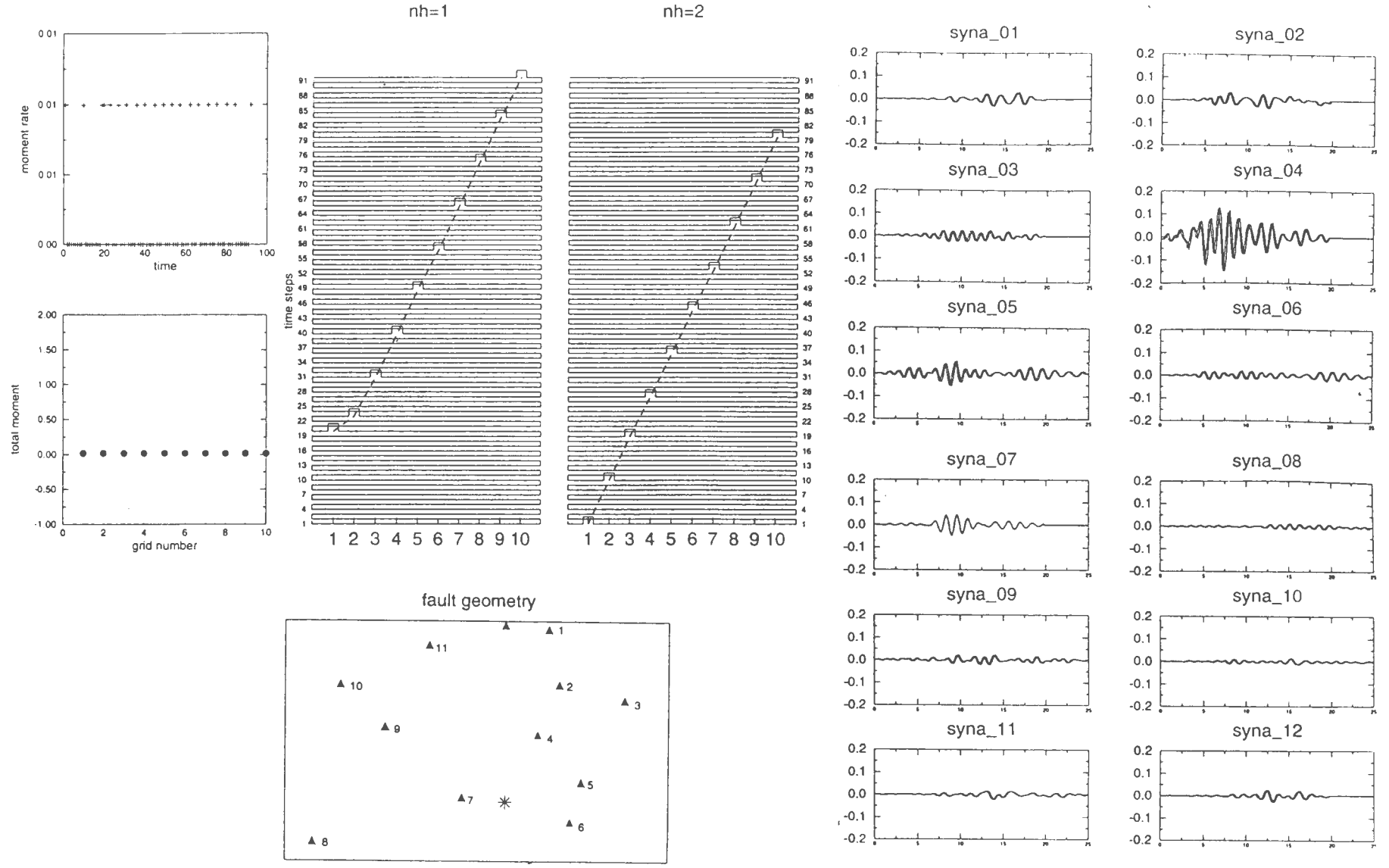
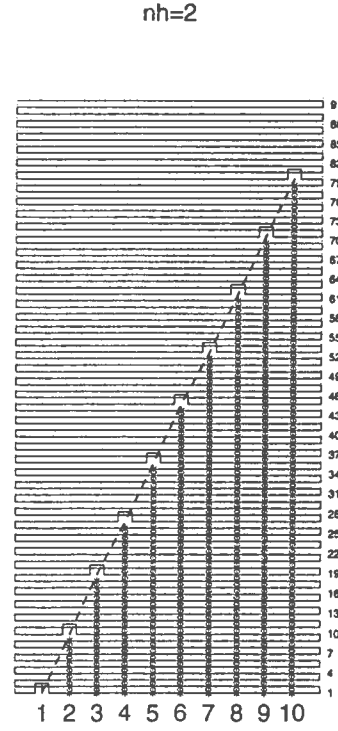
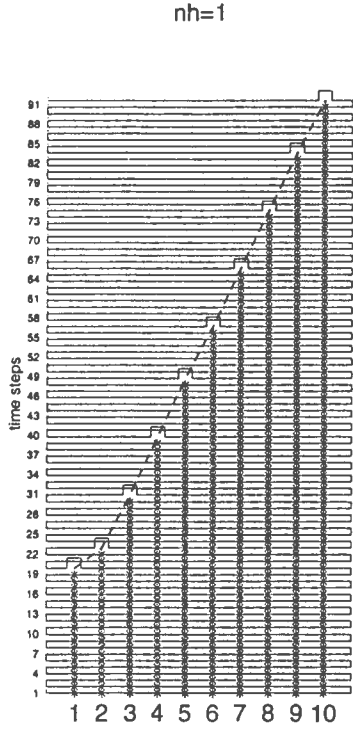
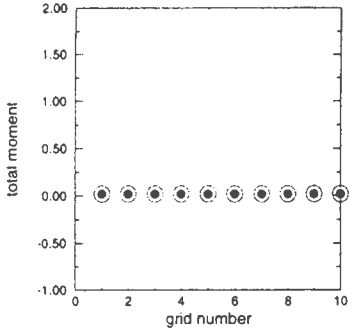
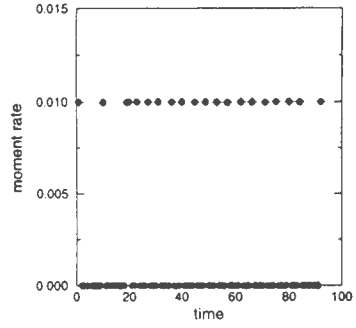


Fig. 6.7 - Risultati dell'inversione Caso_a

case_b0



fault geometry

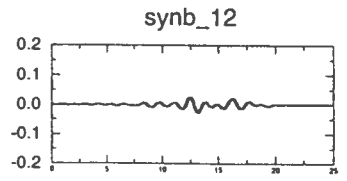
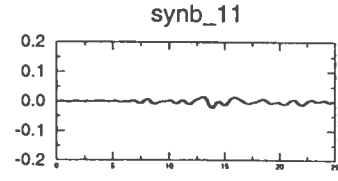
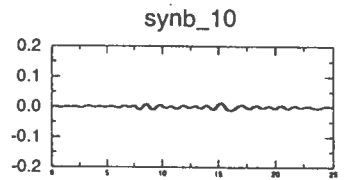
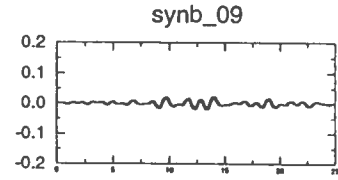
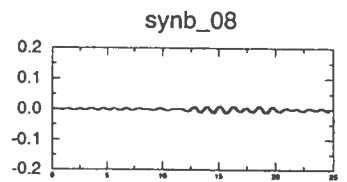
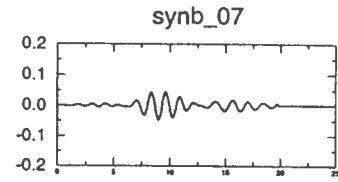
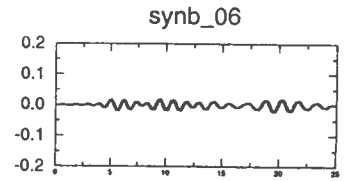
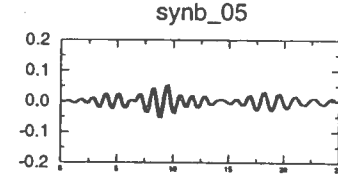
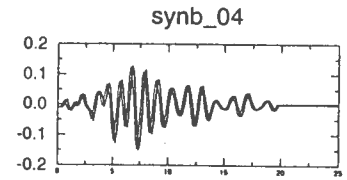
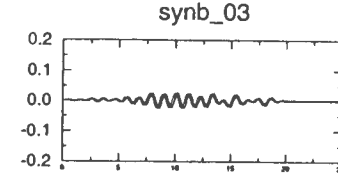
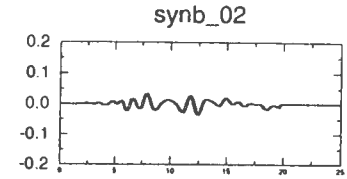
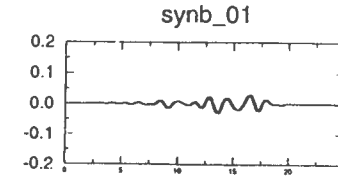
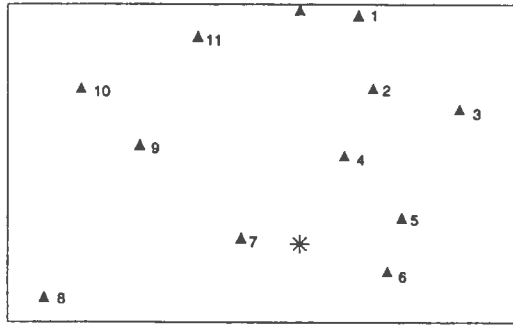
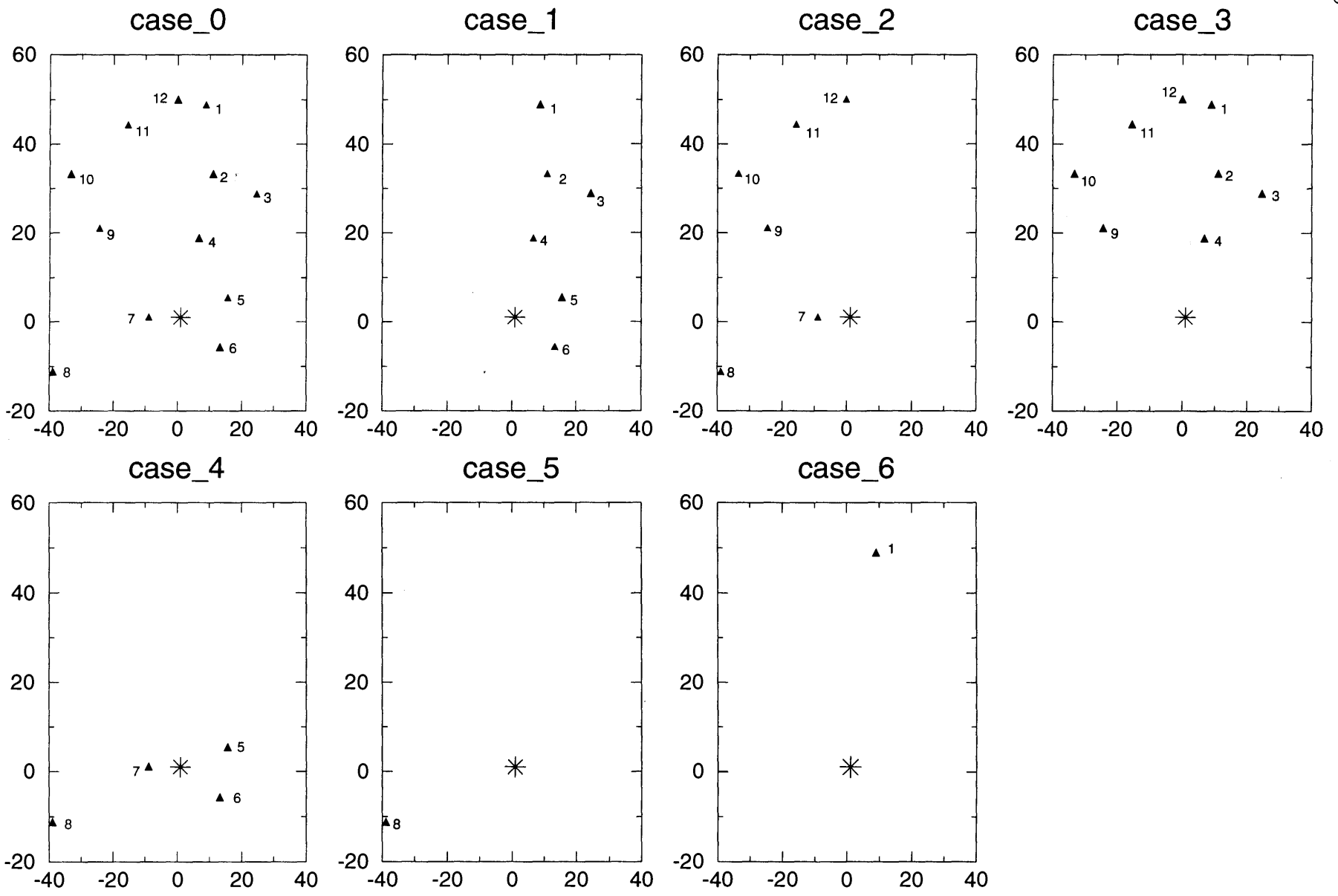


Fig. 6.9 - Distribuzioni di stazioni non uniformi usate nelle inversioni.



Le variazioni delle incertezze sulle soluzioni sono molto piccole rispetto al Caso *_a*. Relativamente a ciascuno dei casi analizzati riporteremo degli istogrammi rappresentanti la variazioni della norma l_1 per ognuna delle stazioni nelle varie distribuzioni non uniformi. Gli istogrammi relativi al Caso-*b*, sono mostrati in fig. 6.10.

Caso *_c* - In questo caso il vincolo è imposto sulla velocità del fronte di rottura che non può essere superiore al valore della velocità delle onde S (vincolo di causalità forte).

Sebbene tutti gli aspetti delle soluzioni non siano egualmente riprodotti, le differenze con i valori del caso diretto sono talmente piccole da potersi trascurare anche per test sintetici. Tutte le soluzioni sono riprodotte anche nel caso di distribuzioni non uniformi di stazioni. Le variazioni della norma l_1 alle differenti stazioni sono riportate in fig. 6.11.

Guardando ai risultati ottenuti e per avere la certezza che il metodo non fosse insensibile alla distribuzione di stazioni, due casi con solo una stazione sono stati analizzati e le soluzioni riportate in fig. 6.12 e fig. 6.13. Una sola stazione non è chiaramente in grado di vincolare le soluzioni del problema inverso.

Caso *_d* - Un vincolo di causalità debole è imposto sul fronte di propagazione della velocità di rottura, che deve essere minore o uguale al valore di velocità delle onde P. I risultati sono esattamente riprodotti anche per la distribuzione non uniforme di stazioni (fig. 6.14).

Case *_e* - Questo caso è stato calcolato senza alcun vincolo di causalità, ossia senza alcun limite al fronte di velocità di rottura. È possibile osservare che anche se le soluzioni di partenza sono riprodotte, si ha una certa perdita di stabilità nelle soluzioni per quel che riguarda il rilascio di momento sismico nel tempo (fig. 6.15). Per questo caso abbiamo considerato la sola inversione con 12 stazioni uniformemente distribuite.

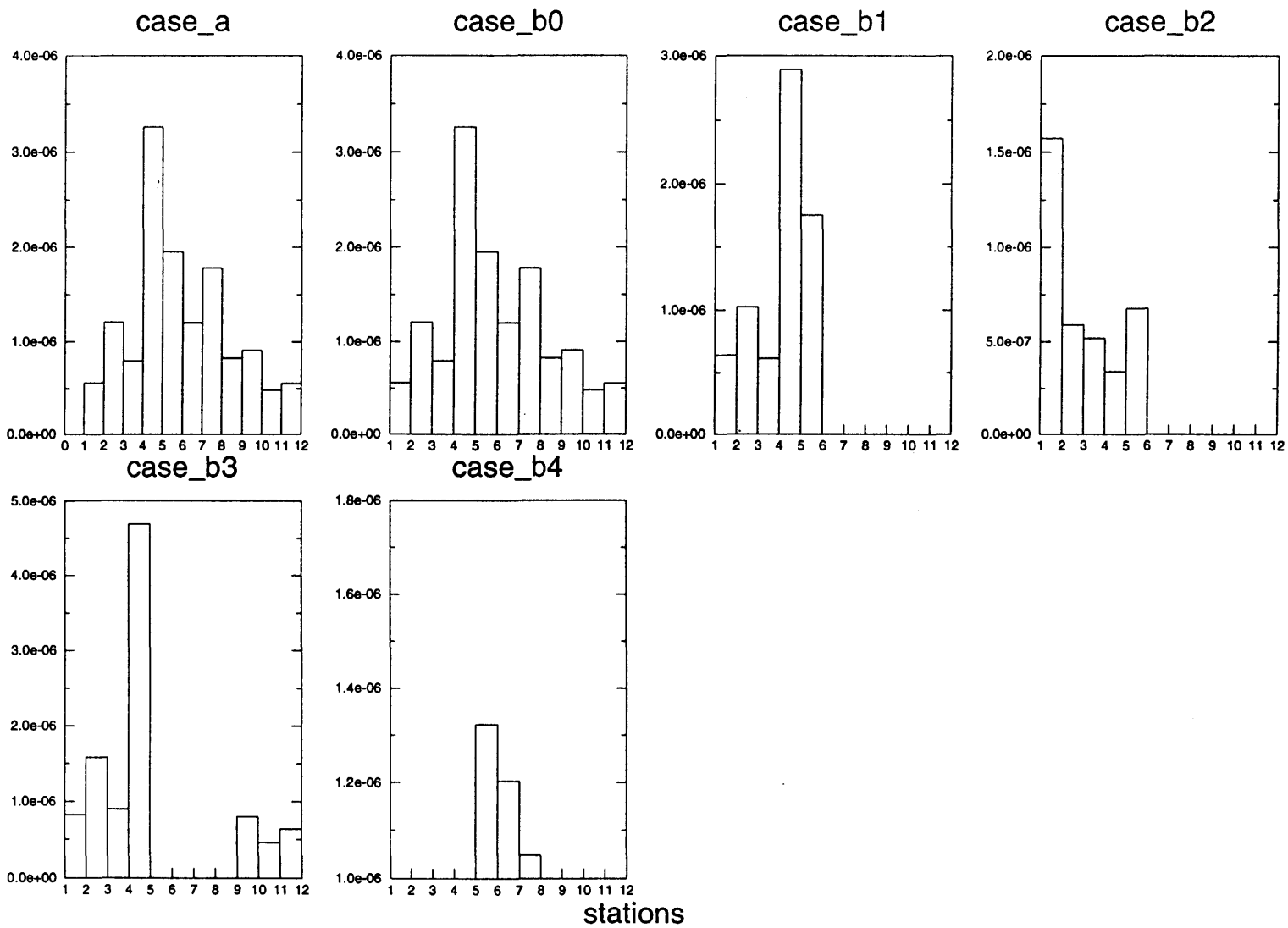


Fig. 6.10 - Rappresentazione della variazione della norma l_1 per ognuna delle stazioni nelle diverse configurazioni del Caso_b.

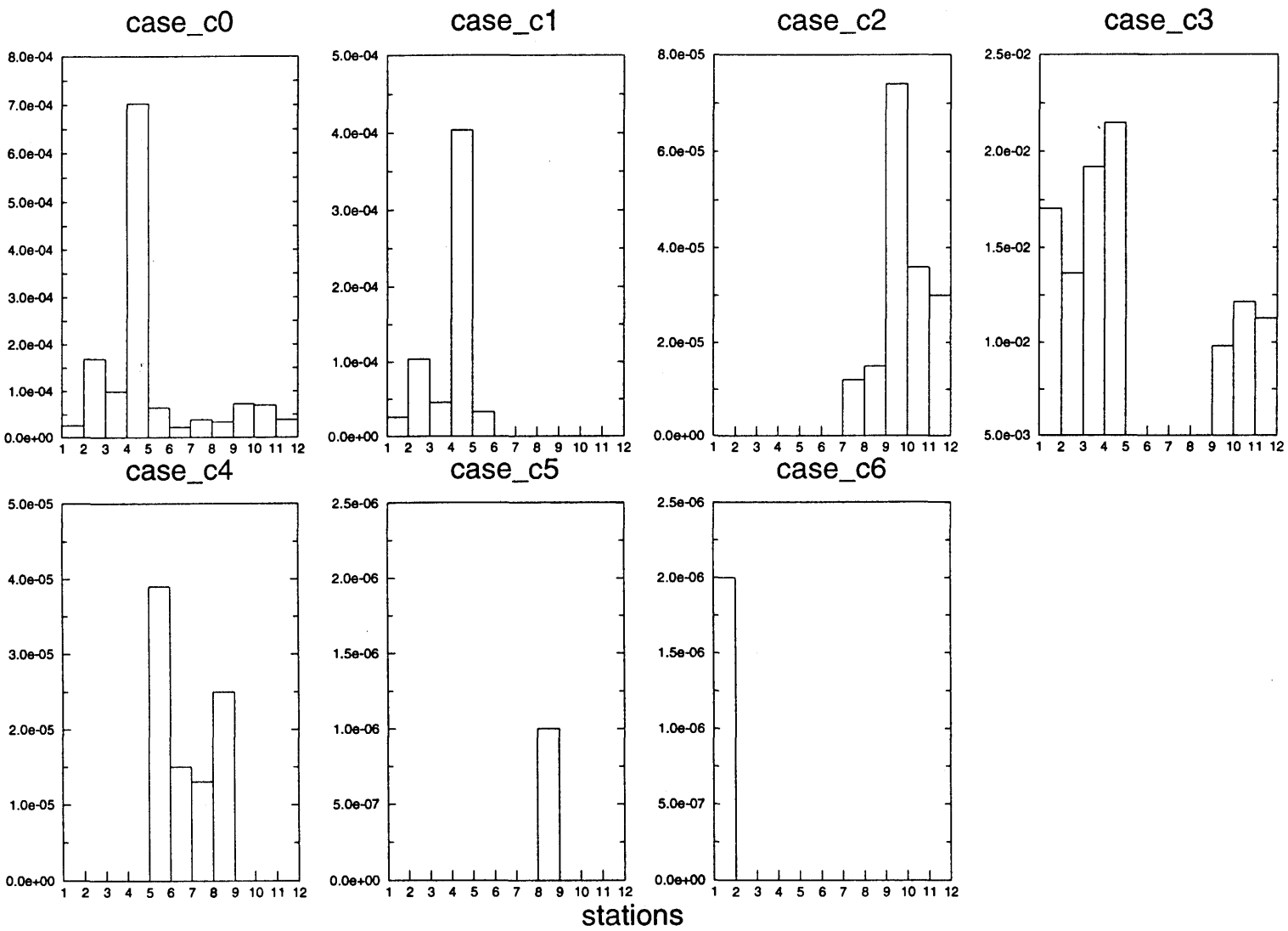
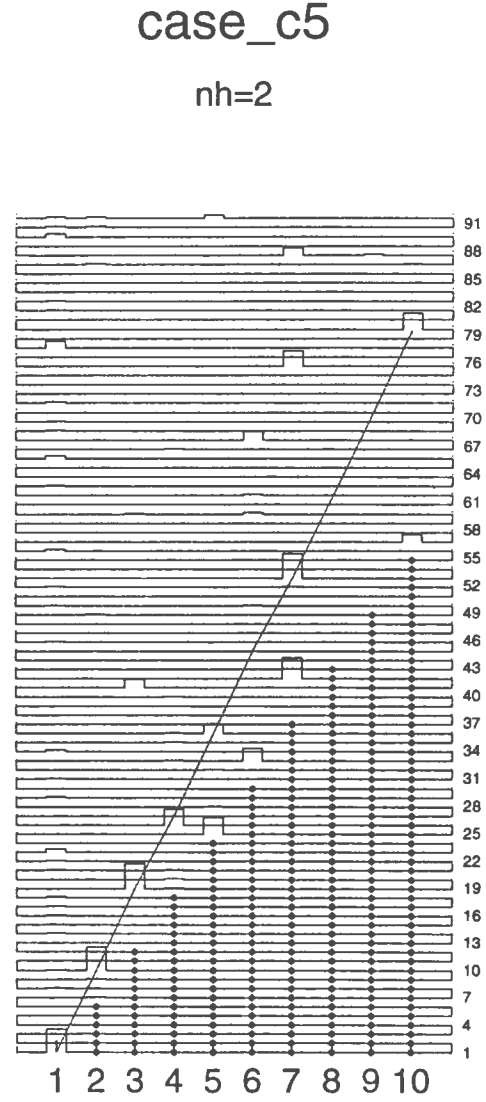
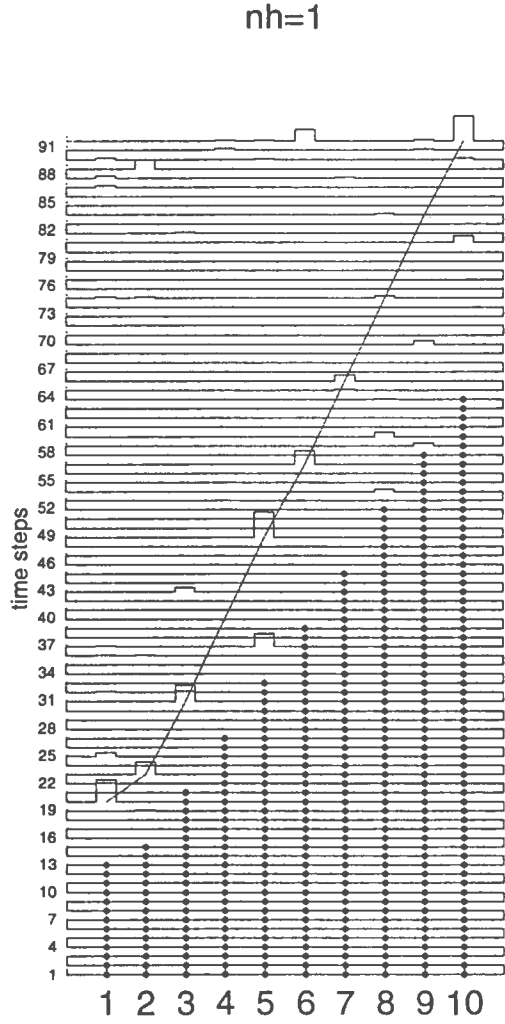
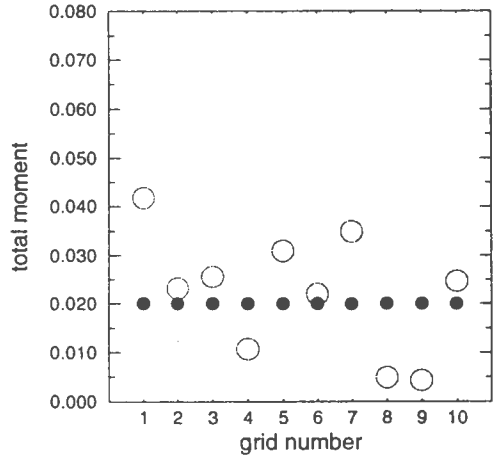
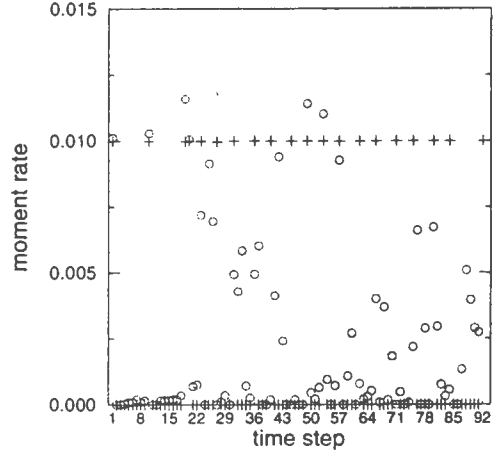


Fig. 6.11 - Rappresentazione della variazione della norma l_1 per ognuna delle stazioni nelle diverse configurazioni del Caso_c.

Fig. 6.12 - Risultati dell'inversione Caso-c5



case_c6

nh=1

nh=2

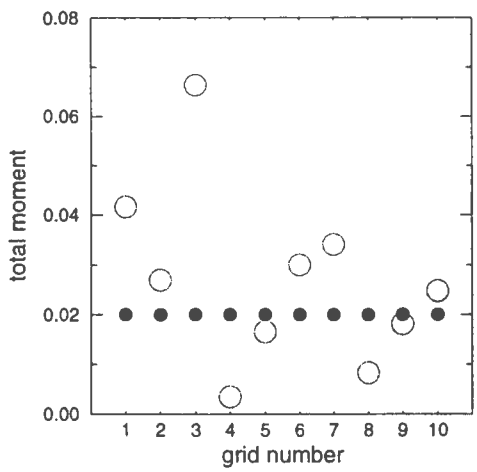
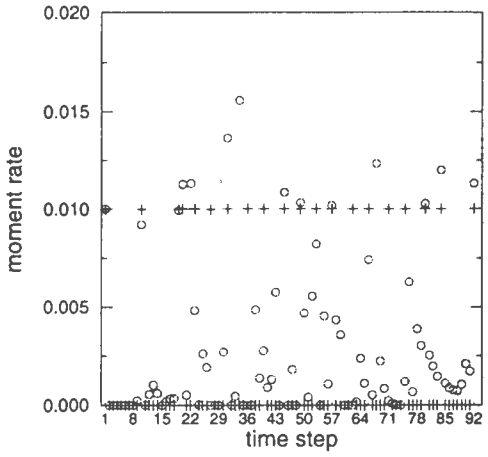
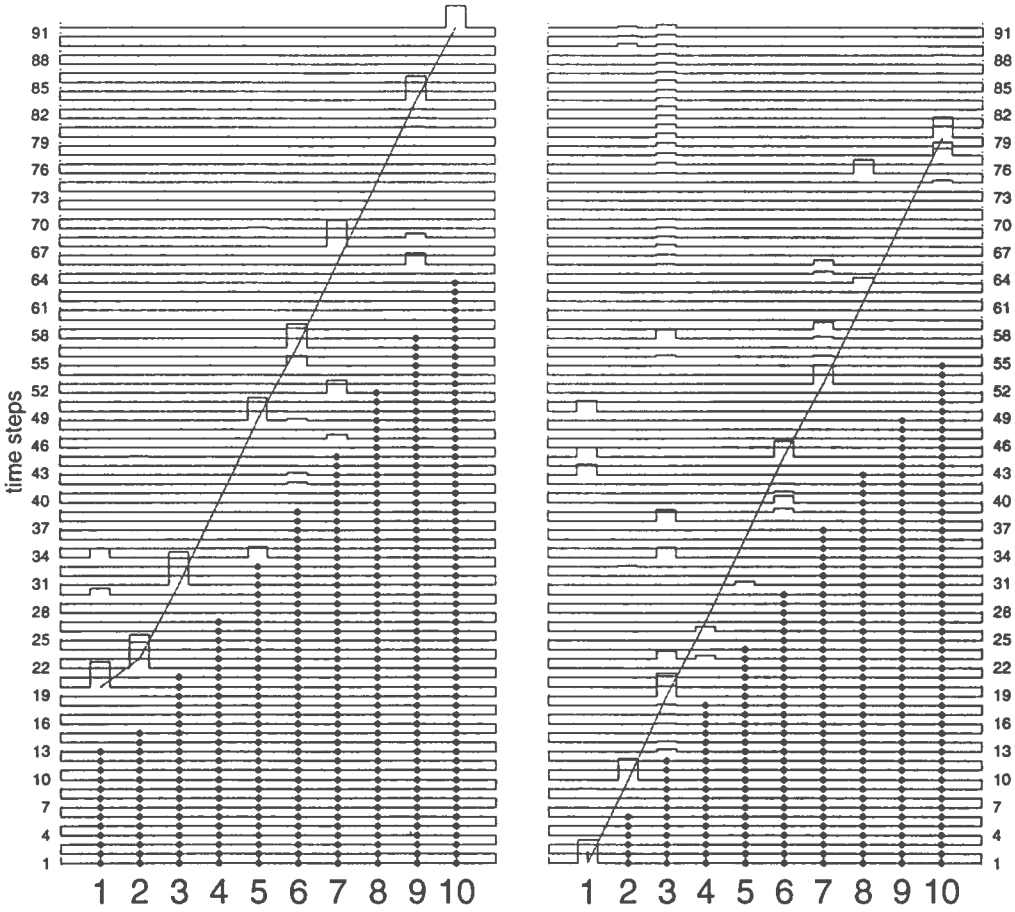


Fig. 6.13 - Risultati dell'inversione Caso-c6

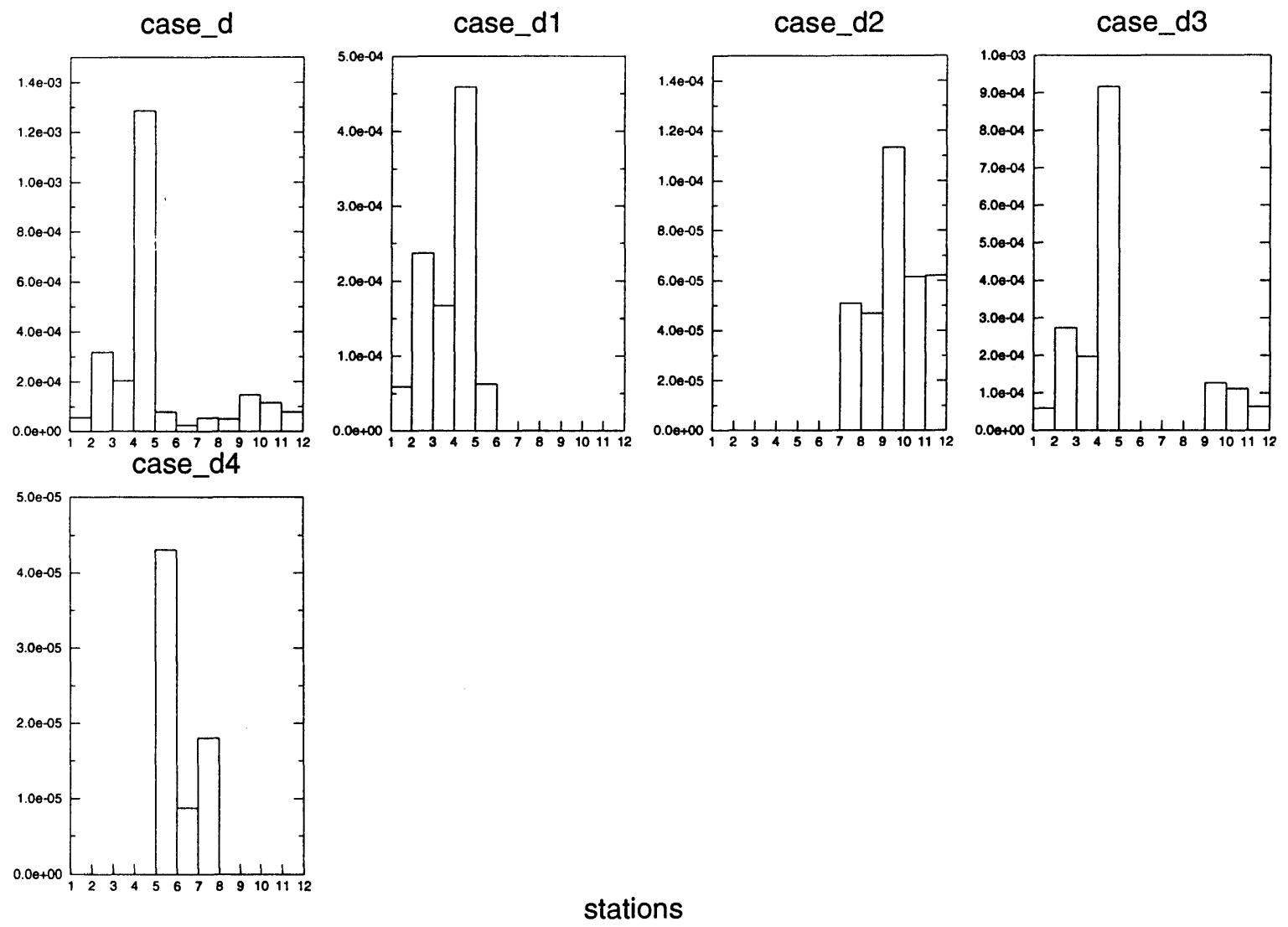


Fig. 6.14 - Rappresentazione della variazione della norma l_1 per ognuna delle stazioni nelle diverse configurazioni del Caso_d.

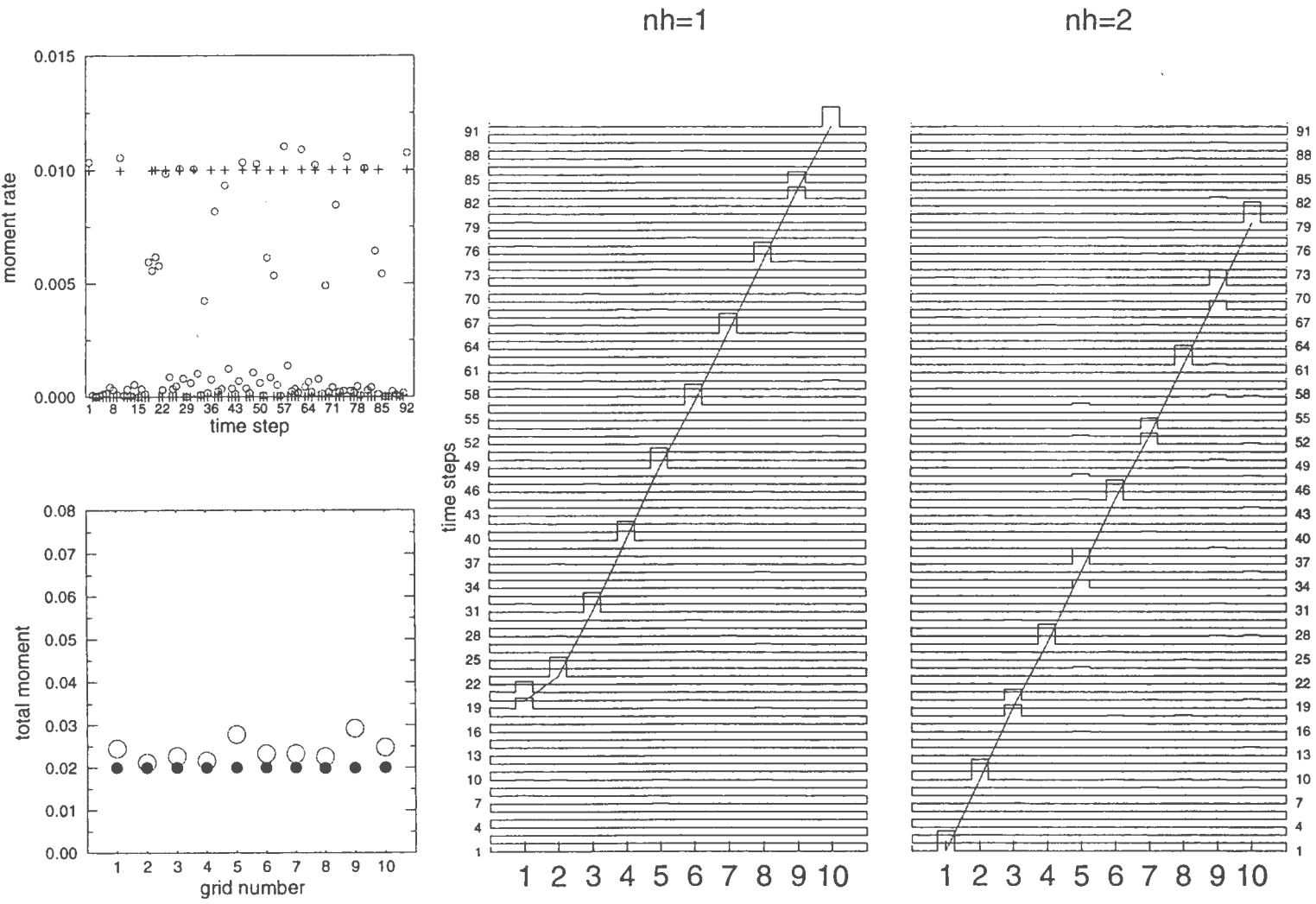


Fig. 6.15 - Risultati dell'inversione Caso-e

Tutti i casi che abbiamo fin qui discusso sono stati ripetuti con un diverso passo di campionamento. Con il passo di campionamento di 0.3906 s (512 punti nella trasformata discreta di Fourier), abbiamo ancora una buona rappresentazione del problema diretto e otteniamo le stesse soluzioni che nei casi appena discussi.

Con passi di campionamento inferiori, le nostre forme d'onda manifestano effetti di aliasing (fig. 6.6c, fig. 6.6d). Riteniamo pertanto che per i calcoli e le analisi effettuate, una buona scelta sia di 0.3906 s, e tale sarà il passo di campionamento usato da qui in avanti.

6.4 Inversioni usando una stessa griglia nel problema diretto e inverso

Al fine di analizzare come la dimensione delle celle usate nelle griglie per la discretizzazione del piano di faglia, influenzino la stabilità delle soluzioni nell'inversione, analizziamo l'andamento della stabilità delle soluzioni delle inversioni usando tre diversi modelli di griglia. Ogni griglia è formata da celle quadrate che nei diversi modelli differiranno per dimensione: prenderemo in considerazione celle di 2 km, di 1 km, di 0.5 km e di 0.250 km, che corrispondono rispettivamente, come riportato in Tabella 1, a modelli di 20, 80, 320 e 1280 celle.

I sismogrammi ottenuti per le diverse discretizzazioni, sono mostrati in fig. 6.16 (a,b,c,d) e riportano gli effetti, già discussi in precedenza (Cap. 1), che una non corretta parametrizzazione del piano di faglia comporta. Si osserva come una griglia troppo rada non riesca a riunire gli effetti delle singole sorgenti e come quindi si manifestino gli impulsi derivanti dalle singole sorgenti puntiformi, troppo distanti tra loro per poter bene rappresentare il reale rilascio energetico continuo sulla faglia.

Forward case: 20 grids

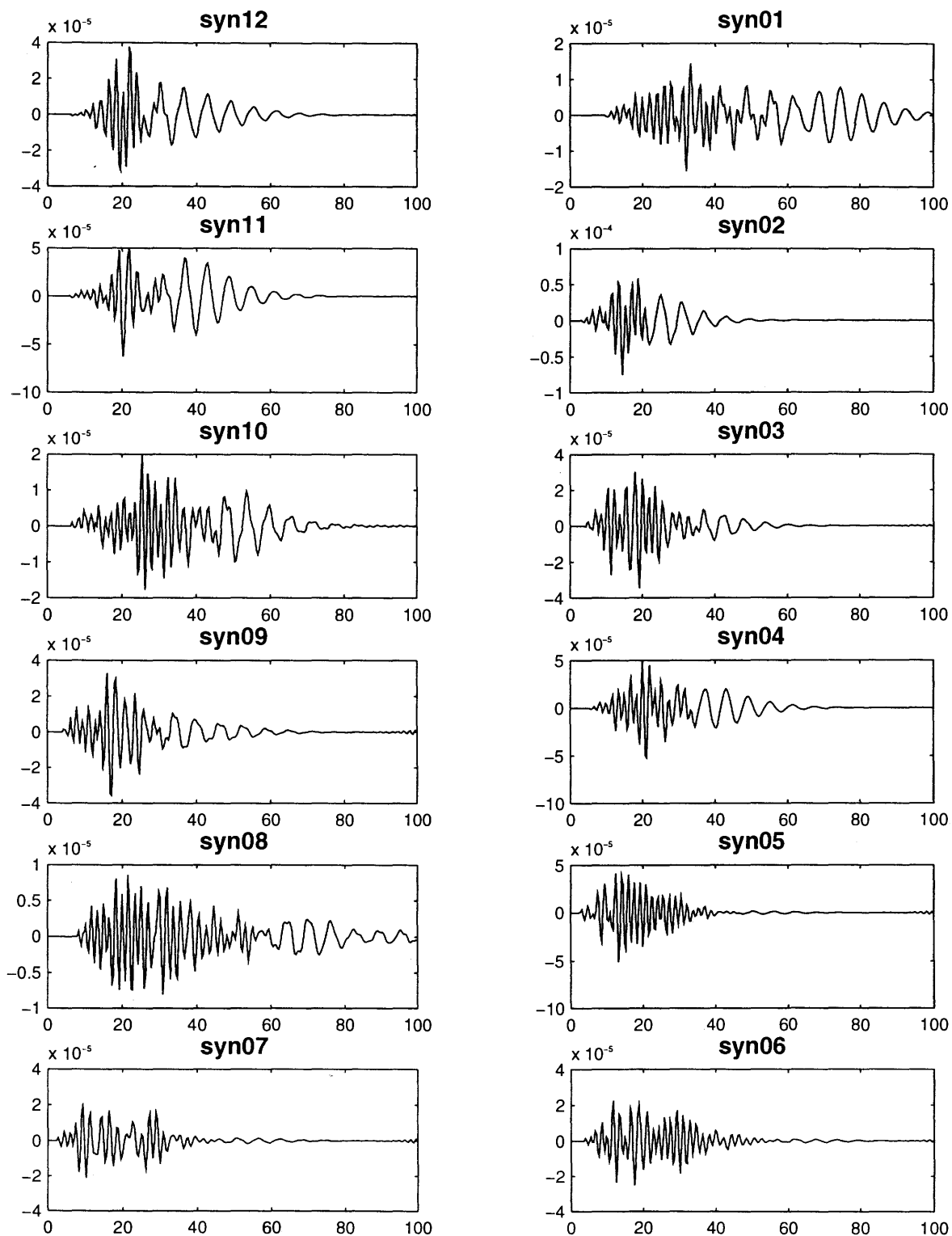


Fig. 6.16a - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 20 celle quadrate di 2 km di lato. Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 , e relative ad un momento sismico di $10e25$ dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

Forward case: 80 grids

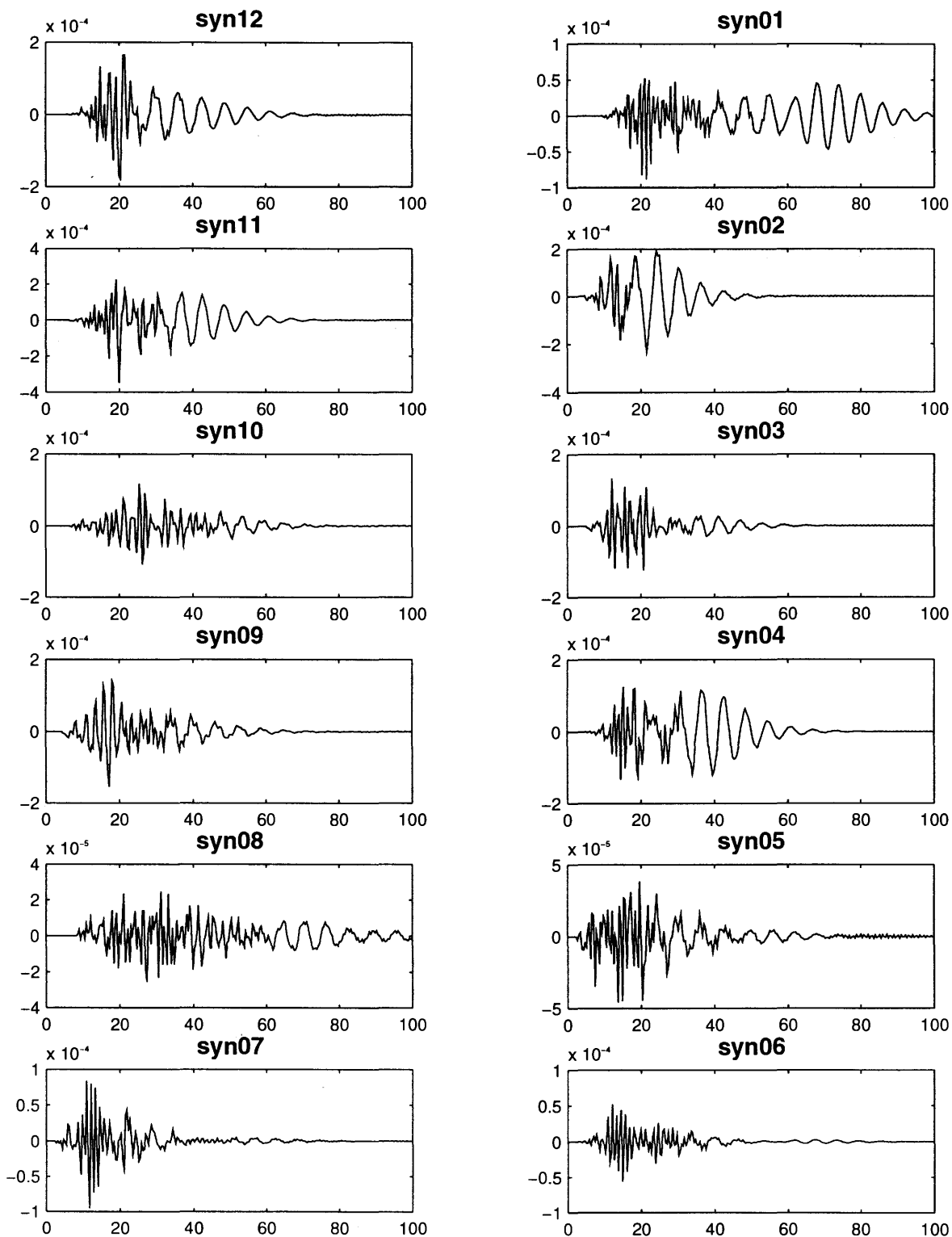


Fig. 6.16b - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 80 celle quadrate di 1 km di lato. Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 . e relative ad un momento sismico di $10e25$ dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

Forward case: 500 grids

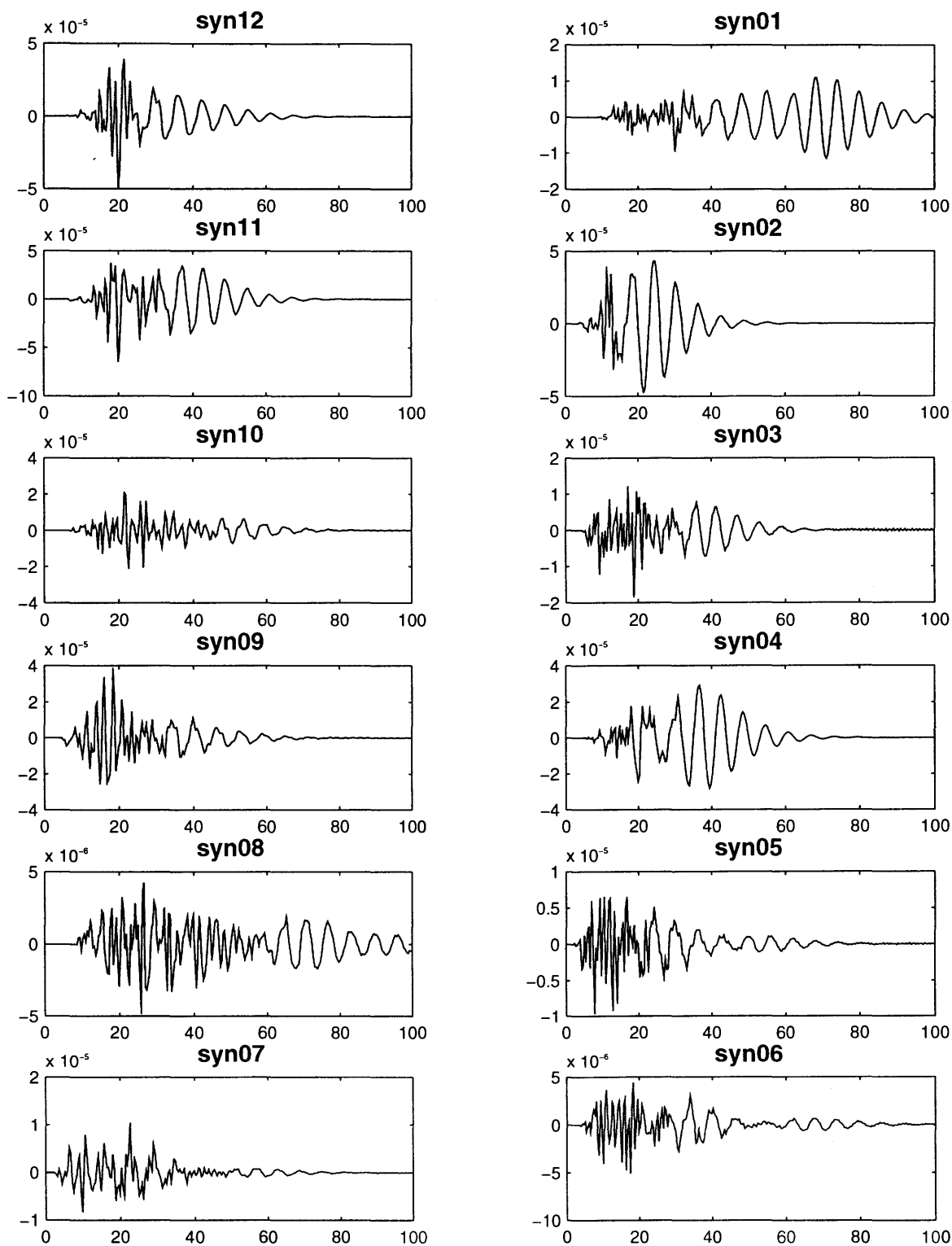


Fig. 6.16c - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 500 celle quadrate di 0.5 km di lato. Le ampiezze sono espresse in cm/s². e relative ad un momento sismico di 10e25 dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

Forward case: 1280 grids

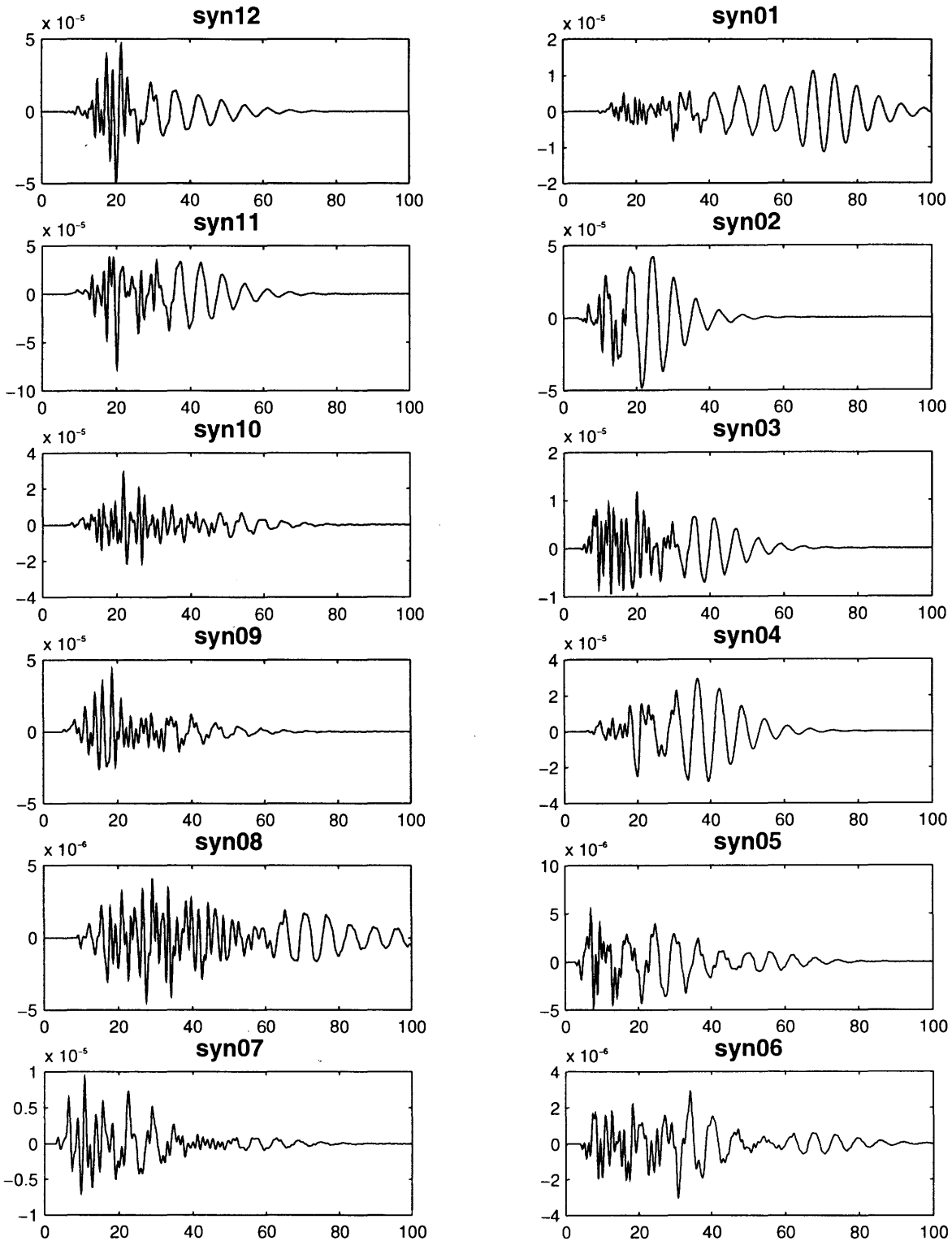


Fig. 6.16d - Accelerogrammi calcolati per una griglia con 1280 celle quadrate di 0.250 km di lato. Le ampiezze sono espresse in cm/s^2 , e relative ad un momento sismico di $10e25$ dyne cm. Sull'asse x sono riportati i tempi in secondi.

Analizzando i sismogrammi in figura 6.16(a,b,c,d), rappresentati usando la stessa scala, appare anzitutto chiaro l'effetto della direttività sulle forme d'onda registrate alle stazioni collocate in direzione opposta rispetto a quella del fronte di propagazione delle fratture. Si osserva come le alte frequenze siano attenuate e le ampiezze delle forme d'onda siano più piccole rispetto ai sismogrammi che si trovano invece nella stessa direzione del fronte di propagazione della rottura. La propagazione della rottura sopra una faglia di lunghezza finita ha infatti un effetto smorzante sulle forme d'onda (Aki e Richards, 1980). Questo effetto sull'ampiezza dello spettro è espressa da $X^{-1} \sin X$. L'effetto di smorzamento è debole nella direzione della propagazione della rottura e più forte nella direzione opposta. Come risultato si osservano frequenze più alte nella direzione del fronte di propagazione che non nella direzione opposta. Tale tipo di comportamento è simile all'effetto Doppler, sebbene in questo caso l'effetto sia dovuto ad interferenza distruttiva tra le onde provenienti da diverse parti del piano di faglia e tenda quindi maggiormente ad addolcire le alte frequenze.

Per ognuno degli insiemi di sismogrammi ottenuti con grandezza di griglia differente, calcoliamo le inversioni per cinque distribuzioni di stazioni, ossia per le Configurazioni 0, 1, 2, 3, 4 (fig. 6.4), utilizzando lo stesso modello di griglia e dimensione di cella adoperata nel modello diretto. Per ogni configurazione l'inversione viene poi fatta utilizzando diversi vincoli fisici.

Tutte le informazioni relative ai casi che da qui in poi tratteremo, sono riportate in Tabella 3. In fig. 6.17 è invece riportato un diagramma che mostra tutti i casi di inversione fatti con i relativi vincoli imposti caso per caso.

Per tutti i casi che da qui in poi considereremo si impone la positività della velocità di scorrimento. Oltre a questo nei vari test selezioneremo differenti vincoli fisici per analizzare la loro influenza sui risultati delle inversioni.

Table 1. Summary of Parameters for Each Station Distribution Studied

Inversion Type	Medium (i)	Top of fault (i)	Δx^1 (f)	Δt^2 (f)	Δx^1 (i)	Δt^2 (i)	nx (f)	nh (f)	nt (f)	nx (i)	nh (i)	nt (i)	Constraints	Noise added	Remarks
Same grid size in forward and inverse case	M1	5	2	.39	2	.39	10	2	24	10	2	24	R1(0.7v _S) R1(v _S), MTO R3, MTO	no no no	All the aspects of the solutions are identically reproduced as the grid size decreases.
	M1	5	1	.39	1	.39	20	4	24	20	4	24	R1(0.7v _S) R3, MTO	no no	
	M1	5	.5	.39	.5	.39	40	8	24	40	8	24	R1(0.7v _S) R3, M	no no	
Coarse grids in inversion	M1	5	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R1(0.7v _S), MTO R1(0.7v _S), MTO, M R2, MTO R2, MTO, M R3, MTO R3, MTO, M	no no no 5% 5%	The fit of the accelerograms is good. The slip rate is well reproduced
Incorrect Earth structure; coarse grids in inversion	M2	5	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R3, MTO R3, MTO, M	5% 5%	Poor solutions.
	M2	14	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R3, MTO R3, MTO, M	5% 5%	The accelerograms are poorly fitted. The slip rate is better reproduced when all the 12 stations are used.

¹ in km; ² in seconds; f = forward model; i = inverse model; R1: strong causality; R2: weak causality; R3: without causality at all.

TABELLA 3

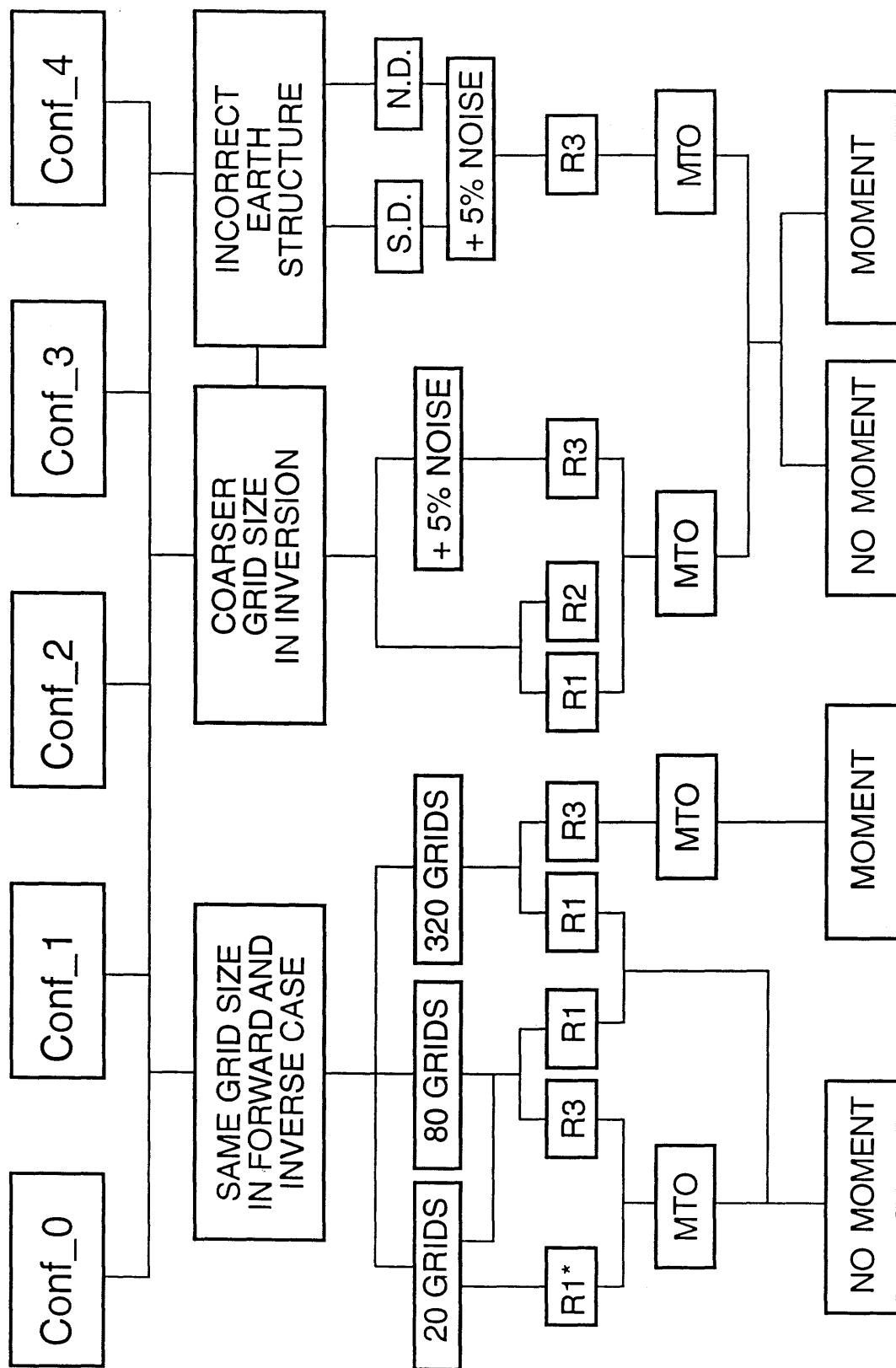


Fig. 6.17 - Schema a blocchi rappresentante i test effettuati e i vincoli imposti per ognuno dei casi.

Test 1 - Questo test è stato fatto, come puro esercizio accademico, per verificare il funzionamento, da un punto di vista tecnico, dei nostri programmi. La velocità del fronte di rottura è vincolata ad essere uguale a quella del modello diretto, le celle possono scivolare solo una volta al passaggio del fronte di rottura. Tutti gli aspetti delle soluzioni sono riprodotti esattamente e non c'è alcuna evidenza dell'effetto che la non uniforme copertura azimutale delle stazioni ha sulle inversioni. Anche con sole quattro stazioni siamo in grado di riprodurre le forme d'onda e il fronte di rottura esattamente. Riportiamo in fig. 6.18 il fronte di rottura per la distribuzione uniforme di stazioni (Configurazione 0). Per la stessa configurazione i sismogrammi ottenuti sono quelli di fig. 6.19.

Il numero di incognite e di equazioni, così come i valori di l_1 , l_2 , l_∞ , sono mostrati in Tabella 4. Per i differenti modelli di griglia, analizzati con le diverse distribuzioni di stazioni, si riproducono esattamente i risultati. Poichè le differenze non sono visibili, i grafici relativi alle soluzioni ottenute non sono di seguito riportate.

Test 2 - In questo caso calcoliamo le inversioni imponendo il vincolo di causalità debole sulla velocità del fronte di rottura e consentiamo alle griglie di scivolare quanto più volte è necessario: tutti gli aspetti delle soluzioni sono egualmente bene riprodotti per tutte le dimensioni di griglia e per tutte le distribuzioni di stazioni.

Test 3 - In questo caso non vincoliamo la velocità del fronte di rottura, ossia non usiamo alcun vincolo di causalità. Le celle sono libere di scivolare più di una volta e l'unico vincolo imposto è quello della positività della velocità di scorrimento. Riteniamo che questo sia un caso molto interessante da discutere poichè nella realtà non conosciamo il valore vero della velocità delle onde P alla profondità ipocentrale, sia per la mancanza di una perfetta conoscenza del modello strutturale che per incertezze sulla determinazione della collocazione dell'ipocentro. Un modo per aggirare l'ostacolo potrebbe essere quello di definire un limite superiore per la velocità delle onde P prendendo il valore più alto determinato per un qualunque modello strutturale sulla Terra.

Per i modelli con 20 e 80 celle siamo in grado di riprodurre i risultati senza alcun vincolo aggiuntivo, ma per il caso con 320 celle abbiamo bloccato l'inversione al valore di minimo misfit fissato all'interno del programma. Tale valore viene fissato sulla base del limite di errore entro il quale siamo in grado di risolvere il problema. La necessità di non ultimare l'ottimizzazione è

20 grids f/i: c_d0

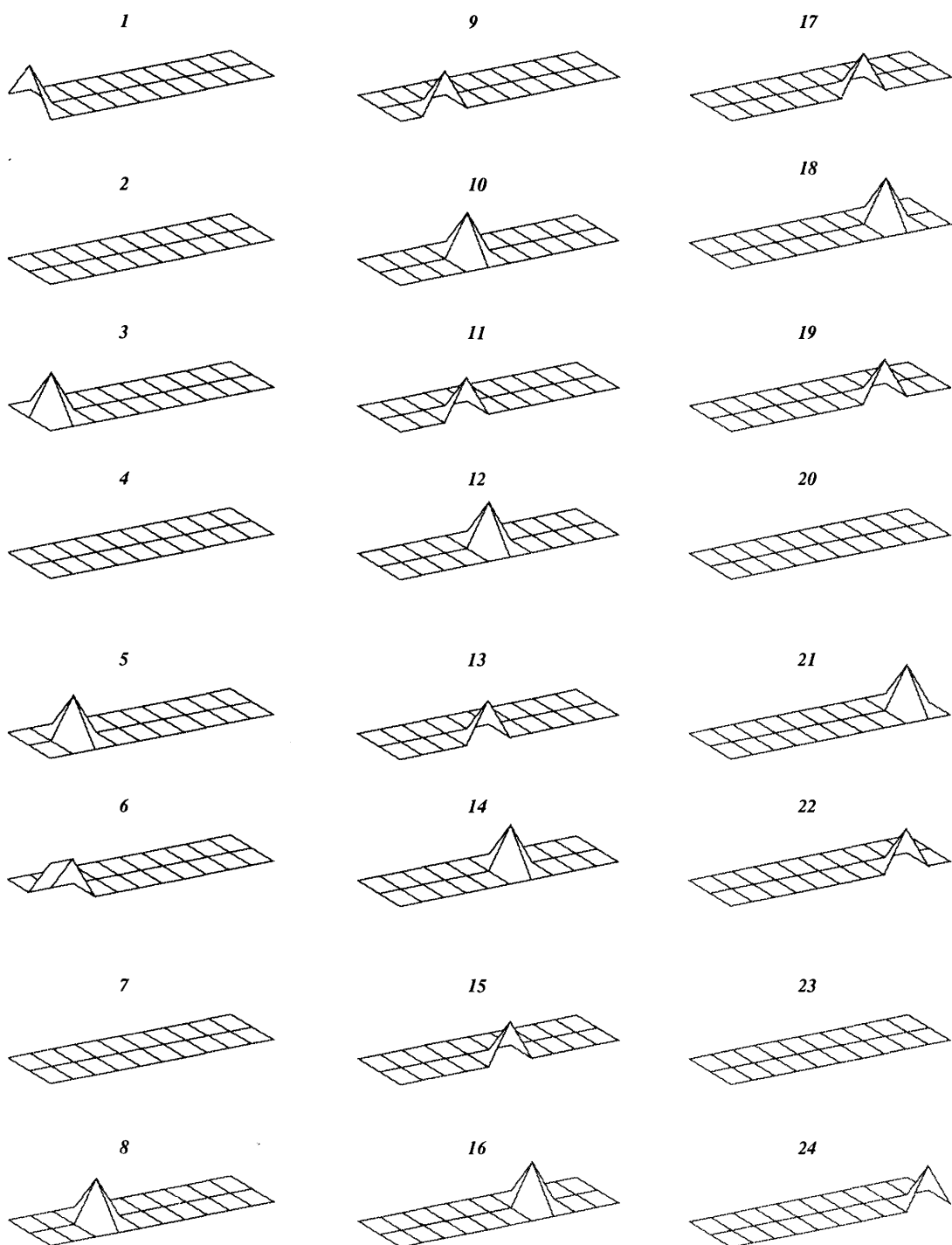


Fig. 6.18 - Test 1 : posizione del fronte di rottura (rilascio di momento) sulla faglia nei diversi istanti (discretizzati) temporali. Questa inversione riproduce lo stesso modello di rilascio di momento utilizzato nel problema diretto. A questo modello vanno pertanto riferiti tutti i risultati dell'inversione che mostreremo da qui in avanti.

20 grids: case_a0

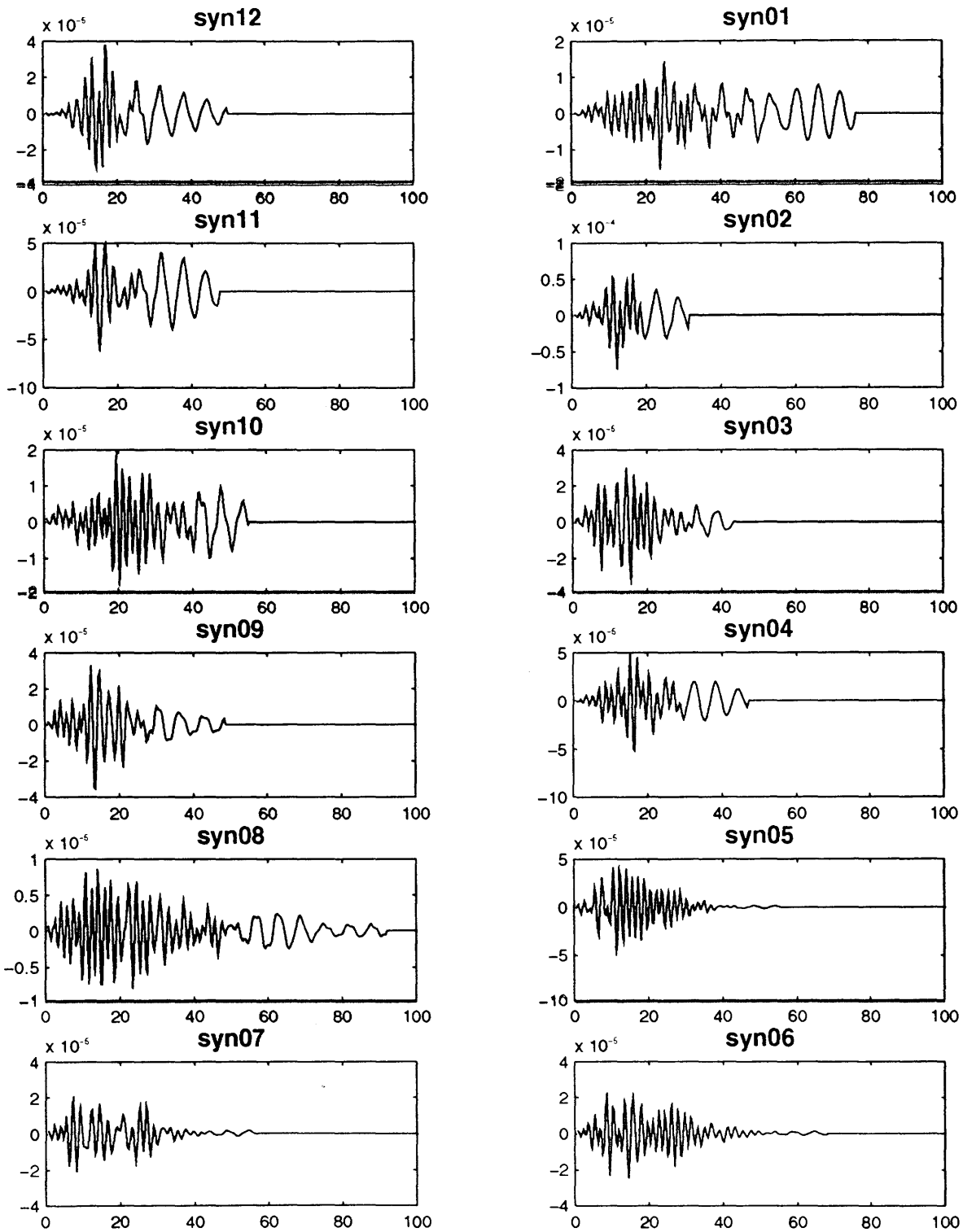


Fig. 6.19 - Test 1 : forme d'onda ottenute dall'inversione e confrontate con quelle del modello diretto per la Configurazione 0. Non si riscontra alcuna differenza.

semplicemente legata all'eccessiva richiesta di tempo macchina necessaria per ottenere un miglioramento dei risultati che non riteniamo utile ai fini pratici.

I risultati ottenuti nell'ultimo caso, seppure senza completare del tutto l'ottimizzazione, rispecchiano esattamente quanto già asserito nella teoria, precedentemente esposta, sull'indeterminazione introdotta nelle soluzioni all'aumentare del numero di celle per cui risolvere il nostro problema.

La relazione tra il numero di celle e il valore della norma l_1 , relativa alle differenti configurazioni, è rappresentata in fig. 6.20. Per ogni modello di griglia riportiamo il valore della norma l_1 , relativo alle diverse configurazioni di stazioni. Per ogni configurazione, si osserva che la stabilità del problema decresce all'aumentare del numero di celle. Tale comportamento è legato al fatto che all'aumentare del numero di celle tendiamo a malcondizionare la matrice A del sistema lineare che vogliamo risolvere, ossia incrementiamo il *numero di condizione* della matrice stessa.

Sebbene non ritroviamo una vera e propria relazione tra il numero di stazioni usate e il numero di celle, possiamo in ogni caso osservare che per ogni griglia la Configurazione 1 ha il valore di norma l_1 più basso.

Test 4 Per stabilizzare le soluzioni relative al caso con 320 celle, fissiamo il valore del momento scalare. Riduciamo le incertezze nello spazio dei parametri e continuiamo ad ottenere un buon raccordo tra le forme d'onda ottenute dalle inversioni e quelle relative ai dati artificiali.

Da questi test, pur considerando una situazione molto semplice ed ideale del modello di rottura, si evince la necessità di vincoli fisici per stabilizzare le soluzioni anche usando un modello con un numero relativamente elevato di piccole celle. Quanto sopra detto è stato d'altra parte già affermato da altri autori (Hartzell e Heaton, 1983; Beroza e Spudich, 1988).

L'imposizione di vincoli fisici per stabilizzare le soluzioni, si rivela come una delle vie da seguire per risolvere il problema della instabilità. È risaputo che l'uso di vincoli deve essere discreto e moderato nelle inversioni di dati reali, laddove le dimensioni dello spazio dei dati e dei parametri deve essere grande abbastanza per garantire una buona ricerca delle soluzioni ottimali.

Come passo successivo, analizzeremo se è possibile ridurre l'instabilità del problema, usando il minor numero possibile di incognite, ossia di celle, per modellare la faglia senza perdere informazione nel ricostruire il processo di rottura.

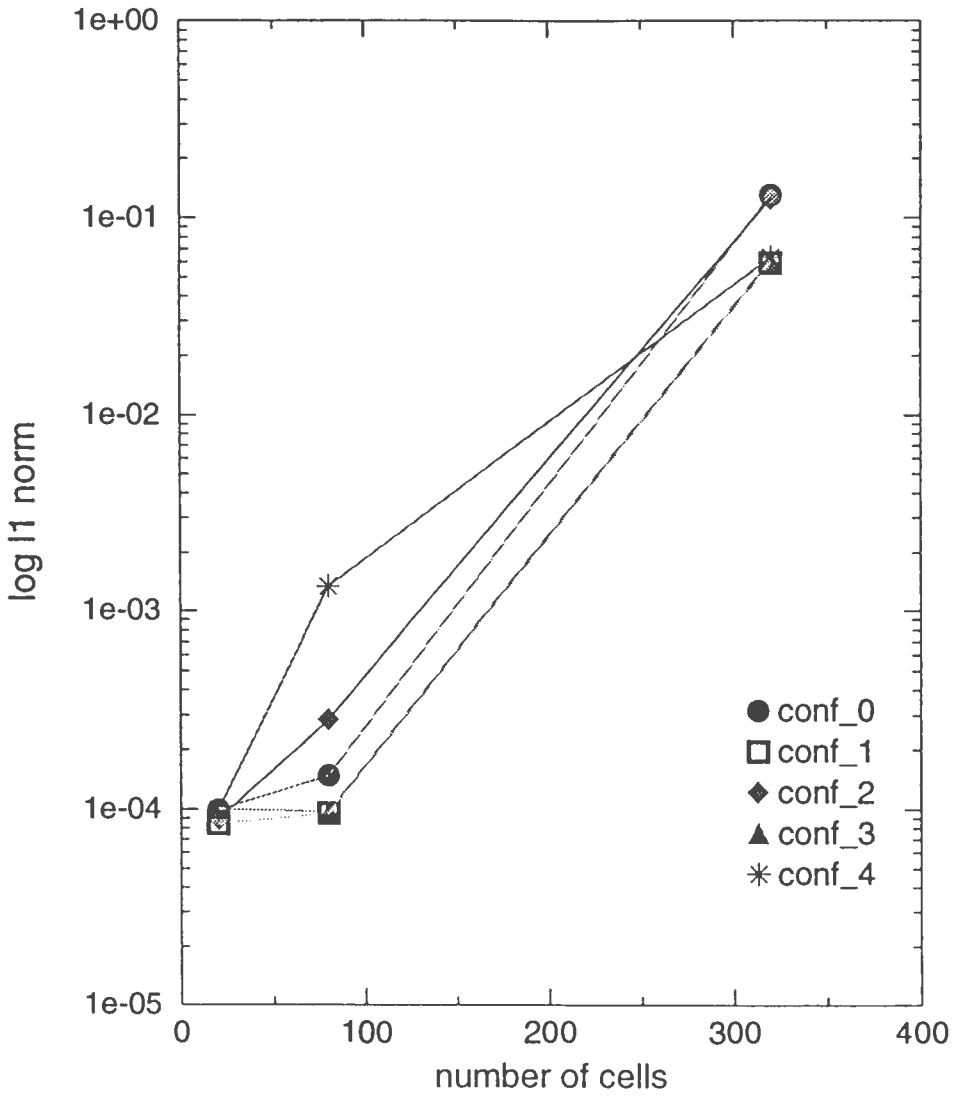


Fig. 6.20 - Rappresentazione dell'andamento della norma l_1 , in funzione del numero di celle usate.

Tabella 4

+++++							
dim. celle	n. c.	rum.	caso	eq.	inc.	m.c	tot. mom
+++++							
2km	20	0%	caso_a	1701	20	no	12.80
		0%	caso_c0	1701	480	no	12.80
		0%	caso_d0	1701	480	no	12.82
		0%	caso_d1	814	480	no	12.81
		0%	caso_d2	887	480	no	12.82
		0%	caso_d3	1010	480	no	12.81
		0%	caso_d4	691	480	no	12.84

1km	80	0%	caso_a	1725	80	no	12.80
		0%	caso_d0	1725	1920	no	12.80
		0%	caso_d1	820	1920	no	12.85
		0%	caso_d2	905	1920	no	12.80
		0%	caso_d3	1017	1920	no	12.83
		0%	caso_d4	708	1920	no	12.86

0.5km	320	0%	caso_a1	747	80	no	lsq
		0%	caso_d0	1747	7680	si	12.80
		0%	caso_d1	829	7680	no	13.43
		0%	caso_d1	829	7680	si	12.80
		0%	caso_d2	919	7680	si	12.80
		0%	caso_d3	1028	7680	si	12.80
		0%	caso_d4	721	7680	si	12.80-

STATISTICA

+++++				
#caso_a				
n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	9.264E-5	9.440E-5	1.157E-4	6.425E-10
80	1.482E-4	1.629E-3	5.693E-3	3.683E-9

#caso_c				
n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit

20	9.681E-5	1.045E-4	1.262E-4	6.714E-10
----	----------	----------	----------	-----------

#caso_d0

n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	9.889E-5	1.343E-4	2.553E-4	6.859E-10
80	1.481E-4	1.629E-3	5.693E-3	3.681E-9
320	0.136	0.136	0.127	6.880E-7

#caso_d1

n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	8.416E-5	1.114E-4	2.402E-4	6.734E-10
80	9.504E-5	1.390E-4	2.779E-4	2.378E-9
320n	6.271E-4	1.023E-3	2.200E-3	3.123E-9
320m	0.111	0.116	0.206	5.537E-7

#caso_d2

n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	8.887E-5	1.343E-4	2.400E-4	5.295E-10
80	2.830E-4	2.236E-3	5.693E-3	6.990E-9
320	0.126	0.132	0.130	6.454E-7

#caso_d3

n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	9.961E-5	1.429E-4	2.488E-4	8.595E-10
80	9.726E-5	1.679E-4	2.434E-4	3.582E-9
320	6.180E-2	7.449E-2	9.341E-2	4.765E-7

#caso_d4

n.g.	l_1	l_2	l_∞	misfit
20	9.917E-5	1.417E-4	2.978E-4	4.424E-10
80	1.337E-3	7.914E-3	2.053E-2	1.024E-8
320	6.358E-2	9.632E-2	0.156	8.088E-8

+++++

6.5 Inversione usando un modello di griglia più grossolano di quella usata nel caso diretto.

In questo paragrafo riportiamo i risultati dell'analisi realizzata al fine di definire i limiti nella ricostruzione del processo di rottura se nell'inversione la faglia è modellata con una griglia alquanto grossolana.

Gli accelerogrammi, usati come dati sintetici, sono calcolati fino ad una massima frequenza di 1 Hz per una cella di 0.250 km. Il passo di campionamento temporale è 0.098 s circa che corrisponde ad una frequenza di Nyquist di 5.12 Hz. Come già affermato precedentemente, riteniamo che questa sia una buona discretizzazione per le minime lunghezze d'onda del problema in esame ($\lambda=1.2$ km).

Le celle usate nell'inversione per modellare la faglia sono circa 10 volte più grandi, in spazio e tempo, rispetto a quelle usate nel problema diretto. Ogni cella ha nel problema inverso un lato di 2 km, quasi il doppio della lunghezza d'onda alla profondità della nucleazione della rottura, ed il passo temporale è 0.8 s. Abbiamo inoltre aggiunto ai dati artificiali, rumore random pari al 5% della massima ampiezza.

I test che di seguito riportiamo sono stati fatti selezionando, di volta in volta, diversi vincoli fisici e per diverse Configurazioni di stazioni. Per ogni test rimane fisso il vincolo sulla positività della velocità di scorrimento. I parametri relativi ad ogni caso di inversione sono riportati nella Tabella 5.

Test 1 - Il fronte di rottura si propaga con la stessa velocità che nel problema diretto e le celle possono scivolare più volte. Anche se otteniamo gli aspetti principali delle soluzioni nello spazio dei parametri, i sismogrammi non sono perfettamente riprodotti. Questa è una ovvia conseguenza dei vincoli che stiamo imponendo; essi riducono le dimensioni dello spazio all'interno del quale cercare le soluzioni.

Test 2 - L'unico vincolo considerato in questo caso è la positività della velocità di scorrimento. Le celle possono scivolare quante più volte è necessario e nessun vincolo di causalità è imposto sulla velocità di rottura. I sismogrammi ottenuti dall'inversione e relativi alla Configurazione 0 sono mostrati in fig. 6.21.

Il confronto tra le due forme d'onda ottenute è buono e le piccole differenze osservate per i sismogrammi delle stazioni collocate nella direzione opposta a

quella di propagazione del fronte di rottura, sono dovute all'effetto che nella matrice di inversione hanno differenti ordini di grandezza per le ampiezze delle forme d'onda. Come abbiamo già discusso, per l'effetto di direttività l'ampiezza delle forme d'onda nella direzione opposta a quella della propagazione di rottura, sono minori di quelle registrate nella stessa direzione del fronte di propagazione. Questo effetto deve essere tenuto in considerazione nell'inversione, introducendo ad esempio un fattore peso per normalizzare le ampiezze allo stesso ordine di grandezza.

TABELLA 5

```

+++++
Modello diretto  celle: 0.250km      numero di celle: 1280
Modello inverso  celle: 2 km          numero di celle:   20
+++++
rumore   caso    eq.   inc.  m.c   tot. mom
+++++
0%      caso_b0    1758  250   no    17.55
0%              si    12.80
0%      caso_e0    1758  392   no    20.84
0%              si    22.76
5%      caso_d0    1758  480   no    22.76
              si    12.82
5%      caso_d1    833   480   no    19.58
              si    12.93
5%      caso_d2    925   480   no    28.76
              si    12.82
5%      caso_d3    1032  480   no    24.59
              si    12.95
5%      caso_d4    726   480   no    16.06
              12.80

```

STATISTICA

```

+++++
#caso_b0

```


Effetto della copertura azimutale: analisi e risultati

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	0.291	0.333	0.532	1.380E-6	
si	0.303	0.347	0.555	1.440E-6	

#caso_e0

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	0.168	0.190	0.284	7.962E-7	
si	0.203	0.233	0.391	9.638E-7	

#caso_d0

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	0.152	0.170	0.251	7.223E-7	
si	0.199	0.231	0.417	9.391E-7	

#caso_d1

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	6.493E-2	7.815E-2	0.152	3.008E-7	
si	0.134	0.112	0.139	8.773E-8	

#caso_d2

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	8.488E-2	9.168E-2	9.850E-2	4.119E-7	
si	0.183	0.186	0.175	8.705E-7	

#caso_d3

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	8.645E-2	9.841E-2	0.123	6.296E-7	
si	0.150	0.167	0.304	2.968E-8	

#caso_d4

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit	
no	9.681E-2	0.131	0.314	1.004E-7	
si	0.178	0.218	0.472	6.539E-8	

+++++

Fine/coarse – case_d0

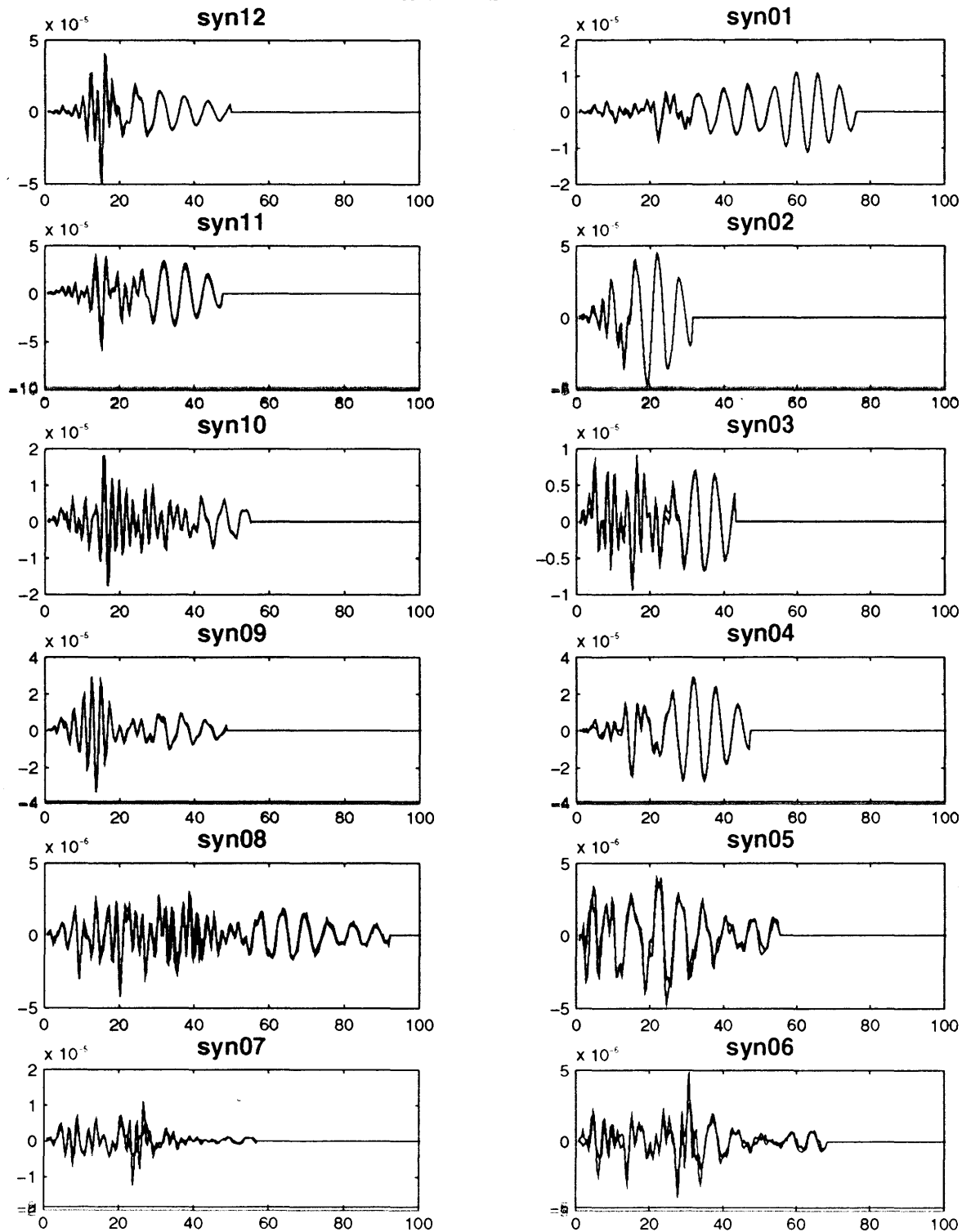


Fig.6.21 - Test 1: confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 0.

Le forme d'onda ottenute usando la Configurazione 3 e la Configurazione 4, ossia usando lo stesso ordine di grandezza per le ampiezze dei sismogrammi, sono mostrati in fig. 6.23 e fig. 6.24, rispettivamente. Dal confronto delle forme d'onda, si vede che le soluzioni sono notevolmente migliorate rispetto alla Configurazione 0 e ora la differenza nello spazio dei dati è davvero piccola.

La storia del rilascio di momento relativa a questo test e usando le Configurazioni 0,1,2,3,4,5,6 è mostrata in fig. 6.26 (a,b,c,d,e,f). In fig. 6.25 è mostrato, per confronto, il rilascio di momento sismico nel tempo che abbiamo considerato per il problema diretto. Questo test, ed il test seguente, sono stati eseguiti anche sulle Configurazioni 5 e Configurazioni 6, poichè non era ben chiaro se i risultati ottenuti, ad esempio per la Configurazione 4, fossero dovuti al basso numero di stazioni o piuttosto ad un effetto di propagazione della rottura. D'altra parte per i casi con la Configurazione 3 usavamo nove stazioni, pertanto non era semplice distinguere l'eventuale un eventuale effetto di propagazione della rottura da un semplice problema legato ad un miglior vincolo matematico delle soluzioni.

I nostri test così ripetuti hanno dimostrato che se solo 4 stazioni vengono considerate nella stessa direzione della rottura (Configurazione 6) i risultati migliorano notevolmente rispetto al caso in cui le stazioni sono disposte nella direzione opposta. Quando si è pertanto nella direzione opposta a quella che si pensa sia la direzione di propagazione della frattura, un maggior numero di quattro stazioni riesce a vincolare bene i risultati.

Dai risultati appare evidente che le migliori soluzioni sono ottenute per la Configurazione 1, che per una faglia inversa come quella da noi usata in questo caso, corrisponde alle stazioni collocate sul tetto del piano di faglia (hanging wall).

Conf_1

Conf_2

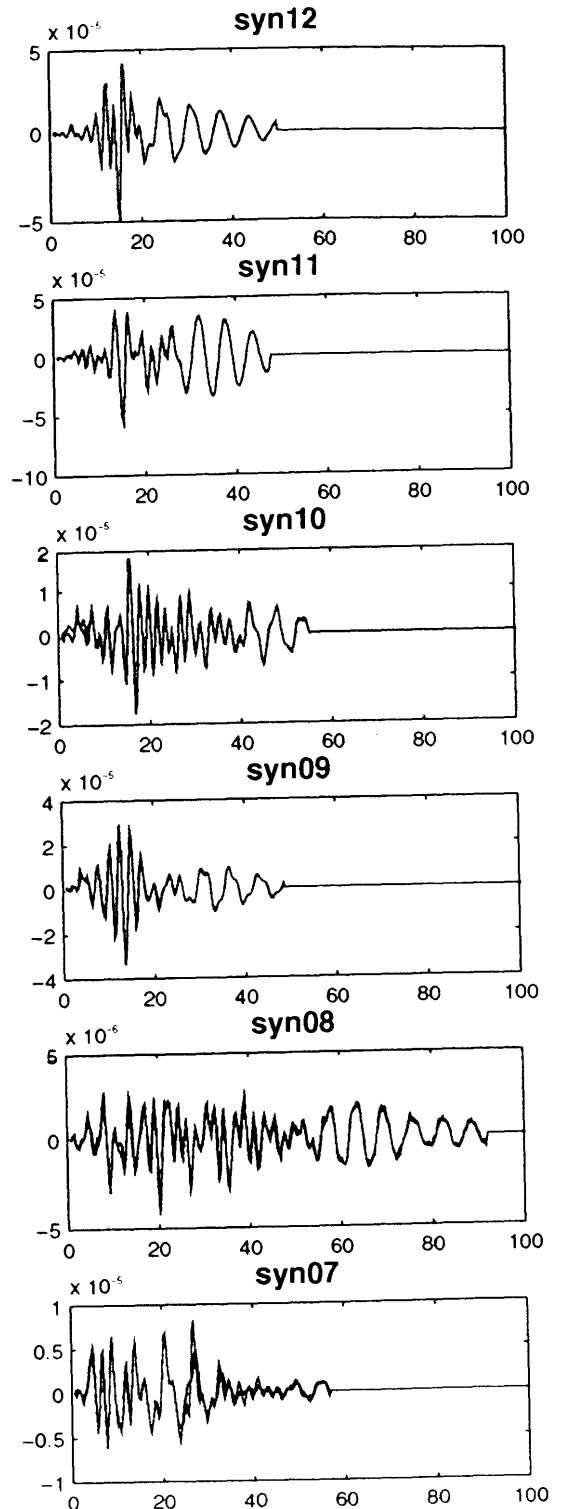
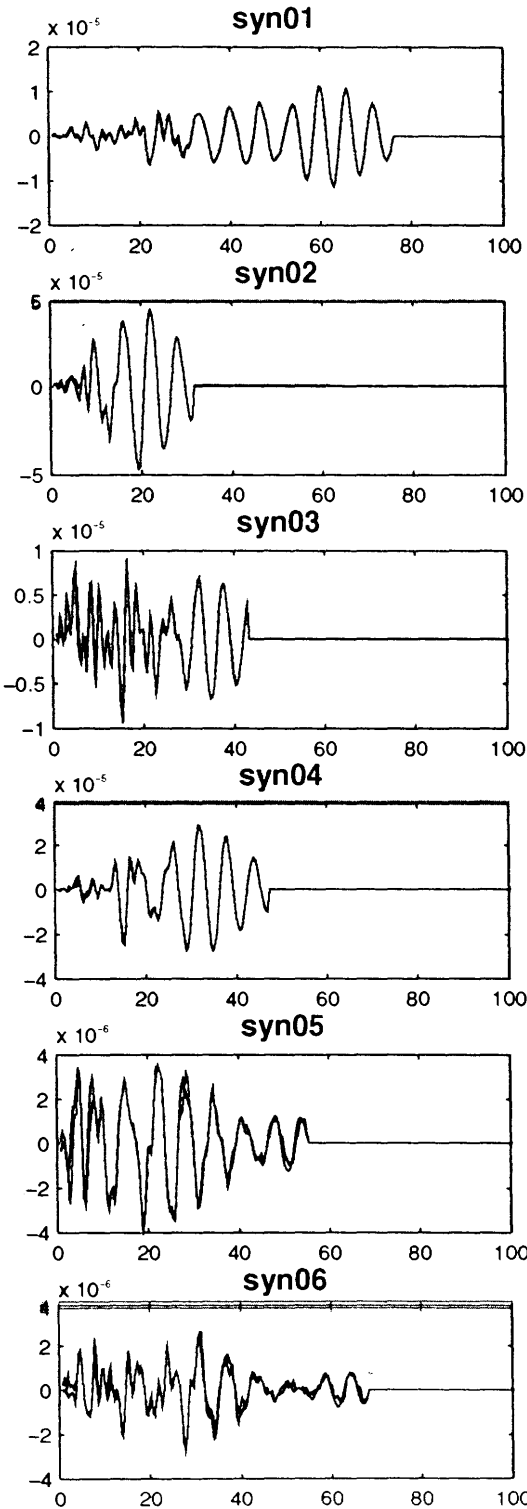


Fig.6.22 - Test 2: confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 1 e Configurazione 2. Nessuna causalità è imposta e le celle sono libere di scivolare quante più volte è necessario.

Conf_3

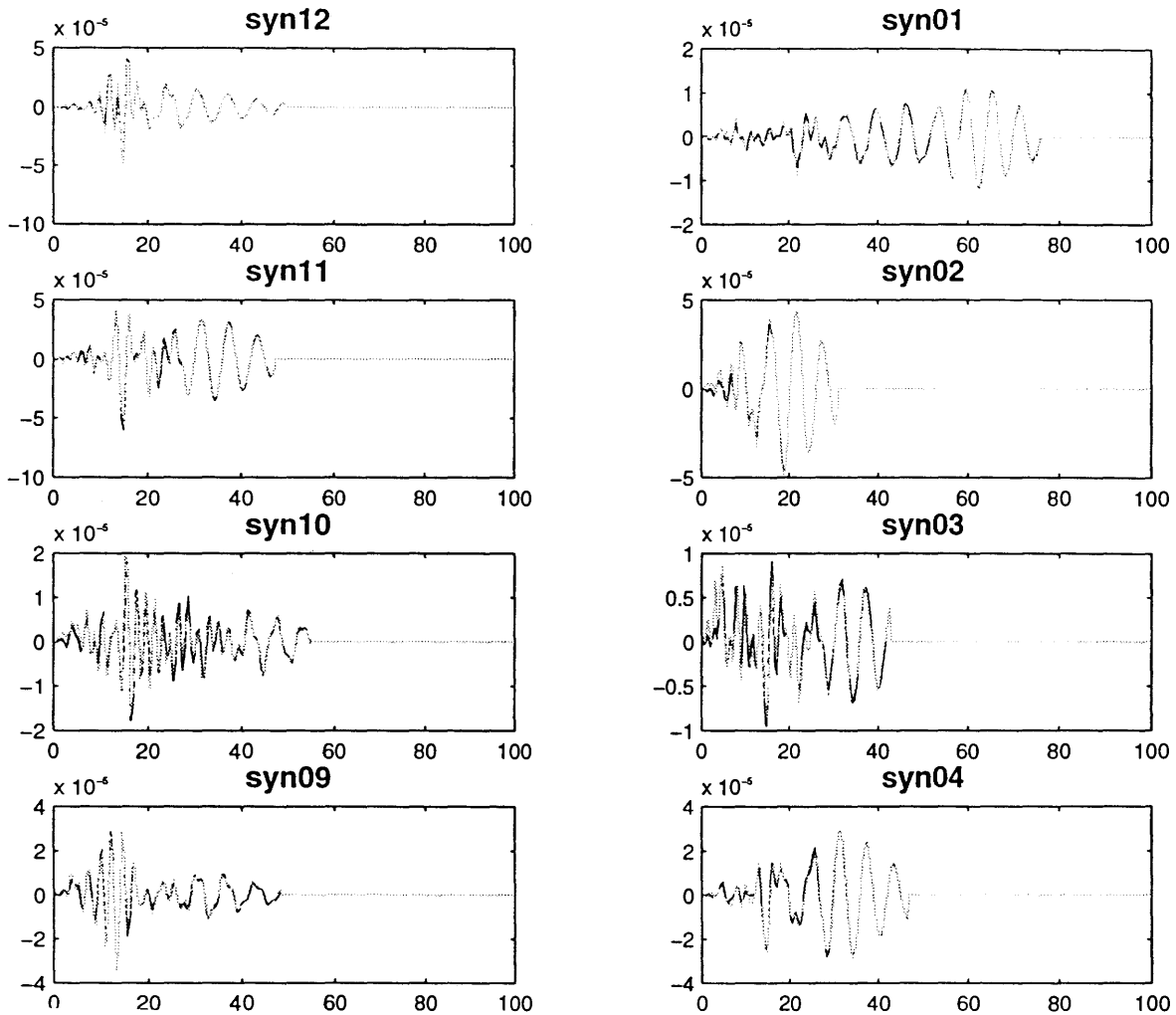


Fig. 6.23 - Test 2: confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 3. Nessuna causalità è imposta e le celle sono libere di scivolare.

Conf_4

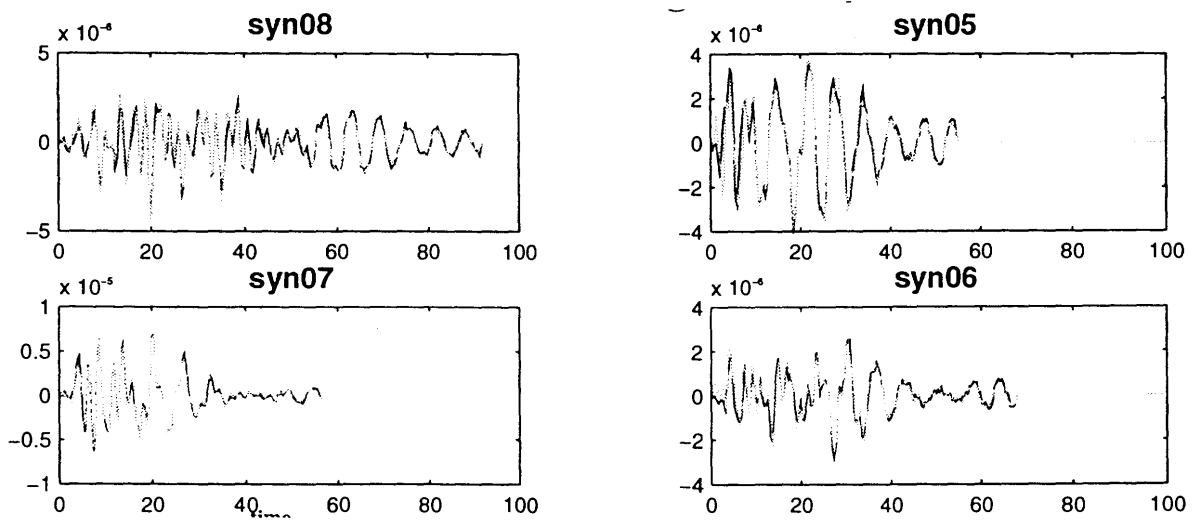


Fig. 6.24 - Test 2: confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 4. Nessuna causalità è imposta e le celle sono libere di scivolare.

Fine/coarse (20 grids): case_d0

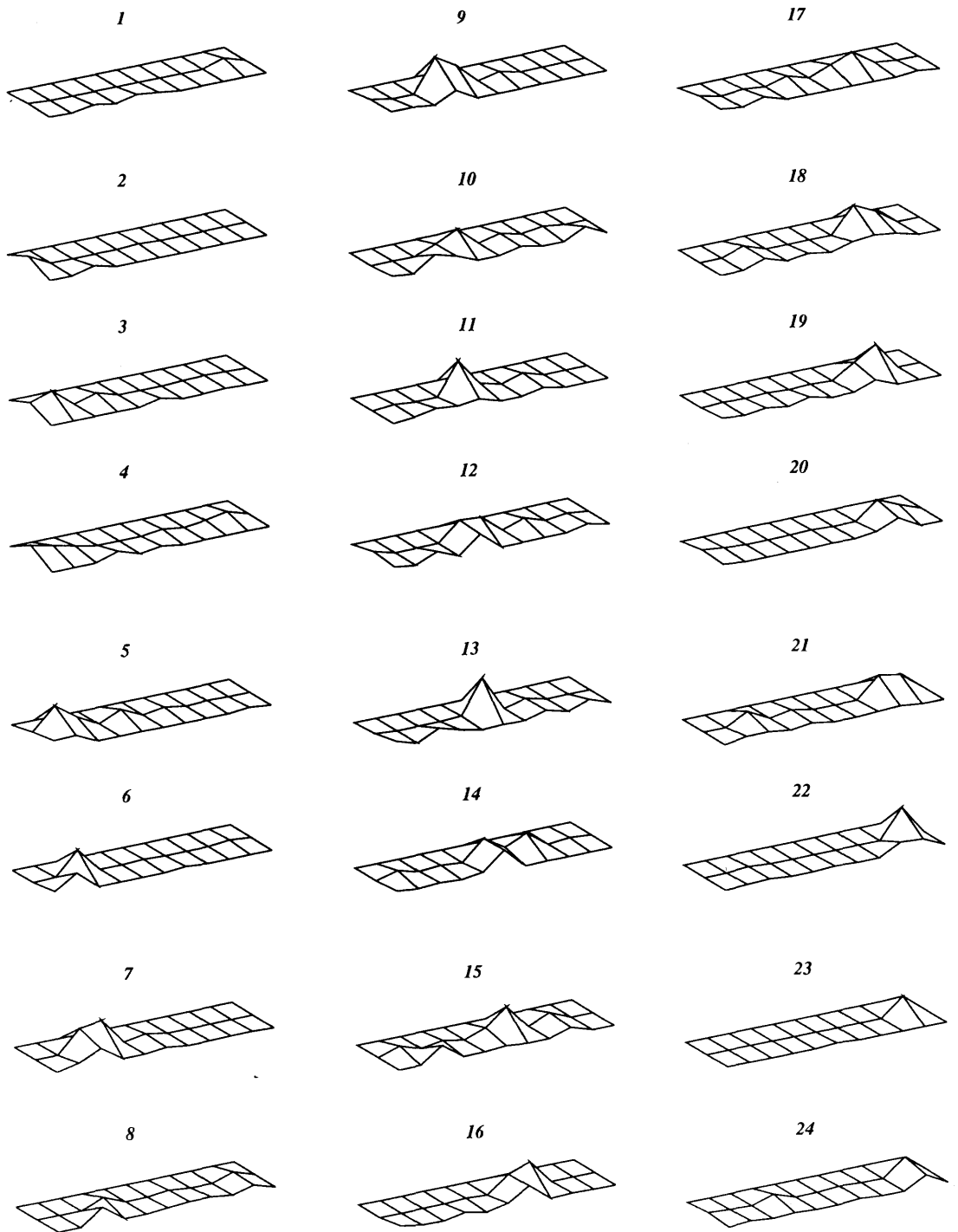


Fig. 6.25 - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0.

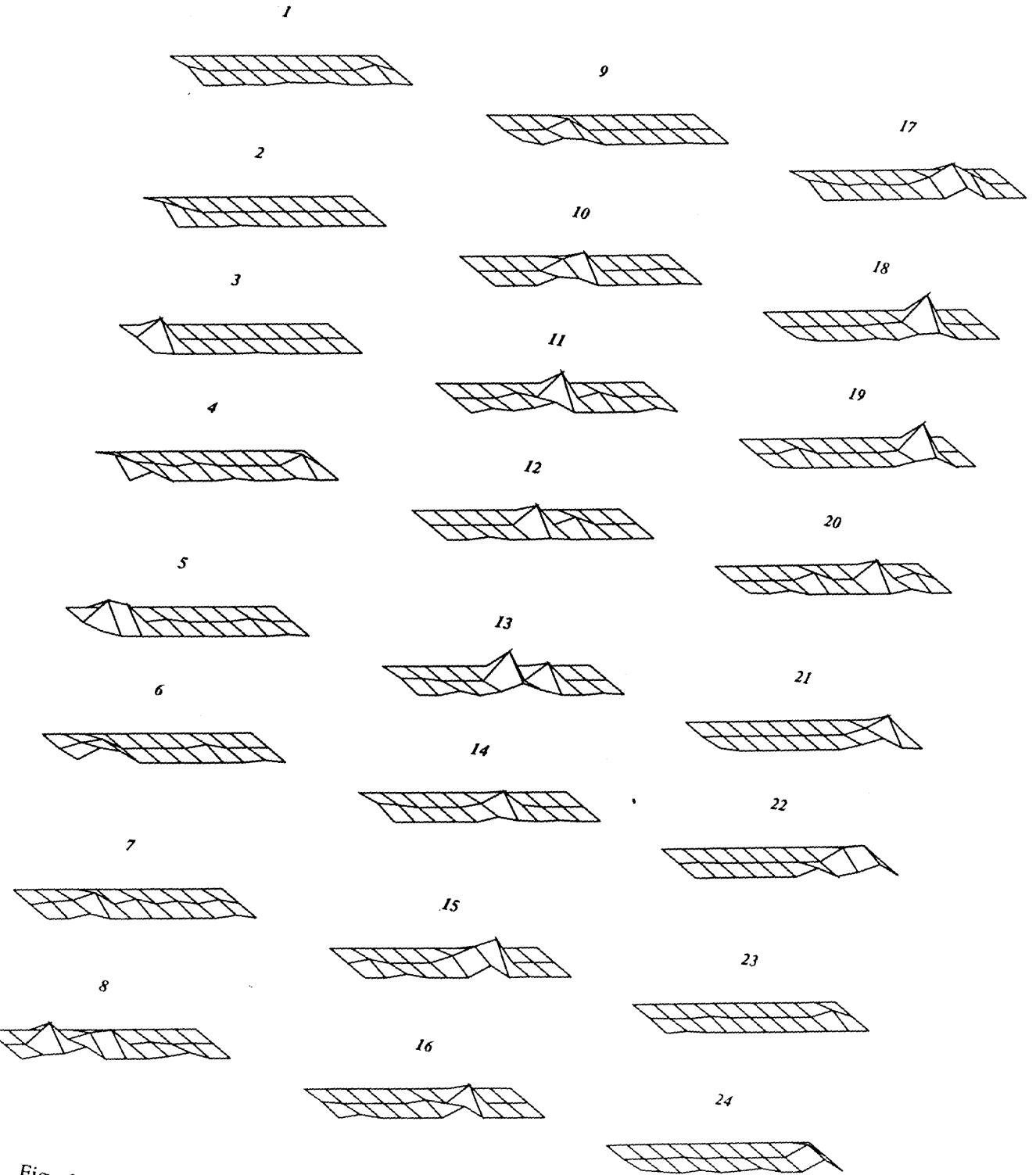


Fig. 6.26a - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato
inversione per la Configurazione 1.

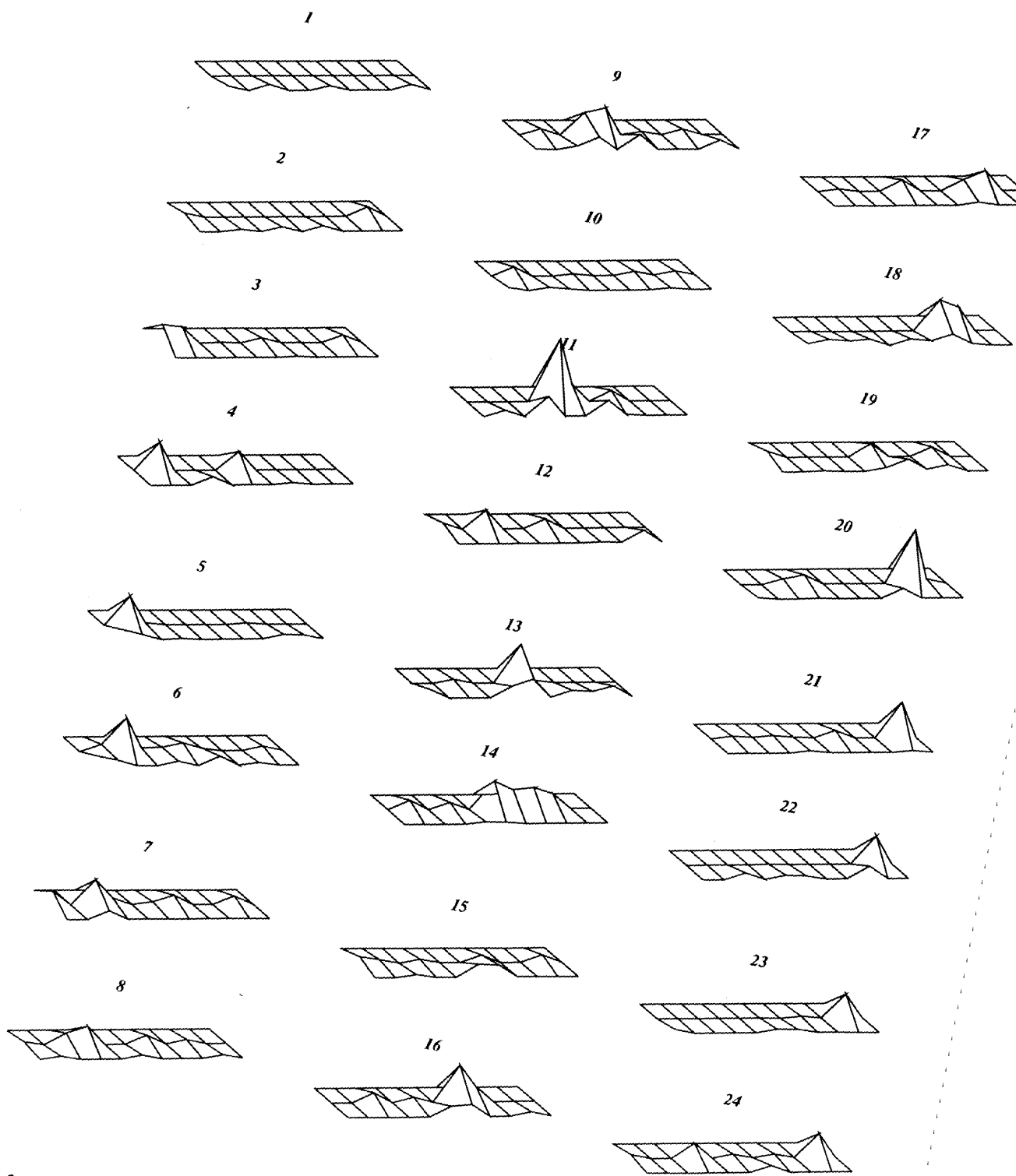


Fig. 6.26b - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 2.

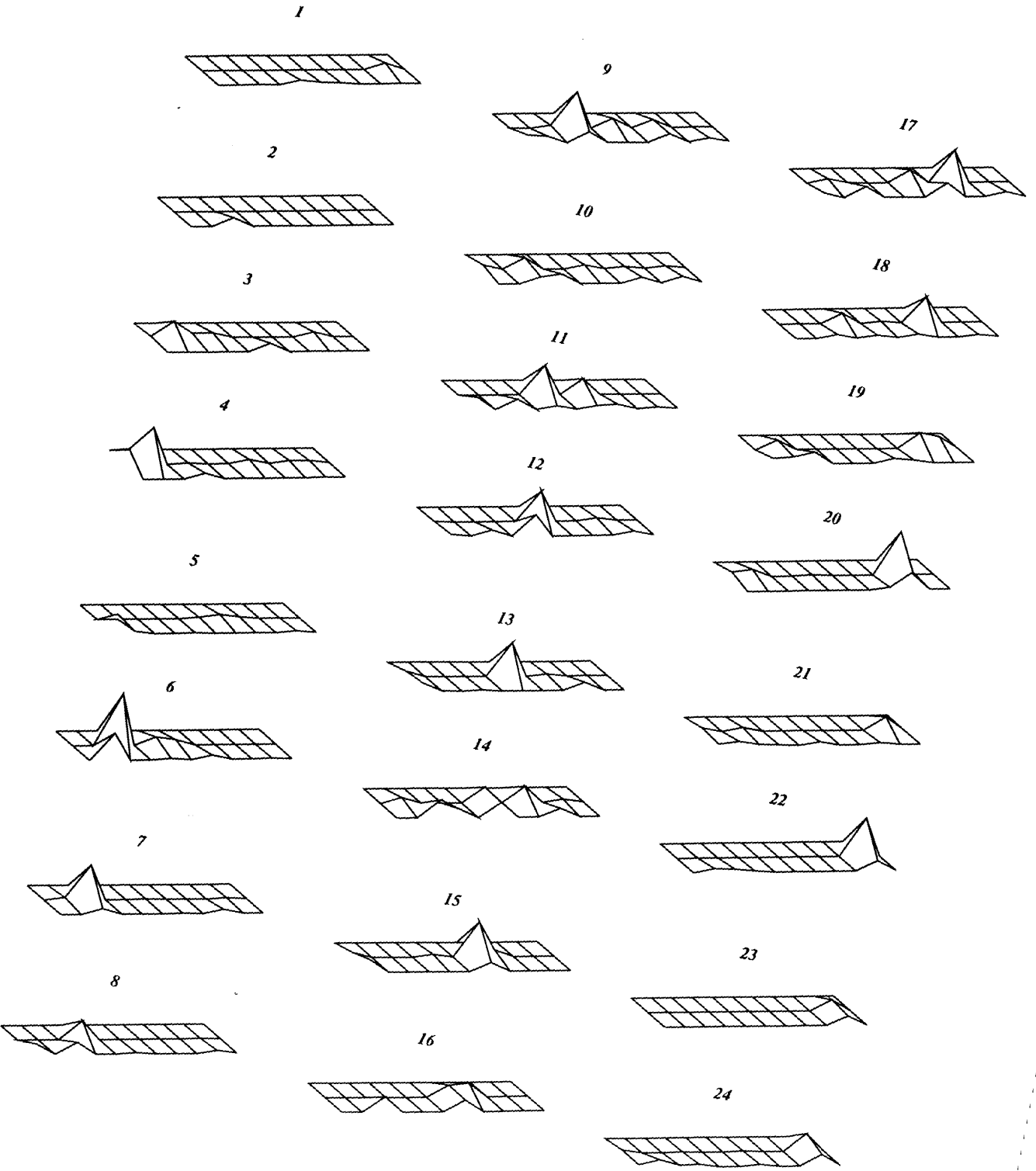


Fig. 6.26c - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 3.

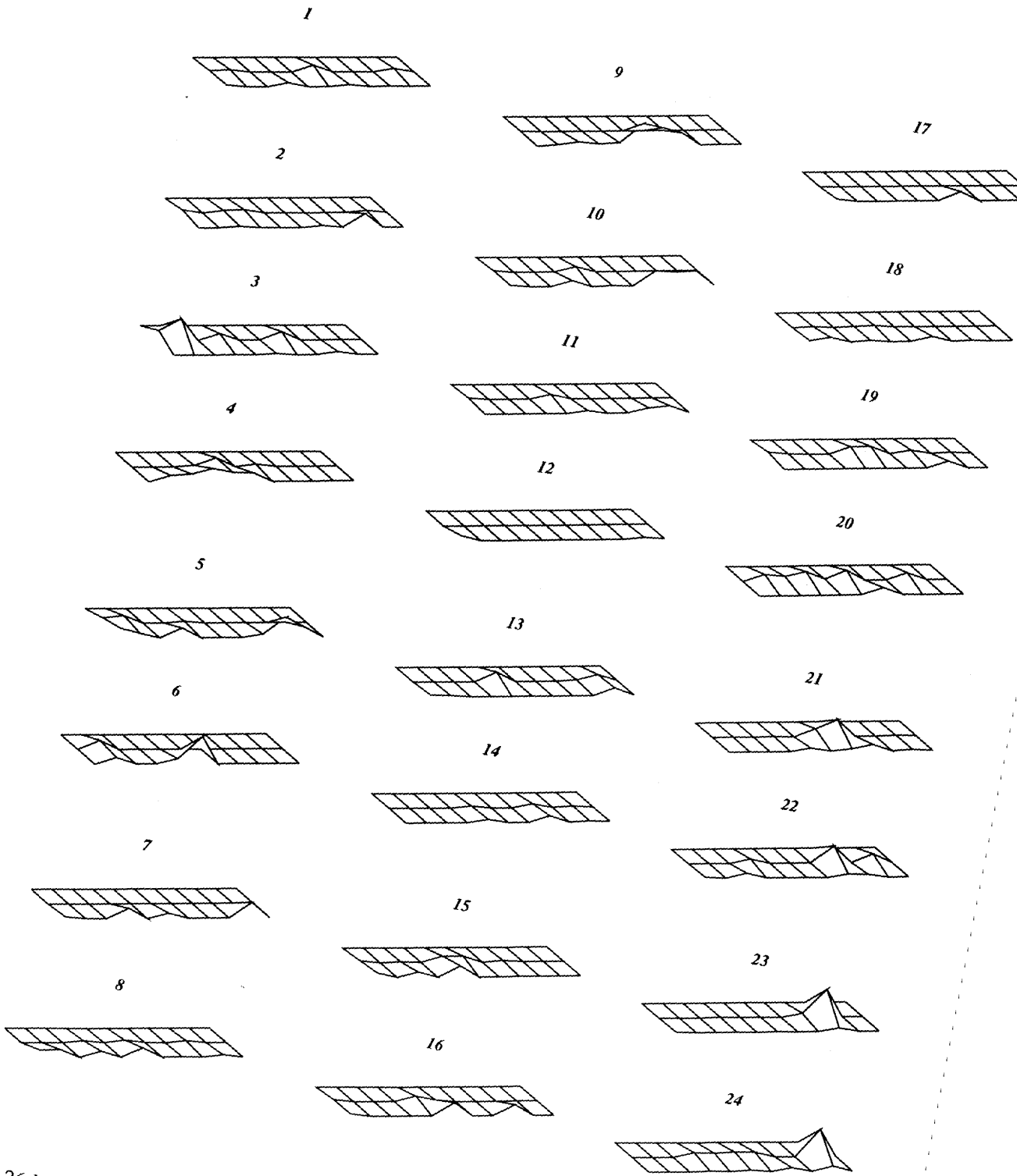


Fig. 6.26d - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 4.

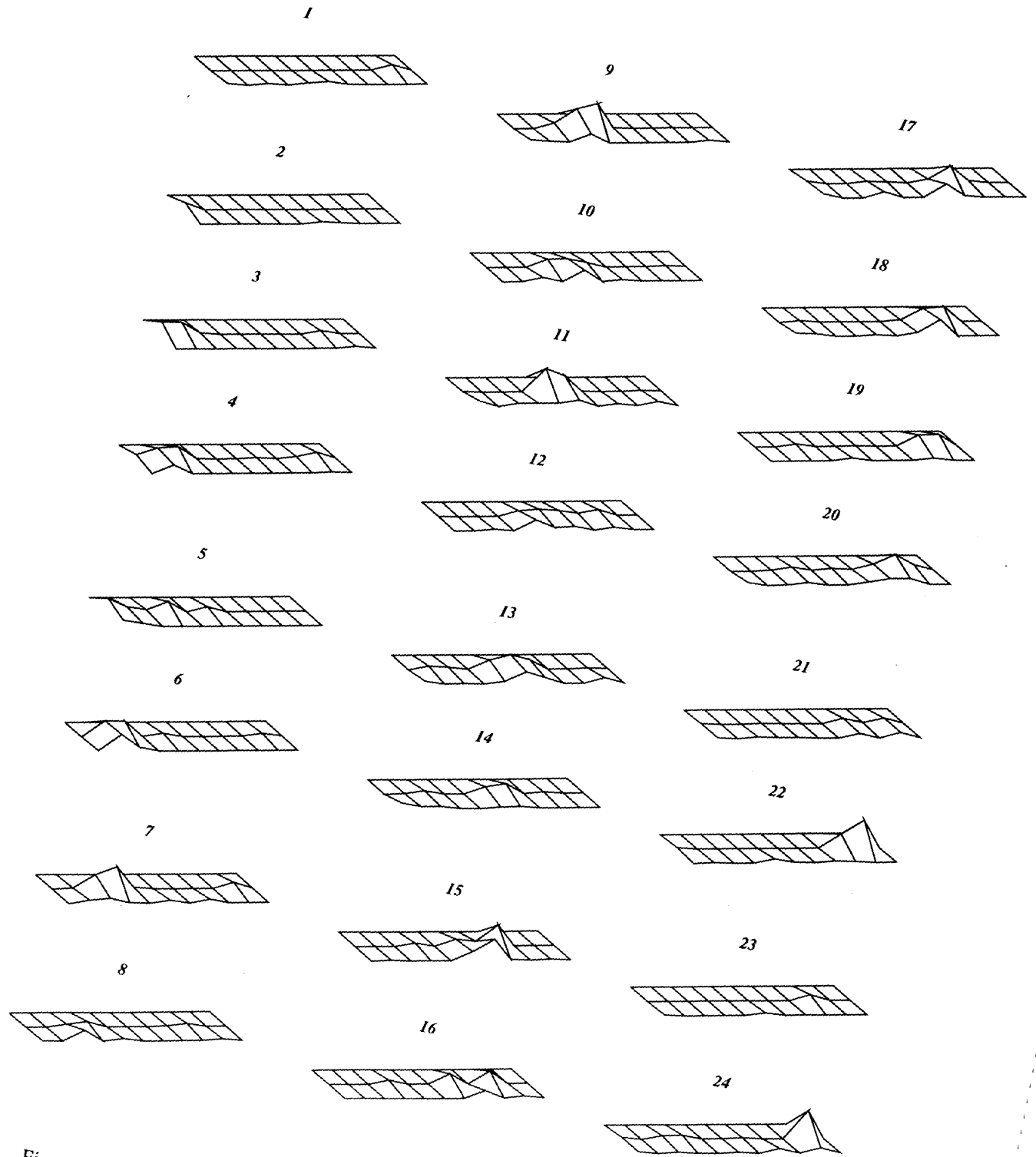


Fig. 6.26e - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato
inversione per la Configurazione 5.

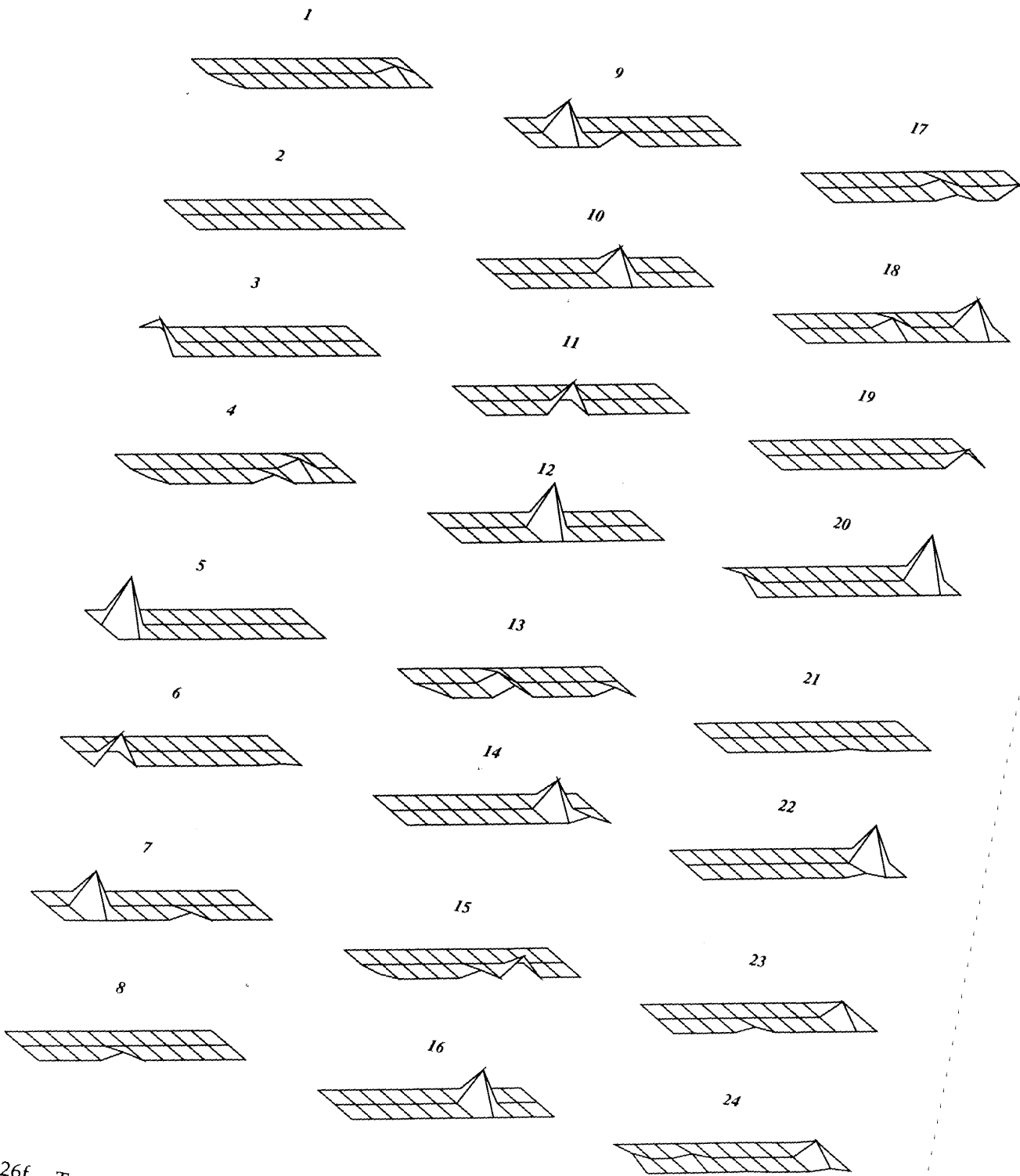


Fig. 6.26f - Test 2 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 6.

Test 3 I risultati ottenuti dall'inversione fissando il valore del momento sismico totale rilasciato, sono mostrati in fig. 6.27 (a,b,c,d,e,f). Il rilascio di momento è molto ben riprodotto per la Configurazione 0,1,2,3 e non ci sono rilasci di momento precedenti il fronte di rottura. Per la Configurazione 4 le soluzioni non sono migliorate di molto (fig. 6.27e) rispetto al test 2.

I valori della norma l_1 relativi a questo test e usando differenti distribuzioni di stazioni sono rappresentati in fig. 6.28. Il valore più basso della norma l_1 , conferma che la migliore distribuzione di stazioni per il caso da noi studiato, è quello della Configurazione 1.

I valori della norma l_1 che abbiamo ottenuto con questo test vincolando il momento, sono aumentati rispetto ai valori ottenuti dal test 2. Ciò è dovuto alla presenza di rumore. Nel test 2 infatti, i valori di l_1 erano molto piccoli ma stavamo invertendo anche per il rumore; nel secondo caso abbiamo ristretto lo spazio entro cui cercare le soluzioni, ma tale restrizione è necessaria per essere il più vicino possibile al processo fisico reale.

In questo caso, ciò conferma che una soluzione stabile non corrisponde sempre alla soluzione vera e che vincoli fisici sono necessari per riprodurre il processo che avviene alla sorgente.

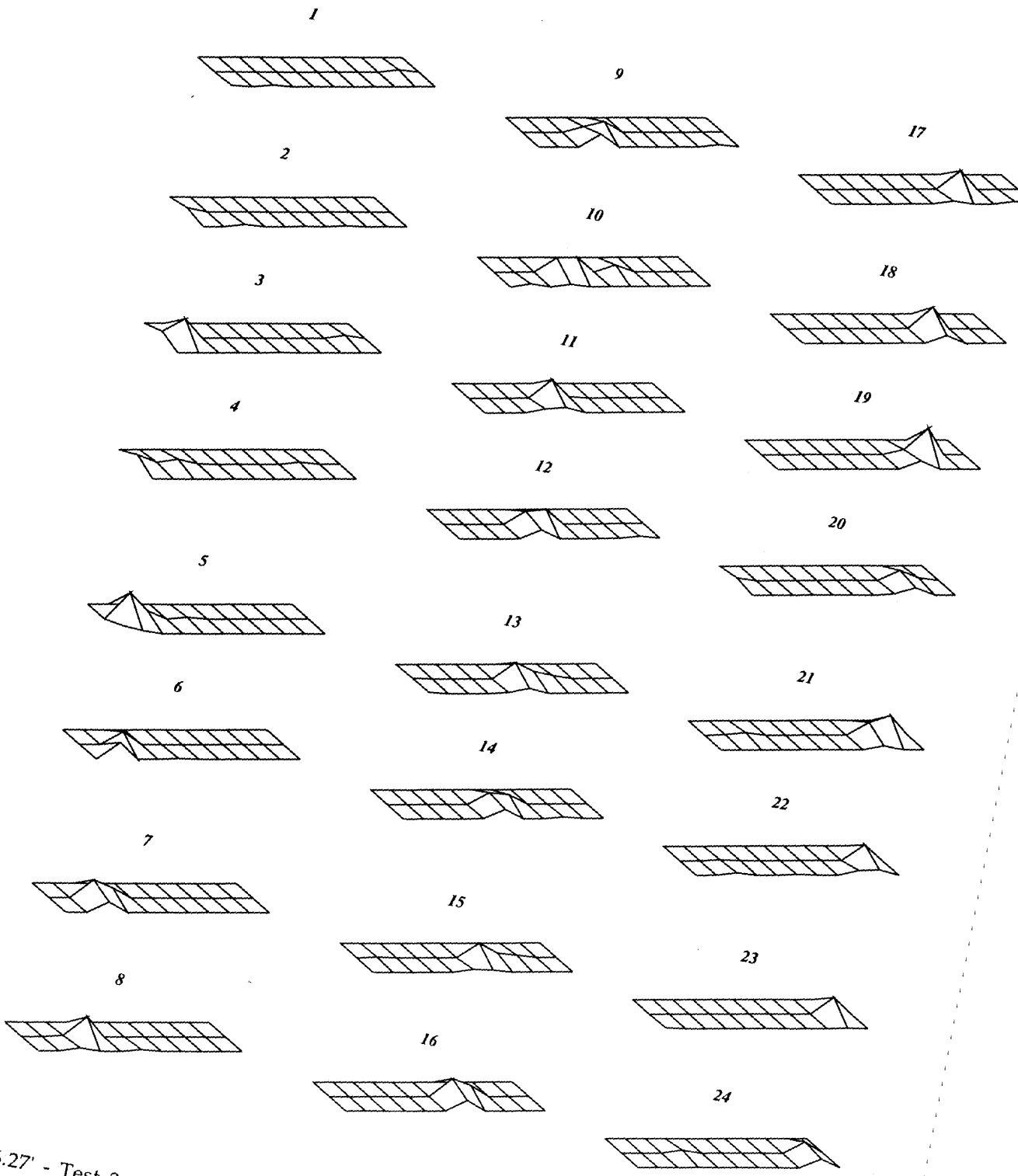


Fig. 6.27' - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

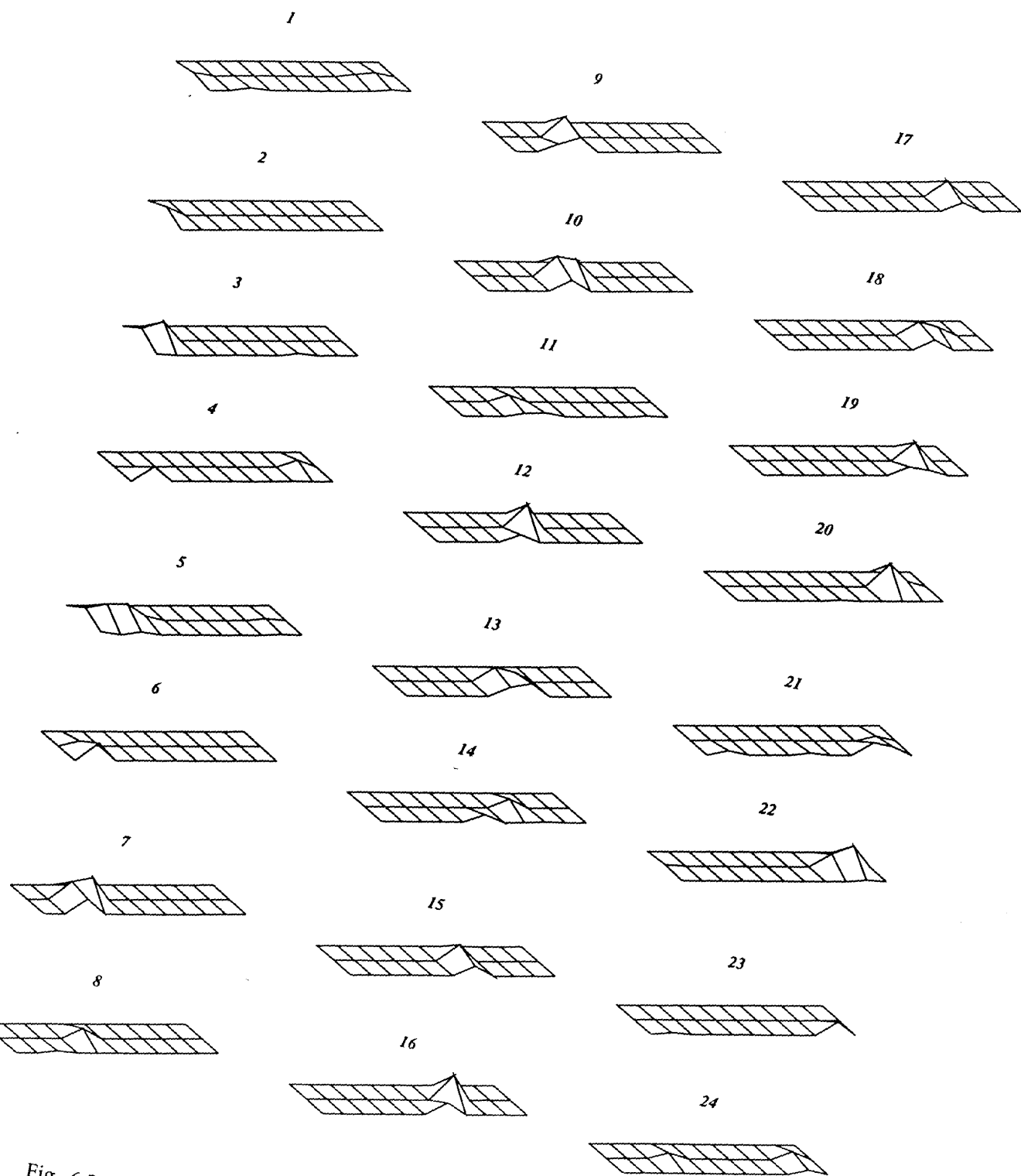


Fig. 6.27a - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 1. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

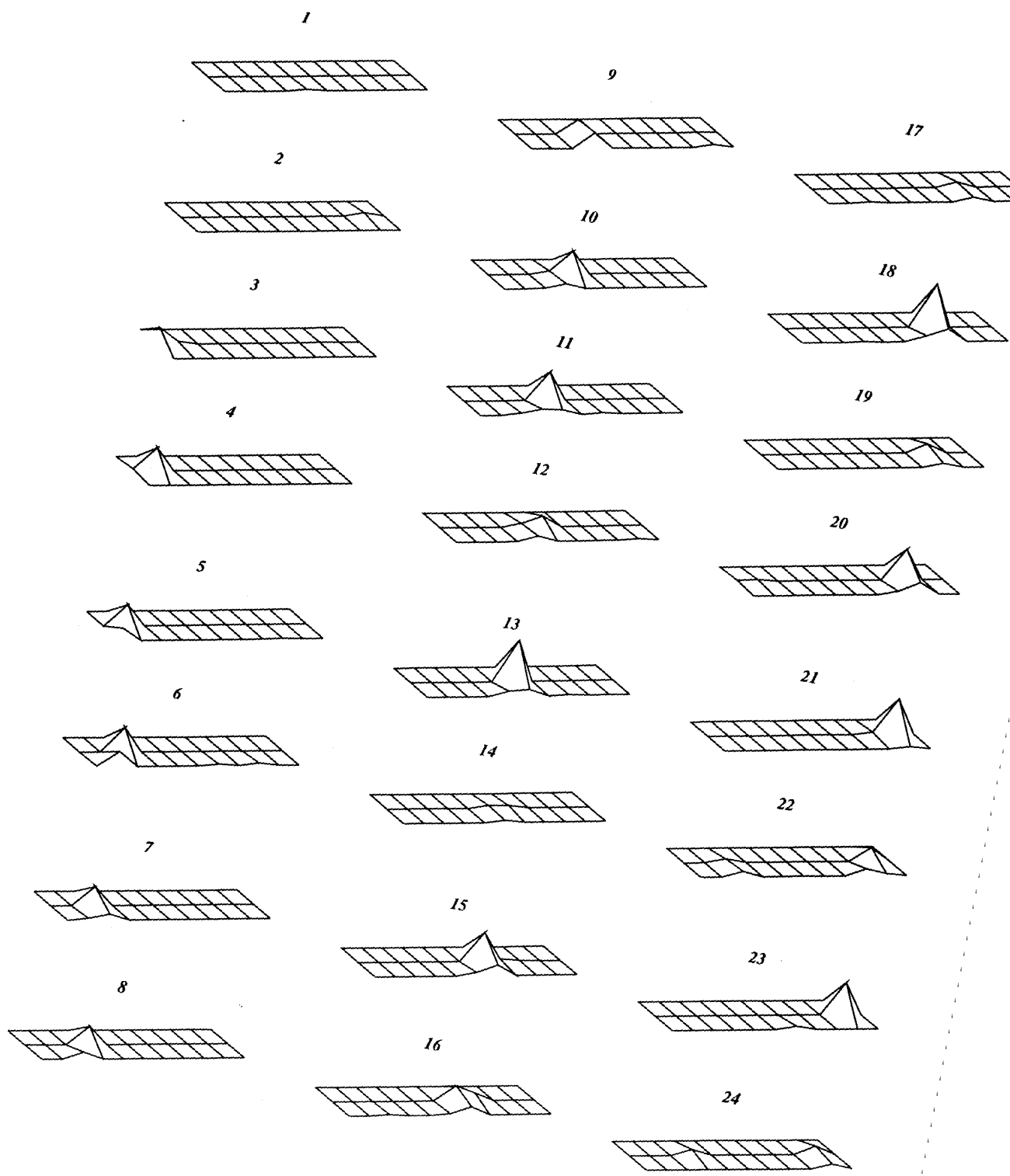


Fig. 6.27b - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 2. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

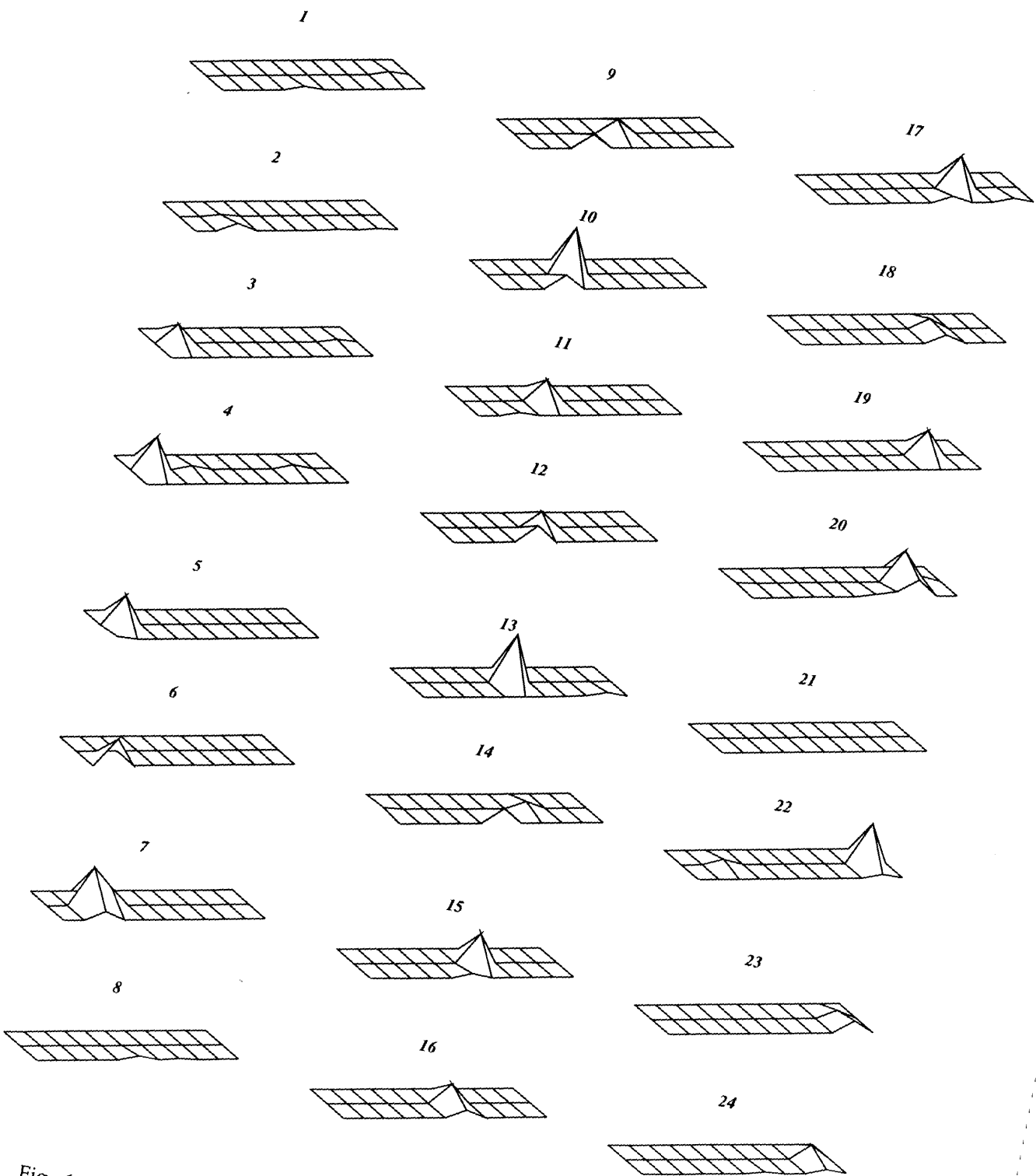


Fig. 6.27c - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato
l'inversione per la Configurazione 3. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

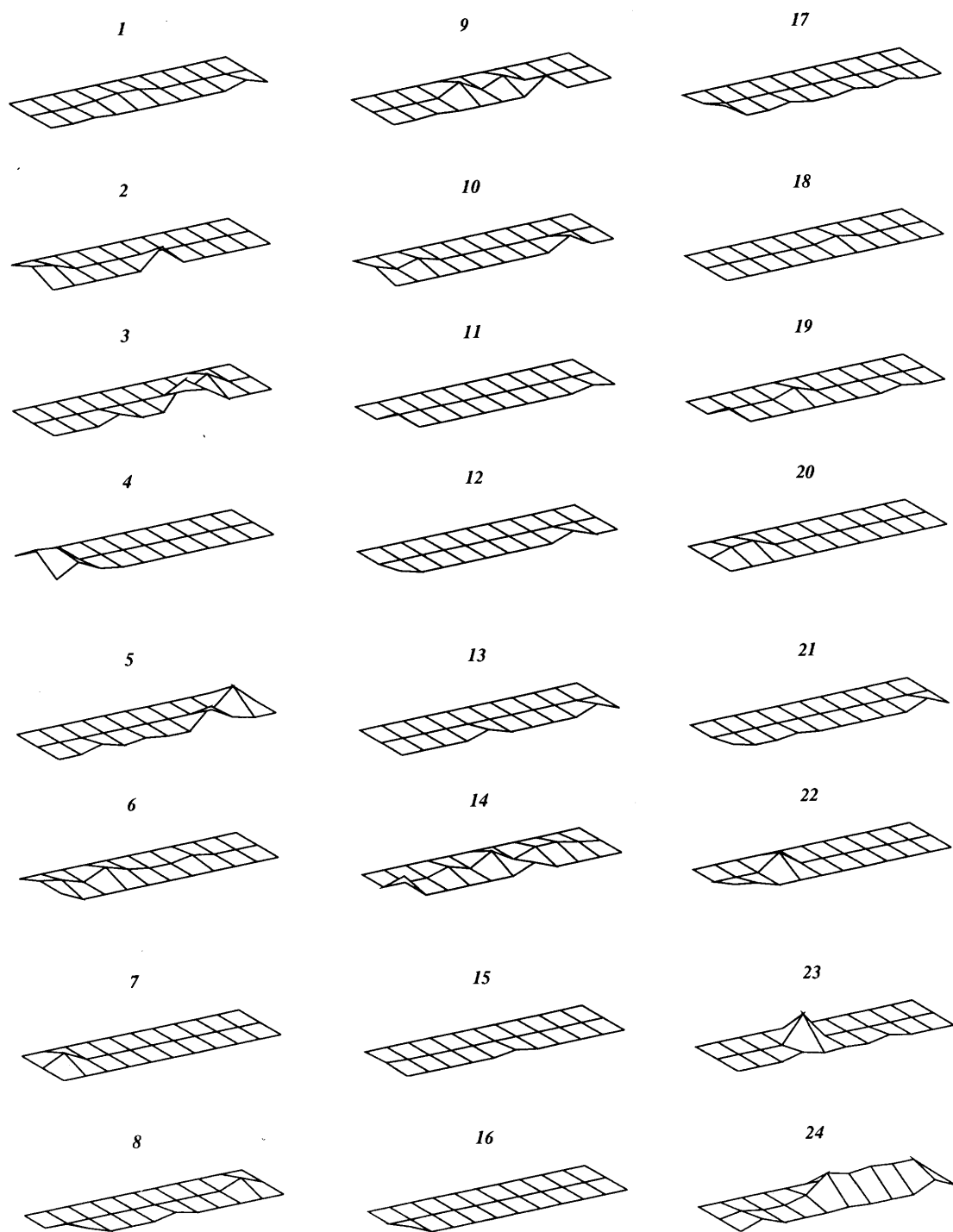


Fig. 6.27d - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 4. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

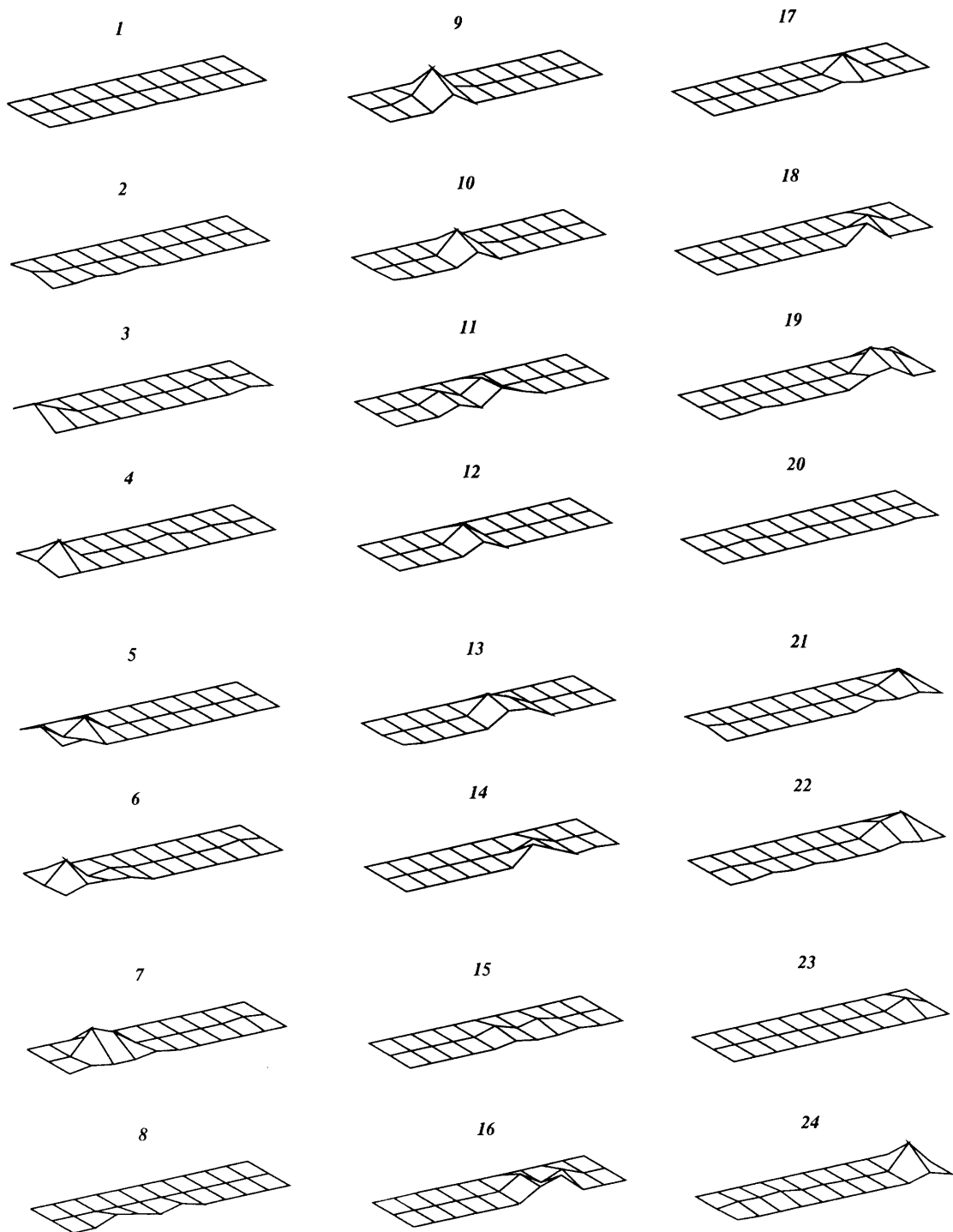


Fig. 6.27e - Test 3 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 5. Si fissa la quantità di momento sismico totale rilasciato.

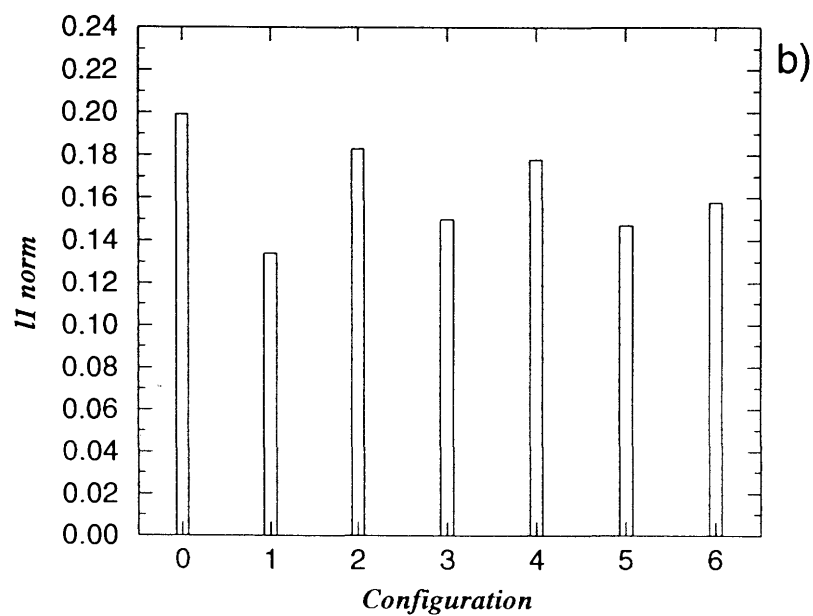
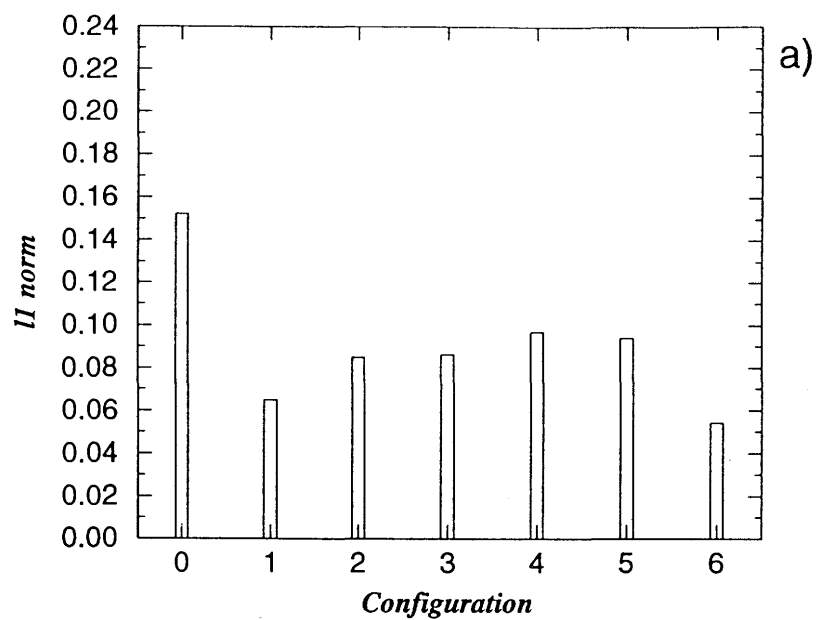


Fig. 6.28 - Andamento della norma l_1 per i vari casi analizzati relativamente ai test 2 (a) e test 3(b)

Test 4 . Un aspetto indesiderato del test 2 è la piccola quantità di energia che viene rilasciata davanti al fronte di rottura. Per eliminare questo effetto, usiamo il vincolo di causalità debole. Le griglie possono scivolare quanto più volte è necessario, si fissa la positività della velocità di scorrimento e il fronte di rottura non può propagarsi più velocemente delle onde P. Con tale vincolo i rilasci davanti al fronte di rottura sono eliminati ma le forme d'onda ottenute dall'inversione non sono più buone come prima.

Riportiamo i sismogrammi e il rilascio di momento per la Configurazione 0 in fig. 6.29 e fig. 6.30. Per le Configurazioni non uniformi riproduciamo gli stessi andamenti del test 3.

Fine/coarse: case_e0

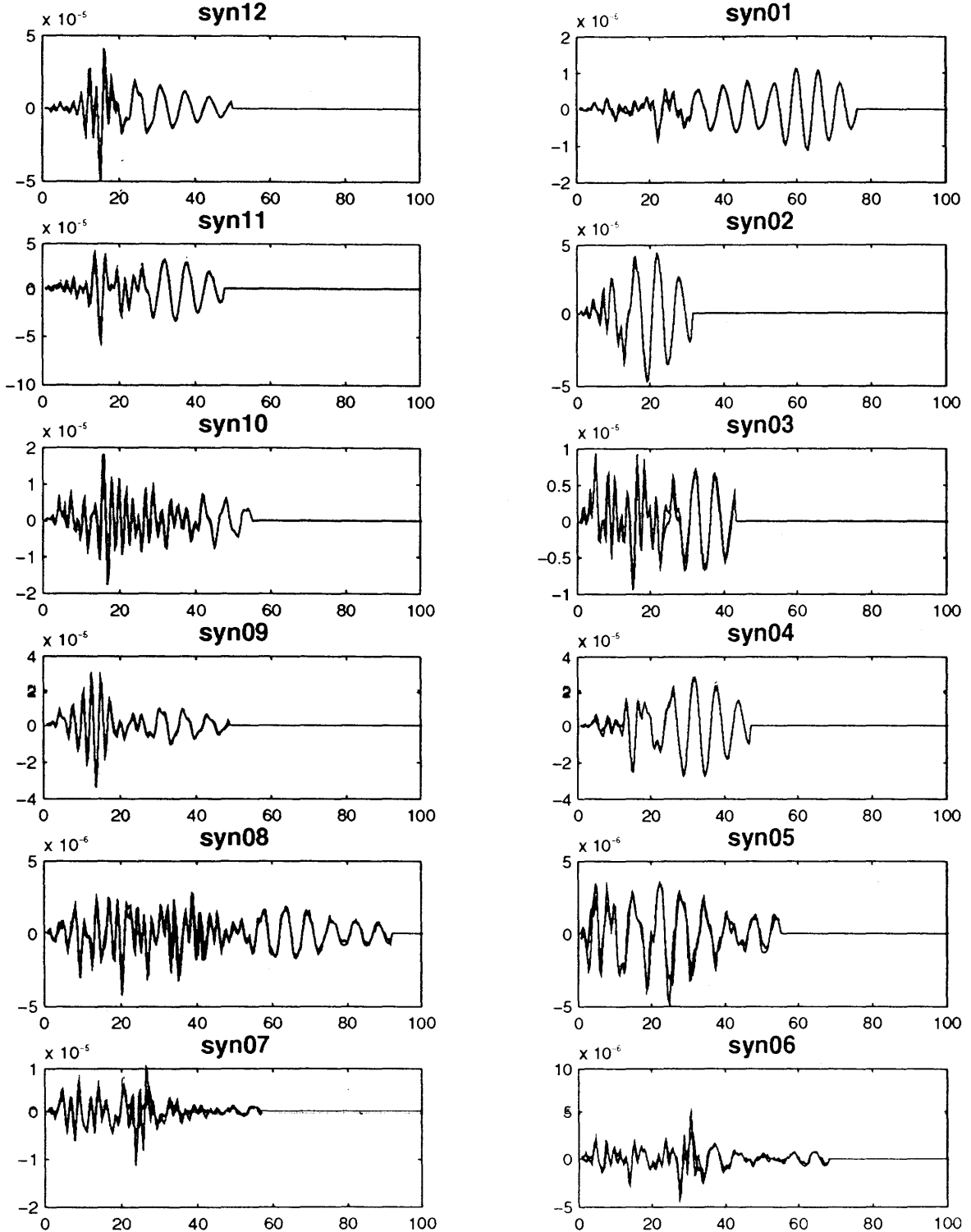


Fig. 6.29 - Test 4 : confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 0. La velocità del fronte di propagazione della rottura è vincolato ad essere inferiore alla velocità delle onde P.

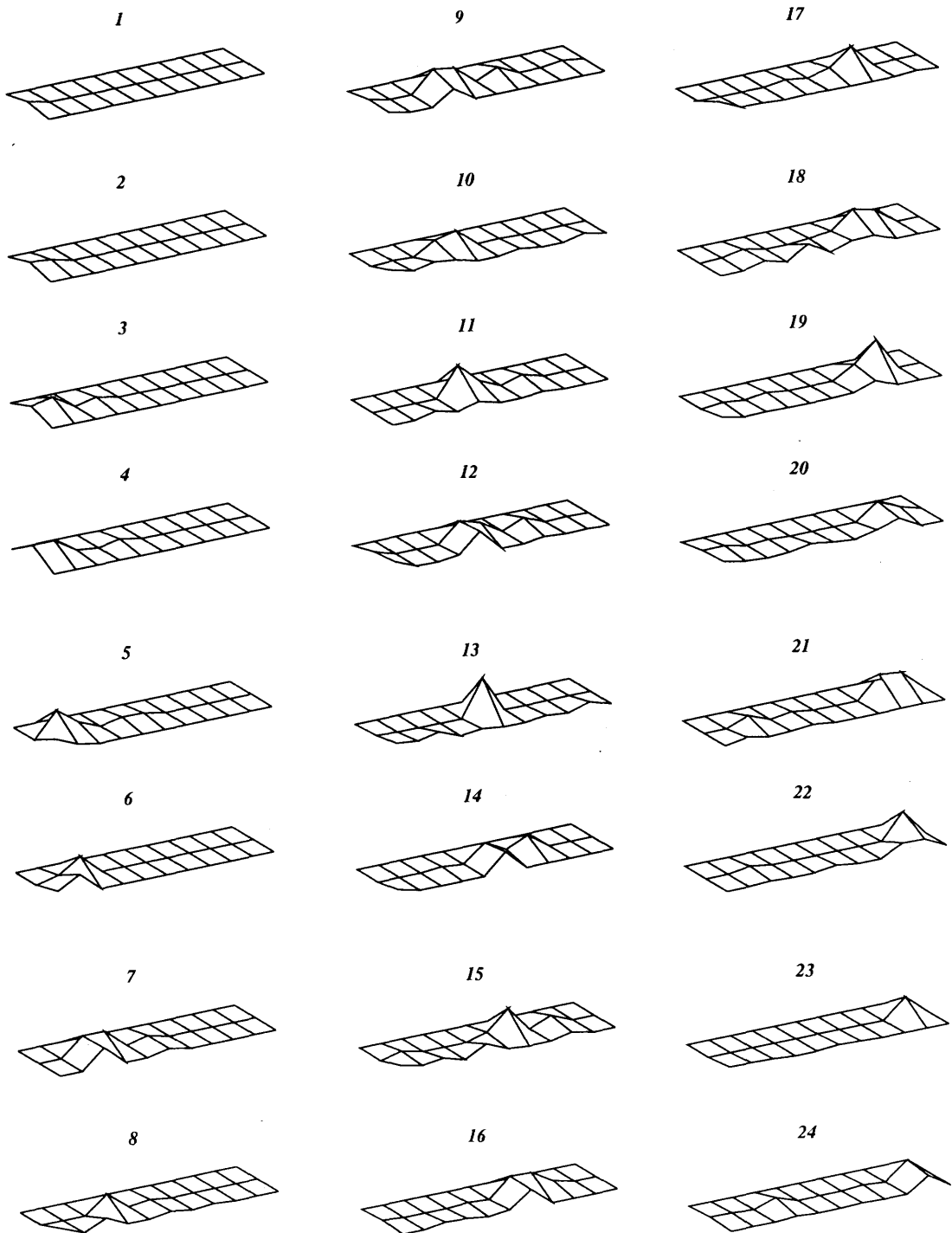


Fig. 6.30 - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0. La velocità del fronte di propagazione della rottura è vincolato ad essere inferiore alla velocità delle onde P.

6.6 Inversione usando una struttura differente nel modello diretto e nel modello inverso

L'effetto di un modello strutturale incorretto, così come di un'incorretto modello di faglia (dimensione e profondità) è stato già studiato da Das e Suhadolc (1996) e Das, Suhadolc e Kostrov (1996). Nel loro studio, essi hanno dimostrato come usando sei sole stazioni, il fronte di propagazione della rottura non è riprodotto e dei rilasci energetici sistematici vengono ritrovati anche dietro il fronte di rottura reale in modo da definire un fronte fantasma distinto da quello vero (Das e Suhadolc, 1996).

Qui studieremo l'effetto di un incorretto modello strutturale usato nell'inversione sia per una distribuzione uniforme di 12 stazioni che nei casi di distribuzioni non uniformi. La faglia è modellata con una griglia più grossolana di quella usata nel caso diretto e i dati artificiali contengono il 5% (della massima ampiezza) di rumore random aggiunto.

Assumiamo le stesse dimensioni di faglia e la stessa profondità di collocazione del suo limite superiore rispetto alla superficie. I dati artificiali sono calcolati per una griglia con celle di dimensioni 0.25 km e con un passo di campionamento temporale di 0.098 s, usando la struttura che indicheremo come M1 e rappresentata in fig. 6.3 dal tratto continuo. Tutti i parametri relativi a questo caso sono riportati in Tabella 6.

Test 1 - Il modello di faglia nell'inversione ha la stessa dimensione nel modello diretto, ossia 20 km di lunghezza per 4 km di larghezza, e il limite superiore della faglia è collocato ad una profondità di 5 km.

Vincoliamo la velocità di scivolamento ad essere positiva e lasciamo le griglie libere di scivolare più di una volta. Nessun vincolo di causalità è imposto

TABELLA 6

```

+++++
Modello diretto  celle: 0.250km  numero di celle: 1280 strut.  M1
Modello inverso  celle: 2km          20 strut.  M2
+++++
rumore  caso  eq.  inc.  v. m.  tot. mom
+++++
5%  caso_d0  1758  480  no  7.69
                    si  12.80
5%  caso_d1  833  480  no  11.93
                    si  12.80
5%  caso_d2  925  480  no  9.58
                    si  12.80
5%  caso_d3  1032  480  no  9.28
                    si  12.80
5%  caso_d4  726  480  no  4.97
                    12.82

```

STATISTICA

```

+++++
#caso_d0
v. mom  l1  l2  l∞  misfit
no      0.738  0.763  0.627  3.499E-6
si      0.758  0.761  0.606  3.595E-6
-----
#caso_d1
v. mom  l1  l2  l∞  misfit
no      0.715  0.714  0.595  3.311E-6
si      0.717  0.183  0.570  3.323E-6
-----
#caso_d2
v. mom  l1  l2  l∞  misfit
no      0.567  0.660  0.605  2.750E-6
si      0.574  0.656  0.599  2.785E-6
-----

```

#caso_d3

v. mom	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.703	0.730	0.609	5.122E-6
si	0.711	0.730	0.614	5.177E-6

#caso_d4

v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.471	0.507	0.535	4.889E-7
si	0.585	0.632	0.913	6.072E-7

Modello diretto celle: 0.25km numero di celle: 1280 strut. M1 prof 5km
 Modello inverso celle: 2km 20 strut. M2 prof 14km

+++++						
	rumore	caso	eq.	inc.	v.c.	tot. mom
+++++						
	5%	caso_d0	1758	480	no	13.21
					si	12.82
	5%	caso_d1	833	480	no	15.20
					si	12.86
	5%	caso_d2	925	480	no	13.75
					si	12.81
	5%	caso_d3	1032	480	no	16.73
					si	12.80
	5%	caso_d4	726	480	no	10.50
						12.80

STATISTICA

#caso_d0

v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.822	0.848	0.890	3.899E-6
si	0.826	0.849	0.890	3.917E-6

#caso_d1

v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.825	0.875	0.974	3.822E-6

si	0.847	0.879	0.962	3.922E-6

#caso_d2				
v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.745	0.773	0.608	3.616E-6
si	0.751	0.777	0.611	3.647E-6

#caso_d3				
v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.805	0.832	0.937	5.863E-6
si	0.813	0.839	0.894	5.920E-6

#caso_d4				
v. mom.	l_1	l_2	l_∞	misfit
no	0.682	0.689	0.773	7.071E-7
si	0.750	0.754	0.702	7.783E-7
+++++				

sulla velocità del fronte di rottura. Per tutte le distribuzioni di stazioni il confronto tra i sismogrammi che rappresentano i dati artificiali e quelli ottenuti come risultato dell'inversione, ci mostra che i risultati ottenuti non sono buoni e neppure il processo di rottura viene riprodotto. In fig. 6.31 sono mostrati i sismogrammi per la Configurazione 0, in fig. 6.32a il relativo rilascio di momento. Vengono anche riportati i rilasci di momento sismico ottenuti nelle configurazioni 1,2,3,4 (fig. 6.32b,c,d,e).

Test 2 - Il valore del momento sismico totale è fissato e lo stesso modello di faglia usato per l'inversione nel Test 1 è adoperato in questo caso. Le soluzioni ottenute non riproducono né i dati né il rilascio energetico nello spazio e nel tempo (fig. 6.33a,b,c,d,e). In fig. 6.34, riportiamo gli istogrammi per visualizzare l'andamento della norma l_1 per i diversi casi, relativi ai test 1, test 2, test 3, test 4.

Test 3 Ricalcoliamo le funzioni di Green da usare nell'inversione per una profondità del limite superiore della faglia posto a 14 km.

A questa profondità i tempi di arrivo sono confrontabili con quelli ottenuti per il caso diretto. Le soluzioni non si possono riprodurre, anche se si usano diversi vincoli sulle soluzioni. I sismogrammi ottenuti dall'inversione sono molto diversi da quelli considerati come dati artificiali. È possibile tuttavia individuare il fronte di rottura e non si osservano sistematici rilasci precedenti o seguenti il fronte di rottura. Anche se si fissa il valore del momento non migliorano i risultati. In fig. 6.35 (a) riportiamo il confronto per le forme d'onda relative all'inversione per la Configurazione 0, mentre in fig. 6.36 (a,b,c,d,e) sono rappresentati i fronti di rottura ottenuti per le diverse configurazioni.

In questa fase non siamo in grado di riprodurre i dati e il rilascio di momento, se una struttura differente da quella utilizzata per il caso diretto viene adoperata nell'inversione. I risultati non sono buoni neppure nel caso di una copertura azimutale uniforme, come quella della Configurazione 0.

h19: case_d0

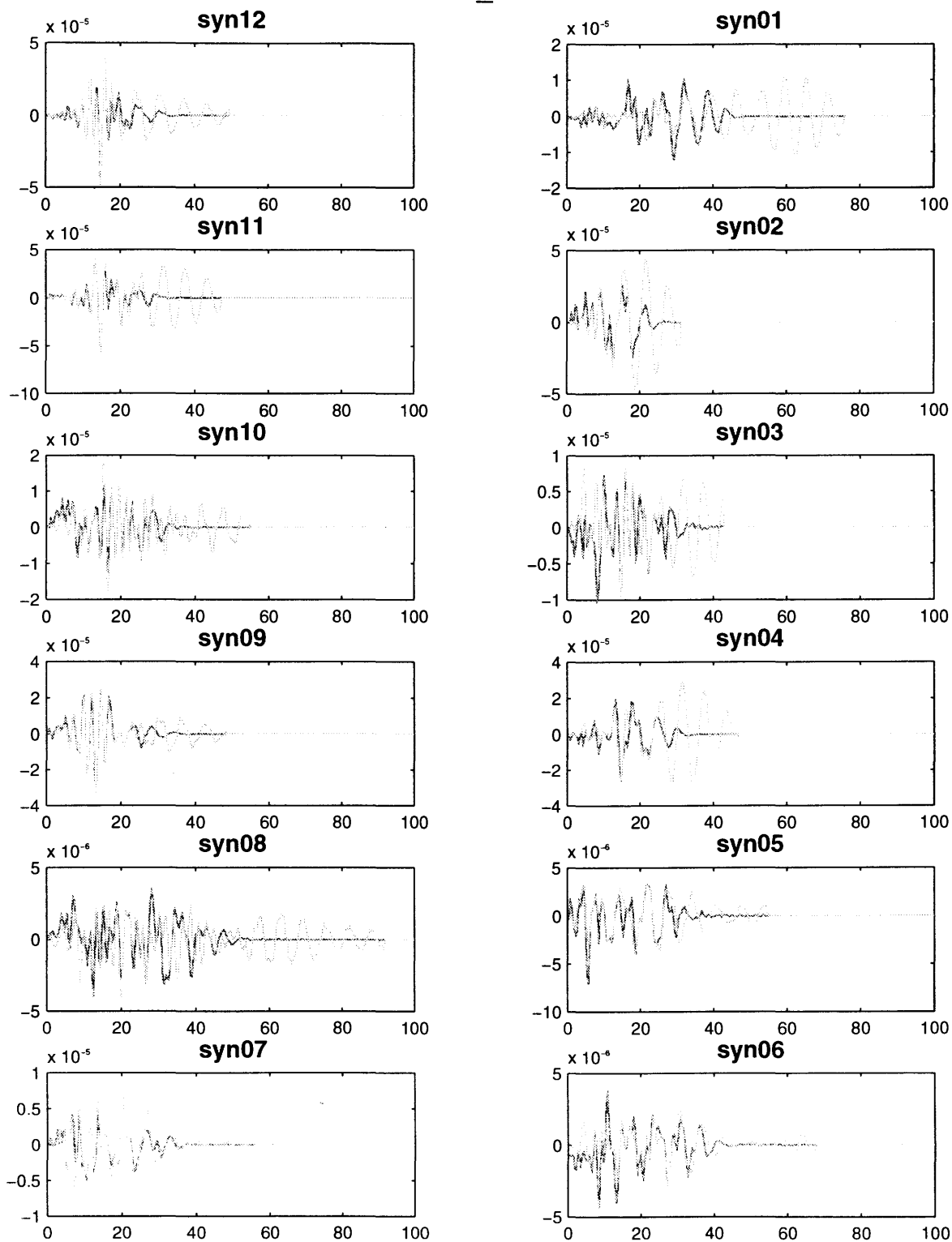


Fig. 6.31 - Test 1 : confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 0. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

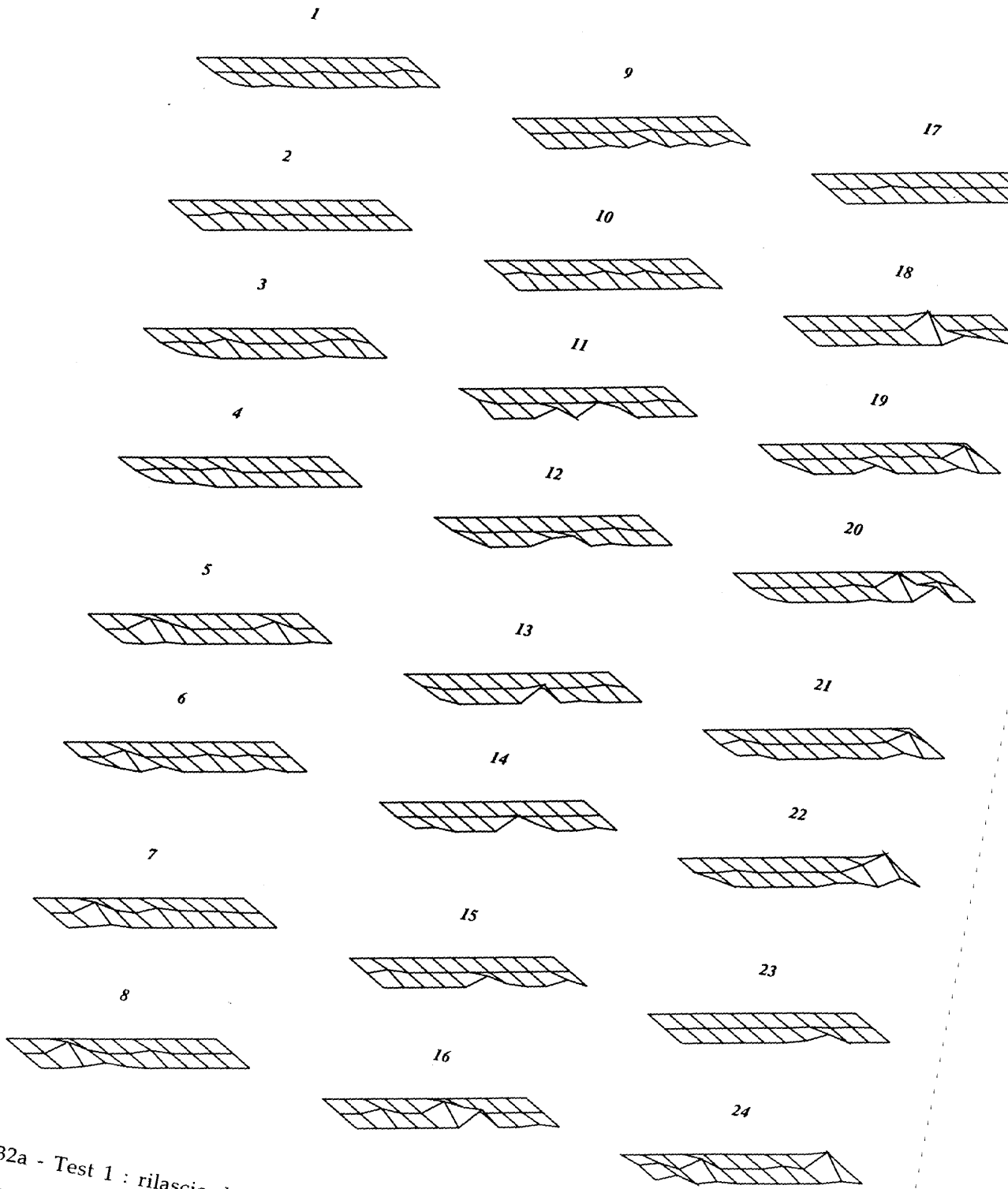


Fig. 6.32a - Test 1 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

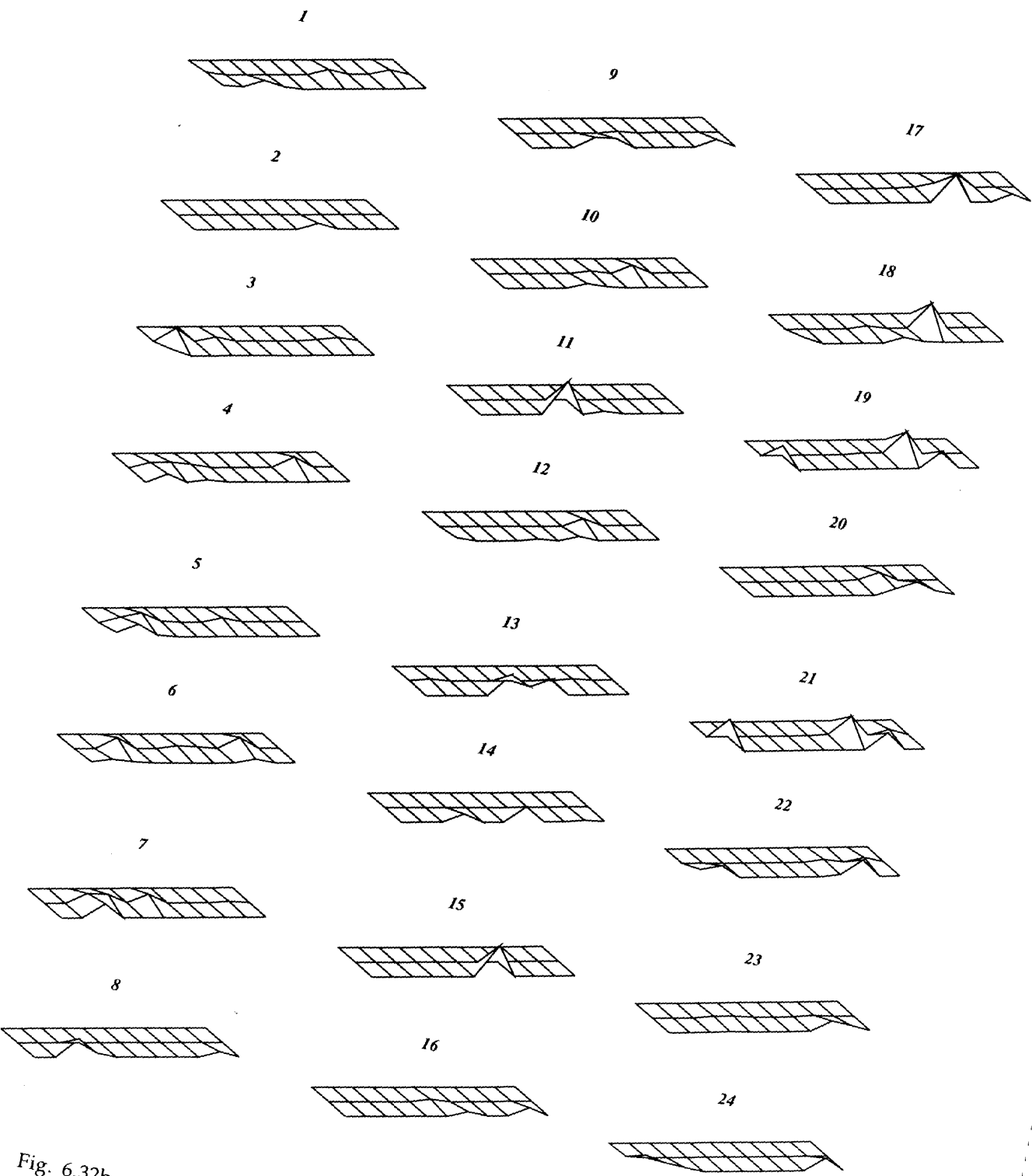


Fig. 6.32b - Test 1 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 1. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al dellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

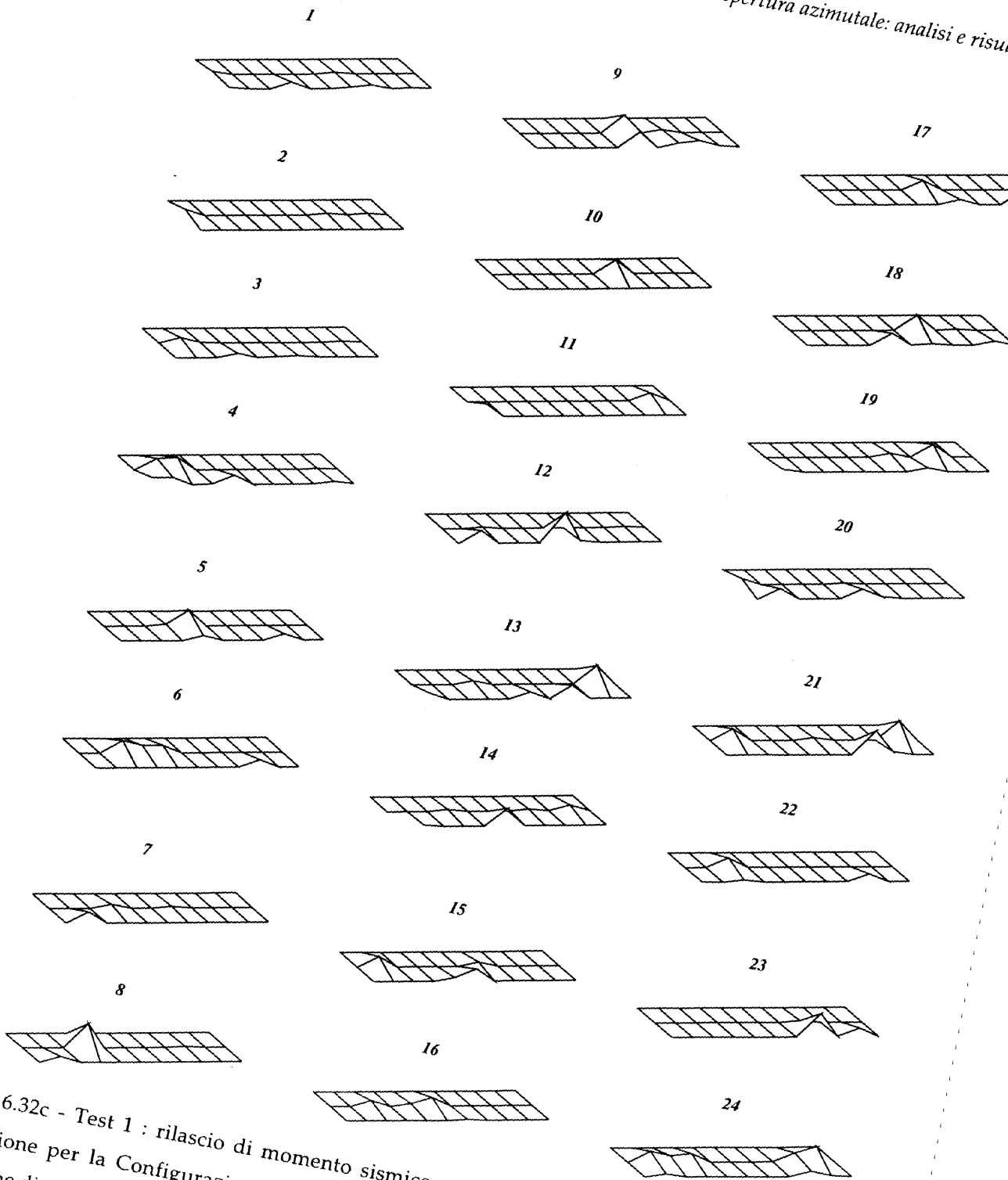


Fig. 6.32c - Test 1 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 2. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

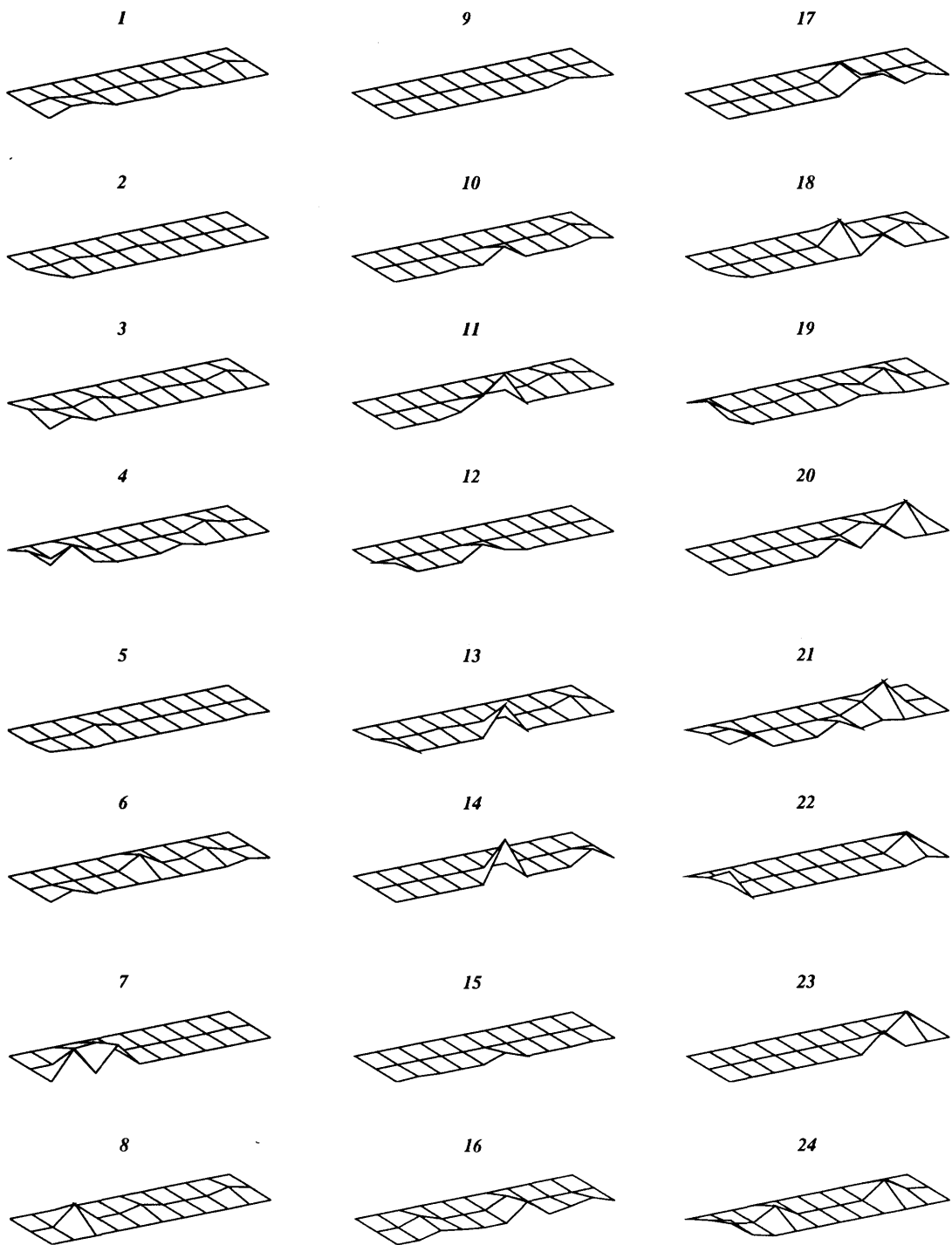


Fig. 6.32d - Test 1 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 3. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

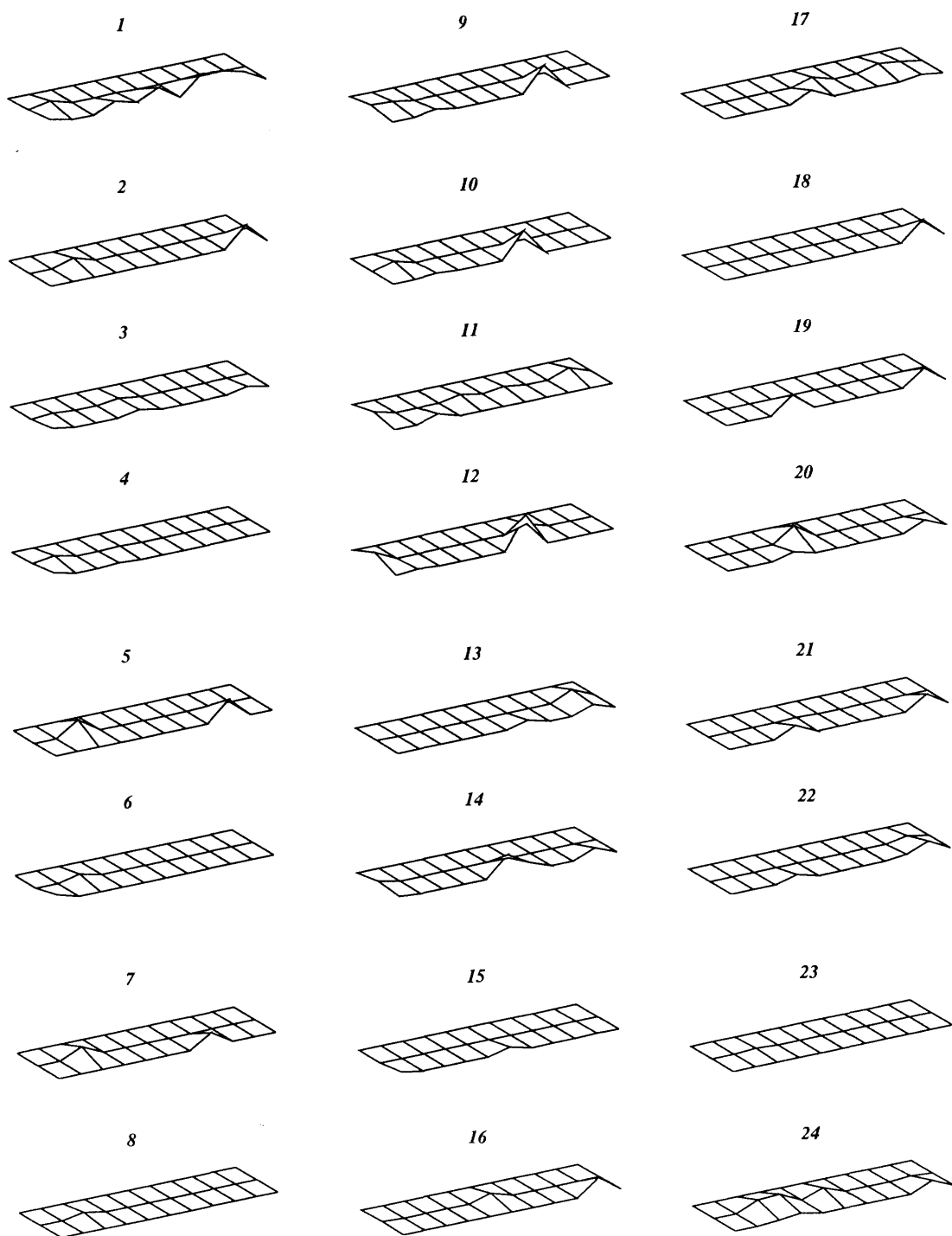


Fig. 6.32e - Test 1 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 4. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso.

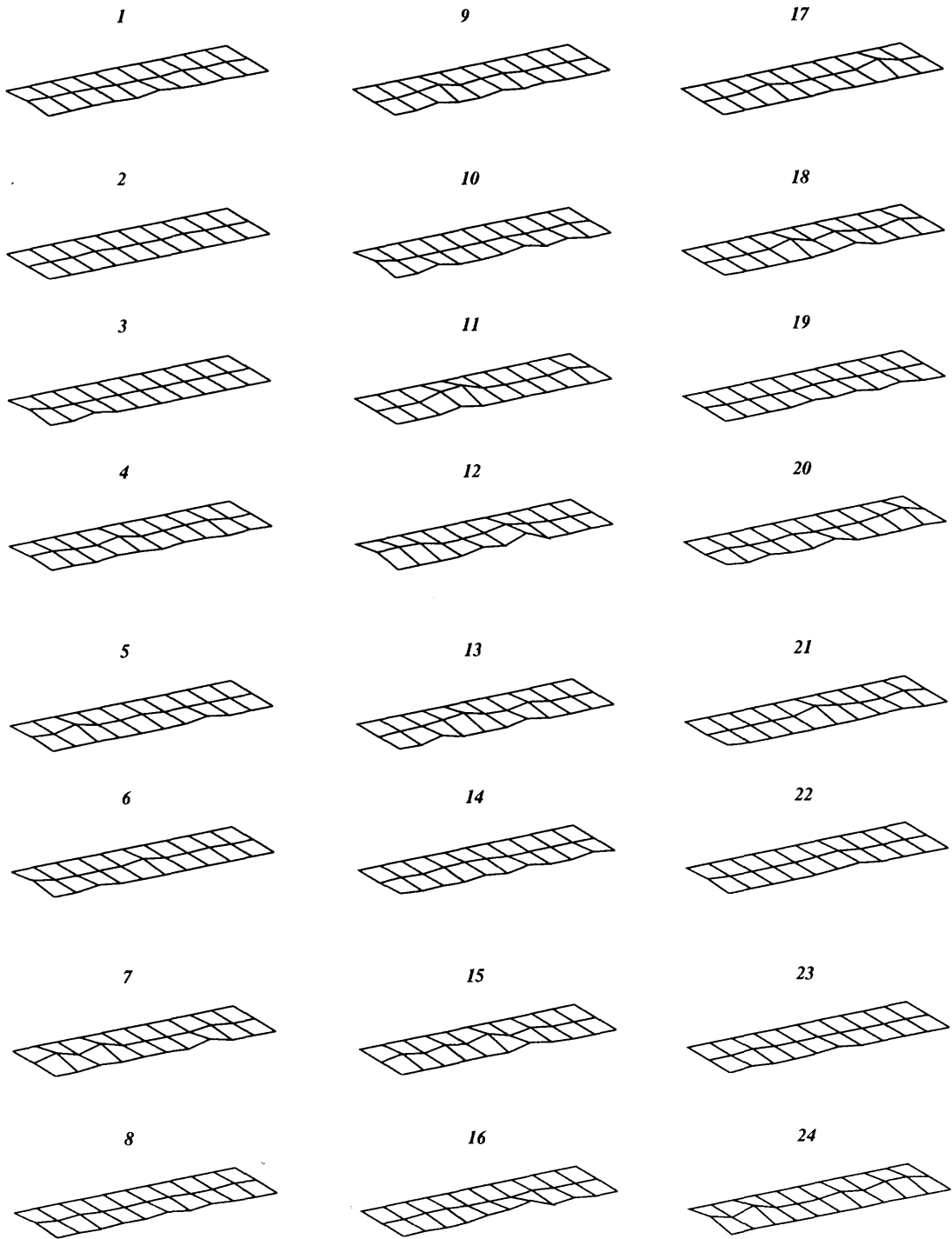


Fig. 6.33a - Test 2 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

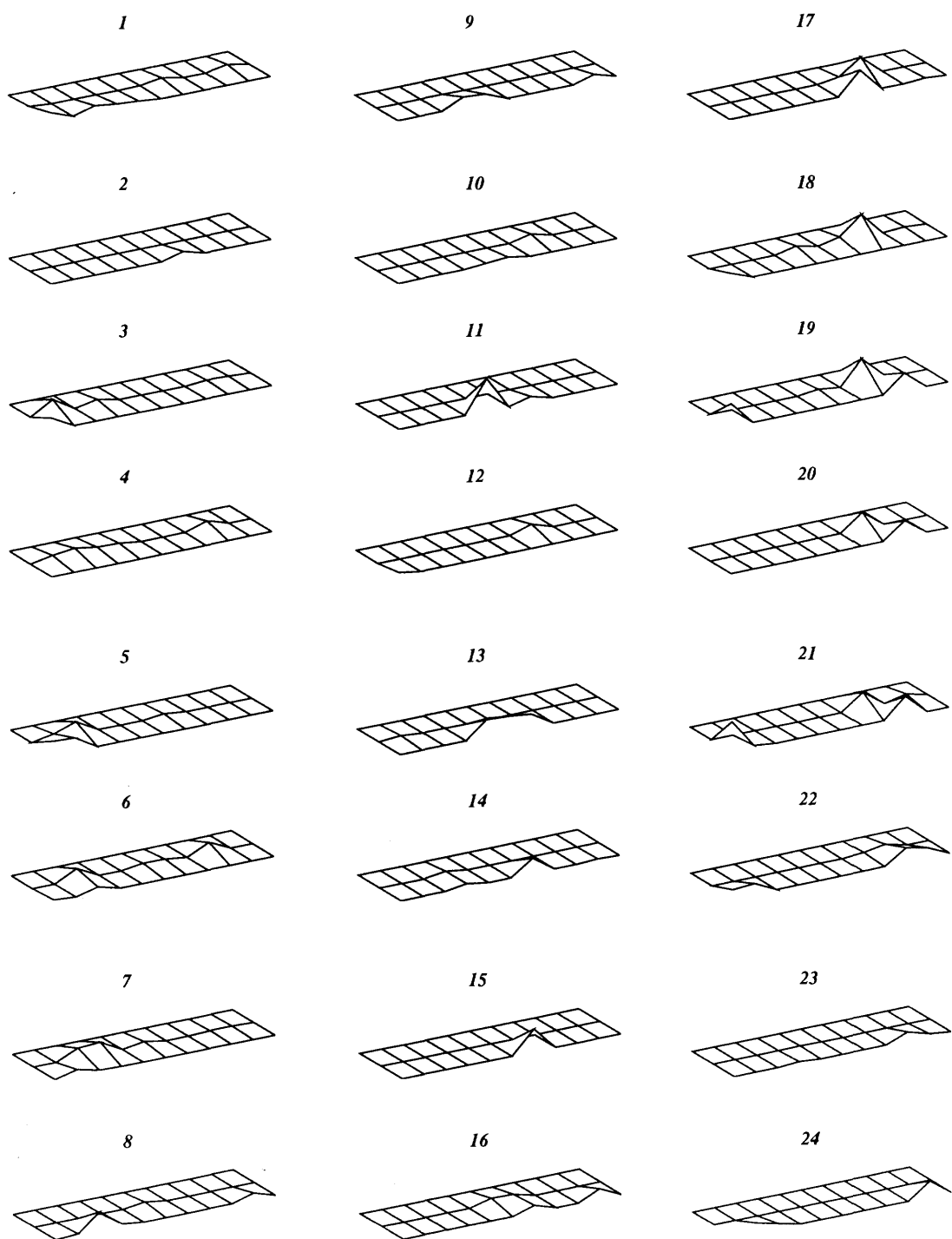


Fig. 6.33b - Test 2 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 1. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

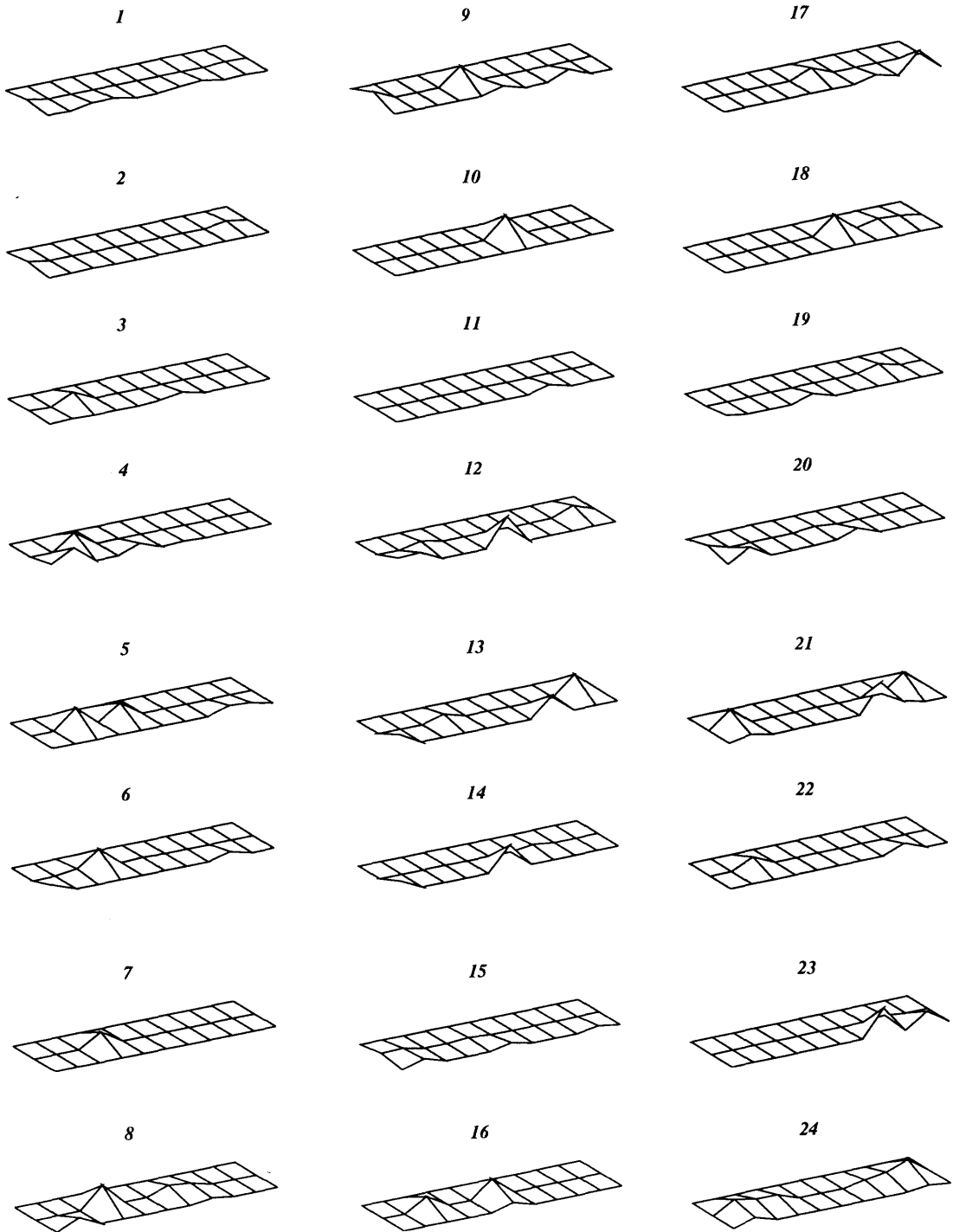


Fig. 6.33c - Test 2 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 2. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

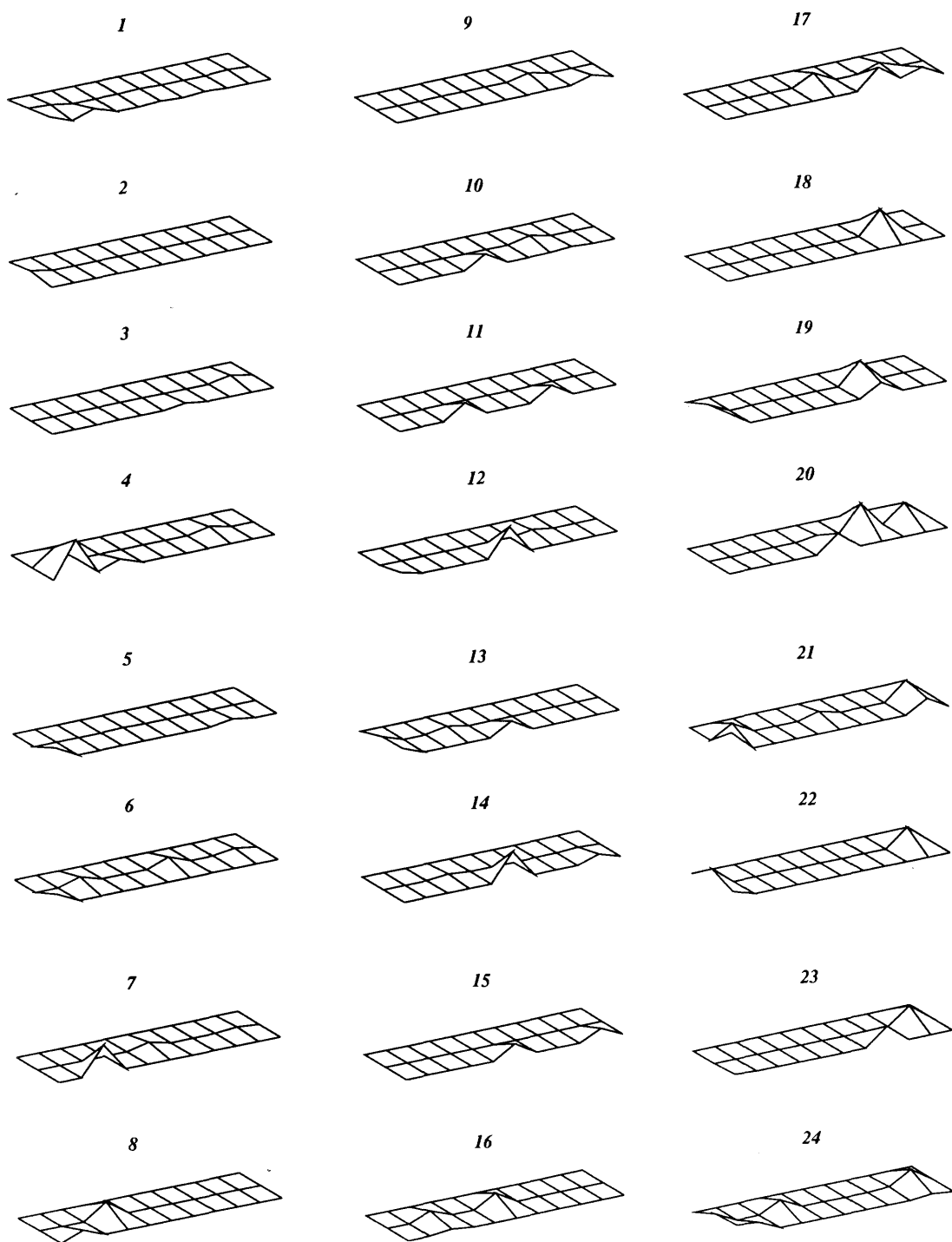


Fig. 6.33d - Test 2 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 3. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

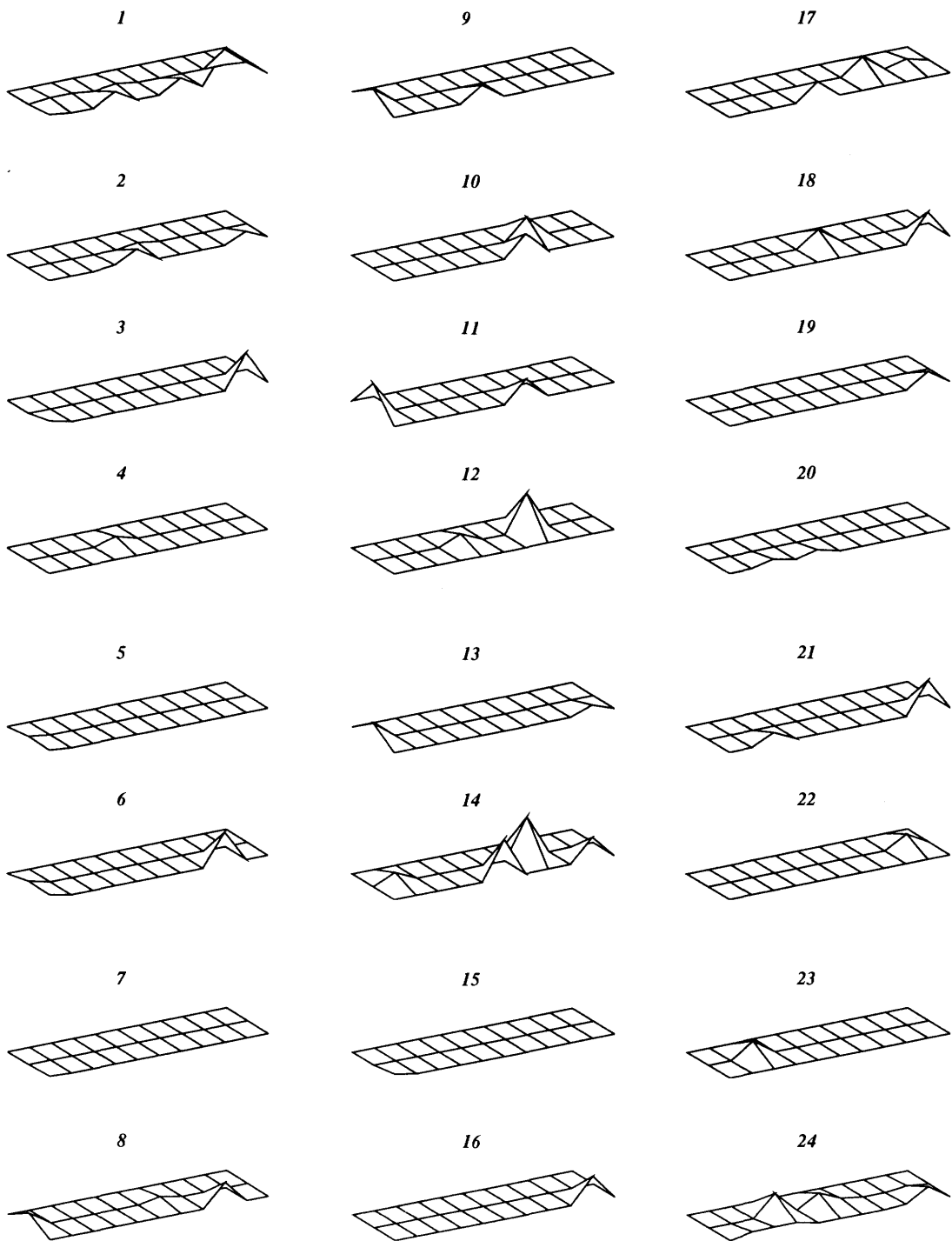


Fig. 6.33e - Test 2: rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 4. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

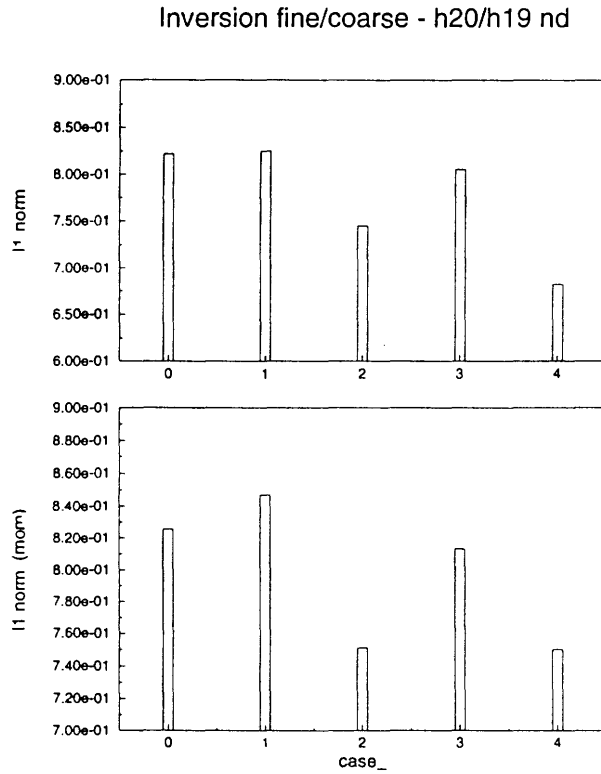
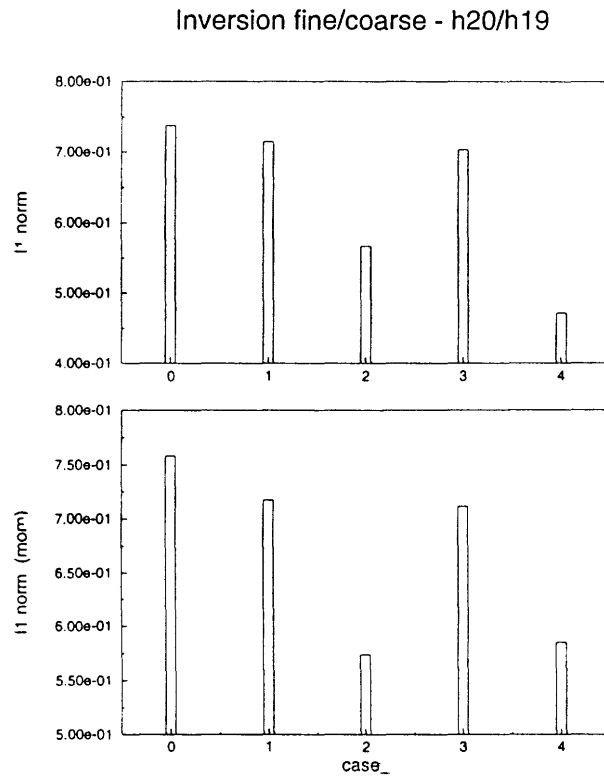


Fig. 6.34 - Istogrammi rappresentanti l'andamento della norma l_1 per i test1, test2, test3 e test4.

h19nd: case_d0

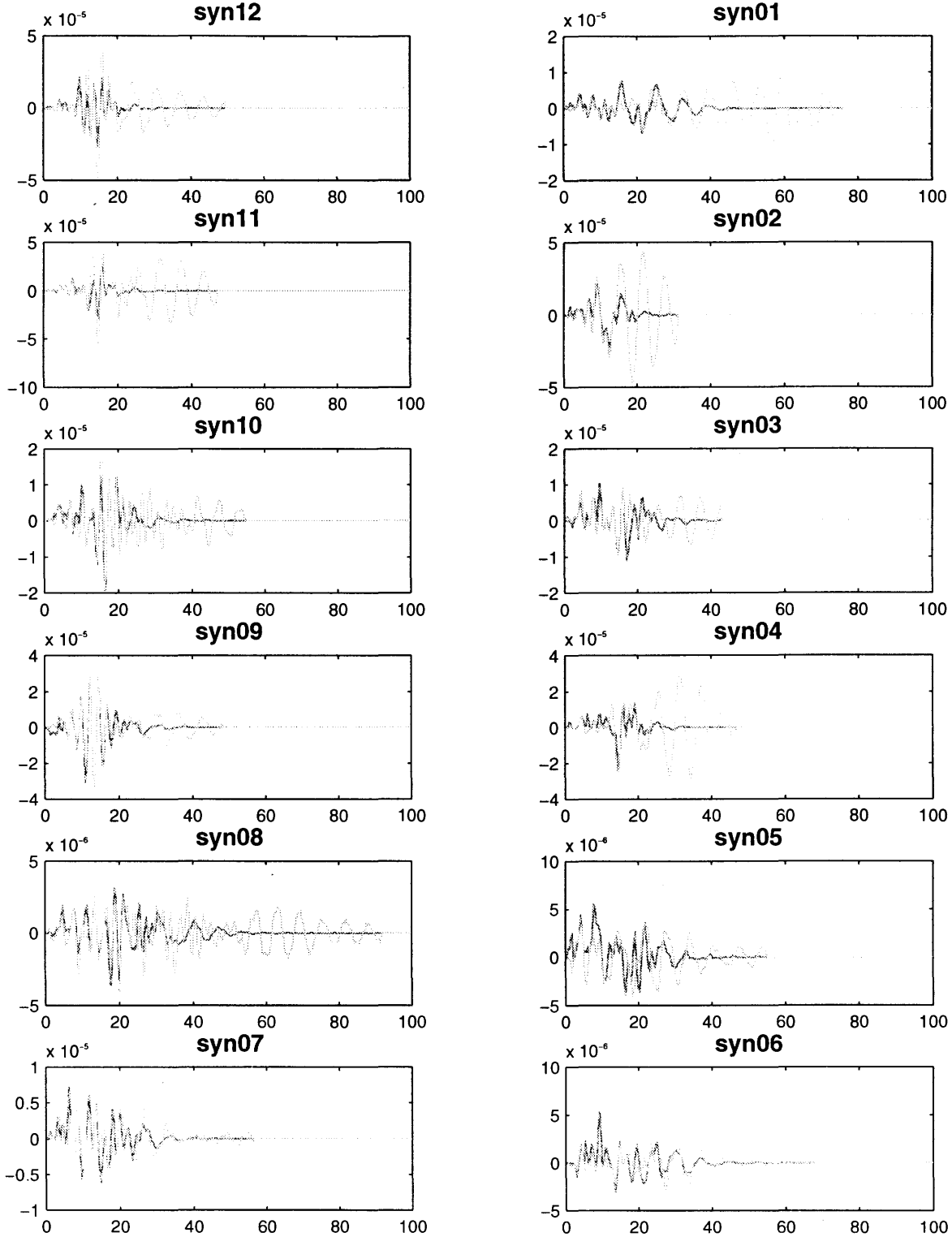


Fig. 6.35 - Test 3 : confronto tra dati artificiali e forme d'onda ottenute dall'inversione per la Configurazione 0. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km.

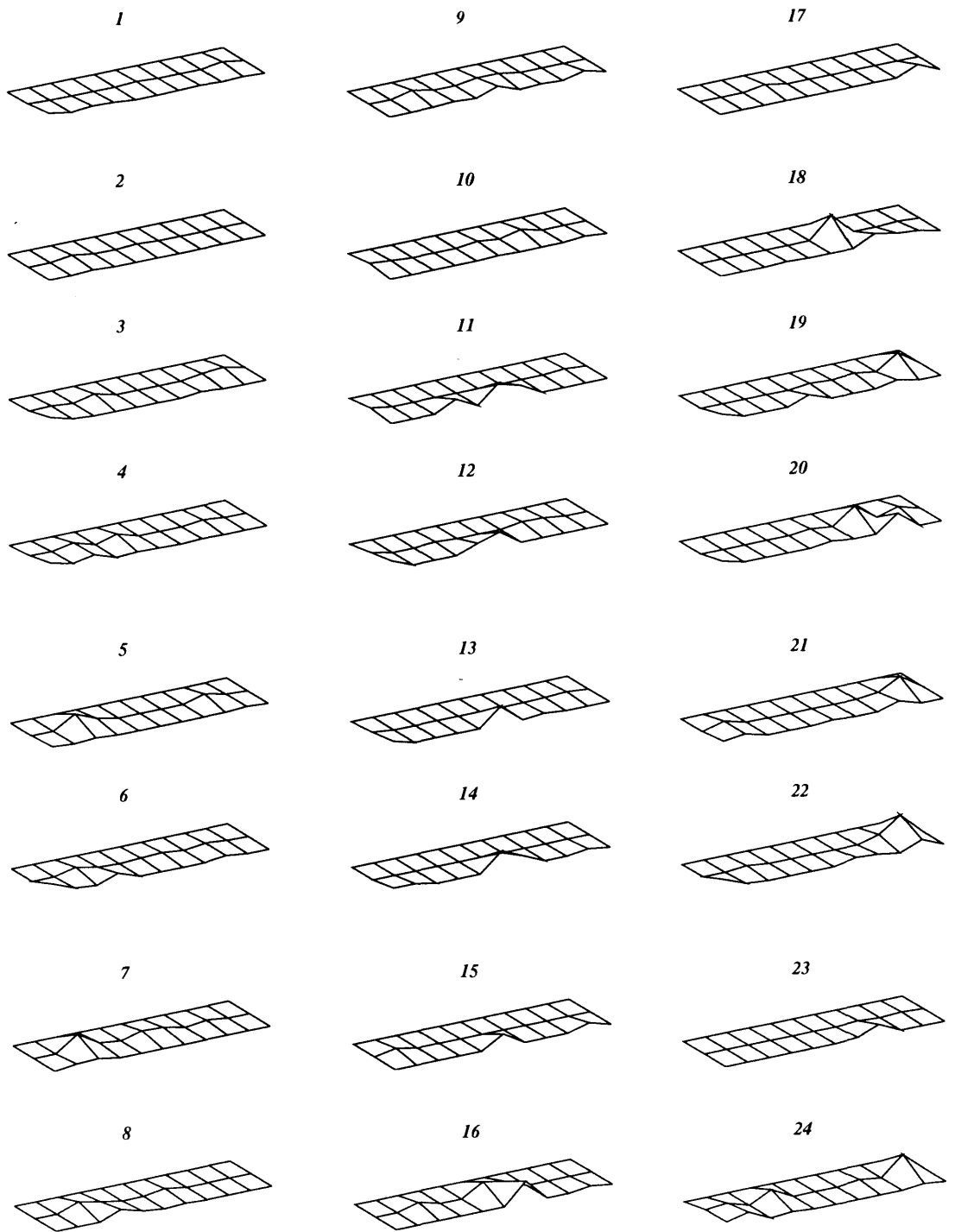


Fig. 6.36a - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 0. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

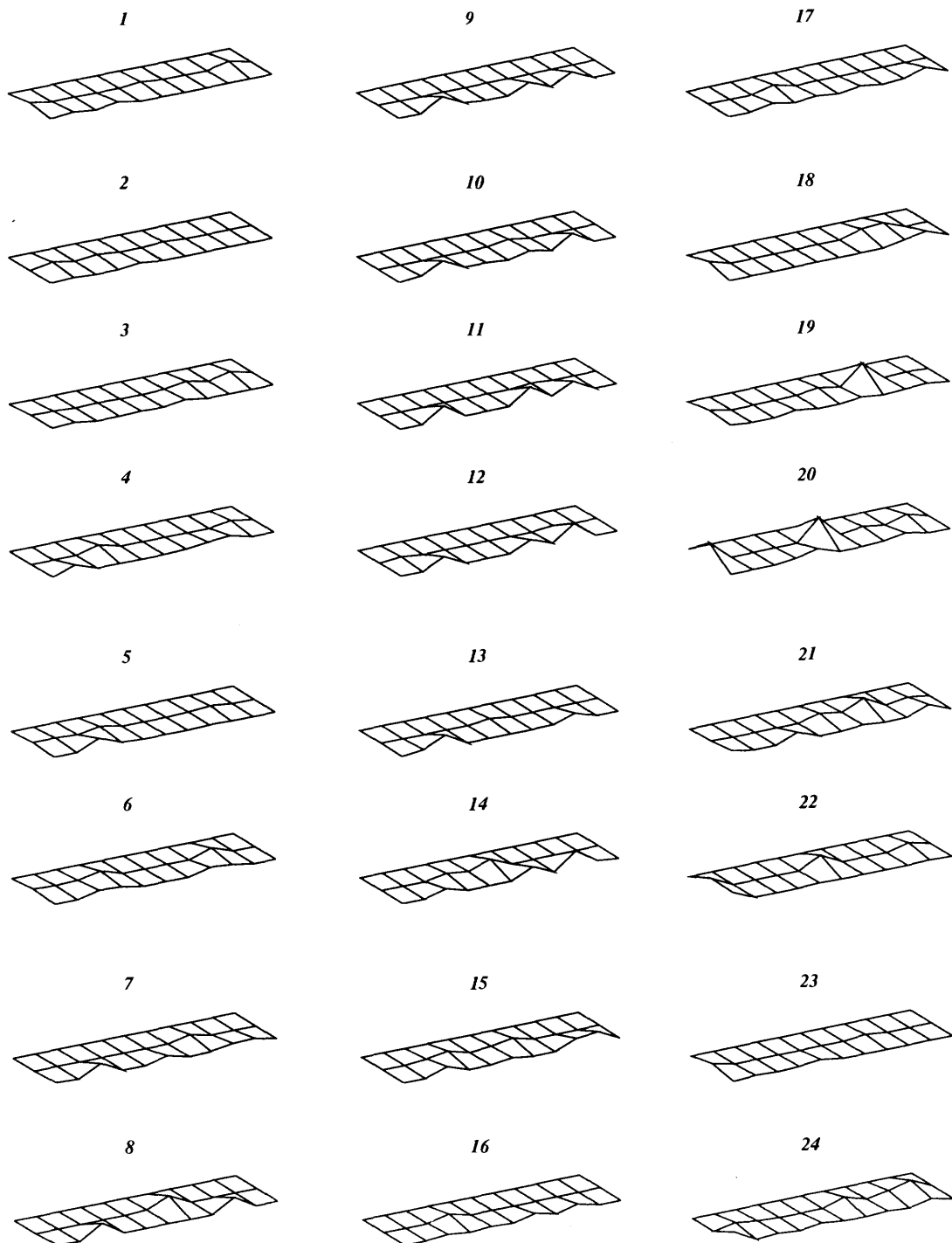


Fig. 6.36b - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 1. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

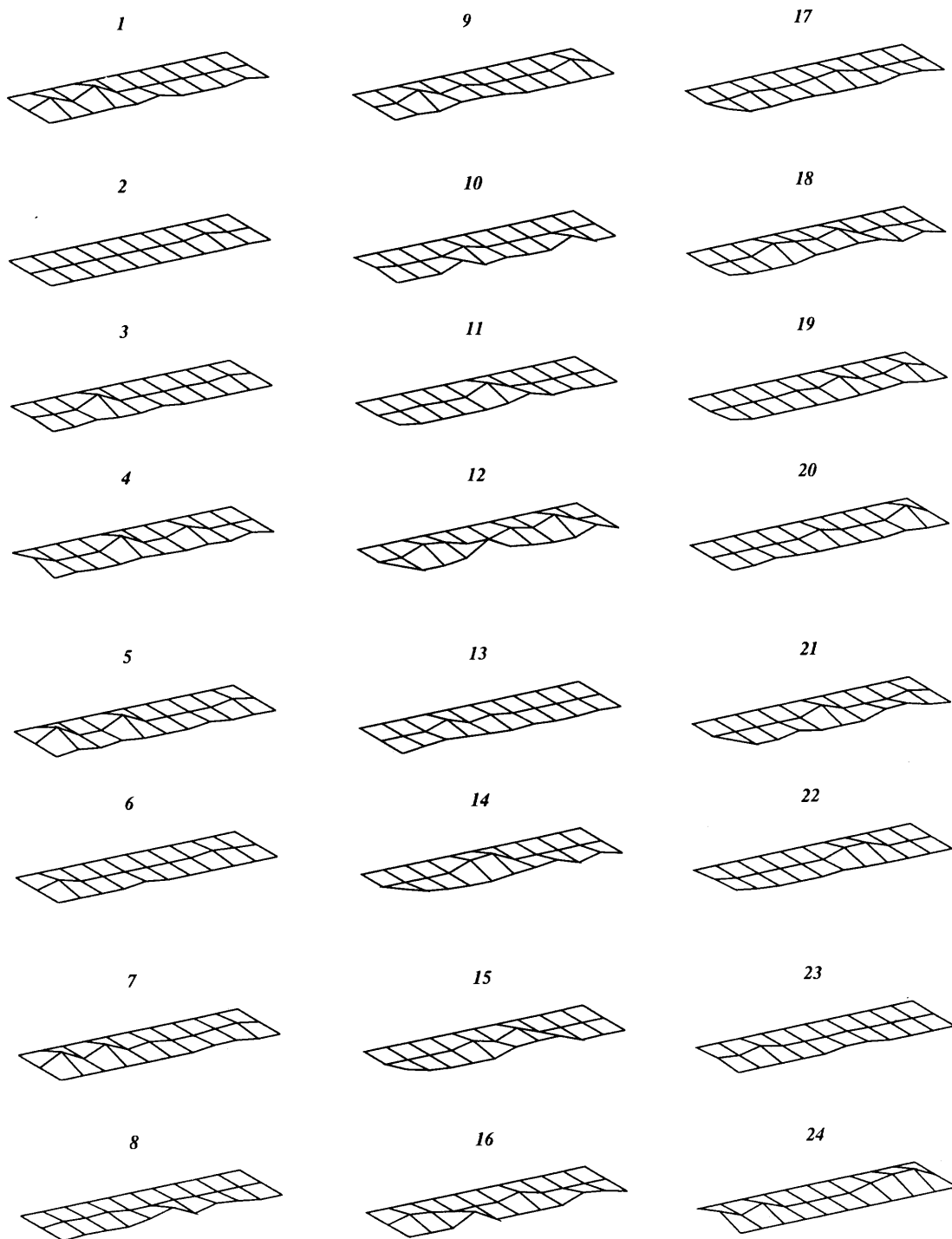


Fig. 6.36c - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 2. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per al modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

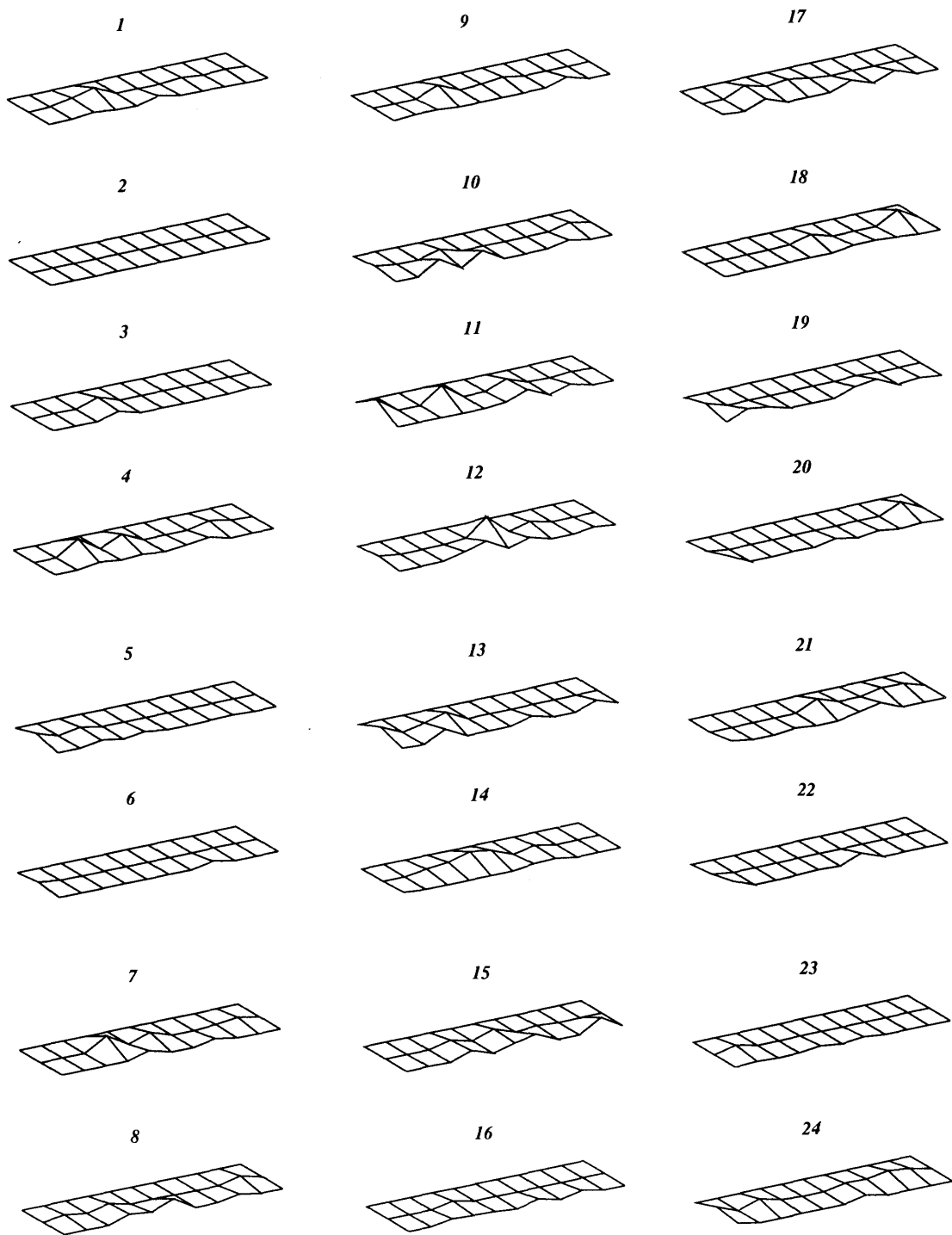


Fig. 6.36d - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 3. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per la modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

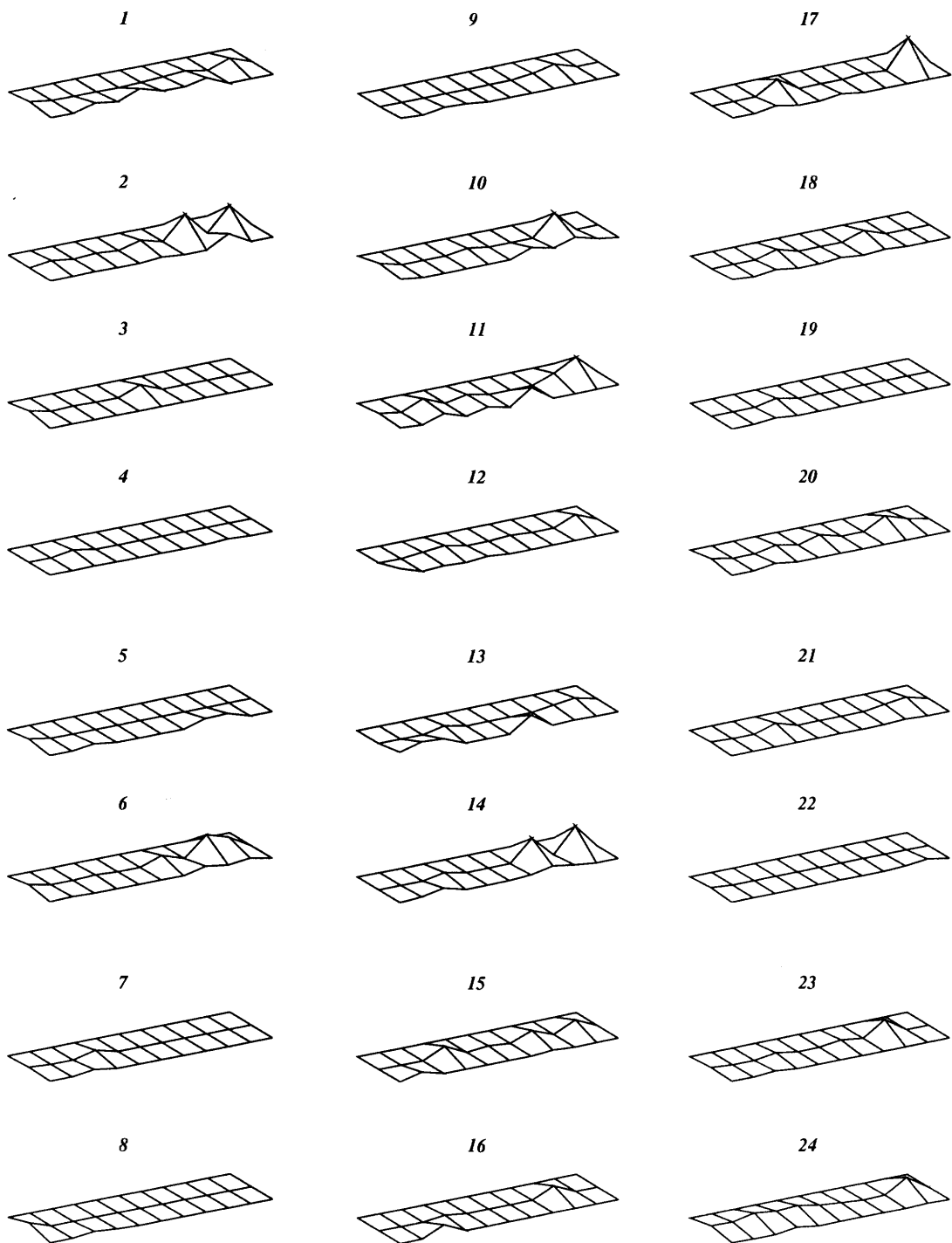


Fig. 6.36e - Test 4 : rilascio di momento sismico nel tempo sulla faglia come risultato dell'inversione per la Configurazione 4. Il modello strutturale M1 (fig. 6.3) è usato per la modellazione diretta, il modello M2 è usato nel problema inverso. Il limite superiore della faglia della faglia è stato spostato ad una profondità di 14 km. Il valore del momento sismico totale è fissato al valore utilizzato nel modello diretto.

Conclusioni e suggerimenti per analisi future

7.1 Conclusioni e discussione

Sulla base delle analisi presentate nei Cap. 5 e Cap. 6 e dei risultati ottenuti, riteniamo di poter trarre delle buone indicazioni per la definizione dei limiti nelle procedure di inversione per sorgente sismica estesa, derivanti dalla distribuzione spaziale del dato.

Nell'approssimazione della faglia estesa con il metodo della somma di sorgenti puntiformi, un problema spesso incontrato è quello della scelta della dimensione delle celle per modellare il piano di faglia: se questo è modellato con poche celle, questa approssimazione è insufficiente per rappresentare il processo alla sorgente; se modelliamo il piano di faglia con moltissime celle in modo da estrarre informazioni quanto più dettagliate sullo scorrimento o sulla velocità di scorrimento, le procedure di inversione non sono in grado di risolvere l'instabilità introdotta nelle soluzioni da una parametrizzazione molto elevata a meno che non si usino vincoli fisici. Questo è quanto dedotto dai nostri risultati e quanto stabilito già da altri autori (es. Hartzell e Heaton, 1988).

Abbiamo dimostrato che nelle procedure di inversione una discretizzazione molto fitta non è consigliabile. Per evitare l'indeterminazione sulle soluzioni introdotta da una parametrizzazione eccessiva, così come per salvare tempo macchina nei calcoli dell'inversione (aspetto quest'ultimo non trascurabile), bisogna ridurre al minimo indispensabile il numero di celle usate per modellare il piano di faglia, laddove con minimo indispensabile si intende il minimo numero di celle che consente ancora di ricostruire i dettagli del processo di rottura.

Considerando una dimensione di cella quasi doppia rispetto alla lunghezza d'onda di interesse nel problema siamo in grado di riprodurre i principali aspetti delle soluzioni di partenza con tutte le configurazioni di stazioni prese in esame in questo studio ed anche introducendo del rumore casuale ai dati di partenza otteniamo buoni risultati.

La distribuzione ottimale di stazioni è quella che abbiamo denominato come Configurazione 1, ossia è quella che per la geometria di faglia da noi considerata, coincide con la distribuzione di stazioni sul tetto di faglia. In tal caso sei sole stazioni riproducono esattamente il processo di rottura pur con il semplice vincolo di positività della velocità di scorrimento. Se però sei sole stazioni vengono collocate sul lato opposto, ossia sul letto di faglia, le soluzioni peggiorano notevolmente rispetto al caso in cui le sei stazioni sono collocate sul tetto di faglia. Un altro risultato importante da considerare è che sole quattro stazioni possono fornirci una buona approssimazione dell'evoluzione del processo di rottura nel tempo a condizione che queste siano collocate nella stessa direzione del fronte di propagazione della frattura.

Tutto questo significa che la copertura azimutale è più importante del numero di stazioni usate, purchè però queste siano in una posizione favorevole rispetto alla faglia e alla propagazione delle onde dall'ipocentro.

Se le stazioni non sono collocate in posizioni ottimali rispetto alla faglia allora la copertura azimutale uniforme e con molte stazioni rimane una valida scelta per ottenere soluzioni accettabili.

I risultati presentati in questa tesi possono anche fornirci delle indicazioni su quanto potersi fidare dei risultati ottenuti dalle inversioni per situazioni simili a quelle qui discusse e costituire ad esempio un incentivo per lo sviluppo di sismografi da fondo oceano (OBS) che meglio vincolino le soluzioni.

Non sempre tuttavia i sismografi OBS sono disponibili o è fattibile installarli in determinate zone. Per ovviare a queste situazioni abbiamo cercato di migliorare le soluzioni dell'inversione ottenute con le Configurazioni considerate non ottimali nè uniformi da un punto di vista azimutale, imponendo dei vincoli fisici. Si osserva come le soluzioni migliorino notevolmente imponendo semplicemente il vincolo di causalità debole o fissando il valore del momento sismico. Tutte le configurazioni sono in tal caso in grado di definire abbastanza bene il processo di rottura. La configurazione con sole quattro stazioni da delle soluzioni accettabili, ma anche con l'uso di vincoli fisici, quattro stazioni nella direzione opposta a quella del fronte di propagazione della rottura si rivelano poche per poter definire in dettaglio il processo di rottura.

Un aspetto da tenere di certo in considerazione nelle inversioni di casi reali è l'effetto di direttività della rottura, ossia come diversi ordini di grandezza delle ampiezze delle forme d'onda e diversi contenuti in frequenza, abbiano un ruolo

importante ai fini della minimizzazione delle differenze tra dato sperimentale e dato calcolato.

In questa fase non siamo stati in grado di correggere per gli effetti derivanti dalla mancanza di conoscenza di un modello strutturale adeguato. Le analisi che abbiamo fin qui condotto non ci mettono nelle condizioni di poter riprodurre esattamente gli aspetti del processo di rottura neppure imponendo vincoli fisici. Tuttavia non ritroviamo i due distinti fronti di rottura che Das e Suhadolc (1996) ritrovarono nel loro precedente studio ed i sismogrammi sono riprodotti abbastanza bene nella loro parte iniziale. Questo, nel nostro caso, è dovuto agli effetti di un più elevato numero di stazioni distribuite uniformemente.

Das e Suhadolc (1996), e Das et al. (1996) nel loro studio, concludevano sottolineando l'importanza dei vincoli fisici per poter ricostruire con buona approssimazione il processo di rottura per faglia estesa.

La nostra analisi giunge alle medesime conclusioni: quando la copertura azimutale non è uniforme, vincoli fisici sono necessari nell'inversione per potere stabilizzare le soluzioni.

A tali conclusioni giungiamo anche analizzando il caso riportato nel Cap. 5 e riguardante i risultati ottenuti dall'inversione di sismogrammi generati da sorgente estesa relativamente piccola ($M=3.9$) e trattati nell'inversione con l'approssimazione di sorgente puntiforme. In questo caso abbiamo ampiamente dimostrato come sia possibile riprodurre abbastanza bene le soluzioni nello spazio dei dati, ma nello spazio del modello la funzione sorgente temporale non sempre venga riprodotta adeguatamente sebbene ulteriori analisi successive si rendano necessarie per poter meglio definire le soluzioni in tali circostanze.

7.2 Progetti per analisi future

Sulla base dei risultati descritti nei Cap. 5 e Cap. 6, riteniamo che lo studio qui presentato per quel che riguarda gli effetti della distribuzione di stazioni nelle procedure di inversione, così come la definizione dei limiti nelle inversioni generati da sorgente estesa e trattati con l'approssimazione di puntiforme, siano da proseguire.

Il principale problema irrisolto è di certo quello legato al fatto che nella realtà non si ha una buona conoscenza del modello strutturale da potersi usare nell'inversione. Allo stato attuale le soluzioni da noi ricavate (anche imponendo

vincoli fisici) utilizzando un modello strutturale diverso da quello del problema diretto, non risultano soddisfacenti. Qualora tale indeterminazione risultasse irrisolvibile anche in studi successivi, delle analisi alternative potrebbero essere condotte utilizzando funzioni di Green empiriche.

Usando invece la stessa struttura per il modello diretto e il modello inverso, potrebbero essere fatte altre analisi variando il tipo di meccanismo associato all'evento, il modello di rottura (considerando ad esempio un modello bilaterale o circolare), e quindi complicando il modello stesso con l'inserimento di asperità. L'analisi sulla distribuzione di stazioni e sul minimo numero di stazioni richieste può inoltre essere migliorata analizzando non solo le componenti verticali, ma anche le altre due componenti, ossia introducendo anche uno studio sulla componente SH. Se sei registrazioni si rivelano indispensabili per vincolare il meccanismo di rottura, sarebbe utile stabilire quale sia il numero minimo di stazioni che garantiscono ancora buone soluzioni e quale sia la collocazione ideale, da un punto di vista azimutale, per i ricevitori.

Lo scopo finale dell'analisi, sulla base dei risultati che avremo ottenuto da questo studio è l'applicazione del metodo ad un evento reale.

Tali analisi riteniamo che possano essere di fondamentale importanza per ricerche e studi futuri che conducano ad una più precisa conoscenza di un processo così complicato quale è appunto il processo di nucleazione e fratturazione durante un terremoto.

BIBLIOGRAFIA

- Aki, K., 1967. Scaling law of seismic spectrum, *J. Geophys. Res.*, **72**, 1217-1231.
- Aki, K., 1968. Seismic displacement near a fault, *J. Geophys. Res.*, **73**, 5359-5376.
- Aki, K. and P.G., Richards, 1980. Quantitative Seismology: Theory and Methods, 932 pp., W.H. Freeman, New York.
- Archuleta, R.J., and S.H., Hartzell, 1981. Effects of fault Finitess on Near-Source ground Motion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **71**, 939-957.
- Bache, T., Day, S.M., and H.J., Swanger, 1982. Rayleigh wave synthetic seismograms from multi-dimensional simulations of underground, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 15-28.
- Backus, G.E., and F., Gilbert, 1967. Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problem, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **13**, 247-276.
- Backus, G., and M., Mulcahy, 1976a. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources -I. Continuous displacements, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **46**, 341-361.
- Backus, G., and M., Mulcahy, 1976b. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources -II. Discontinuous displacements, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **47**, 301-329.
- Båth, M., 1968. Mathematical aspects of seismology. Elsevier Scientific publishing Company.
- Båth, M., 1974. Spectral Analysis in Geophysics. Elsevier Scientific publishing Company.
- Båth, M., and S.J., Duda, 1964. Earthquake volume, fault plane area, seismic energy, strain, deformation and related quantities, *Ann. Geofis.* **17**, 353-368.
- Ben-Menahem, A., and S.J., Singh, 1981. Seismic Waves and Sources, Springer-Verlag Inc., New York.
- Ben-Menahem, A., and D. G., Harkrider, 1964. Relation patterns of seismic surface waves from buried dipolar point sources in flat stratified earth, *J. Geophys. Res.*, **69**, 2605-2620.
- Benioff, H., 1938. The determination of the extent of faulting with application to the Long Beach earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **28**, 77-84.
- Beroza, G.C., and P., Spudich, 1988. Linearized inversion for fault rupture behavior: application to the 1984, Morgan Hill, California earthquake, *J. Geophys. Res.*, **93**, 6275-6296.
- Bouchon, M., 1982. The rupture mechanism of the Coyote Lake earthquake of 6 August 1979 inferred from near-field data, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 745-759.
- Bolt, B.A., 1978. Earthquakes, W.H. Freeman and Company San Francisco.
- Brune, J.N., 1966. P and S Wave Travel Times and Spheroidal Normal Modes of a Homogeneous Sphere, *J. Geophys. Res.*, **71**, 2959-2965.

Bibliografia

- Brune, J.N., and C.R., Allen, 1967. A low stress drop, low magnitude earthquake with surface faulting: the Imperial California earthquake of 4 March, 1966, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **57**, 501-514.
- Brune, J. N., 1968. Seismic moment, seismicity and rate slip along major fault zones, *J. Geophys. Res.*, **73**, 777-784.
- Brune J.N., 1970. Tectonic Stress and the Spectra of Seismic Shear Waves from Earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **75**, 4997-5009.
- Bullen, K.E., and B.A., Bolt, 1985. An introduction to the theory of seismology. Cambridge University Press.
- Burridge R., and L., Knopoff, 1964. Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 1875-1888.
- Dantzig, G.B., 1949. Programming in a Linear Structure. *Econometrica*, vol. **17**, pp 73-74.
- Dantzig, G.B., 1951. Maximization of Linear functions of Variables Subject to Linear Inequalities, in T.C. Koopmans (editor) *Activity Analysis of Production and Allocation*, pp. 339-347, Wiley.
- Dantzig, G.B., 1963. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press.
- Das, S., 1981. Three dimensional rupture propagation and implications for the earthquake source mechanics, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **67**, 375-393.
- Das, S., and K., Aki, 1977. Fault plane with barriers: a versatile earthquake model, *J. Geophys. Res.*, **82**, 5658-70.
- Das, S., and B.V., Kostrov, 1983. Breaking of a single asperity, rupture process and seismic radiation, *J. Geophys. Res.*, **88**, 4277-4288.
- Das, S., Boatwright, J., and C.H., Scholz, 1986. Earthquake Source Mechanics. *Fifth Maurice Ewing Symposium Proceedings*, Vol., **6**, American Geophysical Union Monograph, no **37** (Washington, DC).
- Das, S. and B.V., Kostrov, 1990. Inversion for seismic slip rate and distribution with stabilizing constraints: Application to the 1986 Andreanoff Islands earthquake, *J. Geophys. Res.*, **95**, 6899-6913.
- Das, S., and B.V., Kostrov, 1994. Diversity of solutions of the problem of earthquake faulting inversion. Application to Sh waves for the great 1989 Macquarie Ridge earthquake, *Phys. Earth Planet. Int.*, **85**, 293-318.
- Das, S., and P., Suhadolc, 1996. On the inversion problem for earthquake rupture. The Haskell-type source model. *J. Geophys. Res.*, **101**, 5275-5738.
- Das, S., P., Suhadolc and B.V., Kostrov, 1996. Realistic inversions to obtain gross properties of the earthquake faulting process. *Tectonophysics*, Special issue entitled Seismic Source Parameters: from Microearthquakes to Large Events, ed. C. Trifu, in press.
- Doornbos, D.J., 1981. Seismic moment tensors, *Identification of Seismic Sources -Earthquake or Underground Explosion*, 207-232. E.S.Husebye and S.Mykkeltveit (eds.).
- Doyle, H.A., 1995. *Seismology*. J. Wiley & Sons. Chichester, England.

- Dziewonski, A., and J.H., Woodhouse, 1983. Studies of seismic source using normal mode theory, in *Earthquakes Observation Theory, and Interpretation*, eed. H. Kanamori and E. Boschi. North-Holland Amsterdam.
- Farkas, J., 1902. Uber die Theorie der einfachen Ungleichungen. *J. Reine Angew. Math*, vol. **124**, pp 1-24.
- Florsch, N., Fäh D., Suhadolc P., and G.F., Panza, 1991. Complete Synthetic Seismograms for High-Frequency Multimode SH-waves. *Pageoph*, **136**, 529-560.
- Fontanella, F., Pasquali, A., 1984. Calcolo numerico. Metodi e algoritmi. Vol. I e II. Pitagora Ed. Bologna.
- Fowler, C.M.R., 1990. The solid Earth. An introduction to Global Geophysics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Franklin J., 1980. Methods of Mathematical Economics. Linear and Nonlinear programming, Fixed Point Theorems. Springer, New York, 297 pp.
- Frohlich, C., Riedesel, M.A., and K.D., Apperson, 1989. Note concerning possible mechanisms for non-double-couple earthquake sources. *Geophys. Res. Lett.*, **16**, 523-526.
- Futtermann, W.I., 1962. Dispersive body waves, *J. Geophys. Res.*, **67** 5279-5291.
- Gay, N.C., and W.D., Ortlepp, 1974. *Bull. Geol. Soc. Am.*, **90**, Part I 47-58.
- Gilbert, F., and A., Dziewonski, 1975. *Phylos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* **278**, 187-269.
- Hadamard, J., 1923. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven.
- Hartzell, S.H., 1978. Earthquake aftershocks as Green's function, *Geophys. Res., Lett.* **5**, 1-4.
- Hartzell, S.H., and D., Helmberger, 1982. Strong motion modelling of the Imperial Valley earthquake of 1979, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 571-596.
- Hartzell, S.H., and T.H., Heaton, 1983. Inversion of strong-ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial valley, California earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1553-1583.
- Hartzell, S.H., and T.H., Heaton, 1986. Rupture history of the 1984 Morgan Hill California earthquake from the inversion of strong motion records, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **76**, 649-674.
- Hartzell, S.H., and P., Liu, 1995. Calculation of earthquake rupture histories using a hybrid global search algorithm: Application to the 1992 Landers, California earthquake, *Phys. Earth. Planet. Int.*, **95**, 79-99.
- Hartzell, S.H., Stewart, G. S., and C., Mendoza, 1991. Comparison of L1 and L2 norms in a teleseismic waveform inversion for the slip history of the Loma Prieta, California earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **81**, 1518-1539.
- Haskell, N.A., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **43**, 17-34.

Bibliografia

- Haskell, N.A., 1964. Total energy and energy spectra density of elastic wave radiation from propagating faults, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 1811-1841.
- Haskell, N.A., 1966. Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults II, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **56**, 125-140.
- Haskell, N.A., 1969. Elastic displacements in the near-field of a propagating fault, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **59**, 865-908.
- Heaton T.H., and D.V., Helmberger, 1979. Generalized ray modes of the San Ferdinando earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **69**, 1311-1341.
- Hutchings, L., 1994. Kinematic earthquake models and synthesized ground motion using empirical Green's Functions, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **84** 1028-1050.
- Huang, P.Y., 1985. Focal depths and mechanism of mid-ocean ridge earthquakes from body waveform analysis, *Ph. D. thesis*, MIT.
- Iida, M., Miyatake, T., and K., Shimazaki, 1990a. Preliminary analysis of resolving power of existing strong-motion arrays for source inversion, *J. Phys. Earth*, **38**, 285-304.
- Iida, M., Miyatake, T., and K., Shimazaki, 1990b. Relationship between strong-motion array parameters and the accuracy of source inversion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **80**, 1533-1552.
- Iida, M., 1993. Source effects on strong motion record and resolving power of strong motion arrays for source inversion, *Tectonophysics*, **218**, 179-193.
- Jost, M.L. and R.B. Herrmann, 1989. A Student's Guide and review of Moment Tensors, *Seismological Research Letters*, **60**, 37-57.
- Julian, B.R., 1983. Evidence for dyke intrusion earthquake mechanisms near Long Valley caldera, California, *Nature*, **303**, 323-325.
- Kanamori H., and D.L., Anderson, 1975. Theoretical basis of some empirical relations in seismology, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **65**, 1073-1095.
- Kanasevich, E.R., 1981. Time Sequence Analysis In Geophysics. The University of Alberta Press.
- Kasahara, K., 1981. Earthquake mechanics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kaverina, A., and P., Suhadolc, 1996. Study of extended fault via synthetic seismograms. Final report, Dept. Earth Sciences, Univ. of Trieste, Italy.
- Keller, J.B., 1976. Inverse problems. *Am. Math. Mon.*, **83**, 107-118.
- Kikuchi, M., and Y. Fukao, 1985. Iterative deconvolution of complex body waves from great earthquakes. The Takachi-Oki earthquake of 1968. *Phys. Earth. Planet. Int.*, **37**, 235-248.
- Kikuchi, M., and Y. Fukao, 1987. Inversion of long period P-waves from great earthquakes along subduction zones, *Tectonophysics*, **144**, 231-247.
- Kikuchi, M., and M., Ishida, 1993. Source retrieval for deep local earthquakes with broadband records, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **83**, 1855-1870.

- King, G. C. P., 1983. The accommodation of large strains in the upper lithosphere of Earth and other solids by self-similar fault systems: the geometrical origin of b-value, *Pure Appl. Geophys.* **121**, 761-816.
- Kirsch, A., 1996. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Springer-Verlag New York.
- Kijko, A., 1977. An algorithm for the optimum distribution of a regional seismic network-I, *Pure Appl. Geophys.* **115**, 999-1009.
- Knopoff, L., 1964a. A matrix method for elastic wave problems, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 431-438.
- Knopoff, L., 1964b. *Rev. Geophys.*, **2**, 625-660.
- Kostrov, B.V., 1964. Self-similar problems of propagation on shear cracks. *J. Appl., Math. Mech.* **28**, 1077-1087.
- Kostrov, B.V., and S., Das, 1988. Principles of earthquake source mechanics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kravanja, S., Panza, G.F., J., Sileny, 1997. Robust retrieval of earthquake rupture history with uncertain structural model. In preparazione.
- Lay, T., and T.C., Wallace, 1995. Modern Global Seismology. Academic Press, London.
- Madariaga, R., 1978. The dynamic field of Haskell's rectangular dislocation fault model, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 1438-1449.
- Mao, W.J., Panza, G.F., and P., Suhadolc, 1994. Linearized waveform inversion of local and near-regional events for source mechanism and rupturing processes, *Geophys. J. Int.* **116**, 784-798.
- Maruyama, T., 1963. On the force equivalents to dynamical elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism, *Bull. Earthquake Res. Inst.*, **41**, 467-486.
- Mendoza, C., and S.H., Hartzell, 1988. Inversion for slip distribution using teleseismic P waveforms: North Palm Springs, Borah Peak, and Michoacan earthquakes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 1092-1111.
- Mendoza, C., and S.H., Hartzell, 1989. Slip distribution of the 19 September 1985, Michoacan, Mexico, earthquake: Near-source and teleseismic constraints, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **79**, 655-669.
- Menke, W., 1984. Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press.
- Mikumo, T., and T., Miyatache, 1979. Earthquake sequences on frictional fault model with a non-uniform strength and relaxation times, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **59**, 497-522.
- Miyatake, T., Iida, M., and Shimazaki, K., 1986. The effects of strong-motion array configuration on source inversion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **76**, 1173-1185.
- Miyatake, T., and T., Yamashita, 1995. Theoretical Seismic Source Studies, *J. Phys. Earth.*, **43**, 171-182.

Bibliografia

- Mykkeltveit, S., Åstebol, D.J., Doornbos and E.S., Husebye, 1983. Seismic array configuration optimization, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 173-186.
- Nabelek, J.L., 1984. Determination of earthquake source parameters from inversion of body waves, *PhD thesis*, Massachusetts Institute of Technology.
- Olson, A.H., and Apsel, R.J., 1982. Finite faults and inverse theory with applications to the 1979 Imperial Valley earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 1969-2001.
- Olson, A.H., and J.G., Anderson, 1988. Implications of frequency-domain inversion of earthquake ground motions for resolving the space-time dependence of slip on an extended fault, *Geophys. Journ.*, **94**, 443-455.
- Panza, G.F., 1985. Synthetic seismograms: the Rayleigh waves modal summation, *J. Geophys.*, **58**, 125-145.
- Panza, G.F., Schwab, F., and L., Knopoff, 1972. Channel and crustal Rayleigh waves, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **30**, 273-280.
- Panza, G.F., Schwab, F., and L., Knopoff, 1973. Multimode surface waves for selected focal mechanisms, I. Dip-slip sources on a vertical fault plane, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **34**, 265-278.
- Panza, G.F., and P., Suhadolc, 1987. Complete strong motion synthetics. In: B. A. Bolt (ed.) *Seismic Strong Motion Synthetics, Computational Techniques 4*, Academic Press, Orlando, 153-204.
- Parker, R.L., 1994. *Geophysical Inverse Theory*, Princeton University Press.
- Pekeris, C.L., 1948. Theory of propagation of explosive sound in shallow water, *Geol. Soc. Am. Mem.*, **27**, 1-116
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and W.T., Vetterling, 1986. *Numerical Recipes. The Art of scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, 818 pp.
- Rabinowitz, N., and D.M., Steinberg, 1990. Optimal configuration of a seismographic network: a statistical approach. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **80**, 187-196.
- Robinson, K., 1951. *J. Appl. Phys.* **22**, 1045.
- Saraò, A., Das, S., and P., Suhadolc, 1996, A comprehensive study of the effect of non-uniform station distribution on the inversion for seismic moment release history and distributio for a Haskell-type rupture model. *J. of Seism.*, submitted.
- Satake, K., 1985. Effects of station coverage on moment tensor inversion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1657-1667.
- Savage, J.C., 1966. Radiation from a realistic model of faulting, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **56**, 577-592.
- Savage, J.C., 1968. Relation of Corner Frequency to Fault Dimensions, *J. Geophys. Res.*, **77**, 3788-3795.
- Scholz, C.H., 1990. *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge University Press. Cambridge.

- Schwab, F., 1970. Surface wave dispersion computations: Knopoff's method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **60**, 1491-1520.
- Schwab, F., and L., Knopoff, 1972. Fast surface wave and free mode computations, in: *Methods Comput. Phys.* **11**, 86-180.
- Schwab, F., Nakanishi, K., Cuscito, M., Panza, G.F., Liang, G., and J., Frez, 1984. Surface wave computations and the synthesis of theoretical seismograms at high frequencies, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **74**, 1555-1578.
- Sen, M.K., and P.L., Stoffa, 1995. Global optimization methods in geophysical inversion. Elsevier Science, Amsterdam.
- Sibson, R.H., 1986. Rupture interaction with fault jogs, in *Earthquake Source Mechanics*, ed. S. Das, J. Boatwright, and C. H. Scholz, American Geophysical Union Monograph No. 37 (Washington D.C.).
- Silver, P.G., and T.H., Jordan, 1982. Optimal estimation of scalar seismic moment, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **70**, 755-787.
- Sileny J. and Panza G.F., 1991. Inversion of seismograms to determine simultaneously the moment tensor components and source time function for a point source buried in a horizontally layered medium. *Studia geoph. geod.* , **35**, 166-183.
- Sileny J., Panza G.F. and Campus P., 1992. Waveform inversion for point source moment tensor retrieval with optimization of hypocentral depth and structural model. *Geophys. J. Int.* , **108**, 259-274.
- Spudich, P., and E., Cranswick, 1984. Direct observation of rupture propagation during the 1979 Imperial Valley earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.* , **74**, 2083-2114.
- Spudich, P., and D., Oppenheimer, 1986. Dense seismograph array observations of earthquake rupture dynamics. In: in *Earthquake Source Mechanics*, ed. S. Das, J. Boatwright, and C. H. Scholz, American Geophysical Union Monograph No. 37 (Washington DC), 285-296
- Spudich, P., and R., Archuleta, 1987. Techniques for Earthquake Ground-Motion: calculation with Application to Source Parametrization of Finite Faults. In: B. A. Bolt (ed.) *Seismic Strong Motion Synthetics, Computational Techniques 4*, Academic Press, Orlando, 205-265.
- Steinberg, D., Rabinowitz, N., Shimshoni, Y., and Mizrachi, D., 1995. Configuring a seismic network for optimal monitoring of fault lines and multiple sources, *Bull. Seismol. Soc. Am.* , **95**, 1847-1857.
- Stump, B.W., and L.R., Johnson, 1988. The determination of source properties by the linear inversion of seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.* , **67**, 1489-1502.
- Suhadolc, P., Harabaglia P., and G.F., Panza, 1990. Deterministic modeling and estimate of strong ground motion: the Irpinia, Italy, November 23, 1980 earthquake. *Proceedings of the Ninth European Conference on Earthquake Engineering*, Moscow, 110-120.
- Suhadolc, P., P., Campus, e G.F., Panza, 1992. Inversione lineare di forme d'onda per la ricostruzione del processo di sorgente: con fronto di due metodi applicati ad eventi del Friuli. *Studi Geologici Camerti*, vol. speciale, CROP 1-1A, 59-64.

Bibliografia

- Tarantola, A., 1987. Inverse problem Theory. Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation, Elsevier, Amsterdam.
- Thatcher and Hanks, 1973.
- Tchalenko, J.S., 1970. *Bull. Geol. Soc. Am.*, **81**, 1625-1640.
- Tchalenko, J. S., and N.N., Ambraseys, 1970. *Bull. Geol. Soc. Am.*, **81**, 41-60.
- Tolstoy, I., 1956. *J. Acoust., Soc. Am.*, **28**, 1182-1192.
- Trifunac, M.D., 1974 . A three dimensional dislocation model for the San Fernando, California, earthquake of February 9, 1971, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **64**, 149-172.
- Trifunac, M.D., and B.L. Isacks, 1975. A study on the duration of strong earthquake ground motion, **65**, 581-626.
- Utsu, T., and A., Seki, 1954. A relation between the area of aftershock region and the energy of main shock, *J. Seism. Soc. Japan* **7**, 233-240.
- Verbanac, G., and P., Suhadolc 1996. Theoretical study on the variations of the peak ground acceleration due to the extended sources, Final report, Dept. of Earth Sciences, Univ. of Trieste.
- White, S.H., 1973. *Nature*, London, **244**, 276-278.
- Wyss, M., and J.N., Brune, 1967. The Alaska earthquake of 28 March 1964: A complex multiple rupture, *Bull., Seismol. Soc. Am.* **57**, 1017-1023.
- Yoshida, S., 1995. Waveform inversion Methods for the Earthquake Source. *J. Phys. Earth.*, **43**, 183-209.
- Zahradnik, J., 1989. Generation of seismic waves by earthquake sources. Lectures notes. Seimological Dept. Uppsala, Sweden.

APPENDICE A

Discretizzazione di una funzione continua

A.1 Teorema di Campionamento ed Aliasing

Una funzione continua può essere discretizzata tramite campionamento, ossia calcolando i valori che la funzione assume, nel suo dominio di definizione, per ogni fissato numero di valori della sua variabile. Ad esempio la funzione $h(t)$ con t variabile tempo, può essere campionata ad intervalli definiti di tempo calcolando i valori che la funzione assume in corrispondenza di certi valori di t . Se indichiamo con Δ l'intervallo temporale tra due campioni consecutivi, la sequenza di valori campionati è

$$h_n = h(n\Delta) \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (\text{A.1.1})$$

Il reciproco dell'intervallo di tempo Δ^{-1} è detto *tasso di campionamento* (sampling rate); se Δ è misurato in secondi, allora il tasso di campionamento rappresenta il numero di campioni registrati ad ogni secondo.

Per ogni intervallo di campionamento Δ esiste anche una frequenza particolare, f_c detta *frequenza critica di Nyquist* (talvolta anche *limite di Shannon*) definita da

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} \quad (\text{A.1.2})$$

La frequenza critica di Nyquist è importante per due distinti motivi. Innanzitutto serve per definire il campionamento critico di una funzione che, nel caso di campionamento della funzione seno è di due punti per ciclo. Questo è legato al teorema di campionamento.

Teorema di campionamento: Se una funzione continua $h(t)$ campionata ad un intervallo Δ , ha una larghezza di banda limitata a frequenze inferiori della f_c (ad esempio è $H(f)=0$ per $|f| \geq f_c$), allora la funzione $h(t)$ è completamente determinata dai suoi campioni h_n . Infatti, $h(t)$ è data dalla formula

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin[2\pi f_c(t-n\Delta)]}{\pi(t-n\Delta)} \quad (\text{A.1.3})$$

Se ad esempio la funzione rappresenta un segnale che è passato attraverso un amplificatore con una frequenza di risposta nota, il teorema di campionamento ci dice che il segnale può essere ben rappresentato se lo si campiona ad un rapporto di campionamento pari a 2 volte la massima frequenza che passa attraverso l'amplificatore.

Un altro aspetto legato alla frequenza critica di Nyquist, è il cosiddetto effetto di *aliasing*. Se infatti una funzione non è limitata in larghezza di banda a valori inferiori alla frequenza di Nyquist, tutto il contenuto in frequenza che giace al di fuori dell'intervallo $(-f_c, f_c)$ si ritrova all'interno dell'intervallo stesso. Questo fenomeno è detto *aliasing*.

Per *aliasing* si intende il fenomeno per cui le componenti spettrali con frequenze superiori della frequenza di Nyquist contaminano le componenti spettrali con frequenze più basse di quella di Nyquist e comprese nell'intervallo $(-f_c, f_c)$. Tale contaminazione agisce in modo che le componenti con frequenza simmetrica alla frequenza di Nyquist si contaminino reciprocamente; in questo senso la Nyquist può anche essere detta *frequenza di ripiegamento*. L'*aliasing* comporta un chiaro effetto di contaminazione dello spettro delle frequenze inferiori a f_c e appartiene a quella categoria di contaminazioni spettrali dovute essenzialmente alla presenza di alte frequenze nella registrazione. Per ulteriori approfondimenti sull'effetto di *aliasing* si veda ad esempio Båth (1974).

Il modo di prevenire questo effetto è conoscere la larghezza di banda naturale del segnale o forzarla entro una larghezza di banda nota filtrando il segnale, e quindi, campionare la funzione ad un intervallo tale da consentire almeno due punti per ciclo della più alta frequenza presente.

A.2 Procedure pratiche per la definizione di uno spettro ad alta risoluzione

Si possono definire alcune regole pratiche per la definizione di un buon spettro ad ampio intervallo di frequenze e ad alta risoluzione.

La lunghezza della registrazione T dovrebbe essere grande abbastanza in modo che il limite di frequenza inferiore dello spettro sia sempre molto piccolo. Per avere infatti un valore grande di T , o il numero di campioni deve essere grande oppure l'intervallo di campionamento piccolo. Quest'ultima condizione contribuirà a rimuovere effetti di *aliasing*. In pratica la risoluzione dello spettro

sarà alta se T è grande. In termini delle due espressioni di frequenza che limitano lo spettro

$$\begin{aligned} f_{\min} &= 1/T \\ f_{\max} &= 1/2\Delta t = N/2T \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

La potenza di risoluzione spettrale è $\Delta\nu=1/T$, ed è detta *co-intervallo di Nyquist*.

Lo spettro vero non può mai essere ritrovato, in quanto ciò sarebbe possibile solo nel caso in cui l'intervallo di digitalizzazione tendesse a zero e quindi T ad infinito.

Il massimo di frequenza che si vuole avere può anche essere fissato relativamente bene visualizzando a occhio la registrazione. In tal caso, per evitare quanto più possibile il fenomeno dell'aliasing, si sceglie una frequenza di Nyquist molto più grande della f_{\max} . Una buona regola è quella di scegliere

$$f_c = 1.5f_{\max} \quad (\text{A.2.3})$$

Così, avendo T e f_c , queste due quantità fisseranno l'intervallo di digitalizzazione richiesto Δt secondo la relazione

$$\Delta t = 1/3 f_{\max} \quad (\text{A.2.4})$$

Il numero di intervalli è

$$N = T / \Delta t \quad (\text{A.2.5})$$

mentre il numero di punti

$$NP = N + 1 \quad (\text{A.2.6})$$

APPENDICE B

My thesis in a nutshell

This Annex is for those of you who are not familiar with the Italian language (the Italian-speaking readers might also prefer to read just a synthesis!), but would still like to have a rough idea of what I have been doing during the three years of my PhD.

The Annex consists of a paper submitted (November 1996) to the Journal of Seismology containing the main conclusions of my thesis.

Enjoy the paper!

A comprehensive study of the effect of non-uniform station distribution on the inversion for seismic moment release history and distribution for a Haskell-type rupture model

A. Saraò[†], S. Das[†] and P. Suhadolc[‡]

[†]Dipartimento di Scienze della Terra, Università di Trieste, Trieste, Italy.

[‡]Department of Earth Sciences, University of Oxford, Parks Road, Oxford OX1 3PR, UK.

Abstract

In order to determine the effect of non-uniform azimuthal distribution of seismic stations around an earthquake on the determination of the details of the earthquake faulting process, we use artificial accelerograms at regional distances and solve the inverse problem. Different station configurations are used, one being a very uniform distribution and the rest very non-uniform. The non-uniform distributions are based on actual situations. In most cases, we use much larger spatial and temporal cell sizes in the inversion than we use to construct the artificial data. We use the method of linear programming and stabilize the solution by the use of physical constraints. The constraints of positivity of the slip rates on the fault is used in all cases in this study. In some cases, additional physical constraints such as preassigning the final moment, the rupture speed, and so on are also used. We find that using a cell size almost double the wavelength of interest, we are able to reproduce the solution of the problem, even when we add a small amount of random noise to the artificial data, provided the source medium structure is known. For a shallow thrust fault, we show that the best station configuration is when the stations are on the hanging wall, and even six stations are enough to reproduce the moment rate release history and distribution. We also analyzed the effect of the rupture propagation direction on the results of the inversion showing that even four stations are enough to retrieve the rupturing process if they are placed in the forward direction of the rupture propagation. When an optimal azimuthal station coverage is not available, our results show that the solutions can be improved by using well-established physical constraints. We show that the azimuthal distribution is more important than the number of stations, and even a minimum number of four stations, placed in a favourite position with respect to the fault, are sufficient to obtain reliable solutions. Finally, we find that proper knowledge of source medium structure is essential to recover the source process details.

Key words: Station coverage; Haskell model; inverse problem.

1 Introduction

The extraction of information about the details of the complete rupturing process of an earthquake by solving inverse problems depends on the the availability of high-quality seismograms. Clearly uniform azimuthal distribution of stations around the causative fault is desirable when solving such problems. Since this is often not the case, a study to determine the limitations due to lack of optimal station coverage is important in order to evaluate the reliability of the inverse problem solutions obtained. Some possible configurations of non-uniform station distribution, necessitated by the tectonic setting, say, are shown in Figure 1. In many seismic areas, say the circum-Pacific belt, stations are located only on the landward side. We call this Configuration 1 and it is illustrated in Figure 1(a). Many large subduction zone earthquakes fall into this category. In some cases, the stations may be located on the seaward side. We call this Configuration 2 and it is illustrated in Figure 1(b). Earthquakes on the New Guinea subduction zone are an example of this category. Due to the fact that an earthquake fault may lie partly on land and partly under water, we may have the configurations shown in Figure 1(c). In the Mediterranean area (e.g. Iberian peninsula, Messina straits in Italy or the Yagur fault in Israel), situations where the stations are placed at the end of the fault are not uncommon. Another example where the stations were placed near one end of the fault is the earthquake of Erzincan in 1992 (Bernard, personal communication). The rupture, in such cases, may initiate under water and propagate towards the stations or initiate under land and propagate away from the stations. Since the effect of the focussing (or defocussing) of the waves relative to the stations are different in these two cases, we shall consider both these possibilities in this study and call the case when the rupture propagates towards the station Configuration 3 and away from the stations Configuration 4. The results of our study will help in evaluating the reliability of moment release pattern distribution already done with very few and poor distribution of stations. Finally, and not the least important, the results of this study are of practical importance in that it will aid in decisions on the rapid and effective installation of seismic stations in the field, particularly in the deployment of stations

at regional distances soon after some earthquake of interest.

The problem of non-uniform station coverage has been considered before in earlier studies. Using stations located at regional distances, Stump and Johnson (1977) showed that a minimum of six seismograms are necessary to determine the seismic moment tensor, when least-squares methods are used to solve the inverse problem. When less than six seismograms are available, additional physical constraints must be imposed to improve the situation in the resulting underdetermined system of equations. Hwang (1985) studied the problem for the stability of the fault plane solutions computed by waveform inversions proving that the results are very sensitive to the azimuthal distributions of the stations. Satake (1985) demonstrated the importance of the uniformity of azimuthal distribution of seismic stations at teleseismic distances as an essential factor in obtaining reliable moment tensor inversions. Olson and Anderson (1988) considered a problem very similar to that considered in this paper. They solved the problem in the frequency domain and used a minimum-norm condition but did not use the physical constraints we use in this paper. They considered a vertical strike-slip fault whereas we use a dipping thrust fault in this study. Steinberg et al. (1995) have determined a particular optimal configuration of stations for the problem of accurate hypocenter location on two major faults in Israel but since the hypocenter location problem has important similarities with the problem considered in this paper, their results are of interest in this context. Iida (1993) also carried out a detailed study on the resolving power of strong-motion arrays for source inversion but without any constraints on the solution.

It is well known that such solutions are unstable (Kostrov, 1976; Kostrov and Das, 1988; Das and Kostrov, 1990, 1994), and recent work by Das and Suhadolc (1996) and by Das, Suhadolc and Kostrov (1996) using artificially generated accelerograms at regional distances have shown that such constraints are essential. In this paper, we shall consider the effect of non-uniform station distribution on the inversion to obtain details of the moment release history over the fault for the inversion where additional stabilising constraints, such as constraining the final moment or disallowing back-slip on the fault, are used. We shall use synthetic accelerograms and stations located at regional distances. The inverse problem is

solved using the linear programming method with physical constraints, developed for this problem by Das and Kostrov (1990, 1994). Das and Suhadolc (1996) and Das et al (1996) have shown that with six uniformly distributed stations and a Haskell-type of model of the faulting process, some important features remain unresolved even for the problem without any noise in the data. We therefore first find a configuration for which we are able to reliably solve the constrained inverse problem. Once we have done this, we shall perform numerical tests with very non-uniform azimuthal station distributions in order to determine the importance of the station coverage and number necessary to obtain acceptable solutions. We shall consider problem without and with random noise in this study. We shall also consider the case when the artificial data is generated using very fine cells and the inversion is performed with much coarser cells. Finally, we shall consider the inversion with a different medium than that used in the forward problem. The chart in Figure 2 summarises some of the cases considered in this study.

The fault geometry and method of solution

The forward and inverse problem are similar to that described in detail in Das and Suhadolc (1996) and is therefore described only briefly here. We construct synthetic accelerograms using the method of multimodal summation for an extended source for a rectangular fault which is 20 km long and 4 km wide. The top of the fault is located at a depth of 5 km and the faulting mechanism is taken as pure thrust. The fault geometry and an idealized distribution of 12 stations is shown in Figure 3 and relevant faulting parameters are listed in Table 1. We shall call the 12-station distribution Configuration 0. The P and S wave velocity models (M1) in the vicinity of the source used in constructing the synthetic data are shown by the solid lines in Figure 4. The fault is discretized into square cells and the source time into discrete steps. The details of the cell sizes are listed in Table 1 for all the cases considered in this study. The rupture model is a discrete analog of a Haskell-type model, with rupture propagating at a speed of 70% of the shear wave velocity of the medium. Moment is released only once by each cell as the rupture passes. Since Das and Suhadolc (1996) were unable to reproduce all the details for the rupture process using six stations even knowing the source structure and fault

geometry, we first use a larger number of stations than in that study to see if this alleviates the problem. An azimuthally uniform idealized distribution of 12 stations (Figure 2) around the fault is considered in the first step of this study, with subsequent cases where fewer and very non-uniform station distributions are used in the inversion.

We shall use the method of linear programming developed for this problem by Das and Kostrov (1990, 1994) for the solution of the set of linear equations that is generated from the representation theorem by the discretization of the problem. The physical constraints to be used were enumerated by Das and Suhadolc (1996). We shall require positivity (P) of the slip rate for all cases in this study. The final moment constraint (M), in which the moment must equal some pre-assigned value and a rupture speed constraint (R1) in which the rupture front is not allowed to propagate faster than some preassigned speed will be used in some cases. A “weak causality” constraint in which the slip rate is zero in a cell and time step that would produce a signal before the first arrival at any station from the hypocentral cell (R2) may also be used sometimes. The moment release may be allowed to occur more than once at a cell in the inversion (MTO). The constraints selected in the different cases are also listed in Table 1. We shall define the misfit of the solution synthetics to the artificial data, in the ℓ_1 -norm sense, as the ratio of the mean absolute error of fit to the mean absolute amplitude of the data (Das and Kostrov, 1990).

Results

More than one hundred inversions were performed for this study of which selected cases will be discussed in detail in the paper. A flow-chart gives an overall picture of the cases studied. In addition to the ideal distribution of 12 stations (Figure 3), we will consider the four non-uniform distributions shown in Figure 5. For each of these five station distributions, we shall consider different sets of physical constraints, such as a causality condition, moment constraint condition, and so on. In addition, for all the above cases, we shall perform inversions using the same spatial and temporal cell sizes as used in the construction of the artificial data. We shall also carry out inversions using much finer cells. We shall consider problems with and without random noise added to the data. Finally, we shall perform inversions using

“incorrect” Earth structure. For some cases, more than one spatial and temporal cell size will be used to investigate its effect on the solution.

Case 1: Inversions using the same cell sizes in the inverse and forward cases.

The slip rate distribution on the fault as a function of time used in the construction of the artificial data are shown in Figure 6. The source structure, the fault area, process duration and the fault mechanism are kept the same in the inverse and forward cases.

To investigate how the selection of the cell size for the fault plane discretization can influence the stability of the solutions in the inversion, we performed our tests using three different cell sizes. We considered square cells of 2 km, 1 km and 0.5 km which corresponds to 20, 80 and 320 cells on the fault area. For each cell size we computed the inversions for all the five station distributions (Configuration 0, 1, 2, 3, 4) using the same cell sizes as in the forward problem and analyzed the effect of the different physical constraints. The source time step discretization size (Δt) is taken as .39 s in this set of cases (Table 1).

Test 1 – This test is carried out primarily as a test of our programs. The rupture velocity is constrained to be the same as in the forward model, each cell is permitted to slip only once as the rupture front passes and the positivity of the slip rate is enforced. All the aspects of the solution are correctly reproduced for all the station configurations. Even four stations, grouped together at one end of the fault, are sufficient to reproduce the accelerograms and the rupturing process exactly. Since the solutions are reproduced exactly and the fit to the artificial data is very good, the differences are not visible on plots and hence are not included here.

Test 2 – We performed the inversions using the weak constraints on the rupture velocity front and do not restrict the cells to slip only once. Again, all aspects of the solutions are well reproduced for all the cell sizes and for all the stations distributions.

Test 3 – In this case we did not constrain the rupture front in the inversion, that is, no causality constraints are used. The cells are free to slip more than once and the only constraint used is the positivity of the slip rate. The rupture is free to initiate anywhere within the maximum permitted fault area. This is an interesting case, as, in reality, the rupture front

position is unknown and the position of the hypocenter is also often quite uncertain. In order to prescribe the maximum possible rupture area, we fix a reasonable upper limit for the P wave velocity. For the model with 20 and 80 cells we were able to reproduce the results without any additional constraints but for the case with 320 cells we stopped the problem before the minimum misfit value was reached, so as to economize on the computation time. As we increased the number of cells, the computation time needed also increased. The relation between the number of cells and the ℓ_1 -norm misfit is shown in Figure 7. We report for each cell size the misfits for the different configurations. For each configuration we found that the stability of the problem decreases as the number of the cells increases, as was pointed out by Das et al. (1996). Figure 7 shows that for each cell size the Configuration 1 has the lowest value of the misfit.

Test 4 – To stabilize the results for the case with 320 cells we constrained the seismic moment and redid the problem. This reduced the uncertainties in the parameter space and yet the accelerograms were fitted well. Here we are considering a very ideal and simple situation but this demonstrates the necessity of constraints to stabilize the results when using a model with a large number of relatively small cells, as was noted earlier by other authors (Hartzell and Heaton, 1983; Beroza and Spudich, 1988; Das et al., 1996). Clearly using constraints is one way to reduce the the instability of the inverse problem. Next, we shall test if it is possible to reduce the size of the matrix and still reconstruct the rupture process.

Case 2: Inversion using a coarser cell size in the inverse problem than in the forward problem and with random noise added to the artificial data

In order to investigate if we can reproduce the total moment rate history and distribution on the fault with a smaller number of cells (that is, larger cells), than that used in the forward problem to generate the synthetic data (Table 1). The accelerograms used as artificial data are computed up to 1 Hz for a cell of 0.250 Km. The sampling step used is 0.098 s (which corresponds to a Nyquist frequency of 5.12 Hz). This is a reasonably fine discretization for the wavelength of interest in this problem which is 1.2 km. The cell sizes used for the inversion is about 10 times greater in space and time respect to the one used in the forward problem.

The cell size is 2 km, almost double of the wavelength at the depth of the rupture nucleation, and the time step is 0.8 s. We also add some noise to the artificial data. This noise is 5% of the maximum amplitude of the accelerogram at the station, multiplied by a random number.

Test 5 – We fixed the rupture front at its known position and permit the cells to slip only once as the rupture front passes. Even though we reproduced the main features of the solutions, the accelerograms are not perfectly reproduced.

Test 6 – We constrain the slip rate to be positive, the cells are allowed to slip as often as necessary and no causality constraint is used on the rupture front. The solution accelerograms obtained after inversion for Configuration 0 are shown in Figure 8. The fit is good and the small differences observed at the stations in the backward direction of the rupture propagation are due to the fact that the amplitudes there are smaller and hence those stations are fit less well than the stations with larger amplitudes. If one chooses, one may introduce different weighting factors to normalize the amplitude at all stations to the same order of magnitude but we shall not do so here. The waveforms retrieved using Configuration 3 and Configuration 4, that is when the amplitudes of the accelerograms at all the stations used in the inversion are of the same order of magnitude, are showed in Figure 9 and Figure 10. The fits of the waveforms improve relative to that for Configuration 0. The moment release history for this test when using the Configuration 0,1,2,3,4 is illustrated in Figures 11,12,13,14,15. The rupture velocity front used in the forward case is shown in Figure 6. The best solutions are obtained for Configuration 1. This implies that for a thrust fault, it is better to use stations on the hanging wall, than on the foot wall, when of course such a choice exists. Relatively to the inversion for Configuration 4, it was not clear to us if the results were due to the low number of stations used in the inversion or to the particular position of the stations with respect to the fault. Therefore, we have repeated the inversions for Configuration 5 and Configuration 6 (Figure 5) placing four stations in the 'forward direction' with respect to the rupture propagation direction and seven stations in the 'backward direction'. The data obtained from the inversions remain good and the rupturing process is better reproduced for both the configurations. This implies that in the 'backward direction' more stations have to

be used to constrain the solutions than in the 'forward direction'.

Test 7 – We next constrain the seismic moment to the known value, the results being shown in Figures 16,17,18,19,20. The moment rate release pattern is fairly well reproduced for Configurations 0,1,2,3 and no moment is released ahead the rupture front, even though this was not disallowed in the inversion. For Configuration 4 the solutions did not improve relative to the case when the moment was not constrained a priori. The misfit for the different station distributions are plotted in Figure 21(a) for Test 6 and Figure 21(b) for Test 7. The low value of the misfit show that the best station distributions are Configuration 1 and Configuration 6. The values of the misfit for Test 7 (Figure 21b) are larger than Test 6 (Figure 21a). This is due to the presence of the random noise that was added to the artificial data. In Test 6 of this case, the values of the misfit were smaller but this is because there were fewer constraints giving more freedom in the inversion, whereas now with these additional constraints we have restrict the space in which to search for the solution. This is a necessary restriction if we want to be closer to the real physical process. Thus, a stable solution does not correspond always to the actual solution and that means physical constraints are necessary to reproduce the process at the source when an earthquake occurs.

Test 8 – An unwanted aspect of the solution in Test 6 is the small amount of moment released ahead the rupture front. To eliminate this effect we use the weak causality constraint. Grids can slip more than once, the positivity of the slip rate is enforced and the rupture front cannot propagate faster than the P wave velocity. This eliminates the moment release ahead the rupture front but the fit of the accelerograms is worse than before. We show only the accelerograms and the moment rate for Configuration 0 in Figure 22. For the other Configurations the results are similar to that for Test 7.

Case 3: - Inversion using a different structure in the forward and in the inverse model

The effect of using an incorrect velocity structural model or an incorrect fault size and depth has been already studied by Das and Suhadolc (1996) and by Das et al. (1996). Using six stations they were unable to reproduce the rupture front correctly. In addition, they

obtained some systematic release of moment behind the actual rupture front, which they called "ghost front". Here we study the effect of using an incorrect structure in the inversion when a coarser gridding is also used in the inversion and when the artificial data also has some random noise added. We assume the same fault model as before but with a different discretization in the forward and in the inverse case (Table 1). The assumption of the same faulting model (that is, source mechanism, hypocentral depth, etc.) is a strong assumption since in the reality we may not know much about this aspect but we need such a simplification in order to check separately all the different aspects of the problem. The artificial data are computed for a spatial cell size of 0.250 km with a sampling time step of 0.098 s in the medium M1 (Figure 4 solid line). The Green functions used in the inversion are computed for a cell size of 2 km and a temporal step of 0.8 sec. with the structural model M2 (Figure 4 dashed line).

Test 10 – The fault model of the inversion has the same size so that in the forward model and even the top of the fault is placed at the same depth. We fixed the slip rate to be positive and the cells are free to slip as often as necessary. No causality at all is imposed on the rupture front. For all the stations distributions we found that the fit of the accelerograms is poor and even the rupture process is not well reproduced.

Test 11 – The moment value is fixed in the inversion and we used the same fault model as in Test 10. The fit of the accelerograms did not improve and the rupture front is still not well reproduced.

Test 12 – We recomputed the Green functions to be used in the inversion for a fault placed at a depth of 14 km. At this depth the travel times were compatible with those obtained for the forward case. The solutions are not well reproduced even using additional constraints. The fit of the accelerograms is showed in Figure 23 and the slip rate is represented in Figure 24. Some random release of moment can be observed. It is possible to identify the rupture front and no other systematic moment rate release is seen behind or ahead of the rupture front. Fixing the value of moment does not improve the results. Thus, we are unable to reproduce the data and the moment rate release pattern in space and time, when a different

structure is used in the inverse model, inspite of good azimuthal coverage and many more stations (twelve) than is generally available for strong ground motion data. This is the most realistic case however and suggests that at least good structural information at the source is needed to reliably determine the moment release history and distribution on a fault.

Discussion and Conclusions

When solving the inverse problem to obtain the earthquake faulting details, one of the first decisions that has to be made is the best cell size in space and time to be used to discretize the source process. If we take the number of cells to be as small as possible to mimic the real case, the inversion problem is unstable and cannot be solved without using additional physical constraints. Our tests show that a very fine discretization is not recommended for the inversion. Another way to reduce the instability is to reduce the size of the inverse problem by choosing a coarse cells in the discretization. We have shown that using a cell size almost double the wavelength of interest in our problem, we are still able to reproduce the solution of the problem, even when we add a small amount of random noise to the artificial data, provided the source medium structure is known. In this case the station distribution is very important. The results we obtained for a shallow thrust fault show that the best Configuration is when the stations are on the hanging wall. In this case even six stations are enough to get the moment release history and the results are better than in the case when all the twelve stations are used with a very uniform station coverage. These results provides an incentive to install permanent ocean bottom strong ground motion stations in subduction zones.

When the optimal azimuthal station distribution is not available, our results prove that the solutions can be improved by using well-established physical constraints. In this case the effect of the station coverage is reduced. Physical constraints are then necessary to reduce the effect of a less than optimal station coverage. We find that the azimuthal distribution is more important than the number of stations, and even a minimum number of six stations, placed in a favourite position with respect to the fault, are enough to solve the inverse problem. Using six stations but with an uniform azimuthal station coverage, Das and Suhadolc (1996) were not able to reproduce the results as well as we did here for similar cases but using twelve

stations. This means that the number of stations counteracts the effect of the non-optimal azimuthal distribution. Using only four stations even if in the favourable direction relative to the rupture propagation, we got the main aspect of the solution, but our results were not so good as in the case where the four stations were placed in the forward direction with respect to the rupture propagation. This can be explained in terms of the different frequency contents of the two groups of accelerograms. The high frequencies make the waveform more difficult to reproduce with respect to the case when there are mainly low frequencies. This means that the space of the possible solutions is relatively smaller and the possibility to be close to the optimal solution increases. The effect of directivity, which smooths the amplitude of the waveforms at the stations in the backward rupture direction, can be taken into account in real inversions by introducing some weight factor to normalize the amplitude of all the waveforms to the same order of magnitude. This is already done in inversions using teleseismic data.

Finally, we were unable to determine the details of the rupturing process when using a different source medium structure than the correct one even though the overall moment rate release picture can be reconstructed. We do not obtain the "ghost front" that Das and Suhadolc (1996) obtained in their study. This confirms our previous conclusion about the importance of the azimuthal coverage and number of stations that must be used in the inversion. We can state that at regional distances it is difficult to remove or reduce the effect of an incorrect source medium structure even in the case of an uniform station distribution, and hence the proper medium structure in the source region must be first determined before the source process details can be recovered. In many intensively studied regions of the world such as California and Japan, such reliable structure is often available nowadays.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was partially supported by EC program, Environment and Climate, Topic IV.1.1, Natural Risks – Seismic Hazard, under the ENVIRONMENT contracts EN5V-CT94-0513 and ENV4-CT96-0296. The computations were done on the Cray-YMP8 at the Rutherford-Appleton Laboratories, Didcot, UK under a Supercomputing grant obtained through the Natural Environmental Research Council of the U. K. and on the Cray J916/8-1024 at Centro di

REFERENCES

Beroza, G. C. & Spudich, P., 1988. Linearized inversion for fault rupture behavior: application to the 1984, Morgan Hill, California earthquake, *J. Geophys. Res.*, **93**, 6275-6296.

Das, S. & Kostrov, B.V., 1990. Inversion for seismic slip rate and distribution with stabilizing constraints: Application to the 1986 Andreanof Islands earthquake, *J. Geophys. Res.*, **95**, 6899-6913.

Das, S. & Kostrov, B.V., 1994. Diversity of solutions of the problem of earthquake faulting inversion. Application to SH waves for the great 1989 Macquarie Ridge earthquake, *Phys. Earth Planet. Int.*, **85**, 293-318.

Das, S. & Suhadolc, P., 1996. On the inverse problem for earthquake rupture. The Haskell-type source model, *J. Geophys. Res.*, **101**, 5725-5738.

Das, S., Suhadolc, P. & Kostrov, B.V., 1996. Realistic inversions to obtain gross properties of the earthquake faulting process, *Tectonophysics*, Special issue entitled Seismic Source Parameters: from Microearthquakes to Large Events, ed. C. Trifu, in press.

Florsch, N., Fah D., Suhadolc P. and G.F. Panza, 1991. Complete Synthetic Seismograms for High-Frequency Multimode SH-waves. *Pageoph*, **136**, 529-560.

Hwang, P. Y. , 1985. Focal depths and mechanisms of mid-ocean ridge earthquakes from body waveform analysis, Ph. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology. pp 36-39.

Hartzell, S.H. & Heaton, T.H., 1983. Inversion of strong-ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1553-1583.

Hartzell, S. & Liu, P., 1995. Calculation of earthquake rupture histories using a hybrid global search algorithm: Application to the 1992 Landers, California earthquake, *Phys. Earth Planet. Int.*, in press.

Hartzell, S., Stewart, G. S. & C. Mendoza, 1991. Comparison of L_1 and L_2 norms in a teleseismic waveform inversion for the slip history of the Loma Prieta, California, earthquake, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **81**, 1518-1539.

Iida, M., 1993. Source effects on strong-motion records and resolving power of strong-motion arrays for source inversion, *Tectonophysics*, **218**, 179-193.

Olson, A. H. and J. G. Anderson, 1988. Implications of frequency-domain inversion of earthquake ground motions for resolving the space-time dependence of slip on an extended fault, *Geophys. Jour.*, **94**, 443-455, 1988.

Panza, G.F., 1985. Synthetic seismograms: the Rayleigh waves modal summation. *J. Geophys.*, **58**, 125-145.

Panza, G. F. and P. Suhadolc, 1987. Complete strong motion synthetics. In: B. A. Bolt (ed.) *Seismic Strong Motion Synthetics, Computational Techniques 4*, Academic Press, Orlando. pp 153-204.

Satake K., 1985. Effects of station coverage on moment tensor inversion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1657-1667.

Steinberg, D., Rabinowitz, N., Shimshoni, Y. & Mizrachi, D., 1995.

Configuring a seismic network for optimal monitoring of fault lines and multiple sources, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 85, 1847-1857.

Stump, B.W. & Johnson, L.R., 1977. The determination of source properties by the linear inversion of seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 67, 1489-1502.

Figure Captions

Figure 1. Schematic diagram showing possible non-uniform configurations of seismic stations relative to an earthquake fault, based on actual situations. (a) and (b) are vertical cross-sections and (c) is a map view.

Figure 2. Chart giving an overview of all the cases considered in this study. All the tests have been done for all the Configurations (Conf-0, Conf-1, Conf-2, Conf-3, Conf-4) and using different constraints. For all the case the positivity of the slip rate is fixed. Alternatively we fixed the total moment value (MOMENT) or not (NO MOMENT). We use the strong causality (R1, rupture velocity equal to S wave velocity; R1*, rupture velocity equal to 70% of S wave velocity), the weak causality (R2) and not causality at all (R3). The grids are free to slip as often as necessary (MTO) and in some cases we added 5% of random noise to the artificial data (+5% NOISE). When using different structure in the forward and inverse problem we perform the inversion for the same fault depth (S. D.) as in the forward problem, and at a different depth (N.D.) computed in agreement with the travel times of the forward problem.

Figure 3. Fault geometry and the 12-station distribution (Configuration 0) used in this study, shown in plane view. The fault geometry in cross-section is shown in the inset. The star denotes the hypocenter and the triangles the stations. The schematic rupturing model

used in constructing the artificial accelerograms is also shown.

Figure 4. The structural models used in the paper. The solid line shows the structure (M1) used in the forward modelling and in some of the inversions. The dashed line shows another structure (M2) used in other inversions.

Figure 5. The non-uniform station configurations used in this study chosen to mimic actual possible configurations shown in Figure 1.

Figure 6. The input slip rate used in constructing the artificial data and to which the results of the inversion must be compared. The numbers indicate the steps in which the source time function has been discretized.

Figure 7. The instability in the solutions when using different cells sizes. The logarithm of the ℓ_1 - norm value for the different station are plotted against the number of cells on the fault.

Figure 8. The comparison of the artificial data (solid lines) to the solution accelerograms (dotted lines) for Test 6 of Configuration 0.

Figure 9. Same as Figure 8 but for Test 6 of Configuration 3.

Figure 10. Same as Figure 8 but for Test 6 of Configuration 4.

Figure 11. The slip rate maps in time produced by the inversion in Test 6 of Configuration 0.

Figure 12. Same as Figure 11 but for Test 6 of Configuration 1.

Figure 13. Same as Figure 11 but for Test 6 of Configuration 2.

Figure 14. Same as in Figure 11 but for Test 6 of Configuration 3.

Figure 15. Same as in Figure 11 but for Test 6 of Configuration 4.

Figure 16. Same as in Figure 11 but for Test 7 of Configuration 0.

Figure 17. Same as in Figure 11 but for Test 7 of Configuration 1.

Figure 18. Same as in Figure 11 but for Test 7 of Configuration 2.

Figure 19. Same as in Figure 11 but for Test 7 of Configuration 3.

Figure 20. Same as in Figure 11 but for Test 7 of Configuration 4.

Figure 21. The instability of the solutions of the inversions for Test 7, (a) and Test 8 (b).

Figure 22. The slip rate maps in time produced by the inversion in Test 8 Configuration 0.

Figure 23. The comparison of the artificial data (solid lines) to the solution accelerograms (dotted lines) for Test 11 Configuration 0.

Figure 24. The slip rate maps in time produced by the inversion in Test 11 Configuration 0.

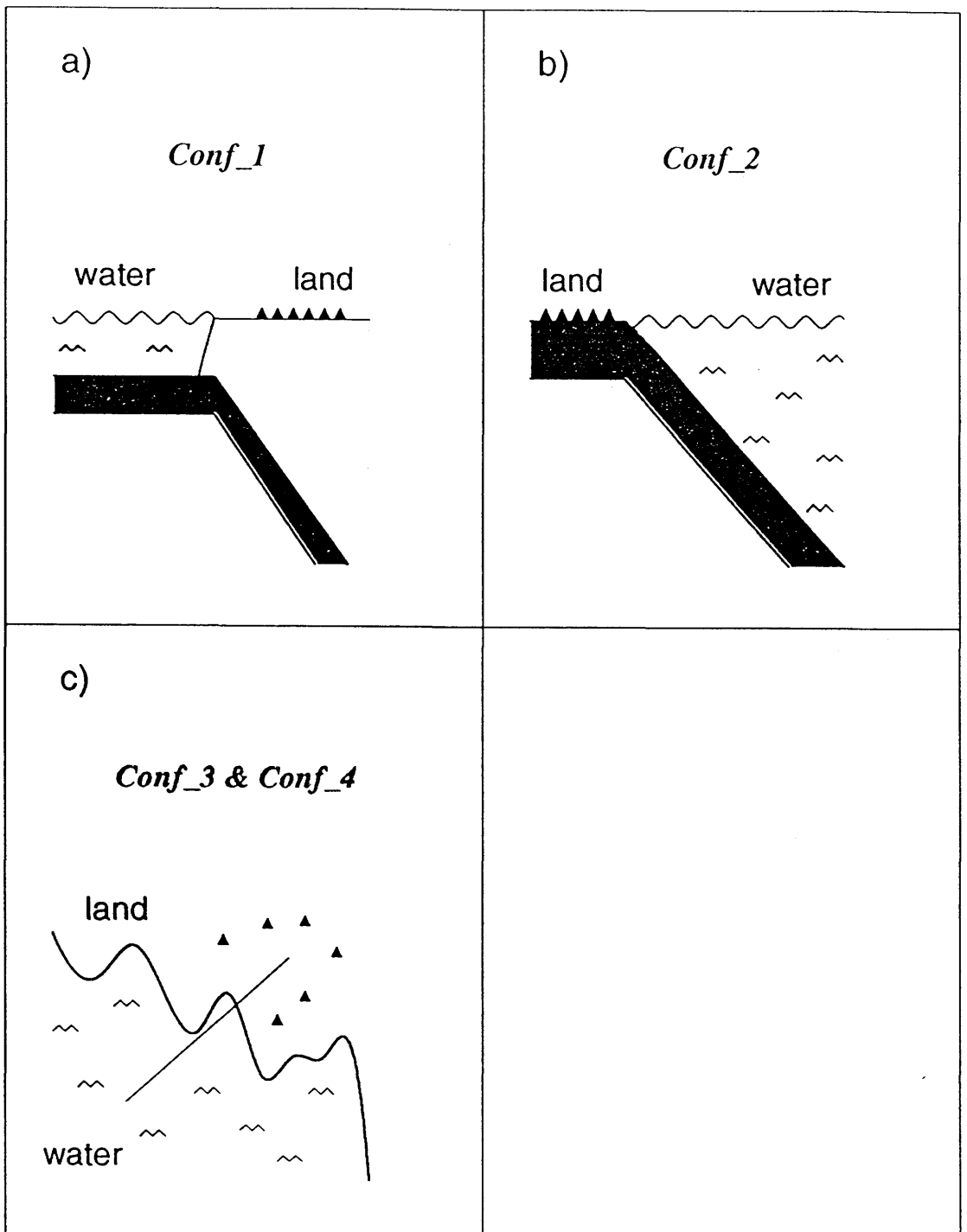


Figure 1

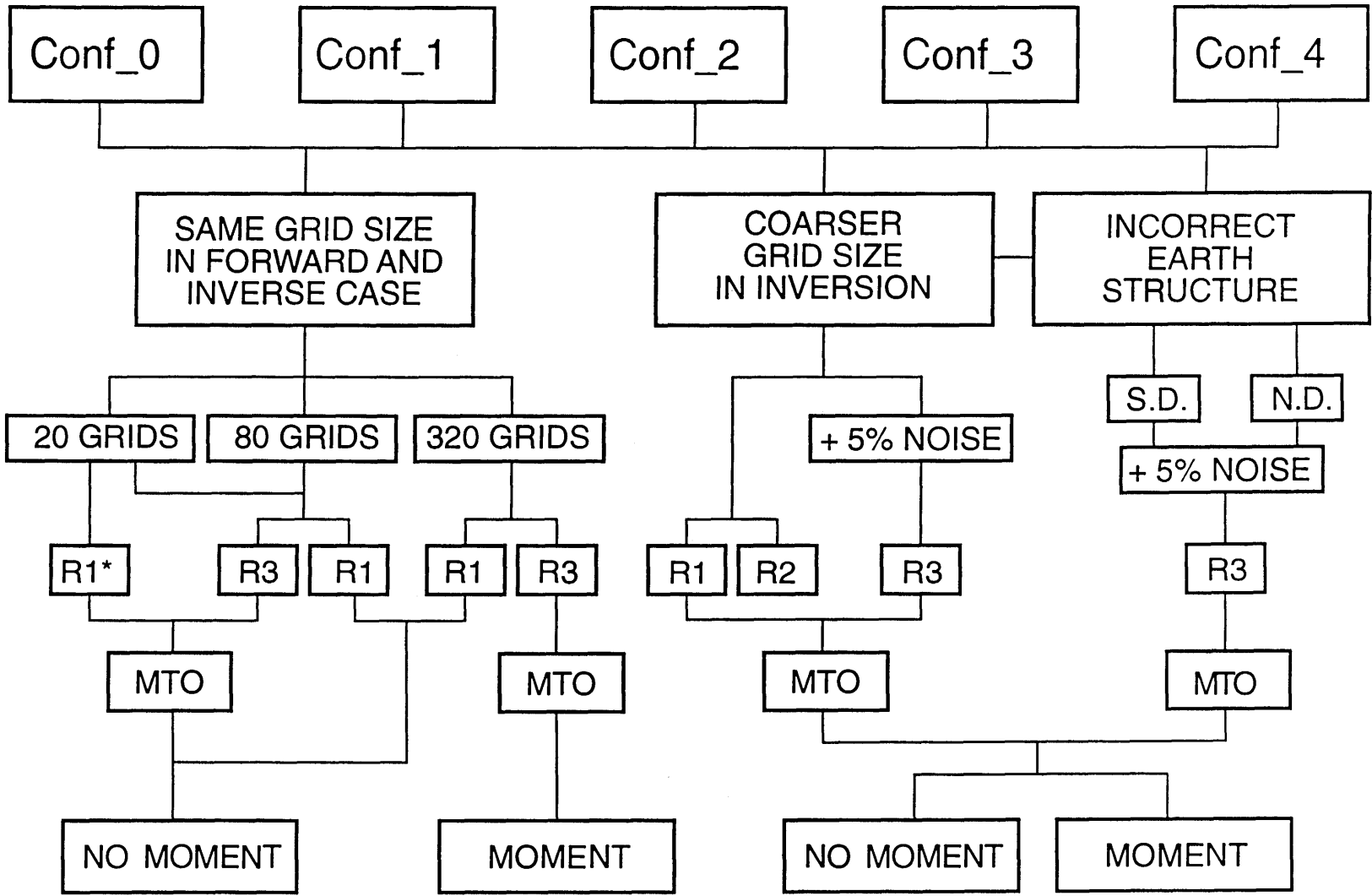


Figure 2

Fault geometry

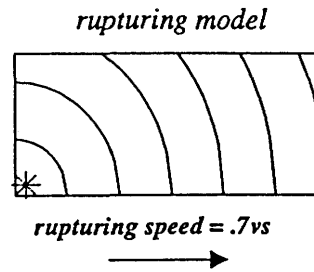
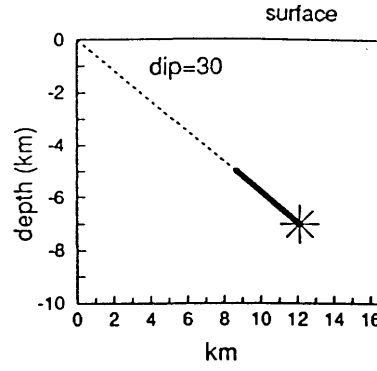
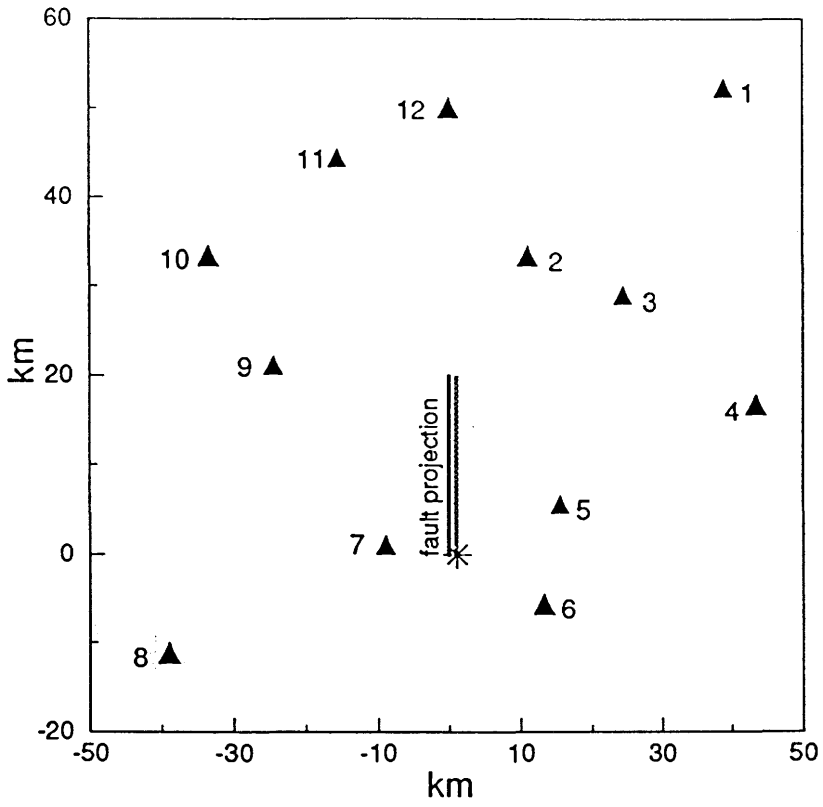


Figure 3

Table 1. Summary of Parameters for Each Station Distribution Studied

Inversion Type	Medium (i)	Top of fault (i)	Δx^1 (f)	Δt^2 (f)	Δx^1 (i)	Δt^2 (i)	nx (f)	nh (f)	nt (f)	nx (i)	nh (i)	nt (i)	Constraints	Noise added	Remarks
Same grid size in forward and inverse case	M1	5	2	.39	2	.39	10	2	24	10	2	24	R1(0.7v _S) R1(v _S), MTO R3,MTO	no no no	All the aspects of the solutions are identically reproduced as the grid size decreases.
	M1	5	1	.39	1	.39	20	4	24	20	4	24	R1(0.7v _S) R3, MTO	no no	
	M1	5	.5	.39	.5	.39	40	8	24	40	8	24	R1(0.7v _S) R3, M	no no	
Coarse grids in inversion	M1	5	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R1(0.7v _S),MTO R1(0.7v _S),MTO, M R2,MTO R2,MTO,M R3,MTO R3,MTO,M	no no no 5% 5%	The fit of the accelerograms is good. The slip rate is well reproduced
Incorrect Earth structure; coarse grids in inversion	M2	5	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R3,MTO R3,MTO,M	5% 5%	Poor solutions.
	M2	14	.25	.1	2	.39	80	16	92	10	2	24	R3,MTO R3,MTO,M	5% 5%	The accelerograms are poorly fitted. The slip rate is better reproduced when all the 12 stations are used.

¹ in km; ² in seconds; f = forward model; i = inverse model; R1: strong causality; R2: weak causality; R3: without causality at all.

Figure 4

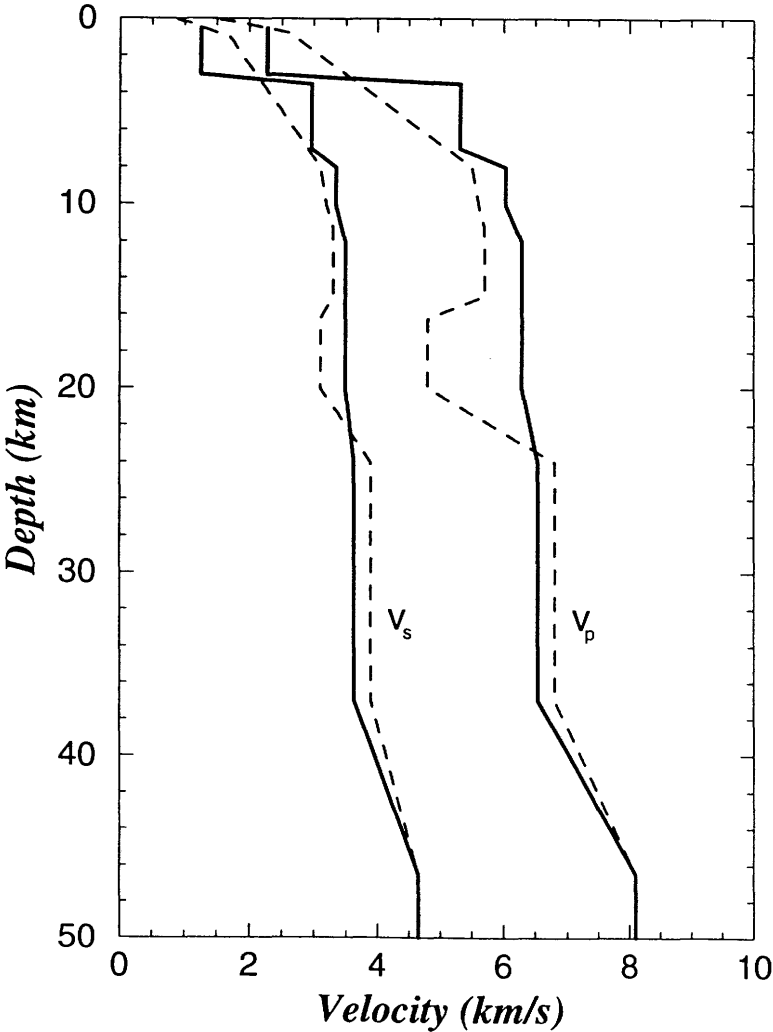


Figure 5

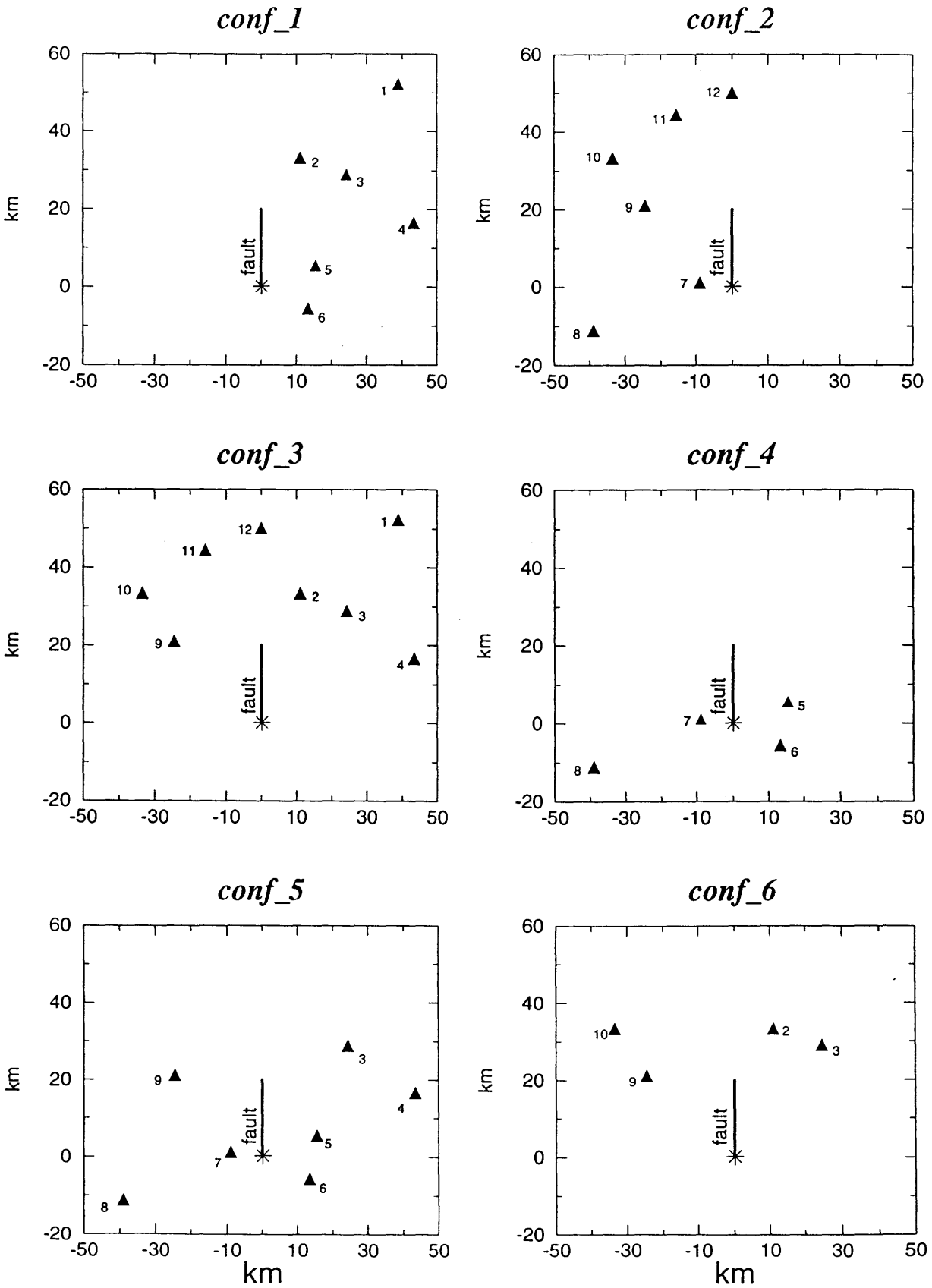


Figure 6

Slip Rate Input into forward model

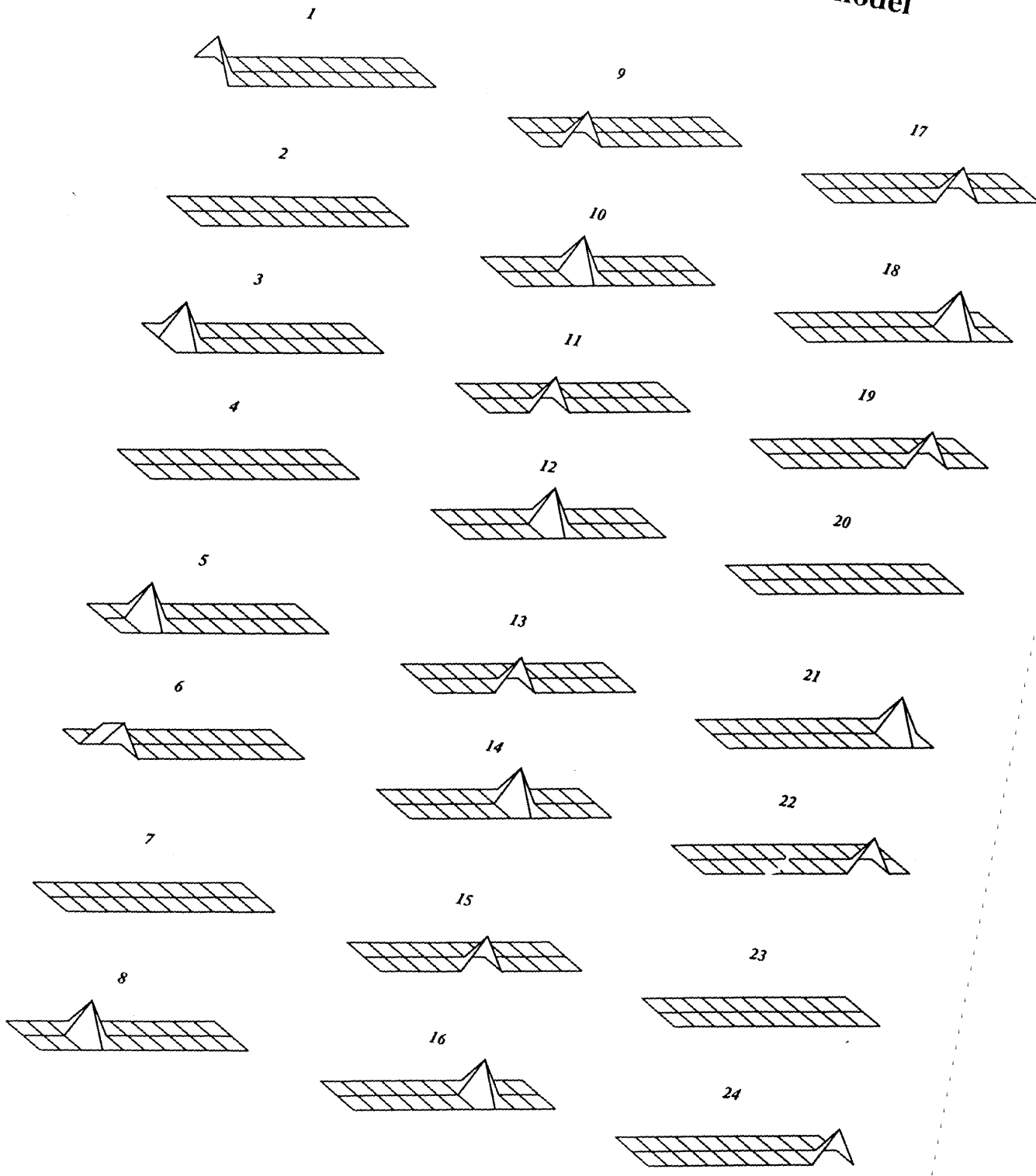


Figure 7

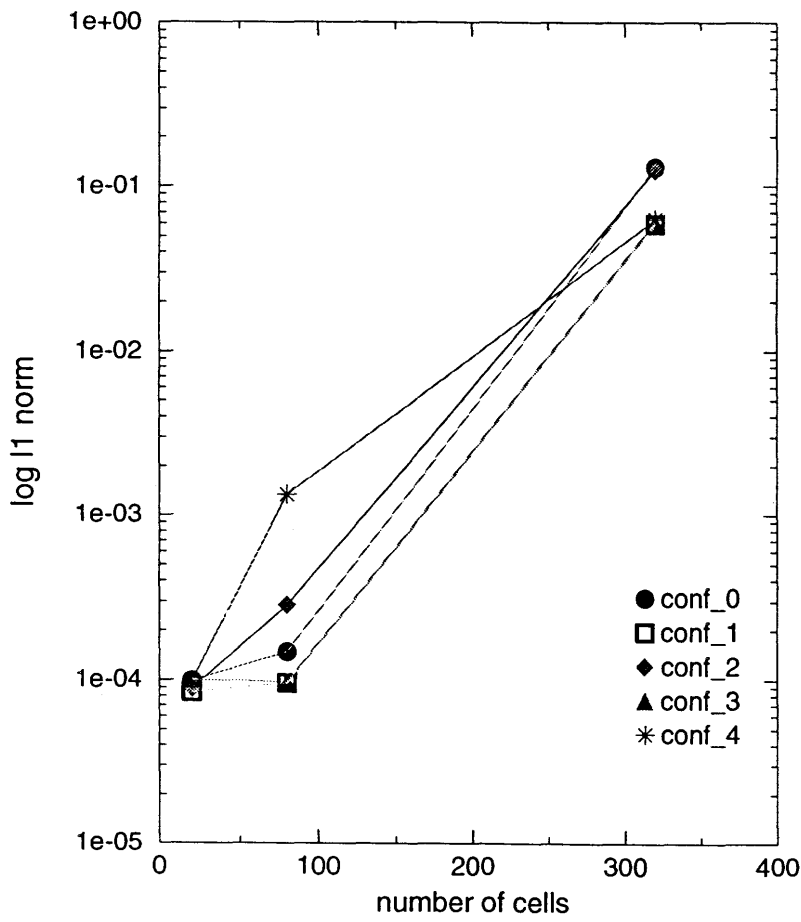


Figure 8

Test 6: configuration 0

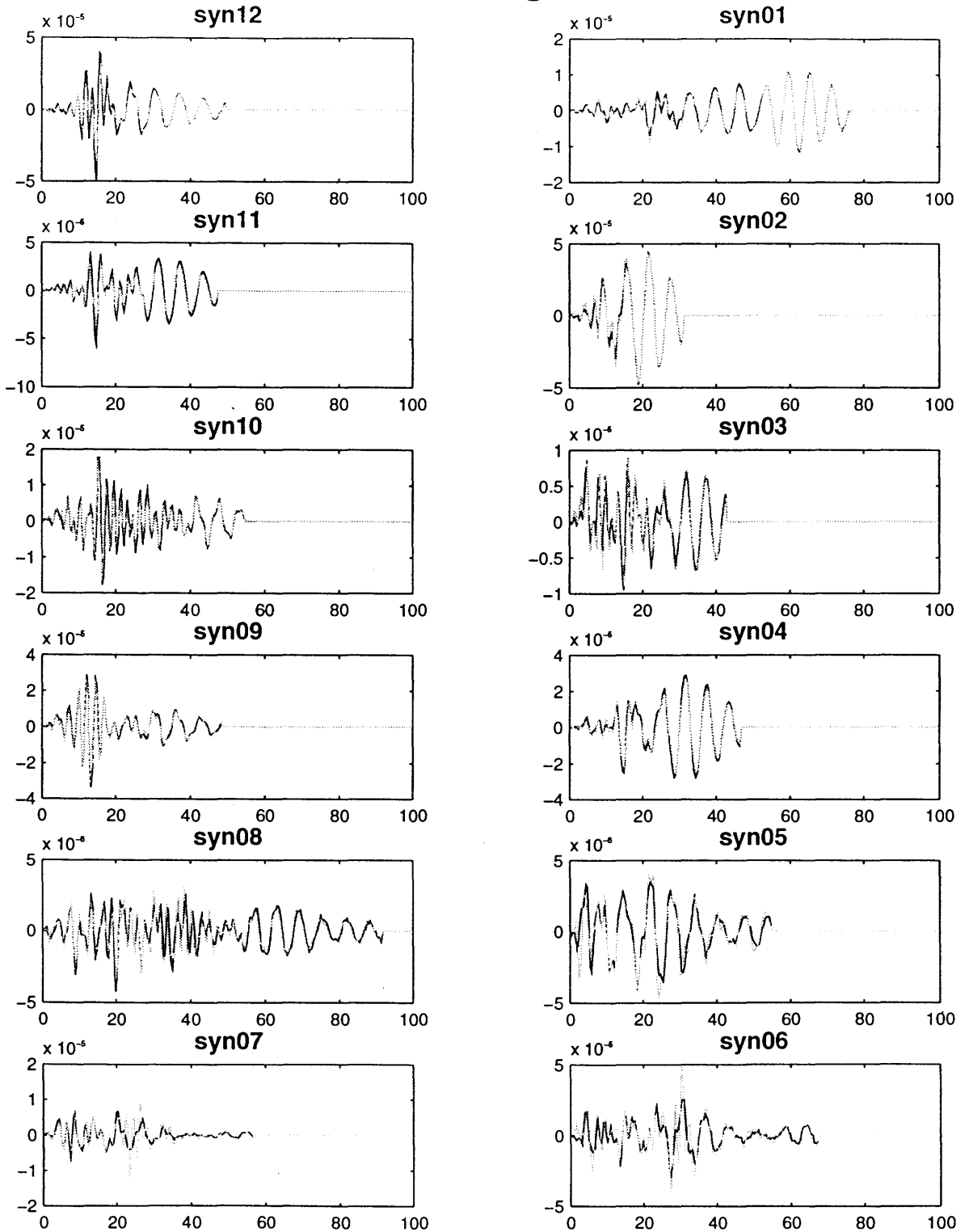


Figure 9.

Test 6: configuration 3

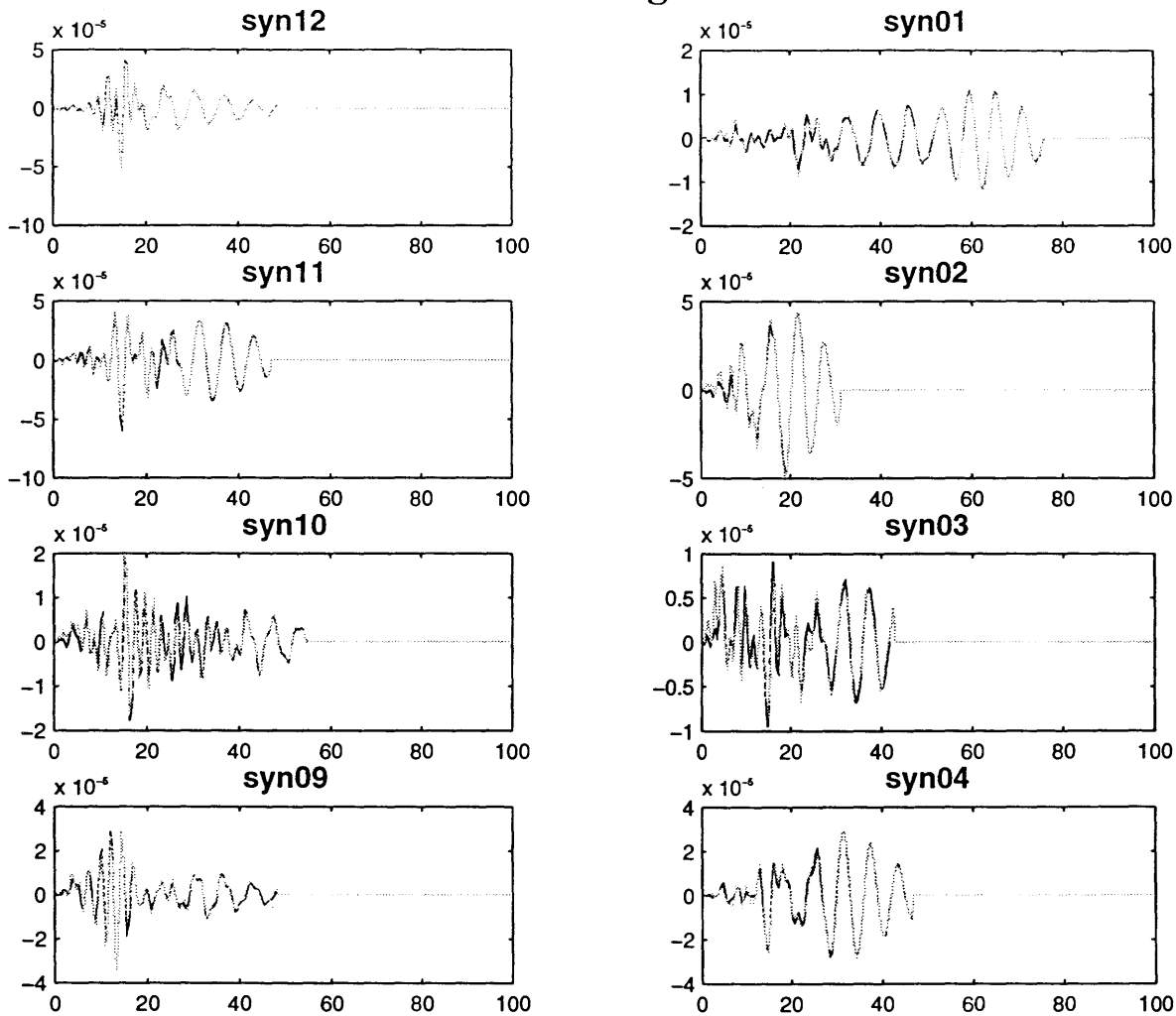


Figure 10

Test 6 : configuration 4

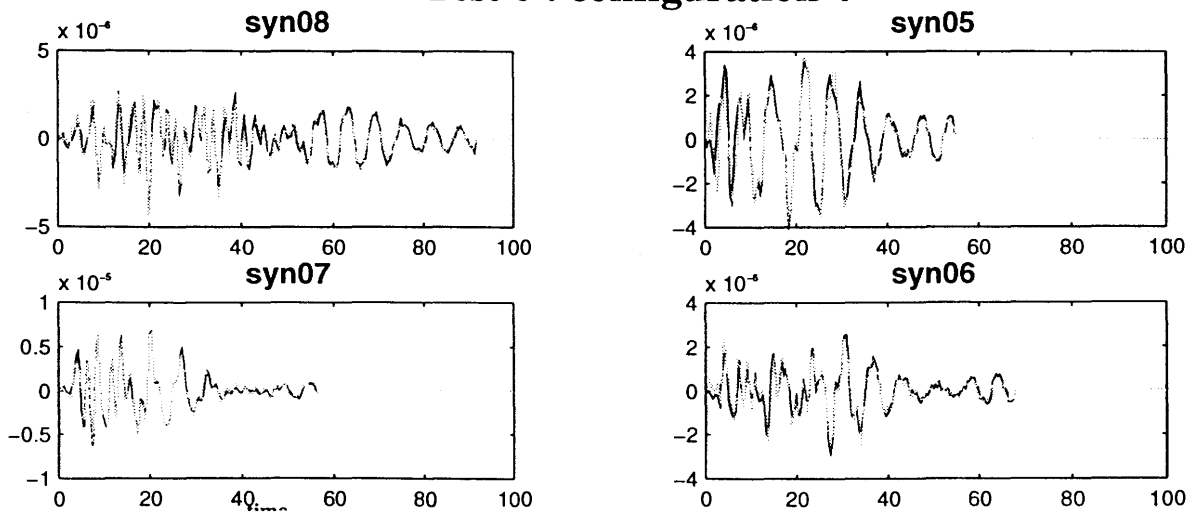


Figure 11

Test 6 : configuration 0

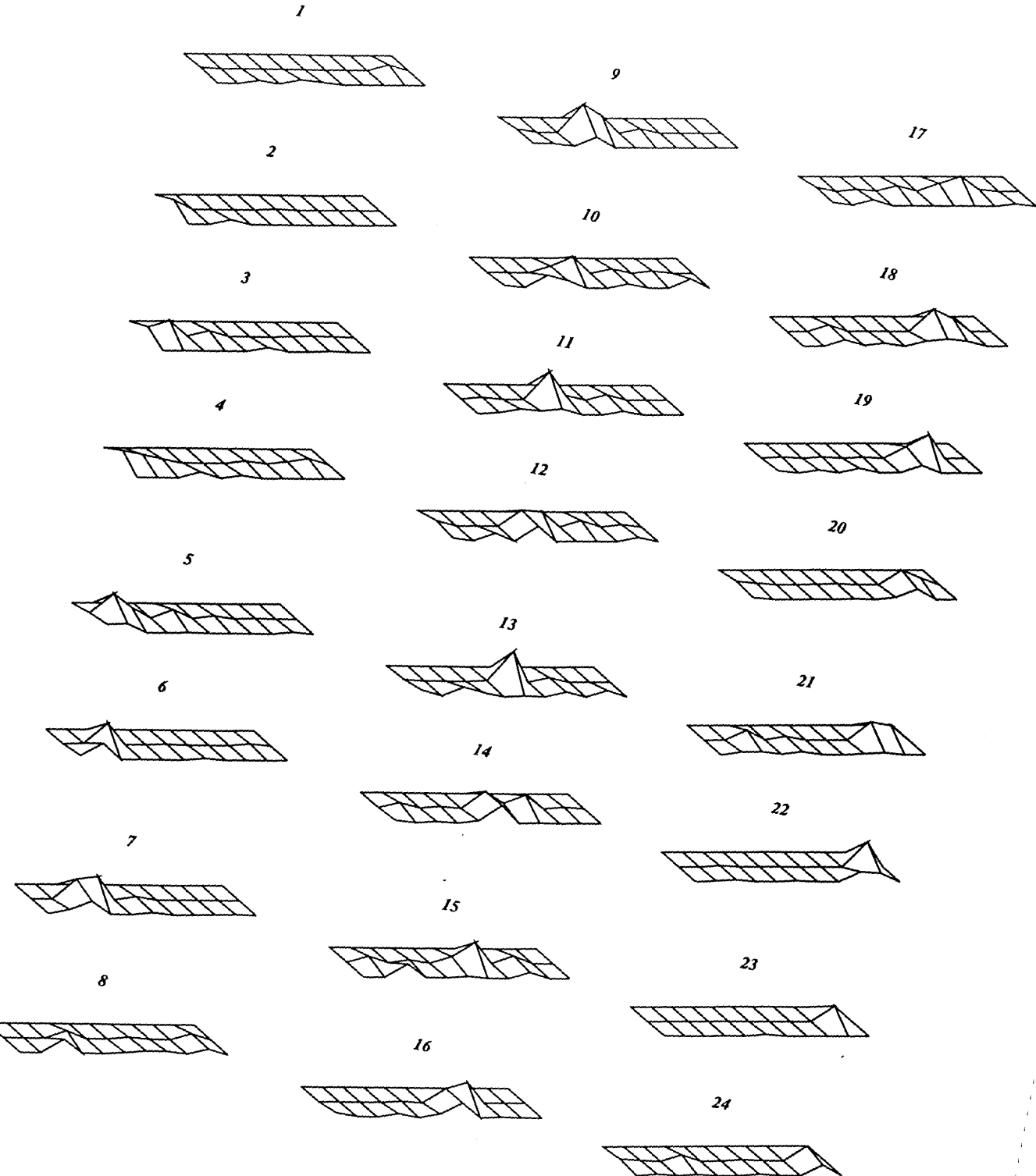
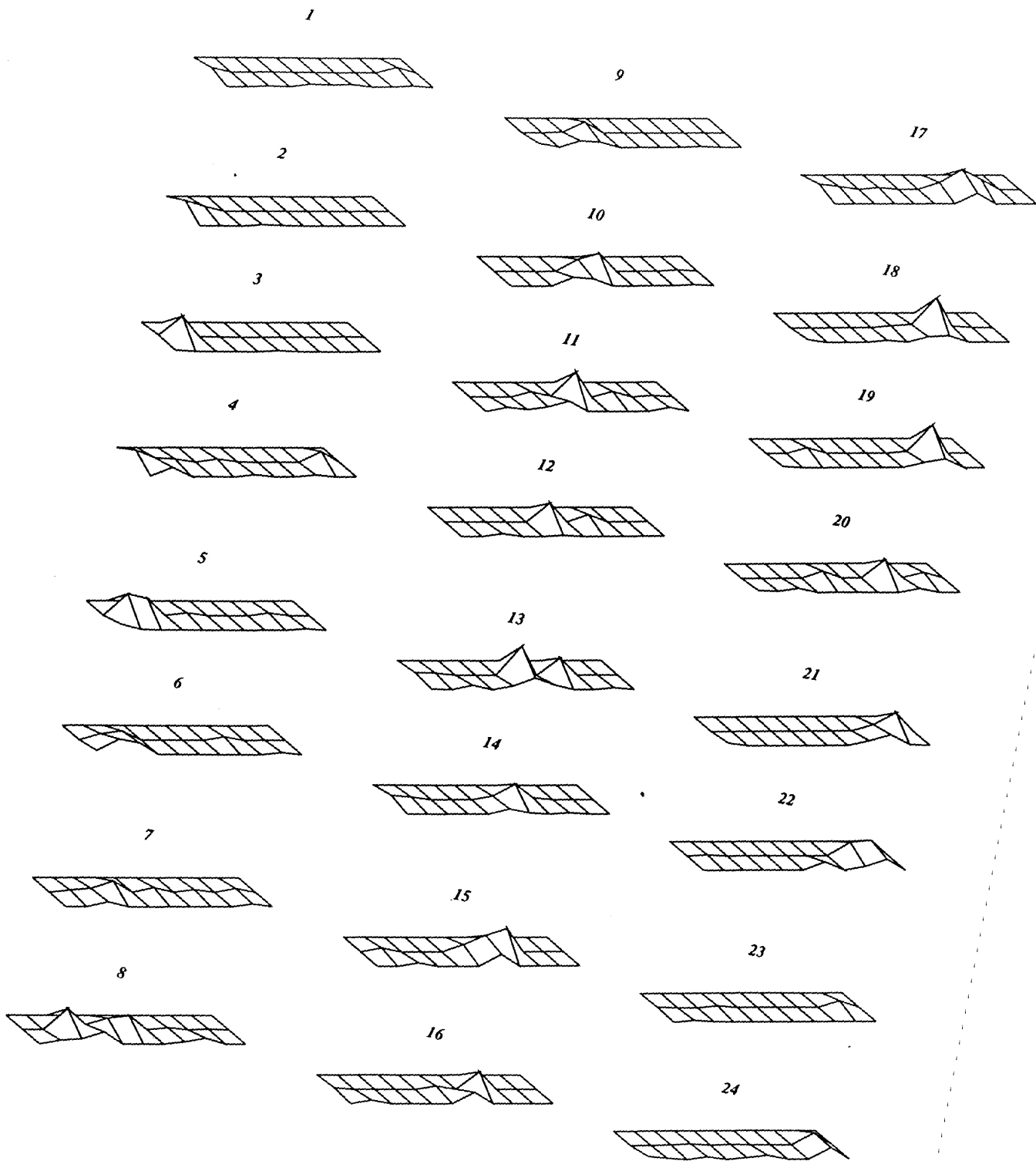


Figure 12

Test 6 : configuration 1



Test 6 : configuration 2

Figure 13

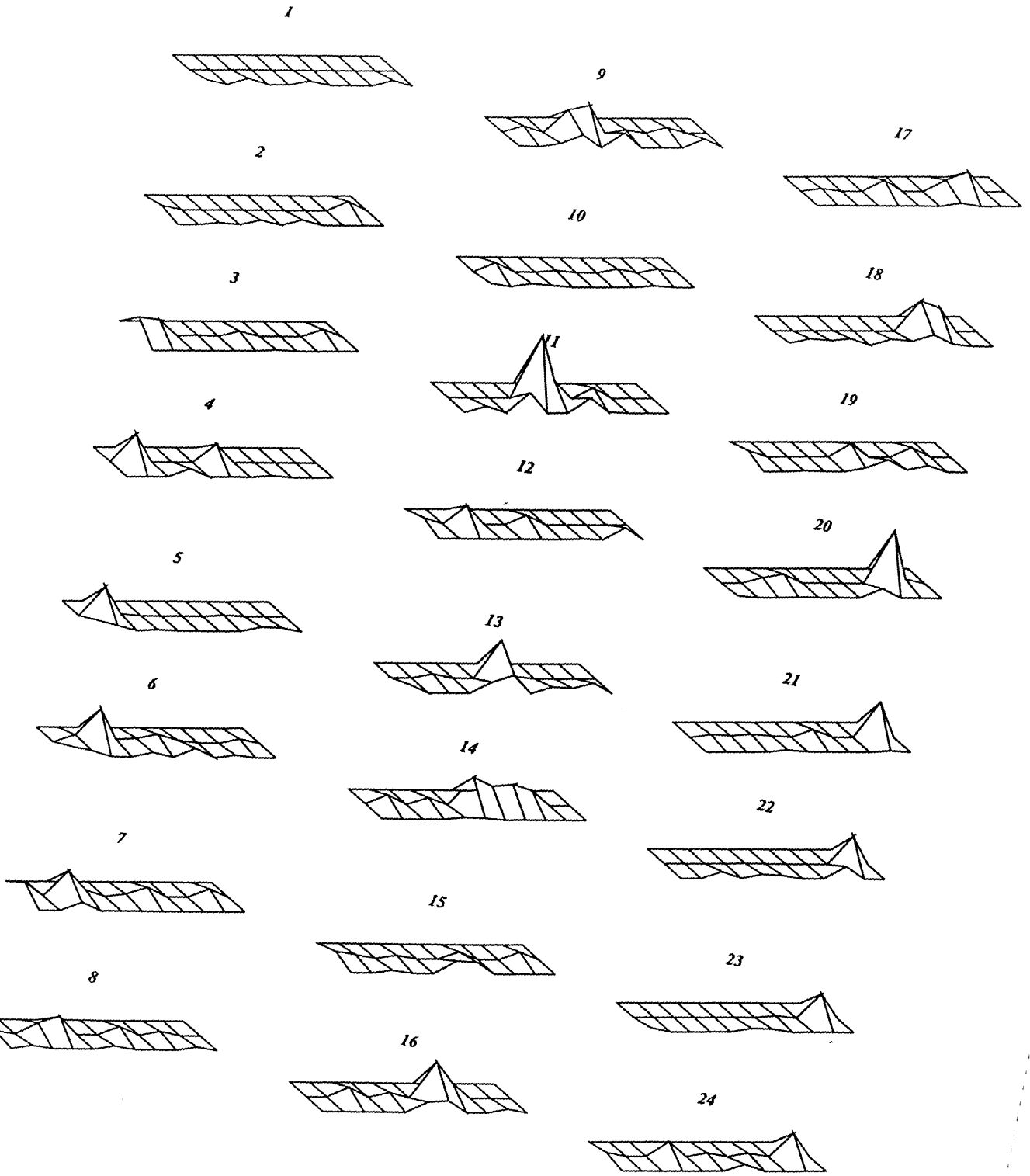


Figure 14

Test 6 : configuration 3

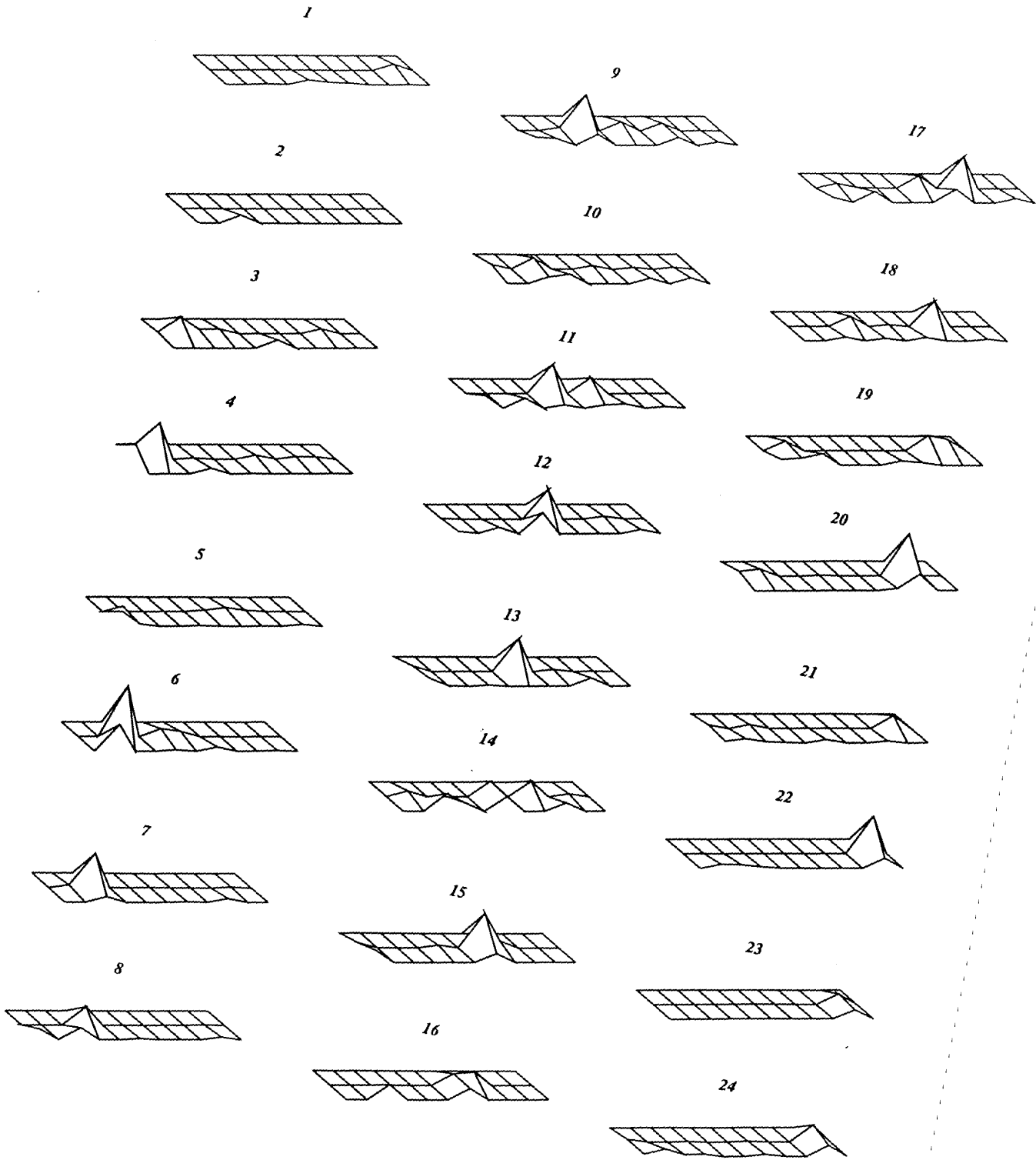


Figure 15

Test 6 : configuration 4

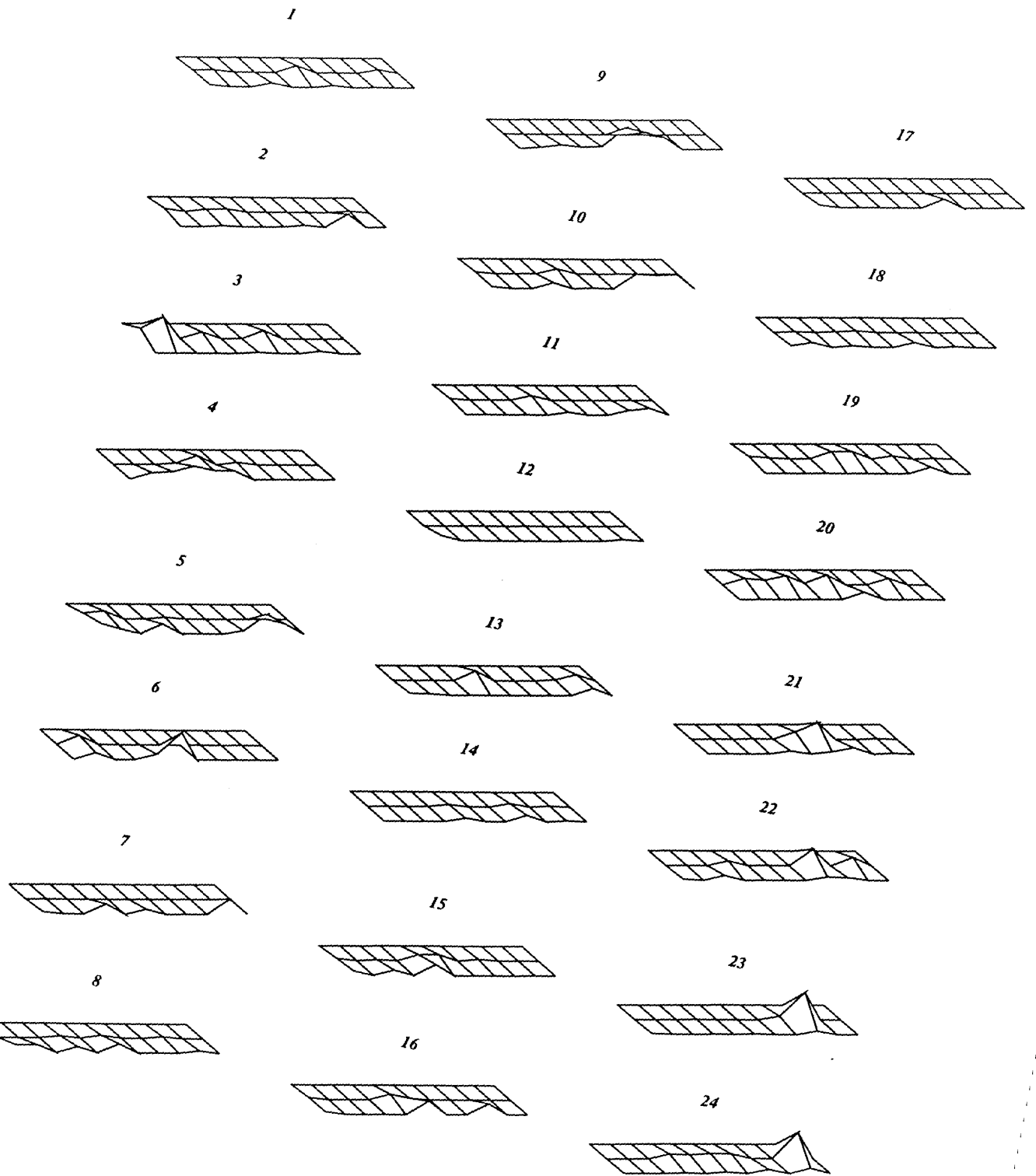


Figure 16

Test 7 : configuration 0

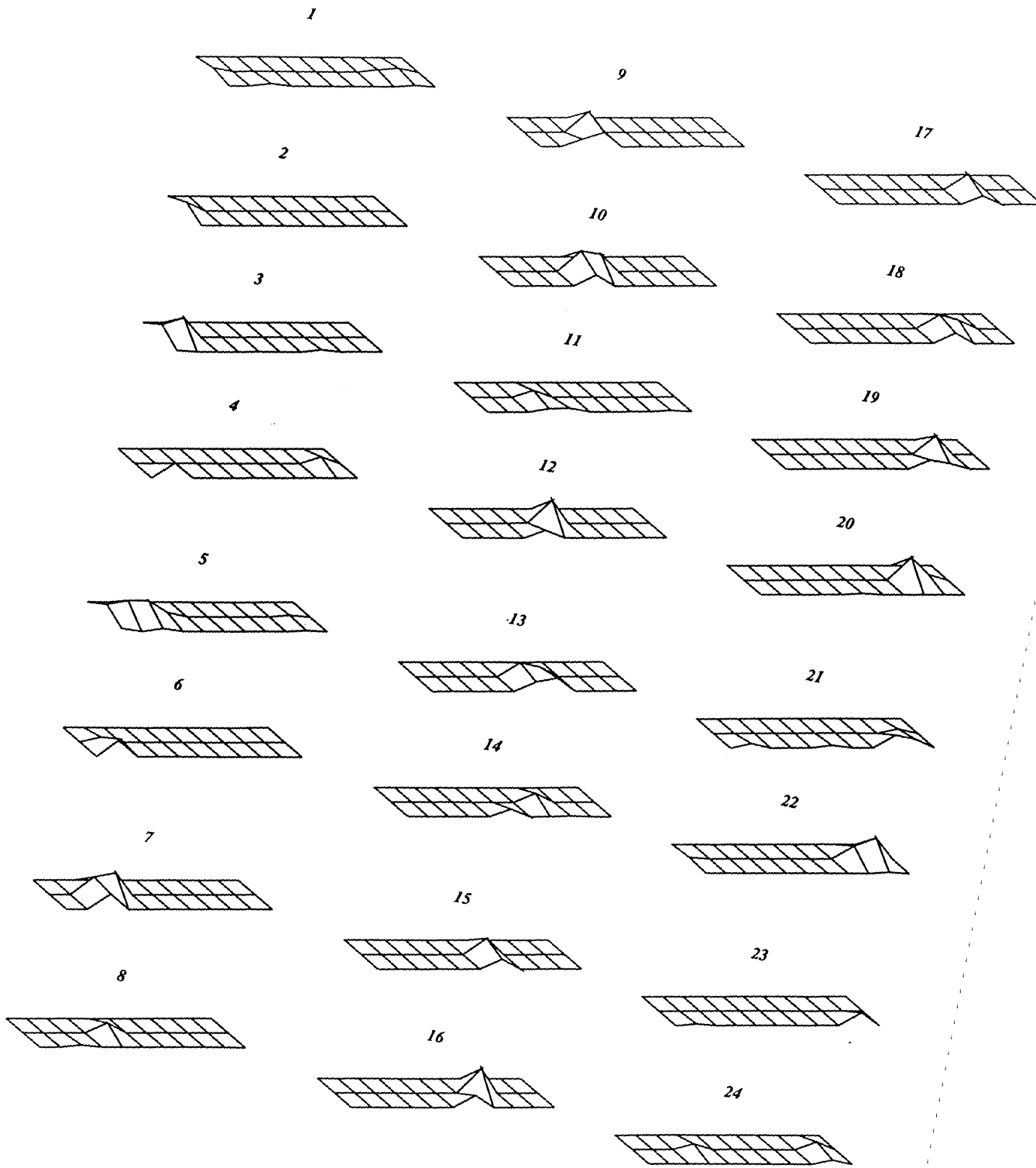


Figure 17

Test 7 : configuration 1

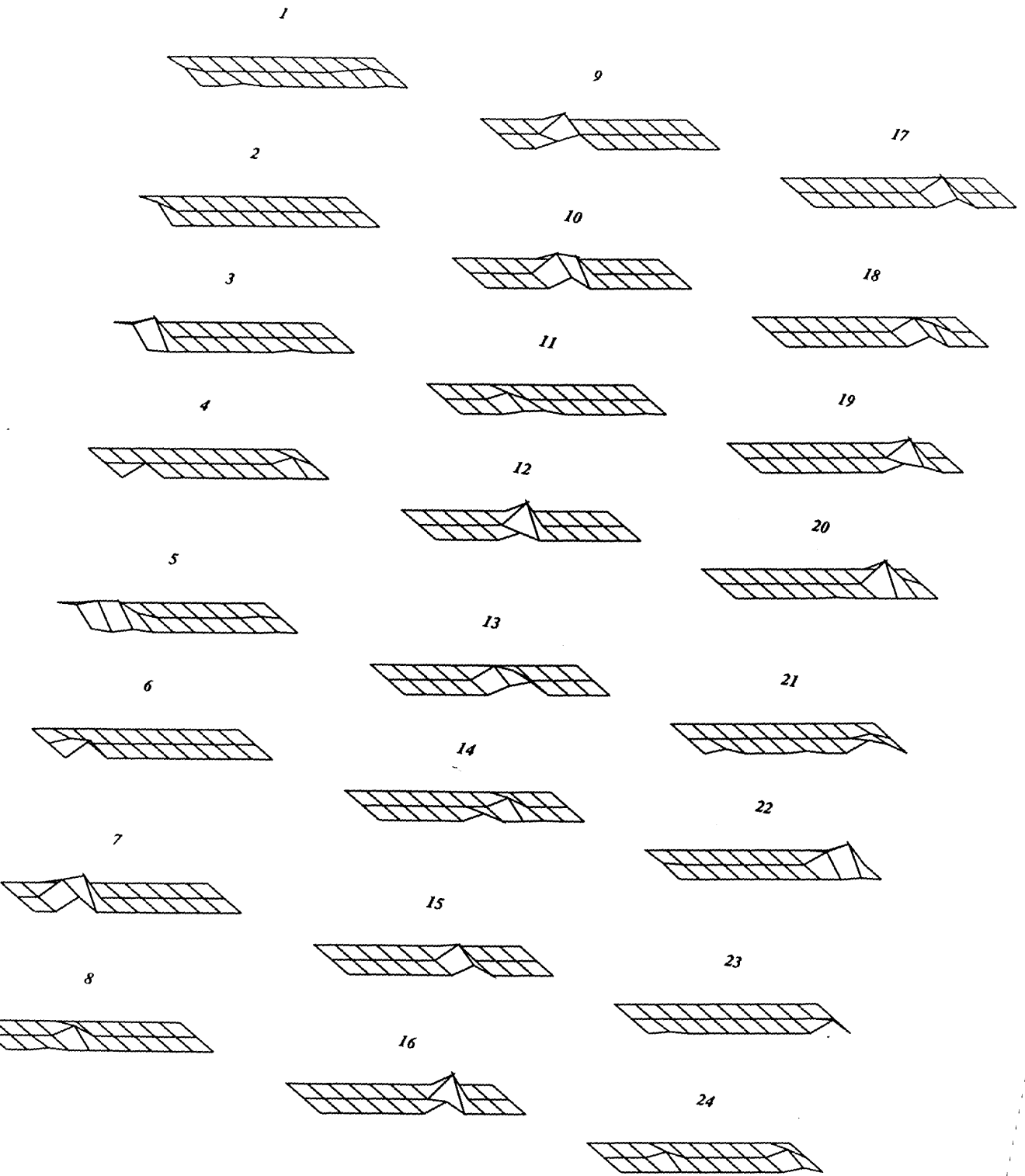
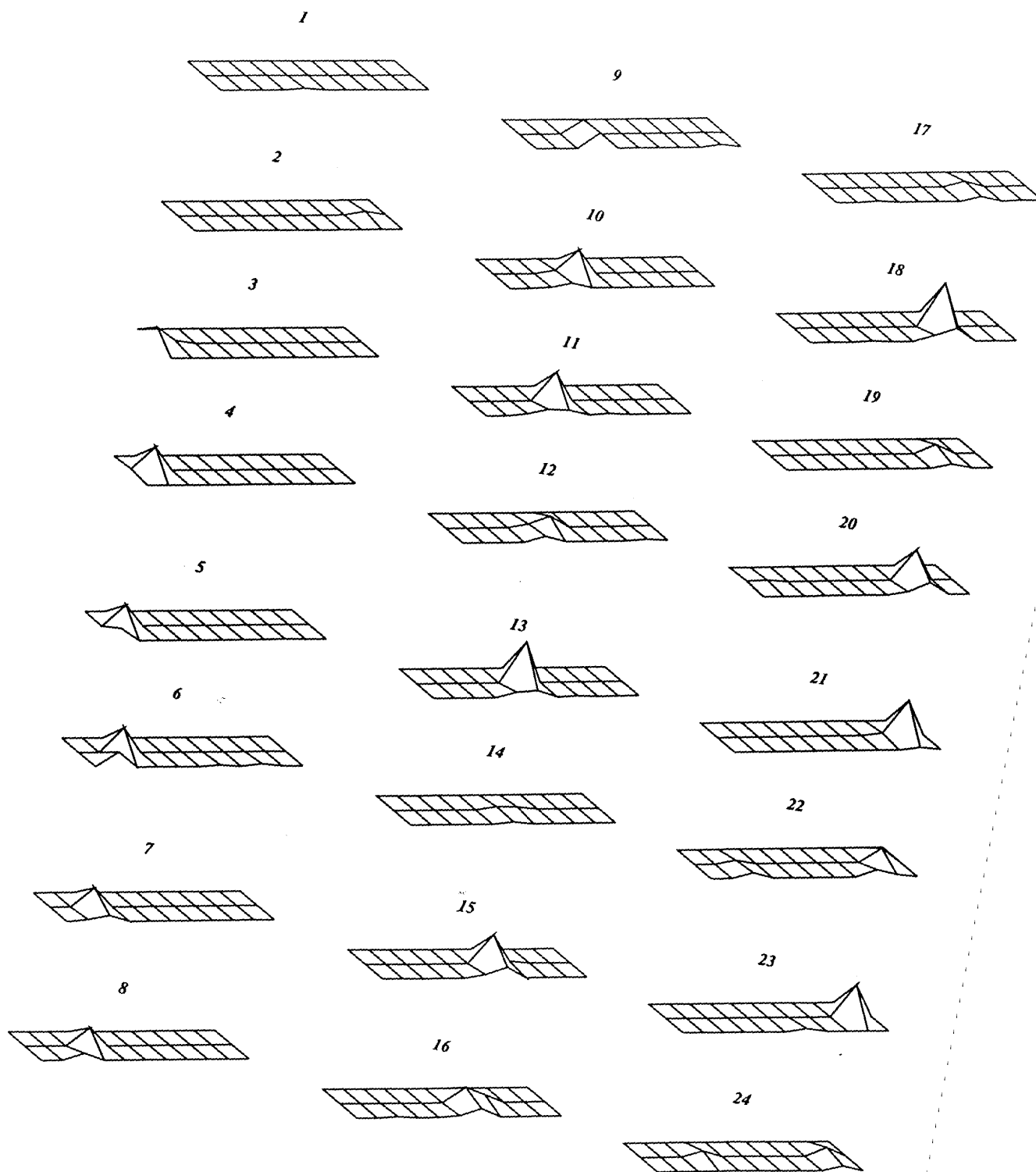


Figure 18

Test 7 : configuration 2



Test 7 : configuration 3

Figure 19

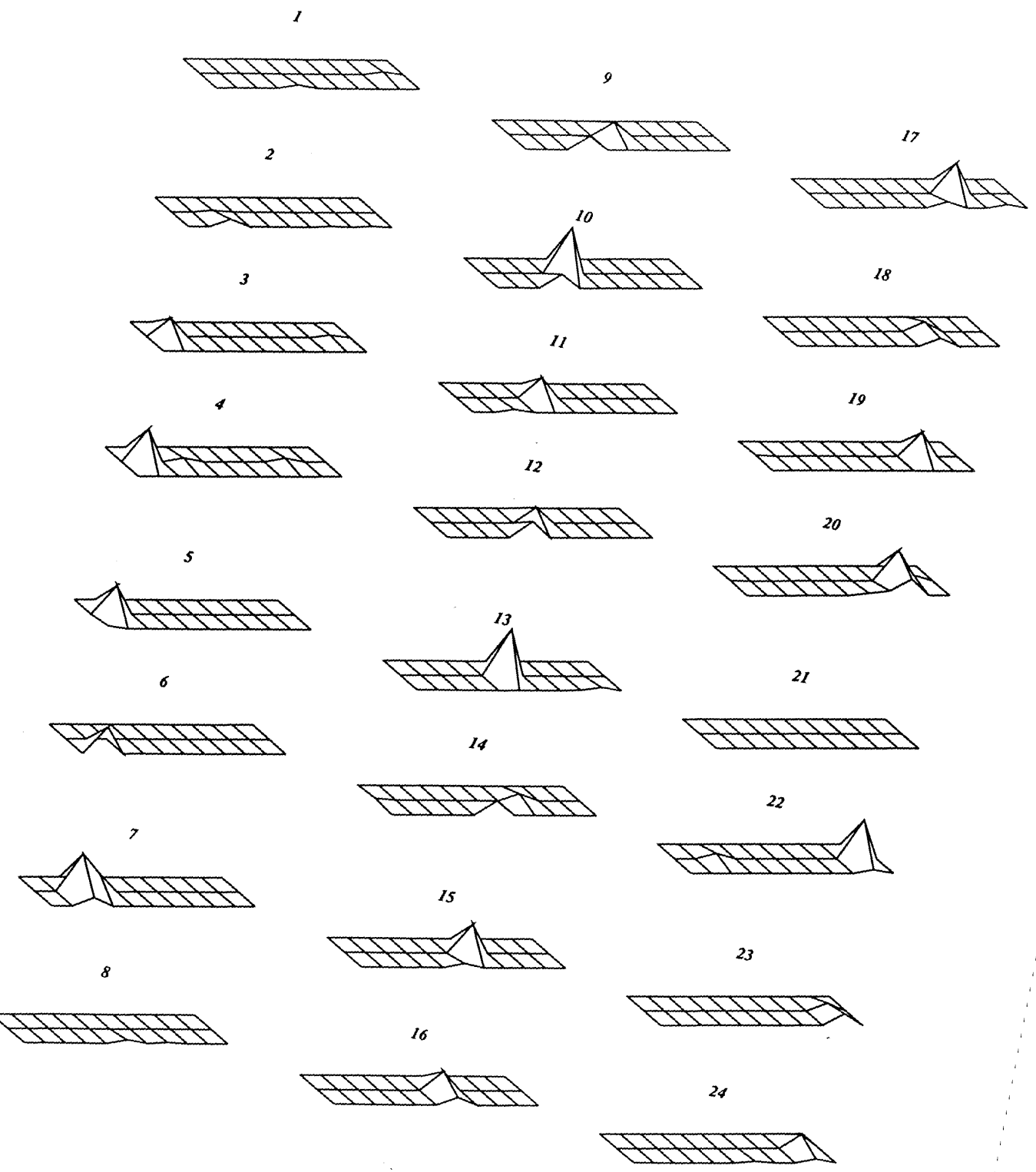


Figure 20

Test 7 : configuration 4

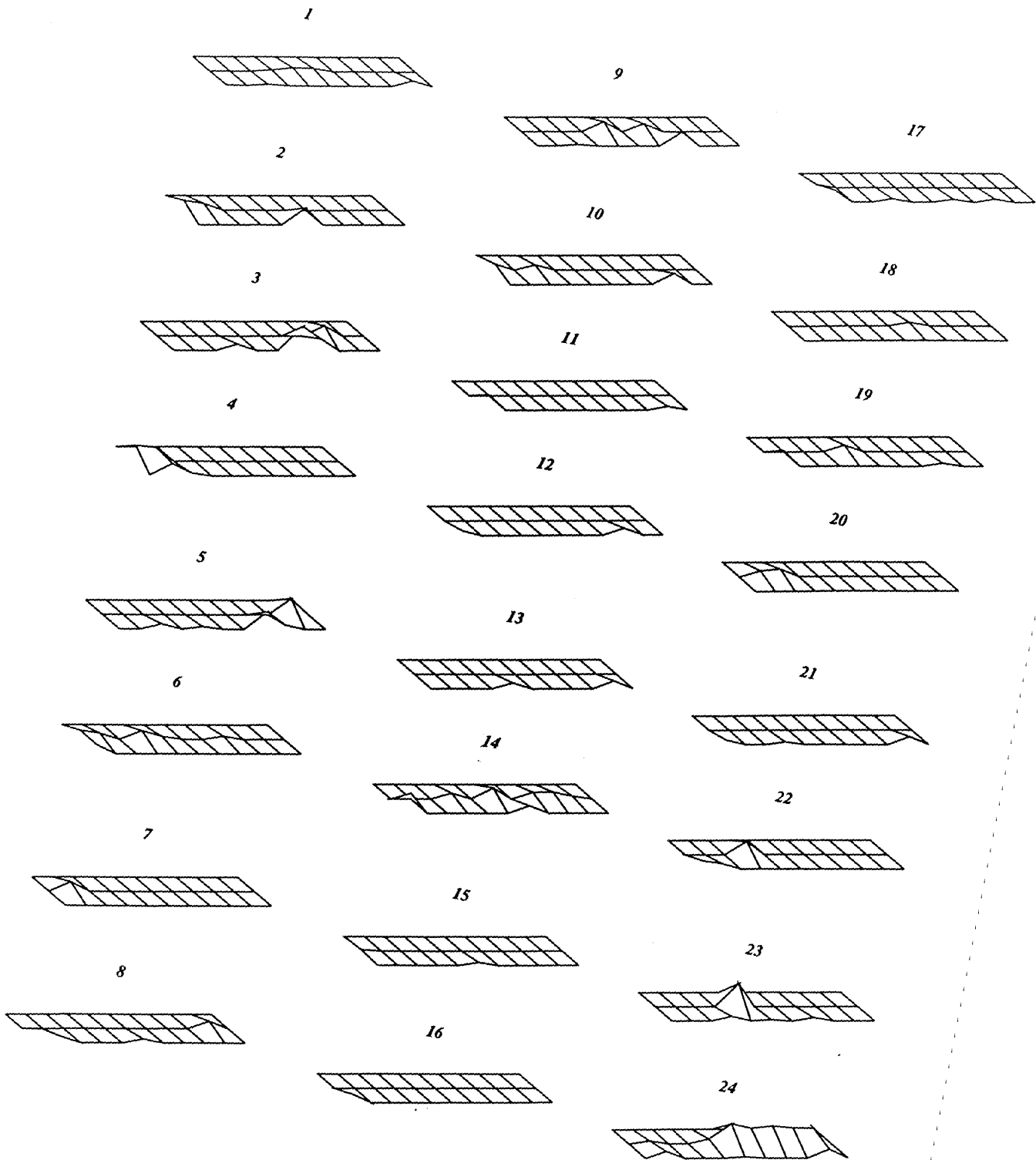


Figure 21

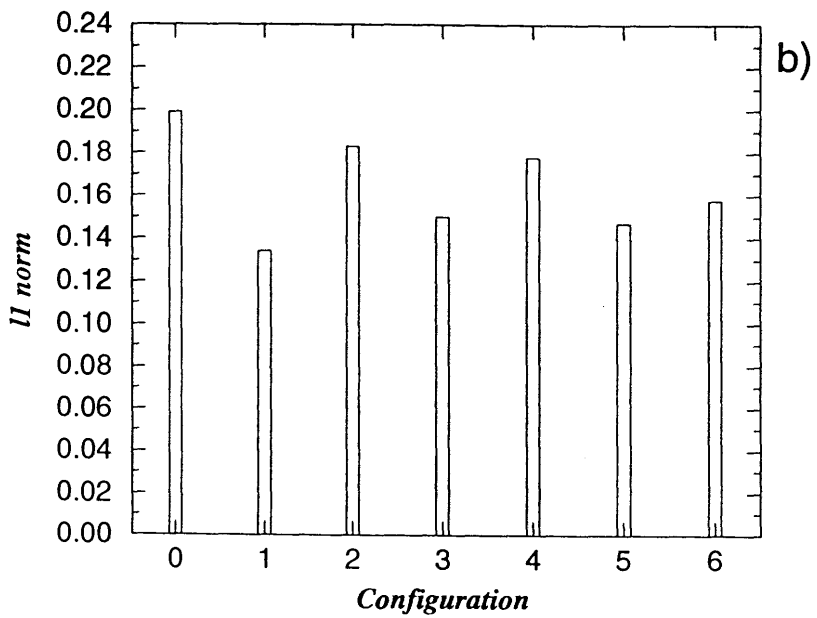
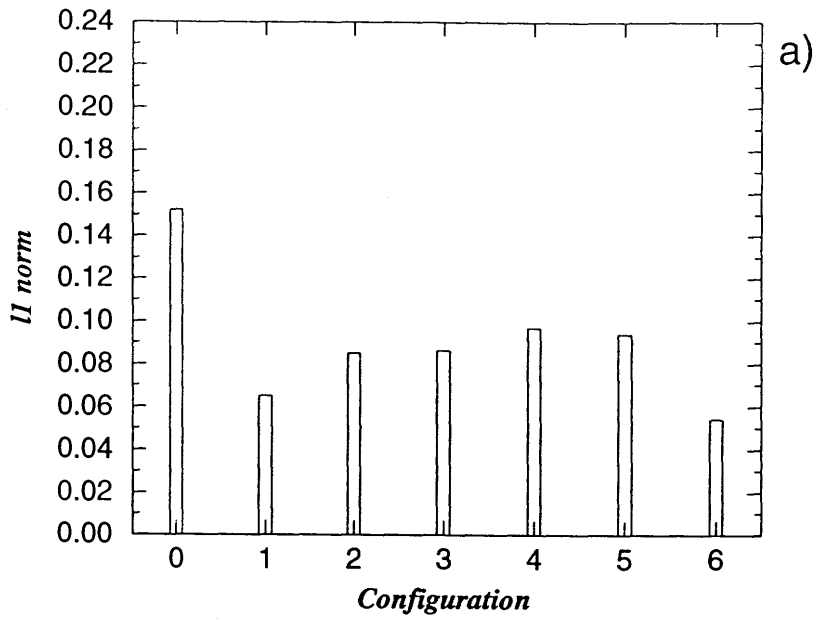


Figure 22

Test 8 : configuration 0

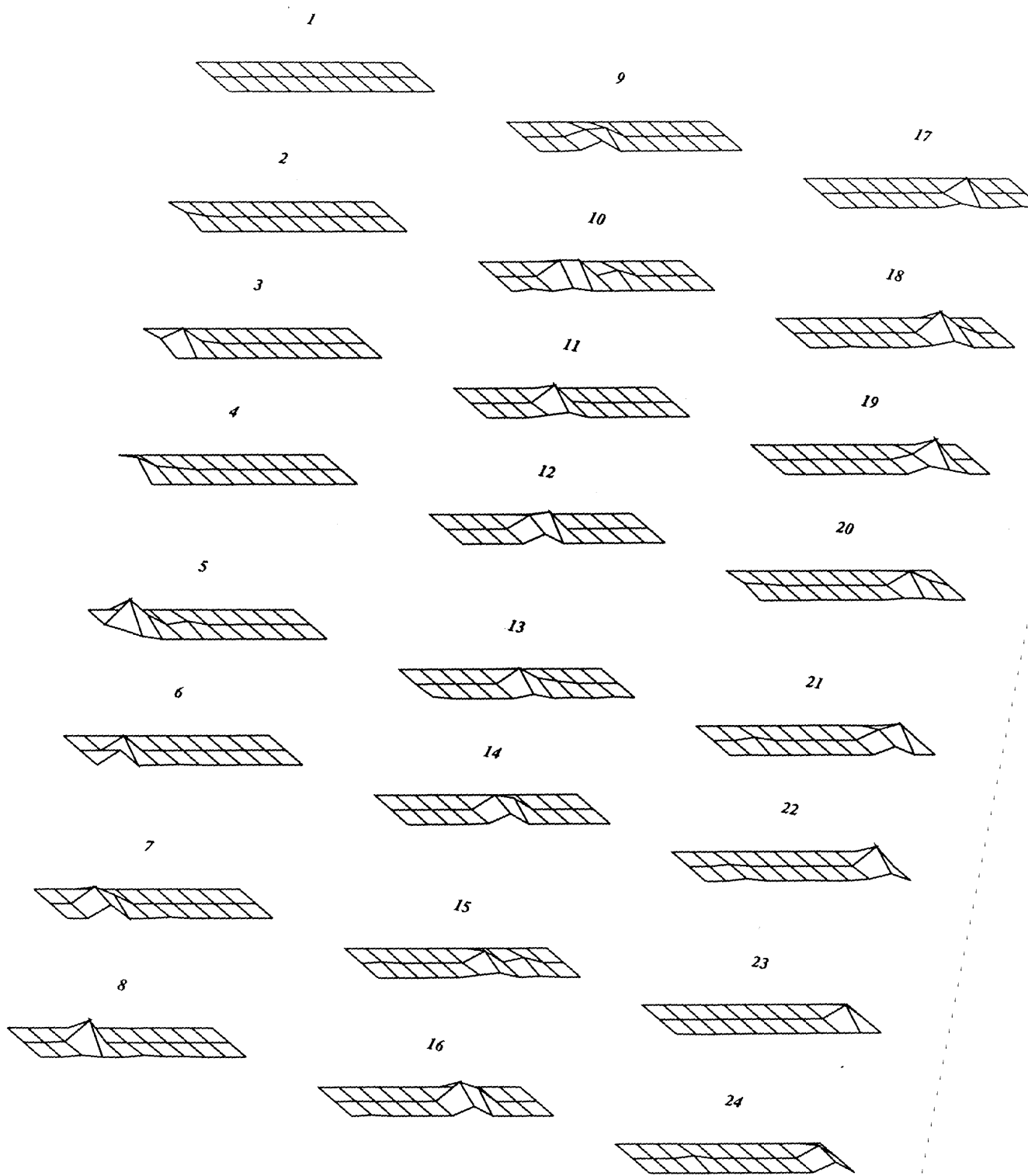
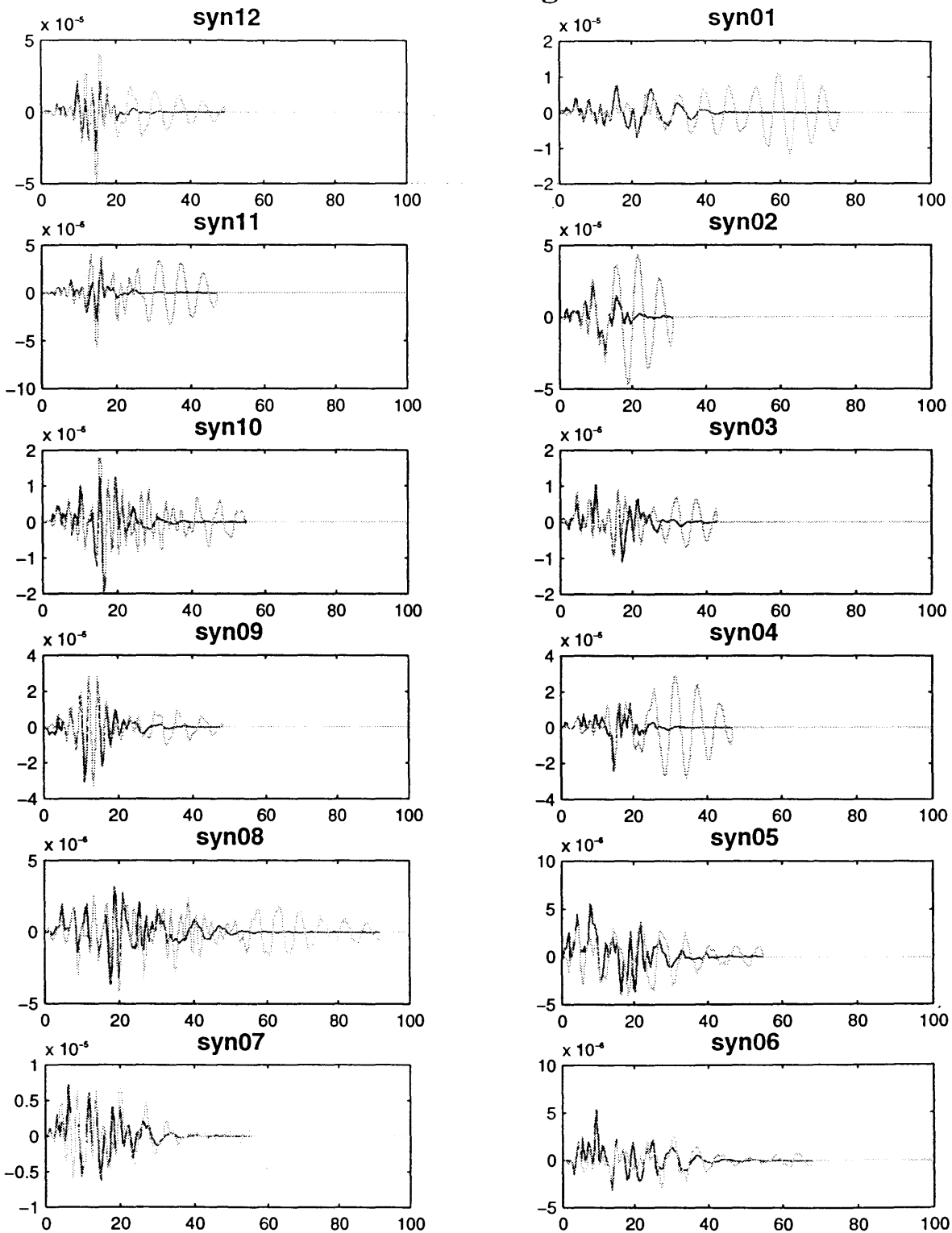


Figure 23

Test 12 : configuration 0



Test 12 : 12 stations

Figure 24

